



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Астраханский государственный технический университет"
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт информационных технологий
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
Контрольно-измерительные материалы по теме
«Кривые и поверхности второго порядка»

Астрахань 2025 г

Составитель: *Франгулова Е.В., старший преподаватель кафедры
«Высшая и прикладная математика»*

Рецензент: *Ильясова А.К. к.ф.-м.н, доцент кафедры «Высшая и
прикладная математика».*

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры протокол заседания № 6 от 03.07.2025 г.

Учебно-методическое пособие

Контрольно-измерительные материалы составлены в соответствии с действующей программой по курсу «Алгебра и геометрия», предусмотренной Государственным стандартом высшего профессионального образования.

Учебно-методическое пособие содержит 30 вариантов индивидуальных домашних заданий, включающих задачи на отработку темы «Кривые и поверхности второго порядка»

Задания следует выполнять в тонких тетрадях. Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале группы. После выполнения работы тетрадь сдается на проверку преподавателю.

Затем студент проходит опрос по пройденной теме, который включает пояснение по выполненным задачам, решение задач, предложенных преподавателем и опрос по теоретическому материалу. Список теоретических вопросов представлен в конце пособия.

Минимальное количество баллов, которое можно получить – 10, максимальное – 15.

В конце каждого раздела идет подробный разбор решения демонстрационного варианта.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия».

ИДЗ-4.1

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, α – большая (действительная) полуось, β – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет, $\gamma = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

- 1.1. а) $\beta = 15, F(-10, 0)$;
б) $\alpha = 13, \varepsilon = 14/13$;
в) $D: x = -4$.
- 1.2. а) $\beta = 2, F(4\sqrt{2}, 0)$;
б) $\alpha = 7, \varepsilon = \sqrt{85}/7$;
в) $D: x = 5$.
- 1.3. а) $A(3, 0), B(2, \sqrt{5/3})$;
б) $k = 3/4, \varepsilon = 5/4$;
в) $D: y = -2$.
- 1.4. а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5, A(-5, 0)$;
б) $A(\sqrt{80}, 3), B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$;
в) $D: y = 1$.
- 1.5. а) $2\alpha = 22, \varepsilon = \sqrt{57}/11$;
б) $k = 2/3, 2c = 10\sqrt{13}$;
в) ось симметрии Ox и $A(27, 9)$.
- 1.6. а) $\beta = \sqrt{15}, \varepsilon = \sqrt{10}/25$;
б) $k = 3/4, 2\alpha = 16$;
в) ось симметрии Ox и $A(4, -8)$.
- 1.7. а) $\alpha = 4, F(3, 0)$;
б) $\beta = 2\sqrt{10}, F(-11, 0)$;
в) $D: x = -2$.
- 1.8. а) $\beta = 4, F(9, 0)$;
б) $\alpha = 5, \varepsilon = 7/5$;
в) $D: x = 6$.
- 1.9. а) $A(0, \sqrt{3}), B(\sqrt{14}/3, 1)$;
б) $k = \sqrt{21}/10, \varepsilon = 11/10$;
в) $D: y = -4$.

- 1.10. а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8, 0)$;
 б) $A(3, -\sqrt{3}/5)$, $B(\sqrt{13}/5)$;
 в) $D: y = 4$.
- 1.11. а) $2\alpha = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$;
 б) $k = \sqrt{2}/3$, $2c = 10$;
 в) ось симметрии Ox и $A(-7, -7)$.
- 1.12. а) $\beta = 2$, $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$;
 б) $k = 12/13$, $2\alpha = 26$;
 в) ось симметрии Ox и $A(-5, 15)$.
- 1.13. а) $\alpha = 6$, $F(-4, 0)$;
 б) $\beta = 3$, $F(7, 0)$;
 в) $D: x = -7$.
- 1.14. а) $\beta = 7$, $F(5, 0)$;
 б) $\alpha = 11$, $\varepsilon = 12/11$;
 в) $D: x = 10$.
- 1.15. а) $A(-\sqrt{(17/3)}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$;
 б) $k = 1/2$, $\varepsilon = \sqrt{5}/2$;
 в) $D: y = -1$.
- 1.16. а) $\varepsilon = 3/5$, $A(0, 8)$;
 б) $A(\sqrt{6}, 0)$, $B(-2\sqrt{2}, 1)$;
 в) $D: y = 9$.
- 1.17. а) $2\alpha = 22$, $\varepsilon = 10/11$;
 б) $k = \sqrt{11}/5$, $2c = 12$;
 в) ось симметрии Ox и $A(-7, 5)$.
- 1.18. а) $\beta = 5$, $\varepsilon = 12/13$;
 б) $k = 1/3$, $2\alpha = 6$;
 в) ось симметрии Oy и $A(-9, 6)$.
- 1.19. а) $\alpha = 9$, $F(7, 0)$;
 б) $\beta = 6$, $F(12, 0)$;
 в) $D: x = -1/4$.
- 1.20. а) $\beta = 5$, $F(-10, 0)$;
 б) $\alpha = 9$, $\varepsilon = 4/3$;
 в) $D: x = 12$.

- 1.21. а) $A(0, -2)$, $B(\sqrt{15}/2, 1)$;
 б) $k = 2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon = 11/9$;
 в) $D: y = 5$.
- 1.22. а) $\varepsilon = 2/3$, $A(-6, 0)$;
 б) $A(\sqrt{8}, 0)$, $B(\sqrt{20}/3, 2)$;
 в) $D: y = 1$.
- 1.23. а) $2\alpha = 50$, $\varepsilon = 3/5$;
 б) $k = \sqrt{29}/14$, $2c = 30$;
 в) ось симметрии Oy и $A(4, 1)$.
- 1.24. а) $\beta = 2\sqrt{15}$, $\varepsilon = 7/8$;
 б) $k = 5/6$, $2\alpha = 12$;
 в) ось симметрии Ox и $A(-2, 3\sqrt{2})$.
- 1.25. а) $\alpha = 13$, $F(-5, 0)$;
 б) $\beta = 4$, $F(-7, 0)$;
 в) $D: x = -3/8$.
- 1.26. а) $\beta = 7$, $F(13, 0)$;
 б) $\beta = 4$, $F(-11, 0)$;
 в) $D: x = 13$.
- 1.27. а) $A(-3, 0)$, $B(1, \sqrt{40}/3)$;
 б) $k = \sqrt{2/3}$, $\varepsilon = \sqrt{15}/3$;
 в) $D: y = 4$.
- 1.28. а) $\varepsilon = 5/6$, $A(0, -\sqrt{11})$;
 б) $A(\sqrt{32/3}, 1)$, $B(\sqrt{8}, 0)$;
 в) $D: y = -3$.
- 1.29. а) $2\alpha = 30$, $\varepsilon = 17/15$;
 б) $k = \sqrt{17}/8$, $2c = 18$;
 в) ось симметрии Oy и $A(4, -10)$.
- 1.30. а) $\beta = 2\sqrt{2}$, $\varepsilon = 7/9$;
 б) $k = \sqrt{2}/2$, $2\alpha = 12$;
 в) ось симметрии Oy и $A(-45, 15)$.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A .

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0, -2)$.

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.

- 2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600$, А $(-8, 0)$.
- 2.4. О $(0, 0)$, А – вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.
- 2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, А $(0, 6)$.
- 2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, А $(0, -3)$.
- 2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, А – его верхняя вершина.
- 2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, А $(0, -2)$.
- 2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, А $(0, -4)$.
- 2.10. О $(0, 0)$, А – вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$.
- 2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, А $(1, 7)$.
- 2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, А $(0, 6)$.
- 2.13. Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$, А – его нижняя вершина.
- 2.14. Вершины гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, А $(0, 4)$.
- 2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, А $(0, 5)$.
- 2.16. В $(1, 4)$, А – вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.
- 2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, А $(-1, -3)$.
- 2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, А $(0, -6)$.
- 2.19. Фокусы эллипса $24x^2 + 25y^2 = 600$, А – его верхняя вершина.
- 2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, А $(1, 3)$.
- 2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, А $(-1, -2)$.
- 2.22. В $(2, -5)$, А – вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.
- 2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, А $(2, -7)$.
- 2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, А $(-2, 5)$.
- 2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, А – его нижняя вершина.
- 2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, А $(-5, -2)$.
- 2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, А $(0, -6)$.
- 2.28. В $(3, 4)$, А – вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.
- 2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, А $(1, 8)$.

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, А (2, 8).

3. Составить уравнение линии, каждая точка М которой удовлетворяет заданным условиям.

- 3.1.** Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки А (1, 3).
- 3.2.** Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки А (4, 0).
- 3.3.** Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки А (5, 0).
- 3.4.** Отношение расстояний от точки М до точек А (2, 3) и В (-1, 2) равно $3/4$.
- 3.5.** Сумма квадратов расстояний от точки М до точек А (4, 0) и В (-2, 2) равна 28.
- 3.6.** Отстоит от точки А (1, 0) на расстоянии, в пять раз меньше, чем от прямой $x = 8$.
- 3.7.** Отстоит от точки А (4, 1) на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки В (-2, -1).
- 3.8.** Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки А (6, 1).
- 3.9.** Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки А (4, -3).
- 3.10.** Отношение расстояний от точки М до точек А (-3, 5) и В (4, 2) равно $1/3$.
- 3.11.** Сумма квадратов расстояний от точки М до точек А (-5, -1) и В (3, 2) равна 40,5.
- 3.12.** Отстоит от точки А (2, 1) на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.
- 3.13.** Отстоит от точки А (-3, 3) на расстоянии, в три раза большем, чем от точки В (5, 1).
- 3.14.** Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки А (-1, 7).

- 3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $A(-1, 2)$.
- 3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.
- 3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.
- 3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.
- 3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$.
- 3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$.
- 3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$.
- 3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$.
- 3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65.
- 3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$.
- 3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.
- 3.26. Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.
- 3.27. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.
- 3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$.
- 3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна 18,5.
- 3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho = 2 \sin 4\varphi$.

4.2. $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$.

4.3. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.

4.4. $\rho = 3 \sin 6\varphi$.

4.5. $\rho = 2/(1 + \cos \varphi)$.

4.6. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

4.7. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

4.8. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

4.9. $\rho = 4 \sin 3\varphi$.

4.10. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.

4.11. $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$.

4.12. $\rho = 1/(2 - \sin \varphi)$.

4.13. $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$.

4.14. $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$.

4.15. $\rho = 6 \sin 4\varphi$.

4.16. $\rho = 2 \cos 6\varphi$.

4.17. $\rho = 3/(1 - \cos 2\varphi)$.

4.18. $\rho = 2/(1 - \cos 3\varphi)$.

4.19. $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$.

4.20. $\rho = 5(2 - \sin \varphi)$.

4.21. $\rho = 3 \sin 4\varphi$.

4.22. $\rho = 2 \cos 4\varphi$.

4.23. $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$.

4.24. $\rho = 1/(2 - \cos 2\varphi)$.

4.25. $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

4.26. $\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$.

4.27. $\rho = 3 \cos 2\varphi$.

4.28. $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

4.29. $\rho = 2/(2 - \cos \varphi)$.

4.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leq t \leq 2\pi$)

5.1. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

$$5.7. \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$$

$$5.8. \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.9. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$$

$$5.10. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$$

$$5.11. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$5.12. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.13. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$$

$$5.14. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.15. \begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$$

$$5.17. \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.19. \begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$5.20. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.21. \begin{cases} x = 4 \cos 3t, \\ y = 2 \sin 3t. \end{cases}$$

$$5.22. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$$

$$5.23. \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$$

$$5.24. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.25. \begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$$

$$5.26. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$5.27. \begin{cases} x = 5 \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$$

$$5.28. \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$$

$$5.29. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

$$5.30. \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение типового варианта

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$; б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c , найдем $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию мнимая полуось $b = 2$, а $c = \sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому $a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y = y^2 = px$, а уравнение ее директрисы $x = \frac{-p}{2}$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $\frac{-p}{2} = -3$, $p = 6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 12x <$$

2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса. $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине. Для данного эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ верхняя вершина $A(0,1)$, $a = 2$, $b = 1$. Поэтому

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

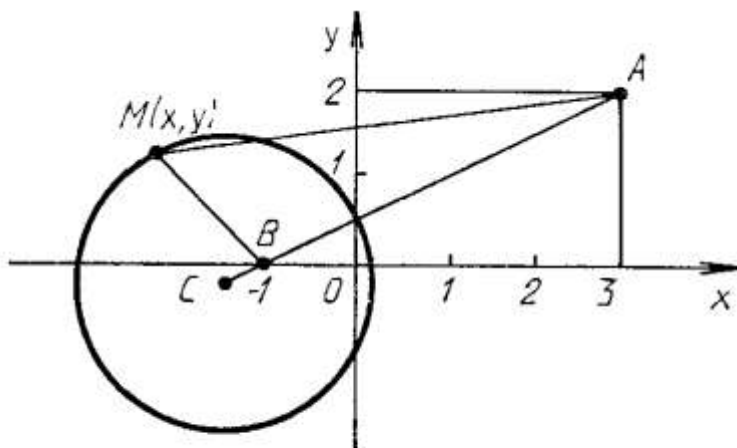
и Фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между двумя точками

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{(\pm\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

В соответствии с уравнением (4.2) записываем искомое уравнение окружности

$$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \text{ или } x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка М которой отстоит от точки А(3,2) на расстоянии, в три раза большем, чем от точки В (-1,0).



Р и с. 4.19

Пусть М (х, у) - любая точка искомой линии (рис. 4.19).

Тогда по условию задачи $|AM| = 3|BM|$. Так как $|AM| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$,

$|BM| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$, то уравнение искомой линии.

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 3\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2,$$

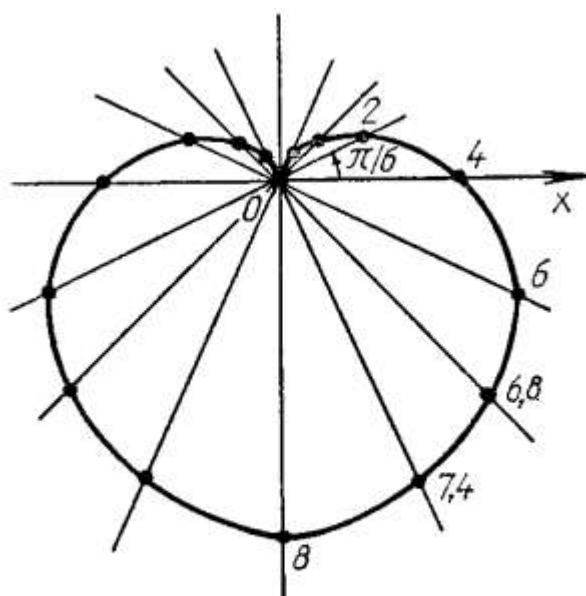
$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$$

которое является уравнением окружности с центром в точке $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ и радиусом $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.



Р и с. 4.20

Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i , ($i = \overline{1,16}$) и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\frac{\pi}{2}$	0	π	4	$\frac{3\pi}{2}$	8
$\frac{\pi}{6}$	2	$\frac{2\pi}{3}$	$\approx 0,6$	$\frac{7\pi}{6}$	6	$\frac{5\pi}{3}$	$\approx 7,4$
$\frac{\pi}{4}$	$\approx 1,2$	$\frac{3\pi}{4}$	$\approx 1,2$	$\frac{5\pi}{4}$	$\approx 6,8$	$\frac{7\pi}{4}$	$\approx 6,8$
$\frac{\pi}{3}$	$\approx 0,6$	$\frac{5\pi}{6}$	2	$\frac{4\pi}{3}$	$\approx 7,4$	$\frac{11\pi}{6}$	6

Поставь найденные точки $M_i (\varphi_i ; \rho_i)$ в полярной системе координат (см. пример 1 из § 4.3) и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20).

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x = 1 + 3 \cos t,$$

$$0 \leq t \leq \pi \quad y = 2 - 2 \sin t,$$

Выберем достаточное количество значений параметра t_i вычислим соответствующие значения x_i, y_i построим точки $M_i (x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3, b = 2$ и центром в точке $C (1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t :

$$\frac{x-1}{3} \cos t, \frac{y-2}{-2} = \sin t$$

$$\text{Откуда } \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

ИДЗ-4.2

1. Построить поверхности и определить их вид (название).

1.1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$;

б) $x^2 + 4z = 0$.

1.2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$;

б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.

1.3. а) $-5x^2 - 10y^2 - z^2 + 20 = 0$;

б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.

1.4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$;

б) $x^2 - y = -9z^2$.

1.5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$;

б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.

1.6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$;

б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.

1.7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$;

б) $y^2 + 8z^2 = 20x^2$.

1.8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$;

б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

1.9. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$;

б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$.

1.10. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$;

б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.

- 1.11. a) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$;
 б) $2y = x^2 + 4z^2$.
- 1.12. a) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$;
 б) $8y^2 + 2z^2 = x$.
- 1.13. a) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$;
 б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.
- 1.14. a) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$;
 б) $x^2 + 3z = 0$.
- 1.15. a) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$;
 б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.
- 1.16. a) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$;
 б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$.
- 1.17. a) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$;
 б) $x^2 - 2y = -z^2$.
- 1.18. a) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$;
 б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.
- 1.19. a) $z = 4 - x^2 - y^2$;
 б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.
- 1.20. a) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$;
 б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$.
- 1.21. a) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$;
 б) $15y = 10x^2 + 6y^2$.
- 1.22. a) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$;
 б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.
- 1.23. a) $4x^2 + 3y^2 = 12x$;
 б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.
- 1.24. a) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$;
 б) $y - 4z^2 = 3x^2$.
- 1.25. a) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$;
 б) $x - 3z^2 = 9y^2$.
- 1.26. a) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$;
 б) $2x^2 + 3z = 0$.

- 1.27. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$;
 б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.
- 1.28. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$;
 б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$.
- 1.29. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$;
 б) $z^2 - 2y = -4x^2$.
- 1.30. а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$;
 б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

- 2.1. а) $y^2 = 2z$, Oz ;
 б) $9y^2 + 4z^2 = 36$, Oy .
- 2.2. а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox ;
 б) $x = 1$, $y = 2$, Oz .
- 2.3. а) $x^2 = -3z$, Oz ;
 б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox .
- 2.4. а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz ;
 б) $y = 4$, $z = 2$, Ox .
- 2.5. а) $x^2 = 3y$, Oy ;
 б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz .
- 2.6. а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox ;
 б) $y^2 = 4z$, Oz .
- 2.7. а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz ;
 б) $x = 4$, $z = 6$, Oy .
- 2.8. а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oz ;
 б) $z = -1$, $y = 3$, Ox .
- 2.9. а) $y^2 = 3z$, Oz ;
 б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox .
- 2.10. а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy ;
 б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .

- 2.11. a) $x^2 = -4z, Oz$;
 б) $y^2 + 4z^2 = 4, Oy$.
- 2.12. a) $5x^2 - 6z^2 = 30, Ox$;
 б) $x = 3, z = -2, Oy$.
- 2.13. a) $z^2 = 2y, Oy$;
 б) $2x^2 + 3z^2 = 6, Oz$.
- 2.14. a) $y^2 = -4z, Oz$;
 б) $3y^2 + z^2 = 6, Oy$.
- 2.15. a) $7x^2 - 5y^2 = 35, Ox$;
 б) $x = -1, y = -3, Oz$.
- 2.16. a) $2x^2 = z, Oz$;
 б) $x^2 + 4z^2 = 4, Ox$.
- 2.17. a) $2y^2 - 5z = 10, Oz$;
 б) $y = 2, z = 6, Ox$.
- 2.18. a) $x^2 = -5y, Oy$;
 б) $2x^2 + 3z = 6, Oz$.
- 2.19. a) $x^2 - 9y^2 = 9, Ox$;
 б) $3y^2 = z, Oz$.
- 2.20. a) $x^2 + 2z = 4, Oz$;
 б) $x = 3, z = -1, Oy$.
- 2.21. a) $15x^2 - 3y^2 = 1, Ox$;
 б) $x = 3, y = 4, Oz$.
- 2.22. a) $y^2 = 5z, Oz$;
 б) $3x^2 + 7y^2 = 21, Ox$.
- 2.23. a) $15y^2 - x^2 = 6, Oy$;
 б) $y = 5, z = 2, Oy$.
- 2.24. a) $5z = -x^2, Oz$;
 б) $3y^2 + 18z^2 = 1, Oy$.
- 2.25. a) $3x^2 - 8y^2 = 288, Ox$;
 б) $x = 5, z = -3, Oy$.
- 2.26. a) $2y^2 = 7z, Oz$;
 б) $6y^2 + 5z^2 = 30, Oy$.

2.27. а) $5x^2 - 7y^2 = 35$, Ox ;

б) $x = 2$, $y = -4$, Oz .

2.28. а) $3x^2 = -2z$, Oz ;

б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox .

2.29. а) $5y^2 - 9z^2 = 40$, Oz ;

б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .

2.30. а) $3x^2 = -4y$, Oz ;

б) $4x^2 + 3z^2 = 12$, Oz .

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

3.1. а) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = x$.

3.2. а) $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 3$ ($z > 0$);

б) $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $y + z = 5$.

3.3. а) $y^2 + 3z^2 = 6$, $3x^2 - 25y^2 = 75$, $z \geq 0$;

б) $x = 4$, $y = 2$, $x + 2y + 3z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$.

3.4. а) $z = 5y$, $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$;

б) $x + y + z = 5$, $3x + y = 5$, $2x + y = 5$, $y = 0$, $z = 0$.

3.5. а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$;

б) $8(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.6. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + 5y^2$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

3.7. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

3.8. а) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.9. а) $z = x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $z = 8(x^2 + y^2) + 3$, $z = 16x + 3$.

3.10. а) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$;

б) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

3.11. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$, $z = 0$;

б) $z = 10(x^2 + y^2) + 1$, $z = 1 - 20y$.

- 3.12. a) $y = x, y = 0, x = 1, z = \sqrt{xy}, z = 0$;
 б) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2$.
- 3.13. a) $y = x, y = 0, x = 2, z = 0$;
 б) $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 2x, z = 0$.
- 3.14. a) $2z = x^2 + y^2, z = 0, x = 2, y = 3, x = 0, y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 4x, z = 0, z = x$.
- 3.15. a) $x^2 + y^2 = 4z^2, z = 0, y = x, y = 8x, x = 2, z > 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 8y, z = 0, y + z = 6$.
- 3.16. a) $y^2 + 4z^2 = 8, 16x^2 - 49y^2 = 784, z \geq 0$;
 б) $x = 1, y = 3, x + 5y + 10z = 20, x = 0, y = 0, z \geq 0$.
- 3.17. a) $z = 3y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$;
 б) $x + 2y + 3z = 6, 2x = y, 2x + 3y = 6, y = 0, z = 0$.
- 3.18. a) $y = 4x, y = 0, x = 1, z = xy, z = 0$;
 б) $4(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, z \geq 0$.
- 3.19. a) $y = 2x, x = 0, x = 2, z = 2x^2 + y^2, z = 0$;
 б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$.
- 3.20. a) $y = 4x, y = 0, x = 4, z = \sqrt{xy}, z = 0$;
 б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + z^2 = y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
- 3.21. a) $y = 3x, y = 0, x = 3, z = xy, z = 0$;
 б) $4(x^2 + y^2) = z^2, 4(x^2 + y^2) = 1, y \geq 0, z \geq 0$.
- 3.22. a) $z^2 = 16x^2 + y^2, z = 0, y = 2x, y = 0, x = 1$;
 б) $z - 4 = 6(x^2 + y^2), z = 4x + 1$.
- 3.23. a) $y = 3x, y = 0, x = 3, z = \sqrt{xy}, z = 0$;
 б) $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 5 - x^2 - y^2$.
- 3.24. a) $y = 3x, y = 0, x = 2, z = x^2 + y^2, z = 0$;
 б) $z - 2 = 6(x^2 + y^2), z = 1 - 4y$.
- 3.25. a) $y = 2x, y = 0, x = 4, z = \sqrt{xy}, z = 0$;
 б) $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0, x = 0$.
- 3.26. a) $z = 2x^2 + 3y^2, z = 0, x = 2, y = 1, x = 0, y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 6x, z = 0, z = 2x$.

- 3.27. а) $4(x^2 + y^2) = z^2, z = 0, y = x, y = 4x, x = 2 (z > 0)$;
 б) $x^2 + y^2 = 4y, z = 0, y + z = 6$.
- 3.28. а) $2y^2 + z^2 = 4, 3x^2 - 8y^2 = 48, z \geq 0$;
 б) $x = 1, y = 3, x + 2y + 4z = 24, x = 0, y = 0, z \geq 0$.
- 3.29. а) $z = 3y^2, x^2 + y^2 = 9, z = 0$;
 б) $x + y + z = 8, x + 2y = 4, x + 4y = 4, y = 0, z = 0$.
- 3.30. а) $y = 5x, y = 0, x = 3, z = 0$;
 б) $4(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение типового варианта

1. Построить данные поверхности и определить их вид (название):

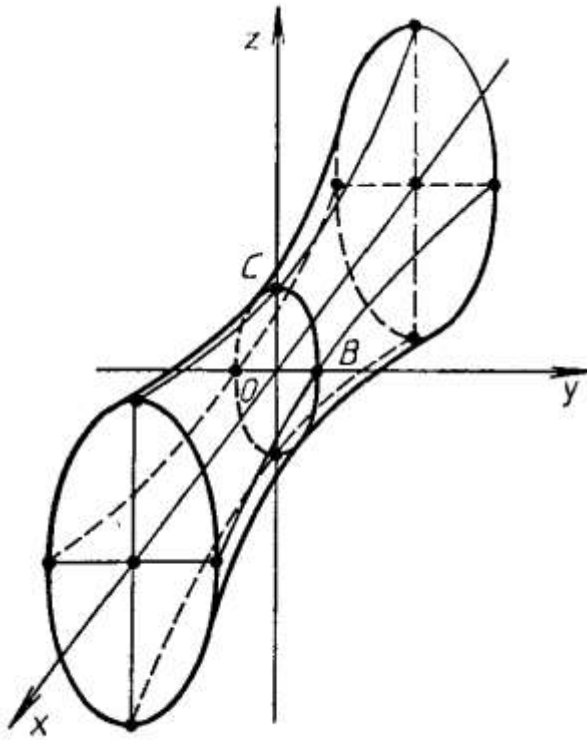
а) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$.

б) $3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0$.

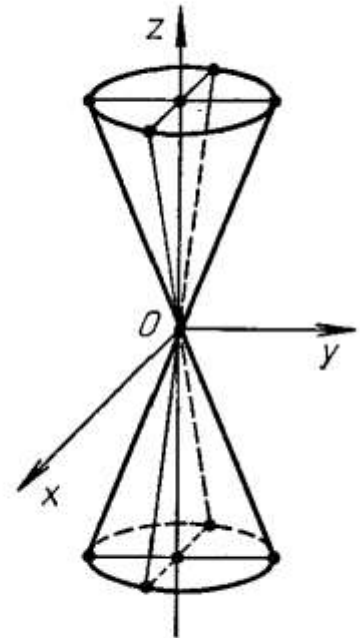
а) Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Получили уравнение гиперboloида, расположенного так, как показано на рис. 4.21; полуоси его "горлового" эллипса $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $OC = 2$;



Р и с. 4.21



Р и с. 4.22

б) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 4.22 образом. Его сечения плоскостями $z = \text{const}$ являются эллипсами.

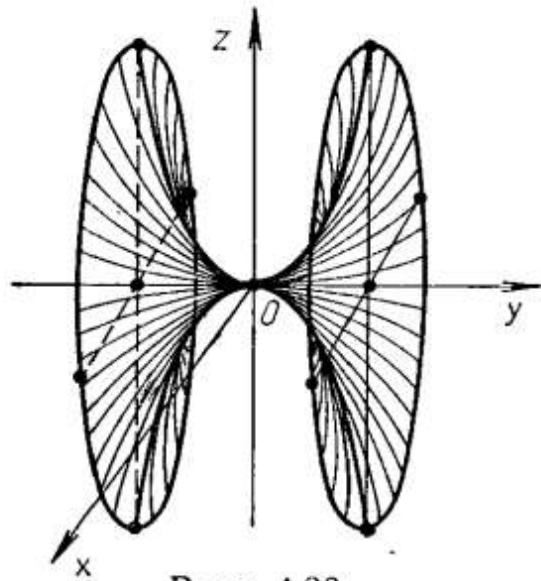
2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

- 1) Параболы $z = -\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy б) вокруг оси Oz ;
- 2) Эллипса $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$: Вокруг оси Oz ; б) Вокруг оси Oy .

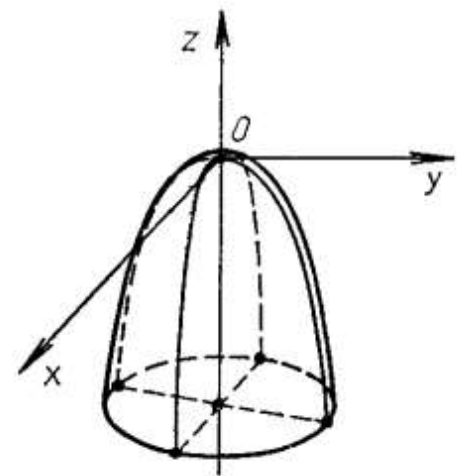
1. В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения (см. § 4.2) находим:

- а) $\pm\sqrt{x^2 + z^2} = -\frac{1}{2}y^2, 4x^2 - y^4 + 4z^2 = 0$ (алгебраическая поверхность четвертого порядка (рис. 4.23));

б) $z = -\frac{1}{2} (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2, z = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ (параболоид вращения (рис. 4.24)).



Р и с. 4.23

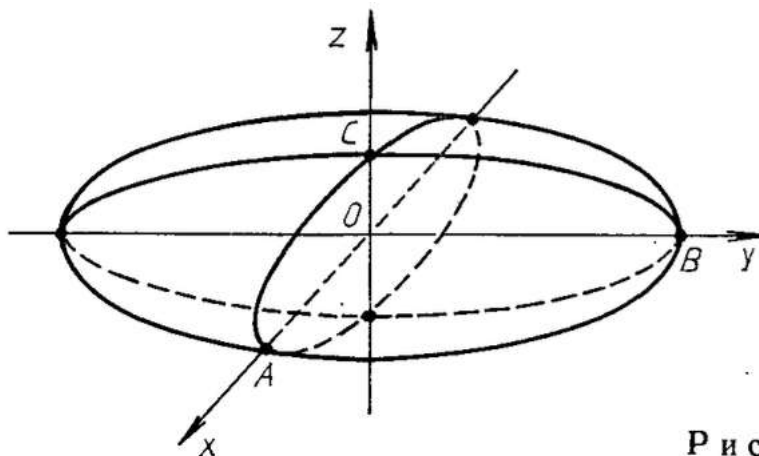


Р и с. 4.24

2. Имеем:

$$а) \frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1, \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$$

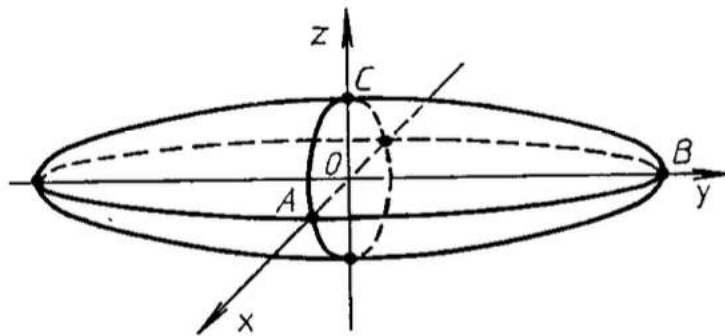
Получили сплюснутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA = OB = 8, OC = 2$ (рис. 4.25);



Р и с. 4.25

$$б) \frac{y^2}{64} + \frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{4} = 1 \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$$

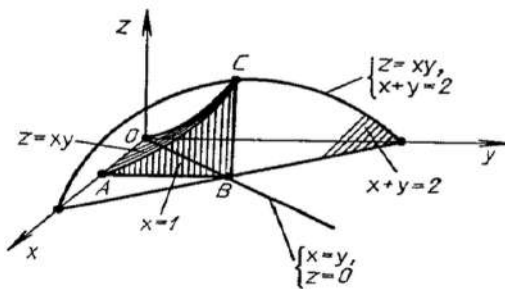
(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (рис. 4.26) $OA = OC = 2$, $OB = 8$).



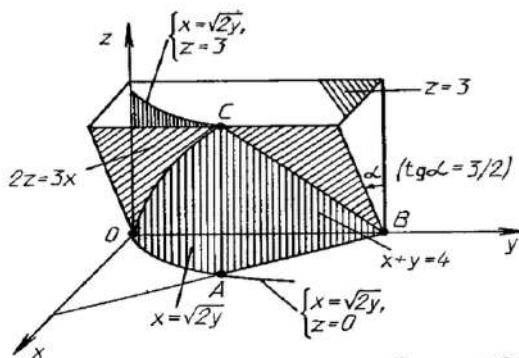
Р и с. 4.26

3. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

- а) $y = x, x = 1, z = 0, z = xy$;
б) $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, 3x = 2z, z = 0$.



Р и с. 4.27



Р и с. 4.28

- а) Построение выполнено на рис. 4.27: ОС - дуга параболы, являющейся пересечением гиперболического параболоида $z = xy$ с плоскостью $\gamma = y$; $\widetilde{AC}$ - пересечение поверхности $z = xy$ с

плоскостью $x = 1$; $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$ характерные точки тела;

б) Построение выполнено на рис. 4.28: OC - дуга параболы, являющейся пересечением параболического цилиндра с плоскостью $2z = 3x$; $A(2,2,0)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,3)$ - характерные точки тела.

Теоретические вопросы

1. Запишите общий вид кривой второго порядка на плоскости.
2. Запишите формулы перехода от декартовой системы координат к полярной.
3. Дайте определение окружности.
4. Запишите каноническую формулу окружности.
5. Дайте определение эллипса.
6. Запишите каноническую формулу эллипса.
7. Дайте определение гиперболы.
8. Запишите каноническую формулу гиперболы.
9. Дайте определение параболы.
10. Запишите каноническую формулу параболы.
11. Что такое большая и малая полуоси?
12. Что такое действительная и мнимая полуоси?
13. Что характеризует эксцентриситет?
14. Как приводим общее уравнение второго порядка к канонической форме?
15. Как строить линии в полярной системе координат?

Список литературы

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Лань, 2017. – 448 с. – URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике- М.: Айрис Пресс, 2017. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.).
3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>
4. Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Мир и образование, 2014, 2017. — 368 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.).
5. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы
Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).