



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Астраханский государственный технический университет"
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт информационных технологий
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Контрольно - измерительные материалы по теме

«Аналитическая геометрия на плоскости.

Аналитическая геометрия в пространстве».

Астрахань 2025 г

Составитель: *Франгулова Е.В., старший преподаватель кафедры
«Высшая и прикладная математика»*

Рецензент: *Ильясова А.К. к.ф. - м.н, доцент кафедры «Высшая и
прикладная математика».*

Учебно - методическое пособие рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры протокол заседания № 6 от 03.07.2025 г.

Учебно - методическое пособие

Контрольно - измерительные материалы составлены в соответствии с действующей программой по курсу «Алгебра и геометрия», предусмотренной Государственным стандартом высшего профессионального образования.

Учебно - методическое пособие содержит 30 вариантов индивидуальных домашних заданий, включающих задачи на отработку темы «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

Задания следует выполнять в тонких тетрадях. Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале группы. После выполнения работы тетрадь сдается на проверку преподавателю.

Затем студент проходит опрос по пройденной теме, который включает пояснение по выполненным задачам, решение задач, предложенных преподавателем и опрос по теоретическому материалу. Список теоретических вопросов представлен в конце пособия.

Минимальное количество баллов, которое можно получить – 10, максимальное – 15.

В конце каждого раздела идет подробный разбор решения демонстрационного варианта.

Учебно - методическое пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия».

ИДЗ 3.1

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$.

Составить уравнение:

- а) плоскости A_1, A_2, A_3 ;
- б) прямой A_1, A_2 ;
- в) прямой $A_4 M$, перпендикулярной к плоскости A_1, A_2, A_3 ;
- г) прямой $A_3 N$, параллельной прямой A_1, A_2 ;
- д) плоскости, проходящей через точку A_4 , перпендикулярно к прямой A_1, A_2 .

Вычислить:

- е) синус угла между прямой A_1, A_4 , и плоскостью A_1, A_2, A_3 ;
- ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью A_1, A_2, A_3 .

Варианты:

- 1.1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$;
(Ответ: е) 0.396619; ж) 0.058421)
- 1.2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$;
(Ответ: е) 0.773021; ж) 0.468521)
- 1.3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$;
(Ответ: е) 0.824485; ж) 0.741999)
- 1.4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$;
(Ответ: е) 0.414237; ж) 0.545455)
- 1.5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$;
(Ответ: е) 0.257881; ж) 0.154303)
- 1.6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$;
(Ответ: е) 0.303196; ж) 0.198762)
- 1.7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$;
(Ответ: е) 0.533571; ж) 0.536895)
- 1.8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$;
(Ответ: е) 0.777029; ж) 0.761939)

- 1.9.** $A_1(7, 5, 3), A_2(9, 4, 4), A_3(4, 5, 7), A_4(7, 9, 6);$
(Ответ: е) 0.440157; ж) 0.314102)
- 1.10.** $A_1(6, 8, 2), A_2(5, 4, 7), A_3(2, 4, 7), A_4(7, 3, 7);$
(Ответ: е) 0.27501; ж) 0.486513)
- 1.11.** $A_1(4, 2, 5), A_2(0, 7, 1), A_3(0, 2, 7), A_4(1, 5, 0);$
(Ответ: е) 0.408248; ж) 0)
- 1.12.** $A_1(4, 4, 10), A_2(7, 10, 2), A_3(2, 8, 4), A_4(9, 6, 9);$
(Ответ: е) 0.999654; ж) 0)
- 1.13.** $A_1(4, 6, 5), A_2(6, 9, 4), A_3(2, 10, 10), A_4(7, 5, 9);$
(Ответ: е) 0.93413; ж) 0.766261)
- 1.14.** $A_1(3, 5, 4), A_2(8, 7, 4), A_3(5, 10, 4), A_4(4, 7, 8);$
(Ответ: е) 0.743784; ж) 0.350857)
- 1.15.** $A_1(10, 9, 6), A_2(2, 8, 2), A_3(9, 8, 9), A_4(7, 10, 3);$
(Ответ: е) 0.120822; ж) 0.613121)
- 1.16.** $A_1(1, 8, 2), A_2(5, 2, 6), A_3(5, 7, 4), A_4(4, 10, 9);$
(Ответ: е) 0.398527; ж) 0.365148)
- 1.17.** $A_1(6, 6, 5), A_2(4, 9, 5), A_3(4, 6, 11), A_4(6, 9, 3);$
(Ответ: е) 0.971825; ж) 0.933333)
- 1.18.** $A_1(7, 2, 2), A_2(-5, 7, -7), A_3(5, -3, 1), A_4(2, 3, 7);$
(Ответ: е) 0.00164; ж) 0.141899)
- 1.19.** $A_1(8, -6, 4), A_2(10, 5, -5), A_3(5, 6, -8), A_4(8, 10, 7);$
(Ответ: е) 0.733913; ж) 0.094286)
- 1.20.** $A_1(1, -1, 3), A_2(6, 5, 8), A_3(3, 5, 8), A_4(8, 4, 1);$
(Ответ: е) 0.158416; ж) 0.199007)
- 1.21.** $A_1(1, -2, 7), A_2(4, 2, 10), A_3(2, 3, 5), A_4(5, 3, 7);$
(Ответ: е) 0.49019; ж) 0.696766)
- 1.22.** $A_1(4, 2, 10), A_2(1, 2, 0), A_3(3, 5, 7), A_4(2, -3, 5);$
(Ответ: е) 0.975235; ж) 0.945905)
- 1.23.** $A_1(2, 3, 5), A_2(5, 3, -7), A_3(1, 2, 7), A_4(4, 2, 0);$
(Ответ: е) 0.890043; ж) 0.890043)
- 1.24.** $A_1(5, 3, 7), A_2(-2, 3, 5), A_3(4, 2, 10), A_4(1, 2, 7);$
(Ответ: е) 0.754268; ж) 0.514496)
- 1.25.** $A_1(4, 3, 5), A_2(1, 9, 7), A_3(0, 2, 0), A_4(5, 3, 10);$
(Ответ: е) 0.472561; ж) 0.853595)

- 1.26. $A_1(3, 2, 5), A_2(4, 0, 6), A_3(2, 6, 5), A_4(6, 4, -1)$;
(Ответ: е) 0.127873; ж) 0.766406)
- 1.27. $A_1(2, 1, 6), A_2(1, 4, 9), A_3(2, -5, 8), A_4(5, 4, 2)$;
(Ответ: е) 0.869731; ж) 0.961524)
- 1.28. $A_1(2, 1, 7), A_2(3, 3, 6), A_3(2, -3, 9), A_4(1, 2, 5)$;
(Ответ: е) 0.889898; ж) 0.904534)
- 1.29. $A_1(2, -1, 7), A_2(6, 3, 1), A_3(3, 2, 8), A_4(2, -3, 7)$;
(Ответ: е) 0.318981; ж) 0.441129)
- 1.30. $A_1(0, 4, 5), A_2(3, -2, 1), A_3(4, 5, 6), A_4(3, 3, 2)$.
(Ответ: е) 0.688757; ж) 0.816497)

2. Решить следующие задачи:

- 2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$;
(Ответ: 15, 15/4, 3)
- 2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6), M_2(-1, 7, 10)$;
(Ответ: $x - y - 2z + 22 = 0$)
- 2.3. Найти расстояние от точки $M(2, 0, -0.5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$;
(Ответ: 4)
- 2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy ;
(Ответ: $z - 5 = 0$)
- 2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$;
(Ответ: $y + 5z = 0$)
- 2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1), B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy ;
(Ответ: $9x - 3 = 0$)
- 2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$;
(Ответ: $y - z - 4 = 0$)

- 2.8.** Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$;
(Ответ: $x + 2y - 2z - 1 = 0$)
- 2.9.** Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$;
(Ответ: $3x - y - 7z + 9 = 0, 5y + 2z = 0$)
- 2.10.** Составить уравнение плоскости в “отрезках”, если он проходит через точку $M(6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz – отрезок $c = 2$;
(Ответ: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$)
- 2.11.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $a = (4, 1, -1)$ и $b = (2, -1, 2)$;
(Ответ: $x - 10y - 6z + 4 = 0$)
- 2.12.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 0), B(2, -1, -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$;
(Ответ: $x + 2y - 3z - 3 = 0$)
- 2.13.** Составить уравнение плоскости, проходящей начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$;
(Ответ: $14x + 9y - z = 0$)
- 2.14.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2), B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $a = (5, -2, -1)$;
(Ответ: $2x + 9y - 8z + 19 = 0$)
- 2.15.** Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $(\overrightarrow{AB})$, если $A(5, -2, 3), B(1, -3, 5)$;
(Ответ: $4x + y - 2z = 0$)
- 2.16.** Найти величины отрезком, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2, -3, 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$;
(Ответ: $2, 6, 2$)

- 2.17.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку $M_1 M_2$, если $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$;
(Ответ: $3x + y - z = 0$)
- 2.18.** Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости;
(Ответ: 1) Нет; 2) Да)
- 2.19.** Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -4, 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz ;
(Ответ: $y + 4 = 0$)
- 2.20.** Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3, -5, 2)$;
(Ответ: $2x - 3z = 0$)
- 2.21.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz ;
(Ответ: $x + 2y - 5 = 0$)
- 2.22.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$;
(Ответ: $10x + 13y + 12z - 47 = 0$)
- 2.23.** Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$;
(Ответ: Проекция M на плоскость: $(6, -5, 1)$)
- 2.24.** Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны;
(Ответ: $B = 6$)
- 2.25.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины;
(Ответ: $x + y + z + 5 = 0$)
- 2.26.** При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?
(Ответ: $A = -1$, $n = -6$)

- 2.27.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$;
(Ответ: $7x + 4y + 3z - 23 = 0$)
- 2.28.** Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$;
(Ответ: $9x - 5y - 16z = 0$)
- 2.29.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $a = (4, 4, 3)$;
(Ответ: $2x - 5y + 4z + 31 = 0$)
- 2.30.** Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.
(Ответ: $C = 15$)

3. Решить следующие задачи.

- 3.1.** Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$ и $x - 2y + 2z - 8 = 0$, $x + 6z - 6 = 0$;
(Ответ: $(1, -1, 0)$)
- 3.2.** Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельно плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости;
(Ответ: $(-1, -1, 3)$)
- 3.3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -3, 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° и 120° ;
(Ответ: $(1, -3, 3)$)
- 3.4.** Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-6}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$;
(Ответ: $(1, -2, 1)$)
- 3.5.** Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 1, -4)$, $C(0, 2, 3)$, проведенной из вершины C ;
(Ответ: $x = 2t$, $y = -3t + 2$, $z = 17t + 3$)

- 3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z + 8 = 0. \end{cases}$;
(Ответ: $n = -2$)
- 3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$;
(Ответ: $(3, -1, 4)$)
- 3.8. Найти проекцию точки $P(3, 1, -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$;
(Ответ: $(\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, \frac{-1}{14})$)
- 3.9. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны?
(Ответ: $C = 6$)
- 3.10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?
(Ответ: $A = -1$)
- 3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?
(Ответ: $m = -6, C = 1,5$)
- 3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5, y = -3t + 1, z = -7t - 4$;
(Ответ: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}$)
- 3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0, 0, 2), B(4, 2, 5)$ и $C(12, 6, 11)$;
(Ответ: Да, лежат)
- 3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $2x - y + 3z - 1 = 0, 5x + 4y - z - 7 = 0$;
(Ответ: $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$)

- 3.15.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -3, 4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$;
(Ответ: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{3}$)
- 3.16.** При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?
(Ответ: $A = 4, B = -8$)
- 3.17.** Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7, y = t - 2, z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости;
(Ответ: 1) Паралл-на пл-ти: Да; 2) Лежит на пл-ти: Да)
- 3.18.** Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3, 1, -2)$;
(Ответ: $x + 3y = 0$)
- 3.19.** Показать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0, 2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярны;
- 3.20.** При каком значении D прямая $3x - y + 2z - 6 = 0, x + 4y - z + D = 0$ пересекает ось Oz ?
(Ответ: $D = 3$)
- 3.21.** При каком значении p прямые
$$\left. \begin{aligned} x &= 2t + 5, \\ y &= -t + 2, \\ z &= pt - 7 \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} 2x + 3y + z + 2 &= 0, \\ x - y - 3z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$
 параллельны?
(Ответ: $p = 1$)
- 3.22.** Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$;
(Ответ: $M(2, 0, 1)$)
- 3.23.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz ;
(Ответ: $y + 5 = 0$)

- 3.24.** Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$;
(Ответ: $x + 2y - z + 5 = 0, 2x - 5z = 0$)
- 3.25.** При каких значениях B и D прямая $x - 2y + z - 9 = 0, 3x + By + z + D = 0$ лежит в плоскости Oxy ?
(Ответ: $B = -6, D = -27$)
- 3.26.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M^0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $a = (-1, -3, 1)$ и $b = (4, 1, 6)$;
(Ответ: $19x - 10y - 11z + 25 = 0$)
- 3.27.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox ;
(Ответ: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{0}$)
- 3.28.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$;
(Ответ: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$)
- 3.29.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и $x = 3t + 1, y = -t - 5, z = 2t + 3$;
(Ответ: $\frac{x-1}{5} = \frac{y+5}{-7} = \frac{z-3}{-11}$)
- 3.30.** Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.
(Ответ: $M_1(0, 15, 14)$)

Решение типового варианта

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8), A_2(-1, 13, 0), A_3(2, 4, 9), A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

а) плоскости: $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2 ;

в) прямой A_4M перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N параллельной прямой A_1A_2 .

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

➤ а) Используя формулу (3,4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-8}{8};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2 , то их направляющие векторы s_1 и s_2 можно считать совпадающими: $s_1 = s_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) Направляющий вектор прямой A_1A_4 $s_3 = (-3, 1, 1)$. По формуле (3.18)

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot (-3) + (-7) \cdot 1 + (-9) \cdot 1|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{34}{\sqrt{11} \sqrt{166}} \approx 0,8$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{0 \cdot 6 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-9)}{\sqrt{1} \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2}} = -\frac{9}{\sqrt{166}} \approx -0,7$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4,3,1)$ и $N(-2,0,-1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

➤ Согласно формуле (3.9), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{(x-1)}{-4} = \frac{(y-1)}{0} = \frac{(z+1)}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4,3,1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4) + B(y-3) + C(z-1) = 0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2,0,-1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4) + B(0-3) + C(-1-1) = 0 \text{ или } 6A + 3B + 2C = 0$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB , то с учетом условия параллельности (3.16) имеем:

$$-4A + 0B + 1C = 0 \text{ или } 4A - C = 0$$

Решаем систему

$$\left. \begin{array}{l} 6A + 3B + 2C = 0 \\ 4A - C = 0 \end{array} \right\}$$

Находим, что $C = 4A$, $B = -\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x - 4) - \frac{14}{3}A(y - 3) + 12(z - 1) = 0.$$

3. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2 , симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

➤ Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2 , перпендикулярной к данной плоскости: $x = 6 + t$, $y = -4 + t$, $z = -2 + t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости. Найдем $t = 1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7, -3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2 , то верны равенства (см. пример 1 из §2.2):

$$7 = \frac{(6 + x_2)}{2}, -3 = \frac{(-4 + y_2)}{2}, -1 = \frac{(-2 + z_2)}{2},$$

Из которых находим координаты точки M_2 : $x_2 = 8, y_2 = -2, z_2 = 0$.

ИДЗ-3.2

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Найти:

- а) уравнение стороны AB;
- б) уравнение высоты CH;
- в) уравнение медианы AM;
- г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;
- д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
- е) расстояние от точки C до прямой AB.

Варианты:

- 1.1. $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$;
(Ответ: г) (8.2, 4); ж) 8.75)
- 1.2. $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$;
(Ответ: г) (7.29, 4.33); ж) 6.43)
- 1.3. $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$;
(Ответ: г) (3, 1); ж) 13.42)
- 1.4. $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$;
(Ответ: г) (2, 1.5); ж) 9.39)
- 1.5. $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$;
(Ответ: г) (4.71, 3.57); ж) 7.16)
- 1.6. $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$, $C(6, 1)$;
(Ответ: г) (2.4, 2.2); ж) 6.32)
- 1.7. $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$;
(Ответ: г) Нет пересечения; ж) 8.94)
- 1.8. $A(4, -3)$, $B(7, 3)$, $C(1, 10)$;
(Ответ: г) (4, 8.5); ж) 8.5)
- 1.9. $A(4, -4)$, $B(8, 2)$, $C(3, 8)$;
(Ответ: г) (5.7, 6.2); ж) 7.49)
- 1.10. $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$;
(Ответ: г) (3, -1); ж) 13.42)

- 1.11. $A(1, -6), B(3, 4), C(-3, 3)$;
(Ответ: Γ) (0.12, 2.38); $\mathcal{K}$) 5.69)
- 1.12. $A(-4, 2), B(8, -6), C(2, 6)$;
(Ответ: Γ) (-1.1, 1.35); $\mathcal{K}$) 6.66)
- 1.13. $A(-5, 2), B(0, -4), C(5, 7)$;
(Ответ: Γ) (-1.3, 1.75); $\mathcal{K}$) 10.88)
- 1.14. $A(4, -4), B(6, 2), C(-1, 8)$;
(Ответ: Γ) (2.18, 6.94) ; $\mathcal{K}$) 8.54)
- 1.15. $A(-3, 8), B(-6, 2), C(0, -5)$;
(Ответ: Γ) (-3, -3.5); $\mathcal{K}$) 8.5)
- 1.16. $A(6, -9), B(10, -1), C(-4, 1)$;
(Ответ: Γ) (4, -3); $\mathcal{K}$) 13.42)
- 1.17. $A(4, 1), B(-3, -1), C(7, -3)$;
(Ответ: Γ) (5.3, 2.95); $\mathcal{K}$) 4.67)
- 1.18. $A(-4, 2), B(6, -4), C(4, 10)$;
(Ответ: Γ) (-0.57, 2.38); $\mathcal{K}$) 10.98)
- 1.19. $A(3, -1), B(11, 3), C(-6, 2)$;
(Ответ: Γ) (6, -22); $\mathcal{K}$) 6.71)
- 1.20. $A(-7, -2), B(-7, 4), C(5, -5)$;
(Ответ: Γ) (-19, -5); $\mathcal{K}$) 12)
- 1.21. $A(-1, -4), B(9, 6), C(-5, 4)$;
(Ответ: Γ) (0, -1); $\mathcal{K}$) 8.49)
- 1.22. $A(10, -2), B(4, -5), C(-3, 1)$;
(Ответ: Γ) (-1.5, -2); $\mathcal{K}$) 8.5)
- 1.23. $A(-3, -1), B(-4, -5), C(8, 1)$;
(Ответ: Γ) (92, -20); $\mathcal{K}$) 10.19)
- 1.24. $A(-2, -6), B(-3, 5), C(4, 0)$;
(Ответ: Γ) (-0.35, -0.4); $\mathcal{K}$) 6.52)
- 1.25. $A(-7, -2), B(3, -8), C(-4, 6)$;
(Ответ: Γ) (-8.98, -2.31); $\mathcal{K}$) 8.4)
- 1.26. $A(0, 2), B(-7, -4), C(3, 2)$;
(Ответ: Γ) (1.31, 3.97); $\mathcal{K}$) 1.95)
- 1.27. $A(7, 0), B(1, 4), C(-8, -4)$;
(Ответ: Γ) (-5.33, 0); $\mathcal{K}$) 11.65)

1.28. $A(1, -3), B(0, 7), C(-2, 4)$;
(Ответ: г) $(-0.68, 4.13)$; ж) 2.29)

1.29. $A(-5, 1), B(8, -2), C(1, 4)$;
(Ответ: г) $(0.31, 1)$; ж) 4.27)

1.30. $A(2, 5), B(-3, 1), C(0, 4)$.
(Ответ: г) $(0.22, 3.73)$; ж) 0.47)

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3;
(Ответ: $x+3y-13=0$)

2.2. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$;
(Ответ: $A_1(-2, 3)$)

2.3. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4, 4), B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C ;
(Ответ: $C(4, 8)$)

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$;
(Ответ: $x-2y+4=0$)

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$;
(Ответ: $y=2x-7$)

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция, если $A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(-5, 5)$;
(Ответ: Не является трапецией)

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC , если $B(2, 5), C(1, 0)$;
(Ответ: $x+5y-8=0$)

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN , если $M(-3, -2), N(1, 6)$;
(Ответ: $2x-y+5=0$)

- 2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$;
(Ответ: $M_1(\frac{-4}{5}, \frac{23}{5})$)
- 2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$;
(Ответ: $O(3, \frac{1}{3})$)
- 2.11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс;
(Ответ: $y=-1$)
- 2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x+y=12$, его высот BH $5x-4y=12$ и AM $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC ;
(Ответ: $4x+y-12=0(AB)$, $3x-y-5=0(AC)$, $x+2y-2=0(BC)$)
- 2.13. Даны вершины треугольника ABC : $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH ;
(Ответ: $M(\frac{10}{17}, \frac{62}{17})$)
- 2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$;
(Ответ: $3x+5y+2=0$, $9x+2y-28=0$)
- 2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(5, 0)$;
(Ответ: $M(3, \frac{2}{3})$)
- 2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC , зная уравнения его сторон:
 $AB-2x-y-3=0$, $AC-x+5y-7=0$, $BC-3x-2y+13=0$, $AC-x+5y-7=0$,
 $BC-3x-2y+13=0$;
(Ответ: $2x+3y-7=0$)
- 2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ и $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C ;
(Ответ: $2x+y+2=0$, $d=\frac{54}{\sqrt{17}} \approx 13,1$)

- 2.18.** Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $2x+3y+4=0$;
(Ответ: $6x+11y=0$)
- 2.19.** Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат;
(Ответ: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$)
- 2.20.** Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей;
(Ответ: $y=x-2$, $y=-3x+4$)
- 2.21.** Составить уравнения медианы CM и высоты $СК$ треугольника ABC , если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$;
(Ответ: $7x-y+3=0(CM)$, $4x+3y+16=0(СК)$)
- 2.22.** Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox ; в) параллельную оси Oy ;
(Ответ: $x+y-7=0$, $y=2$, $x=5$)
- 2.23.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 90° , в) 0° ;
(Ответ: $x-y+5=0$, $x+2=0$, $y-3=0$)
- 2.24.** Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6, -6)$ и $B(-3, -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3?
(Ответ: $y=10$)
- 2.25.** Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4, -3)$ и $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda=\frac{2}{3}$;
(Ответ: $y=0.5x+0.5$)
- 2.26.** Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$.
Найти уравнение второй диагонали;
(Ответ: $x-y-1=0$)
- 2.27.** Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$;
(Ответ: $E(\frac{5}{3}, 1)$)

- 2.28.** Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$;
(Ответ: $x-5y+6=0$, $5x+y+4=0$)
- 2.29.** Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ (AB) и координаты его вершины $A(2, 3)$.
Найти уравнения сторон AB и AC треугольника;
(Ответ: $2x-y-1=0(AB)$, $3x+2y-12=0(AC)$)
- 2.30.** Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$.
Найти уравнения двух других сторон.
(Ответ: $x-y-4=0$, $x-2y-10=0$)

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(4,3)$, $B(-3, -3)$, $C(2,7)$. Найти:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CH ;
- в) уравнение медианы AM ;
- г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- е) расстояние от точки C до прямой AB .

➤ а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), получим уравнение стороны AB :

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3'}$$

откуда

$$6(x-4) = 7(y-3) \text{ или } 6x-7y-3 = 0;$$

б) Согласно уравнению (3.20), угловой коэффициент прямой AB $k_1 = 6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH (см. формулу (3.28)) угловой коэффициент высоты CH $k_2 = -7/6$ ($k_1 k_2 = -1$). По точке $C(2,7)$ и угловому коэффициенту $k_2 = -7/6$ составляем уравнение высоты CH (см. уравнение 3.21)):

$$y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2) \text{ или } 7x + 6y - 56 = 0;$$

в) По известным формулам (см. §2.2) находим координаты x , y середины M отрезка BC :

$$x = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}, y = \frac{(-3 + 7)}{2} = 2.$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM :

$$\frac{x - 4}{-1/2 - 4} = \frac{y - 3}{2 - 3} \text{ или } 2x - 9y + 19 = 0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 7x + 6y - 56 &= 0, \\ 2x - 9y + 19 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, получаем $N(26/5, 49/15)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину C , параллельна стороне AB , то их угловые коэффициенты равны $k = -6/7$. Тогда, согласно уравнению (3.21), по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD :

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2) \text{ или } 6x - 7y + 37 = 0;$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 + 37|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4,4.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис 3.4.

2. Известны вершины $O(0,0)$, $A(-2,0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2, -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

➤ Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y = 0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), по формулам деления отрезка пополам (см. §2.2) можно вычислить координаты вершины $D(x,y)$:

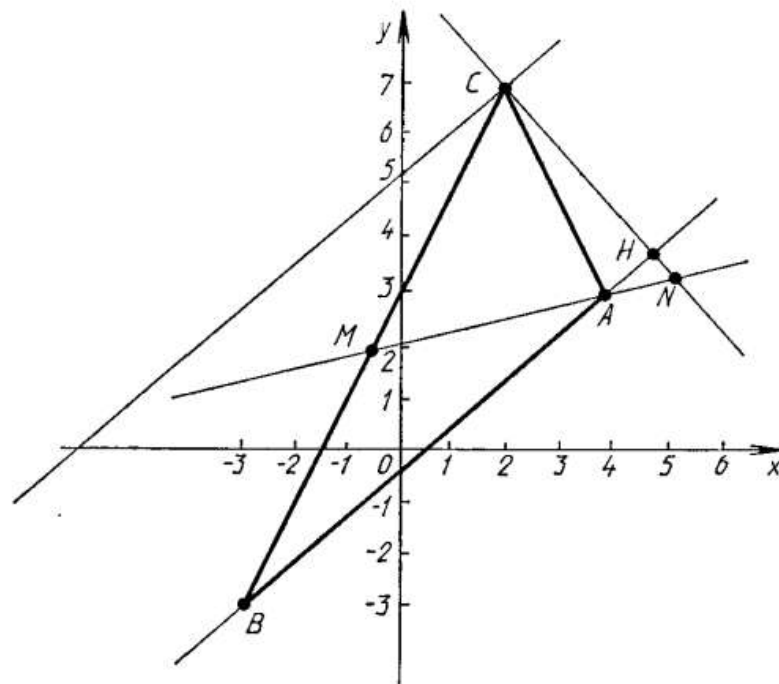
$$2 = \frac{-2 + x}{2}, -2 = \frac{0 + y}{2},$$

откуда $x = 6, y = -4$.

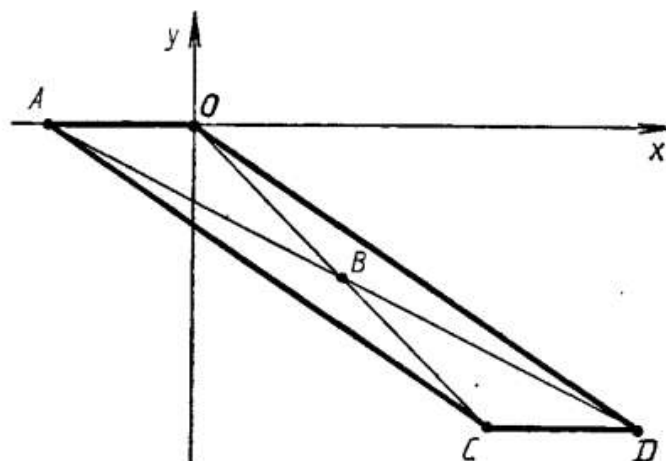
Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD : $y = -4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 0}{-4 - 0},$$

откуда $y = -\frac{2}{3}x, 2x + 3y = 0$.



Р и с. 3.4



Р и с. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт. Что она проходит через известную точку $A(-2, 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x + 2) \text{ или } 2x + 3y + 4 = 0.$$

Теоретические вопросы

1. Напишите формулу расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве.
2. Напишите формулы деления отрезка в данном соотношении.
3. Что называется уравнением линии на плоскости?
4. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Геометрический смысл углового коэффициента.
6. Чему равен угловой коэффициент вертикальной прямой, горизонтальной прямой?
7. Как соотносятся угловые коэффициенты параллельных и перпендикулярных прямых?
8. Напишите уравнение прямой, заданной двумя точками.
9. Напишите уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором
10. Напишите уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором.
11. Как найти точку пересечения двух прямых на плоскости?
12. Запишите уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором.
13. Запишите уравнение плоскости, если известны три точки, через которые она проходит.
14. Напишите общее уравнения прямой в пространстве и схему приведения их к каноническому виду.
15. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?
16. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?
17. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости?
18. Как найти угол между двумя плоскостями?
19. Как найти угол между двумя прямыми?
20. Как найти угол между плоскостью и прямой?
21. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?
22. Напишите формулу расстояния от точки до плоскости.
23. Как найти расстояние между двумя параллельными плоскостями?

Список литературы

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Лань, 2017. – 448 с. – URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике - М.: Айрис Пресс, 2017. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.).
3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>
4. Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Мир и образование, 2014, 2017. — 368 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.).
5. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы Ростов - н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).