



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций
сертифицирована DQS по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт информационных технологий и коммуникаций

Кафедра высшей и прикладной математики

Алгебра и геометрия

Методические указания к практическим занятиям

Для обучающихся по направлению

09.03.03 Прикладная информатика

Профиль подготовки

Прикладная информатика в экономике

Автор(ы): Франгулова Е.В.

Рецензент: Шамайло О.Н.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Алгебра и геометрия» утверждены на заседании кафедры «Высшей и прикладной математики» «31» августа 2022 г., протокол № 7.

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий	Трудо- емкость (час.)
1	1	Основы работы в Mathcad. Действия над матрицами. Вычисление определителей. Способы нахождения обратной матрицы. Методы вычисления ранга матрицы	6
2	2	Исследование и решение систем линейных уравнений. Метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса	6
3	3	Векторы и линейные операции над ними. Координаты вектора в заданном базисе. Сложение векторов и умножение вектора на число в координатах. Признаки коллинеарности и компланарности векторов в координатах. Системы координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	6
4	4	Уравнения прямой на плоскости. Эллипс, его уравнения и свойства. Гипербола, ее уравнение и свойства. Парабола. Уравнение параболы и основные свойства	6
5	5	Уравнения прямой в пространстве. Уравнения плоскости. Поверхности второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический конус, цилиндрические поверхности, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид	4
6	6	Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраическая, тригонометрическая формы записи комплексного числа. Операции над комплексными числами	4
7	7	Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Нахождение базиса и размерности векторного пространства. Линейные преобразования векторных пространств. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования. Квадратичные формы	4

Практическое занятие №1

Основы работы в Mathcad. Действия над матрицами. Вычисление определителей. Способы нахождения обратной матрицы. Методы вычисления ранга матрицы

Задание 1. – изучите информацию по работе в математической среде MathCad, приведенную ниже.

MathCAD является математическим редактором, позволяющим проводить разнообразные математические и научные расчеты, начиная от элементарной арифметики

и заканчивая сложными арифметическими вычислениями. Пользователь получает возможность просто и наглядно в привычной для математика форме вводить с помощью редактора формул математические выражения и тут же получать результат.

В число выполняемых действий входит:

- ввод математических выражений,
- проведение различных расчетов,
- подготовка графиков различных результатов вычислений,
- ввод данных из внешнего файла,
- ввод данных во внешний файл,
- оформления веб-страниц,
- предоставление доступа к справочному материалу по математике.

Краткое описание элементов интерфейса

MathCAD имеет стандартный интерфейс *Windows*.

- Строка меню.
- Строка инструментов.
- Строка форматирования.
- Рабочая область.
- Строка состояния.
- Всплывающее или контекстное меню (нажимается правая кнопка мыши), содержание зависит от места вызова.

- Панель инструментов **Математика** и доступные из нее инструменты.

Среди особых элементов интерфейса следует отметить панель инструментов **Математика** (рис.1). Эта панель служит для доступа к панелям инструментов, обеспечивающих вставку математических вычислений или символов. При необходимости панели инструментов можно установить: **View – Toolbars – v Resources**.

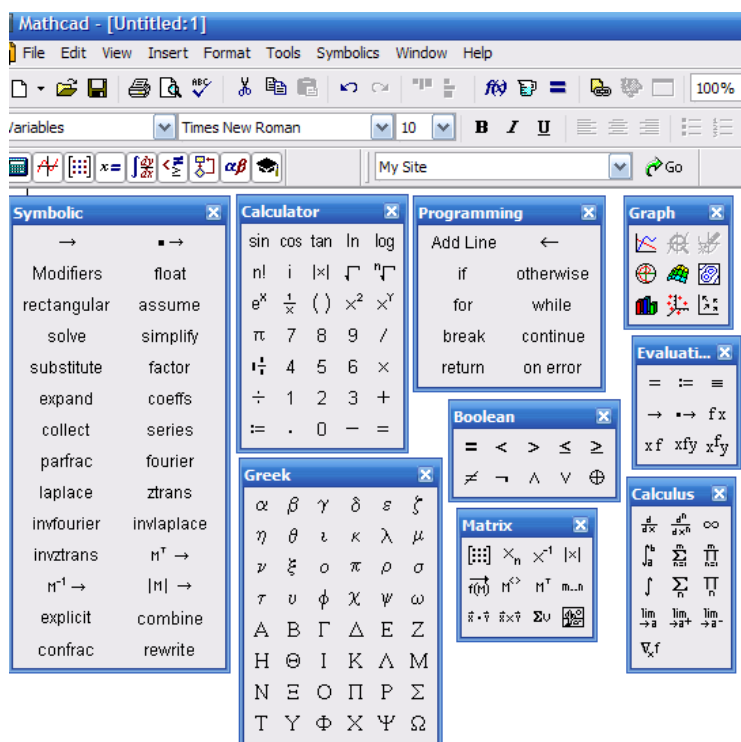


Рис. 1. Панель инструментов **Математика** и доступные из нее инструменты

- Панель **Calculator** служит для вставки основных математических операций.
- Панель **Graph** служит для вставки графика в документ.
- Панель **Matrix** служит для вставки матрицы, для работы с матрицами и матричными операциями.
- Панель **Evaluation** представляет операторы вычисления.
- Панель **Calculus** представляет операторы интегрирования, дифференцирования, суммирования, ..
- Панель **Boolean** представляет булевы операторы и предназначена для вставки логических или булевых операций.
- Панель **Programming** служит для программирования средствами *MathCad* .
- Панель **Greek** представляет греческие символы.
- Панель **Symbolic** служит для вставки символьных операторов.

Ввод символов

Большую часть окна занимает рабочая область, в которую можно вводить математические выражения, текстовые поля и элементы программирования. Чтобы отметить место, куда вносить формулу (или текст) имеется курсор ввода + («щелкнуть» указателем мыши в нужном месте либо передвинуть его клавишами клавиатуры $\leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$). По мере ввода на месте курсора появляется вертикальная и горизонтальная линия ввода синего цвета, отмечающее место редактирования в данный момент. Символы, цифры, формулы ... вводят с клавиатуры, но лучше вводить с панели. Редактирование производится подобно редактированию формул, созданных в *WORD* редактором формул, однако есть различия, а именно, редактирование зависит от того, как будет выделяться запись, слева направо или наоборот.

Особенности некоторых операторов и символов

- Вводя знак = (равенство) для вычисления математических выражений, мы фактически применяем оператор вычисления или численного вывода. Его также можно ввести, вызывая инструмент = с панели инструментов **Evaluation**. Действия происходят с числами или числовыми выражениями.
- Оператор присваивания := (двоеточие и равенство) применяется для задания имени переменным.
- Наряду с численным выводом *MathCad* имеется возможность символьного или аналитического вычисления значения выражения. Для символьного вычисления применяется операция символьного вывода $\rightarrow$ (стрелка).
- Знак = (равенство, как после написания жирным шрифтом) можно найти на панели **Boolean** (или нажимая сразу две клавиши на клавиатуре **ctrl** и **=**). Этот символ используют для записи уравнения, например, $x^2 + 2 \cdot y - 5 \cdot z = 7$.

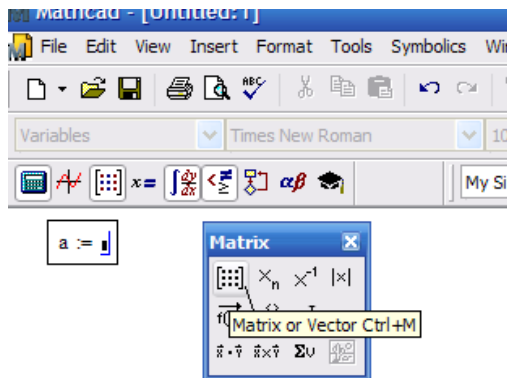
К допустимым символам относятся: большие и маленькие буквы; числа от 0 до 9, ∞ , греческие буквы, символ подчеркивания , символ % , нижний индекс. Имя не может начинаться с цифры, символа подчеркивания, штриха или процента. Символ ∞ может быть только первым в имени. Все буквы имени должны иметь один стиль и шрифт. Имена не могут совпадать с именами встроенных функций, констант и размерностей.

Массивы: векторы, матрицы и ранжированные переменные

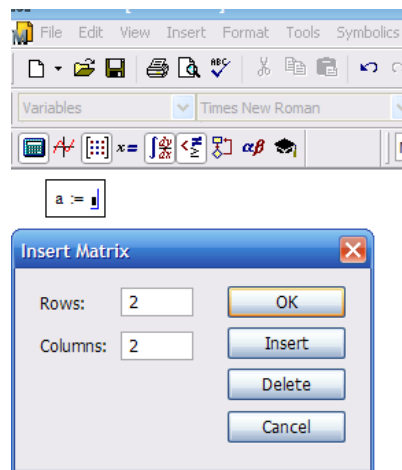
В *MathCad* выделяются 2 типа массивов (рис. 2):

- векторы (или одномерные массивы), двумерные матрицы и многомерные массивы (тензоры);
- ранжированные переменные (векторы, элементы которых определенным образом зависят от их индекса).

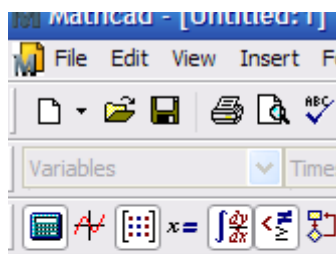
Существует несколько способов создания массивов. Один из наиболее простых способов: ввести имя массива (например, a) и знак присваивания ($:=$), затем на панели инструментов **Matrix** выбрать первый инструмент (**Insert Matrix**), указать количество строк и столбцов, подтвердить свой выбор (т.е. нажать **OK**), ввести все элементы массива вручную.



a

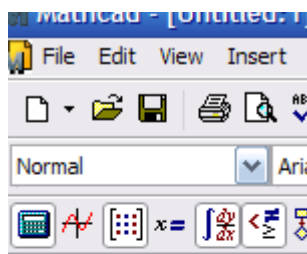


b



$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

c



$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

d

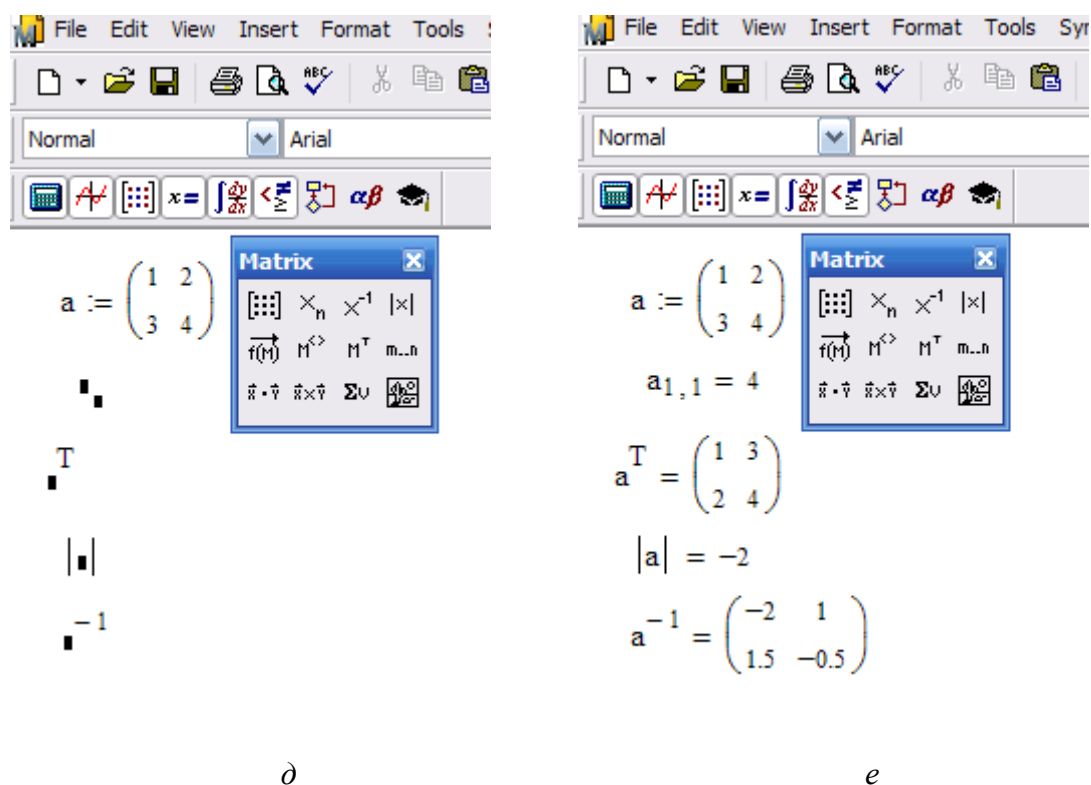
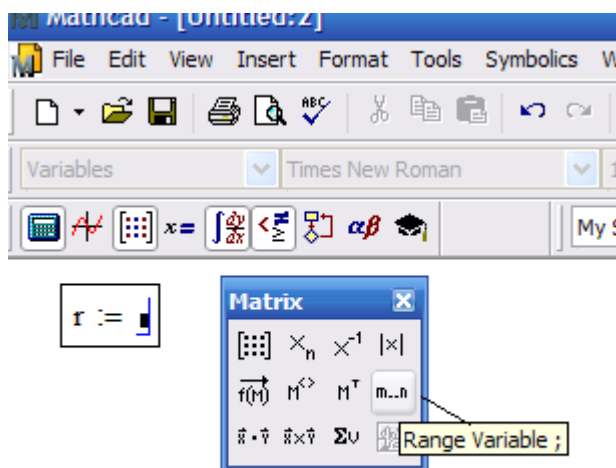


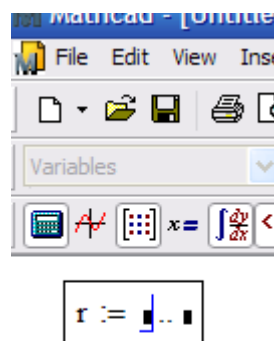
Рис. 2. Пример ввода массива и проведение операций с ним: *а* – вызов инструмента **Matrix**; *б* – создание шаблона матрицы; *в* – отображение шаблона матрицы; *г* – представление матрицы; *д* – отображение шаблонов для проведения некоторых операций с матрицей; *е* – отображение результатов выполненных операций с матрицей

К матрицам, содержащим только числовые значения, можно применять различные алгебраические действия сложение, вычитание, умножение.

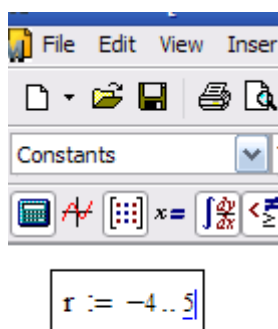
Ранжированные переменные являются разновидностями векторов и предназначены для циклов или итерационных вычислений (рис. 3, 4). Например, для создания ранжированной переменной с элементами 0 1 2 3 4 5 необходимо ввести имя переменной (например, *r*), оператор присваивания, выбрать на панели **Matrix** инструмент ранжированная переменная (*m..n*), в результате будем иметь следующее: $r := \blacksquare .. \blacksquare$. В первое место заполнения ($\blacksquare$) ввести число (или два числа через запятую, тем самым укажем шаг изменения последующих чисел), во второе место заполнения следует ввести значение правой границы ранжированной переменной (рис. 3).



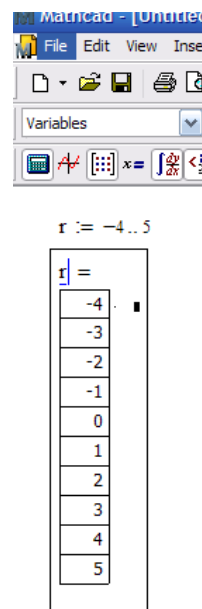
a



б

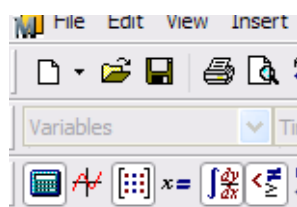


в



г

Рис. 3. Пример ввода ранжированной переменной с шагом 1: *a* – вызов шаблона **ранжированная переменная**; *б* – отображение шаблона **ранжированная переменная**; *в* – ввод величин для создания ранжированной переменной; *г* – отображение результата создания ранжированной переменной



$q := -1.2, 0.4 \dots 6$

$q =$
-1.2
0.4
2
3.6
5.2

Рис. 4. Пример ранжированной переменной с шагом отличным от 1

Существует 2 типа отображения массивов: в форме матрицы (см рис. 2 *е*) и в форме таблицы (см рис. 5 *б*).

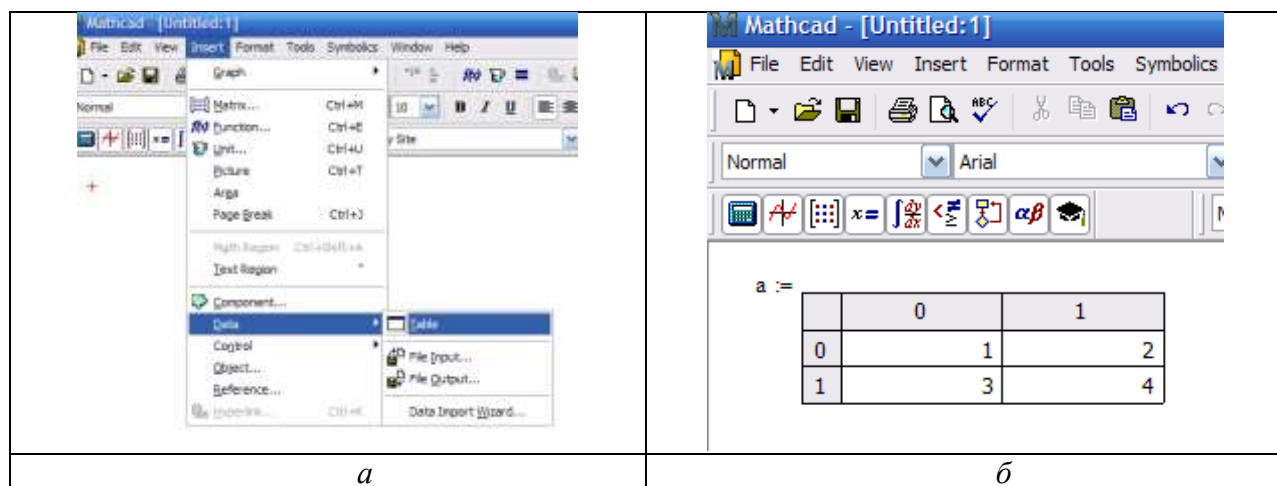


Рис. 5. Пример отображения матрицы в форме таблицы: *a* – вызов шаблона матрицы, *б* – отображение матрицы в форме таблицы

Функции

В *MathCad* формально функции можно разделить на 2 группы: встроенные и заданные пользователем. Имена функций можно вводить с клавиатуры или вызывать с панели инструментов ($f(x)$), некоторые можно ввести с панели **Calculator**. Функции записываются в обычной для математика форме. Например,

$$g(x,y):=x+2\cdot y$$

$$g(1,1)=3$$

$$f(x):=\cos(x)$$

$$z:=5$$

$$h(x):=x+z$$

$$h(1)=6$$

Символьные вычисления

Имеется возможность символьного или аналитического вычисления выражения. Для символьных выражений имеется ряд специальных средств. Одно из них – это оператор символьного вывода $\rightarrow$ (стрелка) (рис. 6). Результат получается после аналитического преобразования. Используя символ $\rightarrow$ можно упрощать результаты.

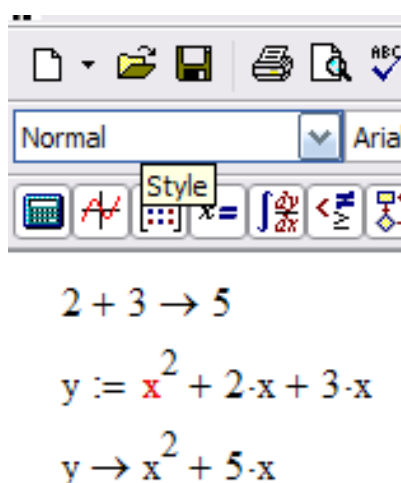
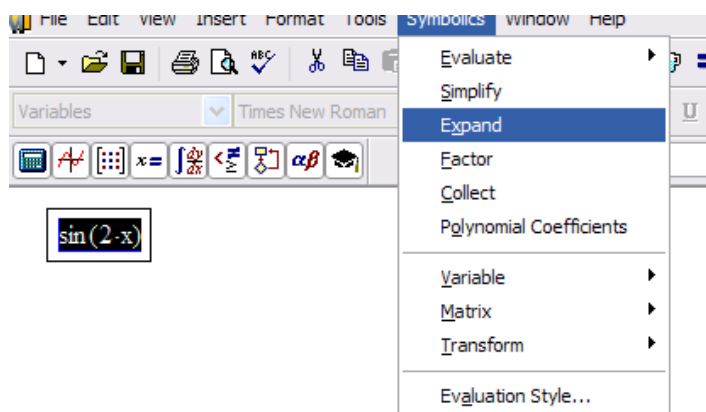


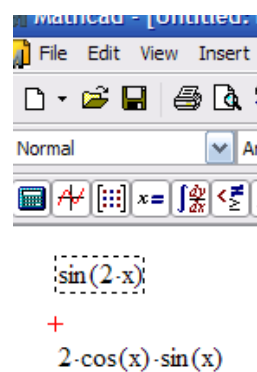
Рис. 6. Пример использования символа вывода

Выполнять символьные преобразования можно при помощи меню. В частности, **Expand** раскладывает на тригонометрические множители (рис. 7).

Рассмотрим процедуру дифференцирования и интегрирования с использованием инструментов, расположенных на панели **Calculus** и символьного вычисления (рис. 8). Выберем на панели **Calculus** инструмент интеграл ($\int$), в результате появится шаблон $\int \blacksquare d \blacksquare$, в первое место заполнения записать выражение, которое нужно проинтегрировать, во второе – переменную, по которой ведется интегрирование. Для дифференцирования используется инструмент панели **Calculus** « $\frac{d}{dx}$ ».

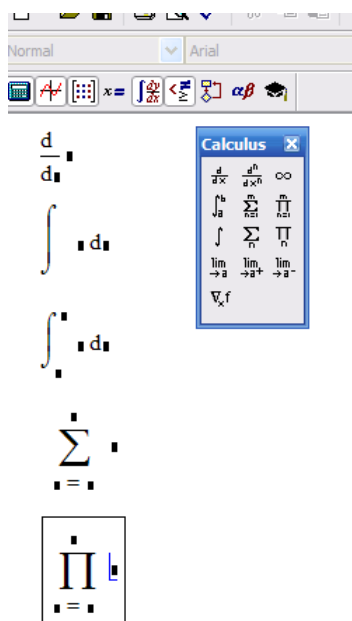


a

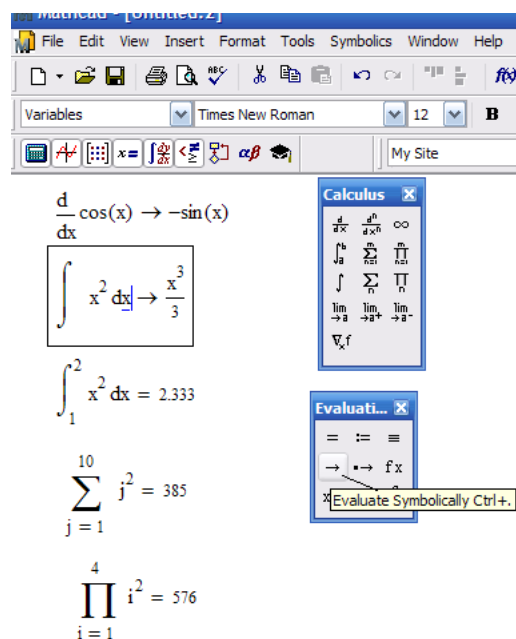


б

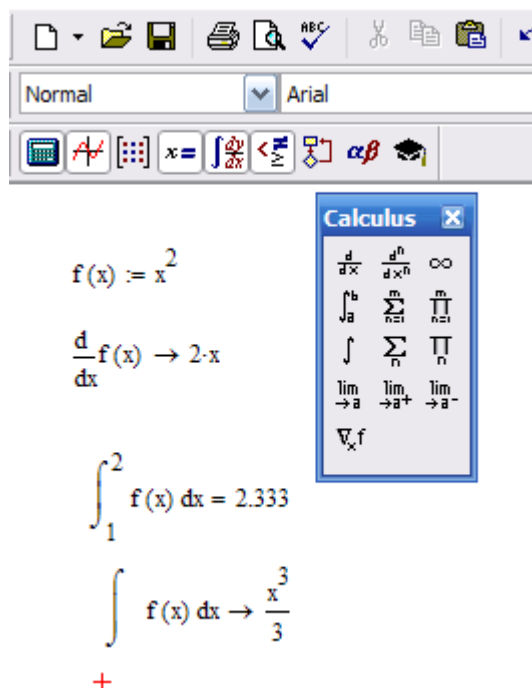
Рис. 7. Пример символьного преобразования с использованием **Expand**: *a* – обращение к **Expand**; *б* – отображение результата **Expand**



a



б

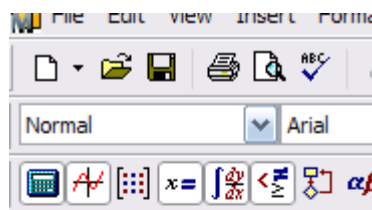


6

Рис. 8. Пример работы с инструментами панели **Calculus**: *a* – вызов шаблонов, *б* – ввод выражений в места заполнения шаблонов и получения результатов, *в* – получение результата с предварительным заданием функции

Решение уравнений в MathCAD

Многие уравнения и системы из них не имеют аналитического решения. Однако они могут решаться численными методами с заданной погрешностью (не более значения, заданного системной переменной **TOL**). Для простых уравнений вида $f(x) = 0$ решение находится с помощью функции: **root(Выражение Имя переменной)**. Функция реализует вычисления итерационным методом, причем можно задать начальное значение переменной, это полезно, если возможны несколько решений и тогда выбор решения определяется выбором начального значения переменной. На рисунке 9 приведен пример применения функции **root** для вычисления корня уравнения.



```

TOL := 10-7
a := 0.5
f(x) := x3 +  $\frac{a}{e^x}$ 
x := 3

RR := root(f(x), x)

RR = -1.174

```

Рис. 9. Пример решения уравнения с использованием функции **root**

Применяя функцию **root** надо помнить, что корень функции – это не то значение аргумента, при котором выражение равно нулю, а то значение аргумента, при котором значение выражения не превышает значения системной переменной *TOL*. Чтобы функция сработала правильно, необходимо переменной *TOL* присвоить новое значение, например 10^{-7} , заменив им предопределенное значение (10^{-3}).

Для поиска корней полинома степени *n* MathCAD содержит функцию: **polyroots(V)**. Она возвращает вектор корней многочлена (полинома) степени *n*, коэффициенты которого находятся в векторе *V*, имеющим длину, равную *n+1*. Вектор коэффициентов заполняется в обратном порядке. Включая все коэффициенты многочлена, даже если они равны нулю.

При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом **Given** и имеющий следующую структуру:

Given

уравнения

ограничительные условия

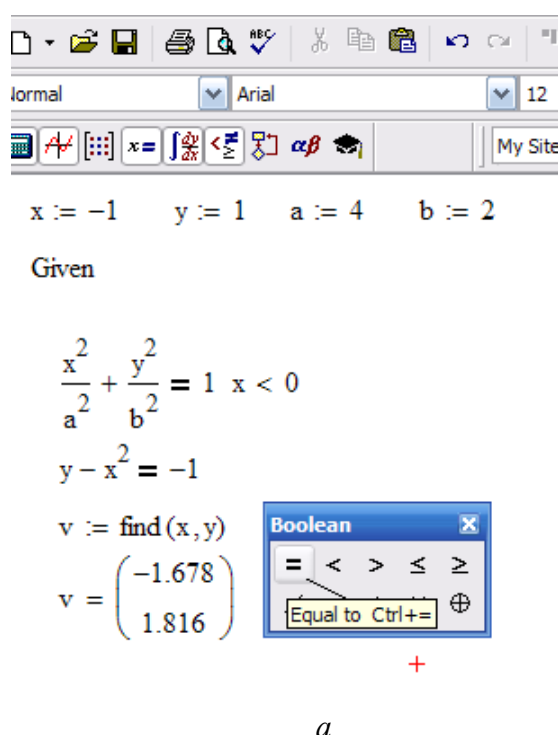
выражение с функцией **find** или **miner**.

Между функциями **find** и **miner** существует принципиальное различие. Функция **find** используется, когда решение реально существует (хотя и не является аналитическим), а функция **miner** пытается найти максимально приближение даже к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратической погрешности решения.

Рассмотрим пример решения системы нелинейных уравнений с помощью функции *find*.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - x^2 = -1 \end{cases}$$

Первое решение найдем, приняв ограничение $x < 0$ (рис. 10 а), второе, приняв $x > 0$ (рис. 10 б). Следует отметить, что для решения системы уравнений указали начальные значения x и y (т.е. $x := -1$ $y := 1$)



$x := -1$ $y := 1$ $a := 4$ $b := 2$

Given

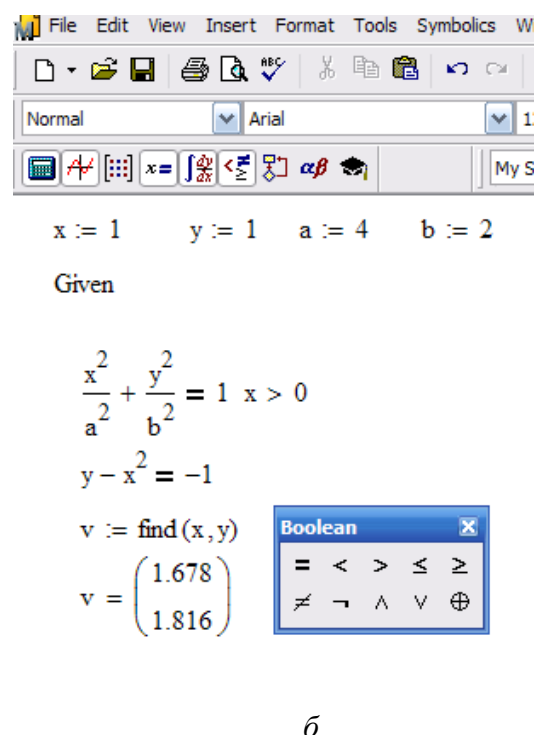
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x < 0$$

$$y - x^2 = -1$$

$v := \text{find}(x, y)$

$v = \begin{pmatrix} -1.678 \\ 1.816 \end{pmatrix}$

a



$x := 1$ $y := 1$ $a := 4$ $b := 2$

Given

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x > 0$$

$$y - x^2 = -1$$

$v := \text{find}(x, y)$

$v = \begin{pmatrix} 1.678 \\ 1.816 \end{pmatrix}$

б

Рис. 10. Пример решения системы нелинейных уравнений: *a* – первая часть решения при условии $x > 0$; *б* – вторая часть решения при условии $x < 0$.

Для вычисления пределов функций и числовых последовательностей предназначены три кнопки в панели Calculus панели математических инструментов:

 - оператор вычисления предела функции в точке или на бесконечности;  и  - операторы вычисления односторонних пределов соответственно справа и слева.

Для вычисления предела нужно:

- щелкнуть по свободному месту в рабочем документе, затем щелкнуть по нужной кнопке, ввести с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение допредельной функции и предельной точки;
- выделить все выражение и щелкнуть по строке Symbolically в пункте Evaluate меню Symbolics (или щелкнуть по кнопке  в панели символьных операций Symbolic).

Пример 1. Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x} \rightarrow 0$$

Для вычисления предела щелкните по соответствующей позиции в панели Calculus; в помеченных позициях введите выражение допределной функции и предельной точки; выделите все выражение и щелкните по кнопке Symbolic Evaluation в панели символьных операций Symbolic; щелкните вне выделяющей рамки

Для набора степени и знака квадратного корня, нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Calculator.

2. Для определения функции одной переменной нужно ввести с клавиатуры имя функции с аргументом в круглых скобках, знак присваивания (для ввода знака присваивания нужно нажать на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<:=> или щелкнуть по кнопке <:=> панели Evaluation) и справа от него - выражение для вычисления функции.

В записи выражения для функции можно использовать знаки (имена) элементарных функций, вводя их с клавиатуры или вставляя в рабочий документ функцию, выбранную из списка в пункте Function меню Insert.

Выражение можно вводить с помощью кнопок панели инструментов Calculator Toolbar.

Вставить в выражение букву греческого алфавита можно с помощью панели Greek Symbol Toolbar.

Для вычисления значения функции в точке нужно ввести в рабочий документ с клавиатуры имя функции, указать в скобках значение аргумента, выделить выражение, ввести знак равенства (с помощью соответствующей кнопки панели Evaluation) и щелкнуть по свободному месту в рабочем документе.

Пример 2. Определение функции. Вычисление значений функции в точках

Определение функции. Вычисление значений функции в точках

Определим функцию:

$$f(x) := \frac{\exp(x^2 - 2.6)}{\pi} + \cos(2 \cdot x)$$

Чтобы набрать знак присваивания, нужно щелкнуть по кнопке $\leftarrow := \rightarrow$ панели Evaluation.

Чтобы набрать число π , нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Greek.

Для набора степени, нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Calculator.

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках $x=1$ и $x=-1.46$:

$$f(1) = -0.352$$

$$f(-1.46) = -0.776$$

Для просмотра результата вычисления нужно набрать знак $\leftarrow \Rightarrow$.

Инструменты для построения графиков в Mathcad доступны в панели инструментов Graph Toolbar, которая открывается щелчком по соответствующей кнопке в панели математических инструментов или через пункт Graph меню Insert.

Для построения графика функции, заданной в декартовых координатах, нужно:

- щелкнуть по рабочему документу, по пункту по строке X-Y Plot в пункте Graph меню Insert (или по соответствующей кнопке в панели Graph);
- в рабочем документе откроется окно построения графиков;
- ввести в помеченной позиции возле оси абсцисс имя аргумента, а в позиции возле оси ординат - имя функции и щелкнуть по рабочему документу вне окна графиков.

Если нужно построить одновременно графики нескольких функций, нужно ввести их имена в позиции возле оси ординат, разделяя запятой.

Вместо имени функции можно ввести выражение для ее вычисления.

Параметры изображения (цвет и толщина линий, координатная сетка, разметка осей, надписи на графиках и т.д.) можно изменить, щелкнув дважды по полю графика и установив настройки в соответствующих появившихся окнах диалога.

Графики функций, заданных в параметрической форме, строятся аналогично, с учетом того, что в позициях аргумента и функции вводятся выражения или имена соответствующих функций параметра.

Для построения графика функции, заданной в полярных координатах, нужно:

- щелкнуть по рабочему документу, по строке Polar Plot в пункте Graph меню Insert (или по соответствующей кнопке в панели Graph);
- в рабочем документе откроется окно построения графиков;

- ввести в помеченной позиции возле оси абсцисс имя аргумента, а в позиции возле оси ординат - имя функции и щелкнуть по рабочему документу вне окна графиков.

Пример 3. Построение графиков функций

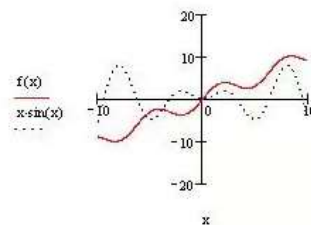
Построение графиков функций $f(x)=x+2\sin(x)$ и $g(x)=x\sin(x)$

Определим функцию $f(x)$:

$$f(x) := x + 2 \cdot \sin(x)$$

Чтобы набрать знак присваивания, нужно щелкнуть по кнопке $:=$ панели Evaluation.

Построим графики функций $f(x)$ и $g(x)$; выражение для $g(x)$ запишем непосредственно в позицию возле оси ординат:



Для построения графика функции, заданной в декартовых координатах, нужно щелкнуть по рабочему документу, по пункту меню X-Y rPlot (в пункте Graph меню Insert) - в рабочем документе откроется окно построения графиков.

Чтобы построить на одном чертеже графики двух функций, нужно ввести их имена в соответствующей позиции, разделяя их

Пример 4. Построение кривой, заданной параметрически.

Построение кривой $y=y(x)$, заданной параметрически

Определим функции $x(t)$ и $y(t)$:

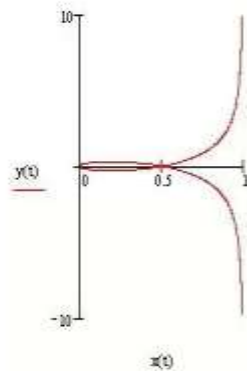
$$x(t) := \frac{t^2}{1 + t^2}$$

Чтобы набрать знак присваивания, нужно щелкнуть по кнопке $:=$ панели Evaluation.

$$y(t) := t \cdot \frac{(1 - t^2)}{1 + t^2}$$

Для набора степени, нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Calculator.

Построим график кривой $y=y(x)$:



Для построения графика функции нужно щелкнуть по рабочему документу, по пункту меню X-Y rPlot (в пункте Graph меню Insert) – в рабочем документе откроется окно построения графиков.

Пример 5. Построение кривой, заданной в полярных координатах (лемниската Бернулли).

Построение лемнискаты Бернулли $r=3\sqrt{2\cos(2\phi)}$

Определим функцию:

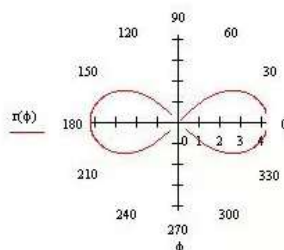
$$r(\phi) := 3\sqrt{2\cos(2\phi)}$$

Чтобы набрать знак присваивания, нужно щелкнуть по кнопке $:=$ панели Evaluation.

Чтобы набрать ϕ , нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Greek.

Для набора знака корня, нужно щелкнуть по соответствующей кнопке панели Calculator.

Построим график функции



Для построения графика функции, заданной в полярных координатах, нужно щелкнуть по рабочему документу, по пункту меню Polar Plot (в пункте Graph меню Insert) – в рабочем документе откроется окно построения графиков.

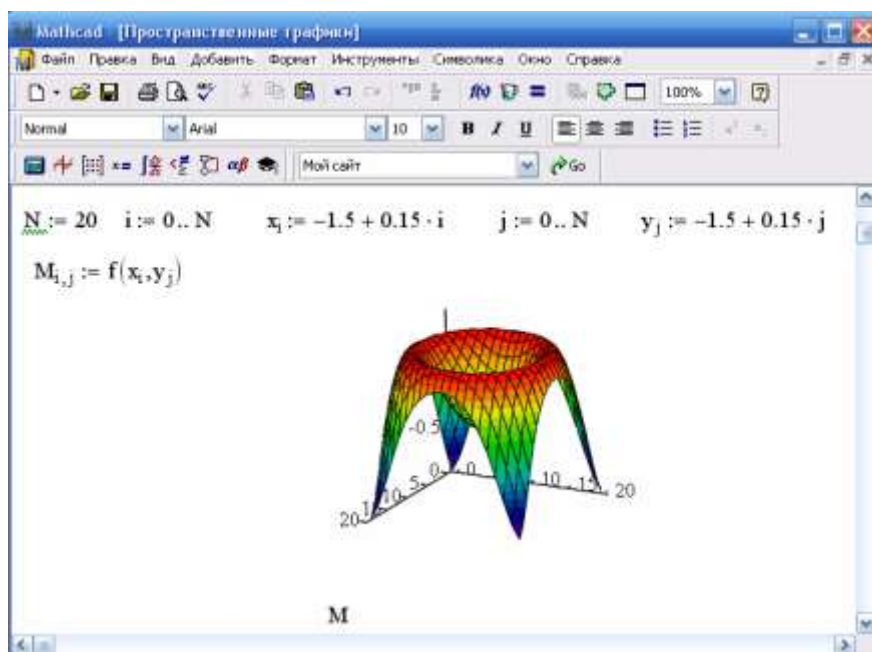
В системе MathCad наряду с двумерными можно строить и трехмерные графики (поверхности).

Типичный трехмерный график строится для функции двух переменных. В отличие от двумерных графиков, которые используют дискретные значения аргументов и функций, трехмерные графики используют матрицы.

Для создания трехмерного графика необходимо выполнить следующие операции:

- 1) определить функцию двух переменных;
- 2) указать необходимое число точек по осям X и Y;
- 3) определить x_i и y_j как равномерно располагаемые точки на осях координат;
- 4) заполнить матрицу $M_{i,j}$ значениями $f(x_i, y_j)$;
- 5) выбрать *График поверхности* из меню *Добавить > Графики > График поверхности*, комбинацией клавиш **Ctrl + 2** или с помощью панели графиков на панели инструментов;
- 6) ввести имя матрицы M в поле ввода и щелкнуть левой кнопкой мыши в поле графика.

В качестве примера рассмотрим построение трехмерного графика функции $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, на интервалах $-1.5 \leq x \leq 1.5$, $-1.5 \leq y \leq 1.5$.



Задание 2 – решить задачи различного уровня сложности. Проверку сделать, используя математический пакет MathCad.

Задача 1. Найдите значение многочлена $f(A)$:

$$1) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2) f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите произведения матриц AA^T и $A^T A$:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Проверить, являются ли матрицы A и B коммутирующими:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Найдите все квадратные матрицы B размерностью 2×2 , если известно, что B^2 - нулевая матрица.

Задача 5. Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = 5$;

4) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

Задача 6. Вычислите определители матриц, используя свойства определителей:

1) $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}$.

Задача 7. Известно, что числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение

определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, докажите, что он тоже делится на 17.

Задача 8. Вычислите определители матриц разложением по какой-нибудь строке или столбцу, предварительно обнулив строку или столбец:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Вычислите определители матриц приведением к треугольному виду:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

Задача 10. Решите матричное уравнение $AX = B$, если:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. Решите матричное уравнение $XA = B$, если:

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Решите матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, если:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Найдите ранг матрицы A методом нулей и единиц, если

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. Найдите ранги матриц методом окаймляющих миноров:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.
- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.
2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.
3. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13 —е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
5. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №2

Исследование и решение систем линейных уравнений. Метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задача 1. Исследуйте систему линейных уравнений . В случае совместности системы решите ее, используя обратную матрицу и формулы Крамера:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \\
 2) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_2 = 2 \end{cases}; \\
 3) \quad & \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 8x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Задача 2. Найдите коэффициенты многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющего условиям: $f(5) = 6$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$.

Задача 3. Найдите коэффициенты многочлена $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, удовлетворяющего условиям: $f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 4$.

Задача 4. Исследуйте систему линейных уравнений. В случае совместности решите ее методом Гаусса:

$$1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}; \quad 2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ 4x + 2y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} 4x + 10y + 2z = 9, \\ 2x + 5y + 10z = 4, \\ 5x + 6y + 11z = 5 \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

Задача 5. Дана система линейных уравнений. Найдите общий вид решения системы и фундаментальный набор решений.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} 2x + 4y = 0, \\ 4x + y = 0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}; \quad 6) m=5, \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}; \quad 7) m=13, \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}.$$

Задача 6. Дана однородная система линейных уравнений. Найдите общий вид решения системы и фундаментальный набор решений в зависимости от параметра λ .

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.
2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.
3. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13 —е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
5. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №3

Векторы и линейные операции над ними. Координаты вектора в заданном базисе. Сложение векторов и умножение вектора на число в координатах. Признаки коллинеарности и компланарности векторов в координатах. Системы координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задание 1.

Векторы $a(2,1,0)$, $b(0,1,2)$, $c(0,\alpha,5)$ компланарны при α , равном...

1	2	3	4
0	1	5/2	2/5

Задание 2.

Векторы $a(0,1,7)$, $b(-1,1,0)$, $c(\beta,1,0)$ не образуют базис при β , равном...

1	2	3	4
-1	0	1	7

Задание 3.

Векторы $b(-1,1,4)$ и $c(\beta, 2, 8)$ коллинеарны при β , равном...

1	2	3	4
1	0	-1	-2

Задание 4.

Площадь треугольника с вершинами A(1, 2, 0), B(3, 0, 3), C(5, 2, 6) равна...

1	2	3	4
$2\sqrt{13}$	$4\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	0

Задание 5.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $a=(0, -5, 3)$, $b=(-1, 0, 3)$, равна...

1	2	3	4
$\sqrt{259}$	$\sqrt{334}$	$\frac{\sqrt{259}}{2}$	$\frac{\sqrt{334}}{2}$

Задание 6.

Даны векторы $a=(1, -1, -2)$, $b=(1, 2, -1)$. Тогда координаты векторного произведения этих векторов равны...

1	2	3	4
(5, 1, 3)	(-5, 3, 1)	(5, -1, 3)	(5, 3, 1)

Задание 7.

Объем пирамиды, построенной на векторах $a=(0, 6, 1)$, $b=(4, 0, 3)$, $c=(1, 6, 4)$, равен...

1	2	3	4
9	54	27	26

Задание 8.

Даны векторы: $a = i - j + k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j$. Тогда смешанное произведение этих векторов равно...

1	2	3	4
-25	-33	33	25

Задание 9.

Даны точки: A(1, 1, -2), B(-3, -1, 2), C(2, 2, 1). Тогда скалярное произведение векторов $a = 5\vec{AC}$ и $b = \vec{AB}$, равно...

1	2	3	4
-30	30	6	-6

Задание 10.

Даны точки: A(1, 3, -1), B(3, 1, -1), C(1, 1, 1). Тогда косинус угла между векторами $a = 3\vec{AB}$ и $b = -\vec{AC}$ равен...

1	2	3	4
1	1/2	-1/2	-1/4

Задание 11. Доказать, что векторы $a = (1, -1, 1)$, $b = (-5, -3, 1)$, $c = (2, -1, 0)$ образуют базис и найти координаты вектора $d(-15, -10, 5)$ в этом базисе.

Задание 12. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $a = (2, 3, -1)$, $b = (-2, 4, 5)$, $c = (3, -1, 4)$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах a и b .

Задание 13. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D . Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$.

$A(3, 4, 5), B(1, 2, 1), C(-2, -3, 6), D(3, -6, -3)$; а) ACD ; б) $l = AB, C$ и D .

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.
- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.

2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №4

Уравнения прямой на плоскости. Эллипс, его уравнения и свойства. Гипербола, ее уравнение и свойства. Парабола. Уравнение параболы и основные свойства

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задание 1.

Прямая задана уравнением $3x+7y+5=0$. Прямая, перпендикулярная ей, может иметь уравнение:

1	2	3	4
---	---	---	---

$3x+7y+8=0$	$6x+14y+10=0$	$-14x+6y+2=0$	$14x+6y-7=0$
-------------	---------------	---------------	--------------

Задание 2.

Треугольник задан вершинами $A(3,0)$, $B(4,2)$, $C(5,-7)$. Уравнение высоты, опущенной из вершины C , имеет вид:

1	2	3	4
$7x+2y-21=0$	$9x+y-38=0$	$x+2y+9=0$	$x+2y-2=0$

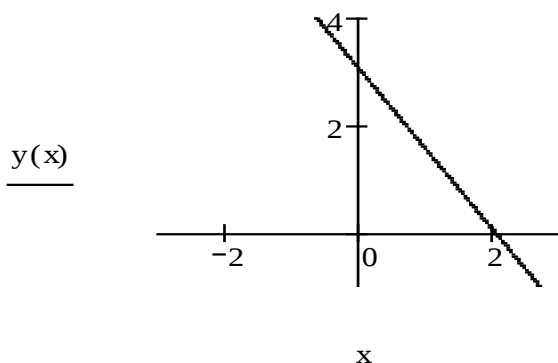
Задание 3.

Расстояние между двумя прямыми, заданными уравнениями: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-7}{3}$, $3x+4y-11=0$, равно...

1	2	3	4
0	$\frac{34}{\sqrt{146}}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{23}{\sqrt{146}}$

Задание 4.

Уравнение прямой, изображённой на рисунке имеет вид:



1	2	3	4
$2x+2y=1$	$2x+3y=6$	$2x+3y=1$	$3x+2y=6$

Задание 5.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$ параллельно прямой $3x-4y+5=0$ имеет вид:

1	2	3	4
$4y-3x+3=0$	$2x-y+6=0$	$13x-4y+10=0$	$x-2y-2=0$

Задание 6.

Даны вершины треугольника: $A(-2, 4)$, $B(2, 1)$, $C(4,-5)$. Тогда уравнение медианы, проведённой из вершины A на сторону BC , имеет вид:

1	2	3	4
$6x-5y-22=0$	$6x+5y-8=0$	$2x-y+8=0$	$2x-5y+24=0$

Задание 7.

Уравнение эллипса имеет вид $9x^2+4y^2=36$. Тогда длина его меньшей полуоси равна...

1	2	3	4
3	4	2	9

Задание 8.

Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 6x + y^2 = 0$, равен...

1	2	3	4
2	3	1	6

Задание 9.

Координаты фокусов гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$, равны...

1	2	3	4
(± 4 ; 0)	(-4; 0)	(± 16 ; 0)	(± 6 ; 0)

Задание 10.

Эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $9x^2 - 16y^2 = 144$, равен...

1	2	3	4
1,25	2,25	1,75	3,5

Задание 11. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (А, В – точки, лежащие на кривой, F – фокус, а – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, 2с – фокусное расстояние).

$$b = 15, F(-10,0); б) a = 13, \varepsilon = 14/13; в) D: x = -4.$$

Задание 12. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А.

$$\text{Вершина гиперболы } 12x^2 - 13y^2 = 156, A(0, -2).$$

Задание 13. Составить уравнение линии, каждая точка М которой удовлетворяет заданным условиям: отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки А(1, 3).

Задание 14. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат: $\rho = 2 \sin 4\varphi$.

Задание 15. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leq t \leq 2\pi$):

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}.$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.

2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №5

Уравнения прямой в пространстве. Уравнения плоскости. Поверхности второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический конус, цилиндрические поверхности, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задание 1.

Уравнение плоскости, проходящей через точки A(0,2,1), B(2,4,3) и C(-2,0,1), имеет вид:

1	2	3	4
$x-y+z+2=0$	$x-y+2=0$	$x+y-2=0$	$x-y+1=0$

Задание 2.

Угол между двумя плоскостями, заданными уравнениями: $2x+3y-7z+2=0$, $5x-3y-z+2=0$, равен...

1	2	3	4
$\arccos \frac{8}{\sqrt{2170}}$	$\frac{8}{\sqrt{2170}}$	$\arccos \frac{-6}{\sqrt{2170}}$	$\arcsin \frac{6}{\sqrt{2170}}$

Задание 3.

Уравнение плоскости, проходящей через точку A(5; -1; 1) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (2; -3; 4)$, имеет вид:

1	2	3	4
$5x - y + z - 17 = 0$	$2x - 3y + 4z - 17 = 0$	$2x - 3y + 4z + 17 = 0$	$5x - y + z + 17 = 0$

Задание 4.

Направляющий вектор прямой $\begin{cases} 2x-3y-z-7=0, \\ 3x-5y+2z-3=0 \end{cases}$ имеет координаты:

1	2	3	4
$(-11, -7, -1)$	$(-11, 7, -1)$	$(-1, -1, -19)$	$(-1, 7, 10)$

Задание 5.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(5; 1; 1)$ и $B(-3; 4; 0)$, имеют вид:

1	2	3	4
$\frac{x-5}{-8} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$	$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$	$\frac{x+5}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{1}$	$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{0}$

Задание 6.

Канонические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ имеют вид:

1	2	3	4
$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$	$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$	$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$	$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$

Задание 7.

Острый угол между прямыми, заданными уравнениями: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$ равен...

1	2	3	4
30°	45°	60°	20°

Задание 8.

Поверхность задана уравнением: $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$. Сечение плоскостью $z=5$ данной поверхности имеет вид:

1	2	3	4
$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$	$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$	$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$	$\frac{x^2}{27} + \frac{z^2}{25} = 1$

Задание 9.

Каноническое уравнение поверхности $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$, имеет вид:

1	2	3	4
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$	$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$	$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$

Задание 10.

Сечением поверхности $9x^2 - 16y^2 = 144$ плоскостью Oxz является...

1	2	3	4
гипербола	две параллельные прямые	две пересекающиеся прямые	прямая

Задание 11. Найти расстояние от т. М (-12, 7, -1) до плоскости, проходящей через т. М₁ (-3, 4, -7), М₂ (1, 5, -4), М₃ (-5, -2, 0).

Задание 12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А (1, 0, -2) перпендикулярно $\overline{BC}$, если В (2, -1, 3), С (0, -3, 2).

Задание 13. Написать канонические уравнения прямой, заданной как пересечение плоскостей:
$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

Задание 14. Построить поверхности и определить их вид (название).

а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.

Задание 15. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

а) $y^2 = 2z$, Oz ; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$, Oy .

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.
- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.

2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №6

Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраическая, тригонометрическая формы записи комплексного числа. Операции над комплексными числами

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задание 1. Найдите $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 , если:

1) $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = 1 - 7i$,

2) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

Задание 2. Запишите комплексное число в алгебраической форме:

1) $z = \frac{-41 + 63i}{50} - \frac{6i + 1}{1 - 7i}$;

2) $z = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2i} \right)^2$;

3) $z = \frac{13 + 12i}{6i - 8} + \frac{(2i + 1)^2}{i + 2}$;

4) $z = \frac{(1 + i)(2 + i)}{2 - i} - \frac{(1 - i)(2 - i)}{2 + i}$;

5) $z = (2 - i)^2 + (1 + i)^4 - \frac{7 - i}{1 + i}$.

Задание 3. Изобразите геометрически и представьте в тригонометрической форме комплексные числа: 1 ; -2 ; $3i$; $-2i$; $2 + 2i$; $1 - \sqrt{3}i$; $\sqrt{3} + i$; $-1 + i$.

Задание 4. Пользуясь тригонометрической формой комплексных чисел, вычислите:

1) $z = \frac{(2 + 2i)^7 (-1 + \sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3} - i)^{13}}$;

2) $z = \frac{i(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$;

3) $z = (\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) i^5 (1 + \sqrt{3}i)^7$;

4) $z = \frac{i(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})}{i}$;

5) $z = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}}$;

6) $z = \frac{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{5(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})} (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})(-4i)$;

7) $z = i^{27} + i^{-9} - i^{24} - i^{-10}$;

8) $\sqrt[3]{z}$;

9) $\sqrt[6]{1}$;

10) $\sqrt[4]{-1+i}$.

Задание 5. Изобразите геометрически и вычислите сумму и произведение всех корней n -ой степени из единицы.

Задание 6. Решите следующие уравнения:

1) $z^2 + z + 5 = 0$;

2) $3z^2 - 2z + 4 = 0$;

3) $z^2 - 2iz - 5 = 0$;

4) $z^2 + \bar{z} = 0$;

5) $z^2 + |z| = 0$;

6) $z^3 - 1 = i$;

7) $z^4 - i = 1$.

Задание 7. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $|z + 2i| = |z|$;

2) $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$;

3) $|z + 3| = |z - 3i|$;

4) $|z - 2| \leq 3$;

5) $\operatorname{Im} z \geq 2$;

6) $\operatorname{Re} z \leq -3$.

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.
- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Булычева Ю.В. Алгебра (часть 1): учеб. пособие/ Ю.В. Булычева, Ю.А. Лежнина. – Астрахань: АГТУ, 2017. – 132 с. - URL: [http:// portal. astu.org](http://portal.astu.org).
2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.
3. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).

Практическое занятие №7

Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Нахождение базиса и размерности векторного пространства. Линейные преобразования векторных пространств. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования. Квадратичные формы

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Задание 1. Система векторов $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, c)$ пространства R^3 является линейно независимой, если...

- 1) $c = 0$;
- 2) c – любой элемент R , не равный 0;
- 3) c – любой элемент R ;
- 4) $c = 0$ или $c = 1$.

Задание 2. Система, состоящая из вектора $a = (c, 0, 0)$ линейного пространства, является линейно независимой, если...

- 1) c – любое действительное число, не равное 0;
- 2) $c = 0$;
- 3) c – любое действительное число;
- 4) $c = 0$ или $c = 1$.

Задание 3. Дано линейное пространство многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами. Тогда векторы $a_1 = 1 + 2x + 3x^2$, $a_2 = 2 + 3x + 4x^2$ и $a_3 = 3 + 5x + 7x^2$ линейно...

- 1) зависимы, так как a_1 есть линейная комбинация a_2 и a_3
- 2) зависимы, так как a_2 есть линейная комбинация a_1 и a_3
- 3) зависимы, так как a_3 есть линейная комбинация a_1 и a_2
- 4) независимы.

Задание 4. Пусть $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ и $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ – базисы линейного пространства L . Известно, что $e'_1 = -2e_1 + 7e_2 + 5e_3$, $e'_2 = 2e_1 - 3e_2 - 7e_3$, $e'_3 = 5e_2 - 6e_3$. Тогда матрица перехода от базиса e к e' имеет вид:

1)
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \\ 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Пусть C – матрица перехода от базиса e к базису e' некоторого линейного пространства. X – столбец координат вектора a в базисе e' . Тогда столбец координат вектора a в базисе e можно найти по формуле:

$$1) C^{-1} \cdot X$$

$$2) X \cdot C$$

$$3) C \cdot X$$

$$4) X \cdot C^{-1}$$

Задание 6. Дано невырожденное линейное преобразование в матричной форме $Y = A \cdot X$, где A – матрица линейного оператора. Тогда обратное преобразование может быть записано в виде:

$$1) Y = X \cdot A$$

$$2) X = Y \cdot A^{-1}$$

$$3) X = A^{-1} \cdot Y$$

$$4) Y = A^{-1} \cdot X.$$

Задание 7. Дано линейное преобразование $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 6x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ пространства. Найти обратное преобразование.

Задание 8. Дано линейное преобразование $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 6x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ пространства. Матрица линейного оператора имеет вид:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 & | & 1 \\ 3 & 4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 3 & | & 1 \\ 6 & 4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Матрица тождественного преобразования в пространстве размерности 2 имеет вид:

$$1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 10. Дана матрица линейного преобразования (оператора) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в

трехмерном линейном пространстве. Тогда преобразование в координатной форме имеет вид:

$$1) \begin{cases} y_1 = x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 + 2x_2, \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y_1 = x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

Задание 11. Даны два линейных преобразования $\varphi_1: \begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + 5y \end{cases}$ и $\varphi_2: \begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = 7x - 8y \end{cases}$ пространства. Найти матрицу суммы преобразований φ_1 и φ_2 .

Задание 12. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в пространстве матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.
- Проверить правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad.

Требования к оформлению задания:

Решение задач должно быть представлено в письменной форме. Правильность выполнения заданий с использованием функций и операторов Mathcad подтверждена в электронной форме или на бумажном носителе.

Рекомендуемые источники:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] : учеб.— СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>.
2. Воскобойников, Ю.Е. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю.Е. Воскобойников, А.Ф. Задорожный. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 224 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/72977>.