



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Астраханский государственный технический университет"
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт информационных технологий
Кафедра «Высшая и прикладная математика»

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
Контрольно-измерительные материалы по теме
«Векторная алгебра».

Астрахань 2025 г

Составитель: *Франгулова Е.В., старший преподаватель кафедры
«Высшая и прикладная математика»*

Рецензент: *Ильясова А.К. к.ф.-м.н, доцент кафедры «Высшая и
прикладная математика».*

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры протокол заседания № 6 от 03.07.2025 г.

Учебно-методическое пособие

Контрольно-измерительные материалы составлены в соответствии с действующей программой по курсу «Алгебра и геометрия», предусмотренной Государственным стандартом высшего профессионального образования.

Учебно-методическое пособие содержит 30 вариантов индивидуальных домашних заданий, включающих задачи на отработку темы «Векторная алгебра»

Задания следует выполнять в тонких тетрадях. Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в журнале группы. После выполнения работы тетрадь сдается на проверку преподавателю.

Затем студент проходит опрос по пройденной теме, который включает пояснение по выполненным задачам, решение задач, предложенных преподавателем и опрос по теоретическому материалу. Список теоретических вопросов представлен в конце пособия.

Минимальное количество баллов, которое можно получить – 10, максимальное – 15.

В конце каждого раздела идет подробный разбор решения демонстрационного варианта.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия».

ИДЗ 2.1

1. Даны векторы $a = \alpha m + \beta n$ и $b = \gamma m + \delta n$, где $|m|=k$; $|n|=l$; $(\widehat{m, n}) = \varphi$.
Найти а) $(\lambda a + \mu b) * (v a + \tau b)$; б) пр. $(v a + \tau b)$; в) $(\widehat{a, \tau b})$

1.1. $\alpha = -5, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = 6, k = 3, l = 5, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = \frac{1}{3}, v = 1, \tau = 2$.

(Ответ: а) 2834)

1.2. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 4, \delta = -1, k = 1, l = 3, \varphi = \pi, \lambda = 3, \mu = 2, v = -2, \tau = 4$

(Ответ: а) -950)

1.3. $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = -3, \delta = -1, k = 4, l = 5, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = 3, v = -1, \tau = 5$.

(Ответ: а) -1165)

1.4. $\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = -6, \delta = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -1, \mu = \frac{1}{2}, v = 5, \tau = 1$.

(Ответ: а) 410)

1.5. $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = -4, \delta = 5, k = 2, l = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -3, v = 5, \tau = 1$.

(Ответ: а) 750)

1.6. $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = -3, \delta = 4, k = 2, l = 4, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -4, v = 2, \tau = 3$.

(Ответ: а) -2116)

1.7. $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4, \delta = -2, k = 2, l = 5, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 1, \mu = -3, v = 0, \tau = \frac{-1}{2}$.

(Ответ: а) 165)

1.8. $\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = 1, \delta = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \pi, \lambda = 1, \mu = -2, v = 3, \tau = -4$.

(Ответ: а) 121)

1.9. $\alpha = -3, \beta = -2, \gamma = 1, \delta = 5, k = 3, l = 6, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = -1, \mu = 2, v = 1, \tau = 1$.

(Ответ: а) 1287)

1.10. $\alpha = 5, \beta = -3, \gamma = 4, \delta = 2, k = 4, l = 1, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = \frac{-1}{2}, v = 3, \tau = 0$.

(Ответ: а) 2337)

1.11. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 3, \delta = -6, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = \frac{-1}{3}, v = 1, \tau = 2$.

(Ответ: а) -936)

1.12. $\alpha = -2, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = 1, k = 3, l = 2, \varphi = \frac{7\pi}{3}, \lambda = \frac{-1}{2}, \mu = 3, v = 1, \tau = 2$.

(Ответ: а) 320)

- 1.13. $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = -1, \delta = 2, k = 4, l = 5, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2$.
(Ответ: а) 352)
- 1.14. $\alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 5, \delta = 1, k = 2, l = 5, \varphi = 2\pi, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = 2, \tau = 3$.
(Ответ: а) 1809)
- 1.15. $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 5, \delta = 2, k = 4, l = 7, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = -3, \mu = 2, \nu = 2, \tau = -1$.
(Ответ: а) -5962)
- 1.16. $\alpha = -5, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 4, k = 5, l = 4, \varphi = \pi, \lambda = -3, \mu = \frac{1}{2}, \nu = -1, \tau = 1$.
(Ответ: а) 3348)
- 1.17. $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 3, \delta = 4, k = 2, l = 5, \varphi = \frac{\pi}{2}, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = 1, \tau = -2$.
(Ответ: а) -2076)
- 1.18. $\alpha = 7, \beta = -3, \gamma = 2, \delta = 6, k = 3, l = 4, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = \frac{-1}{2}, \nu = 2, \tau = 1$.
(Ответ: а) 1728)
- 1.19. $\alpha = 4, \beta = -5, \gamma = -1, \delta = 3, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -5, \nu = 1, \tau = 2$.
(Ответ: а) 1044)
- 1.20. $\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = -2, \delta = 3, k = 1, l = 6, \varphi = \frac{3\pi}{3}, \lambda = 4, \mu = 5, \nu = 1, \tau = -2$.
(Ответ: а) 1994)
- 1.21. $\alpha = -5, \beta = -6, \gamma = 2, \delta = 7, k = 2, l = 7, \varphi = \pi, \lambda = -2, \mu = 5, \nu = 1, \tau = 3$.
(Ответ: а) 29 767)
- 1.22. $\alpha = -7, \beta = 2, \gamma = 4, \delta = 6, k = 2, l = 9, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1, \tau = 3$.
(Ответ: а) 20 758)
- 1.23. $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -6, \delta = 2, k = 2, l = 9, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = 1, \tau = \frac{-1}{2}$.
(Ответ: а) 2751)
- 1.24. $\alpha = -5, \beta = -7, \gamma = -3, \delta = 2, k = 2, l = 11, \varphi = \frac{3\pi}{3}, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = -1, \tau = 2$. (Ответ: а) 38 587)
- 1.25. $\alpha = 5, \beta = -8, \gamma = -2, \delta = 3, k = 4, l = 3, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2$.
(Ответ: а) 1048)
- 1.26. $\alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 1, \delta = 7, k = 4, l = 6, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = 3, \nu = 3, \tau = -2$.
(Ответ: а) -2532)

- 1.27. $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = -6, k = 4, l = 5, \varphi = \pi, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -3, \tau = -1$.
(Ответ: а) 3956)
- 1.28. $\alpha = 6, \beta = -7, \gamma = -1, \delta = -3, k = 2, l = 6, \varphi = \frac{4\pi}{3}, \lambda = 3, \mu = -2, \nu = 1, \tau = 4$.
(Ответ: а) -12 880)
- 1.29. $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -2, k = 6, l = 3, \varphi = \frac{5\pi}{3}, \lambda = -2, \mu = \frac{-1}{2}, \nu = 3, \tau = 2$.
(Ответ: а) -2916)
- 1.30. $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 6, k = 4, l = 7, \varphi = \frac{\pi}{3}, \lambda = 2, \mu = \frac{-1}{2}, \nu = 3, \tau = 2$.
(Ответ: а) -801)

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти а) модуль вектора a ; б) скалярное произведение векторов a и b в проекцию вектора C на векторы d г) координаты точки M , делящие отрезок на l в отношении $\alpha:\beta$.

- 2.1. $A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), a = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{CB}, d = \overrightarrow{AC}, l = AB, \alpha = 5, \beta = 4$;
(Ответ: а) $\sqrt{4216}$; б) (314); г) $(-1, \frac{34}{9}, \frac{14}{3})$)
- 2.2. $A(4, 3, -2), B(-3, -1, 4), C(2, 2, 1), a = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{AC}, d = \overrightarrow{CB}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 3$;
(Ответ: а) $\sqrt{82}$; б) (-50); г) $(-1, \frac{1}{5}, \frac{14}{5})$)
- 2.3. $A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), a = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{BC}, d = \overrightarrow{AC}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 1$;
(Ответ: а) $\sqrt{1432}$; б) (-61); г) $(-1, \frac{-1}{3}, 2)$)
- 2.4. $A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), a = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BA}, c = b, d = \overrightarrow{AC}, l = BA, \alpha = 1, \beta = 4$;
(Ответ: а) $\sqrt{300}$; б) (78); г) $(-\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, \frac{-13}{5})$)
- 2.5. $A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 3), a = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BC}, c = b, d = \overrightarrow{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3$;
(Ответ: а) 11; б) (-20); г) $(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \frac{21}{5})$)
- 2.6. $A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), a = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = b, d = \overrightarrow{AC}, l = AC, \alpha = 1, \beta = 7$;
(Ответ: а) $\sqrt{410}$; б) (70); г) $(\frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{15}{4})$)

- 2.7. $A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), a = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 4;$
 (Ответ: а) $\sqrt{491}; 6) (4); r) (0, \frac{10}{3}, 1))$
- 2.8. $A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), a = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{AB},$
 $d = \overrightarrow{CB}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 1;$
 (Ответ: а) $\sqrt{1957}; 6) (-57); r) (\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}))$
- 2.9. $A(3, 4, 4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), a = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BA}, c = \overrightarrow{BA},$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{1265}; 6) (-294); r) (\frac{-4}{7}, \frac{13}{7}, \frac{2}{7}))$
- 2.10. $A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), a = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AC}, c = \overrightarrow{AC},$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 2;$
 (Ответ: а) $\sqrt{2846}; 6) (-420); r) (\frac{9}{5}, 2, -1))$
- 2.11. $A(-2, -3, -4), B(2, -4, 0), C(1, 4, 5), a = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{BC}, l = AB, \alpha = 4, \beta = 2;$
 (Ответ: а) $\sqrt{1712}; 6) (100); r) (\frac{2}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{-4}{3}))$
- 2.12. $A(-2, -3, -2), B(1, 4, 2), C(1, -3, 3), a = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1;$
 (Ответ: а) $\sqrt{856}; 6) (238); r) (1, \frac{-5}{4}, \frac{11}{4}))$
- 2.13. $A(5, 6, 1), B(-2, 4, -1), C(3, -3, 3), a = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AB}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 2;$
 (Ответ: а) $\sqrt{2649}; 6) (-160); r) (1, \frac{-1}{5}, \frac{7}{5}))$
- 2.14. $A(10, 6, 3), B(-2, 4, 5), C(3, -4, -6), a = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{BA}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = CB, \alpha = 1, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{9470}; 6) (-298); r) (\frac{13}{6}, \frac{-8}{3}, \frac{-25}{6}))$
- 2.15. $A(3, 2, 4), B(-2, 1, 3), C(2, -2, -1), a = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BA}, c = \overrightarrow{AC},$
 $d = \overrightarrow{BC}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 4;$
 (Ответ: а) $\sqrt{362}; 6) (-986); r) (\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}))$

- 2.16. $A(-2, 3, -4), B(3, -1, 2), C(4, 2, 4), a = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AB}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{CB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{4\ 109};$ б) (554); г) $(\frac{-4}{7}, \frac{13}{7}, \frac{-16}{7})$)
- 2.17. $A(4, 5, 3), B(-4, 2, 3), C(5, -6, -2), a = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AB}, l = BC, \alpha = 5, \beta = 1;$
 (Ответ: а) $\sqrt{12\ 089};$ б) (-263); г) $(\frac{7}{2}, \frac{-14}{3}, \frac{-7}{6})$)
- 2.18. $A(2, 4, 6), B(-3, 5, 1), C(4, -5, -4), a = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}, b = \overrightarrow{CA}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{BA}, l = BC, \alpha = 1, \beta = 4;$
 (Ответ: а) $\sqrt{5\ 988};$ б) (986); г) $(\frac{-5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$)
- 2.19. $A(-4, -2, -5), B(3, 7, 2), C(4, 6, -3), a = 9\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{BC}, l = BA, \alpha = 4, \beta = 3;$
 (Ответ: а) $\sqrt{16\ 740};$ б) (-1 308); г) $(-1, \frac{13}{7}, -2)$)
- 2.20. $A(5, 4, 4), B(-5, 2, 3), C(4, 2, -5), a = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = \overrightarrow{AB},$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1;$
 (Ответ: а) $\sqrt{11\ 150};$ б) (1 185); г) $(, \frac{7}{4}, 2, -3)$)
- 2.21. $A(3, 4, 6), B(-4, 6, 4), C(5, -2, -3), a = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}, b = \overrightarrow{BA}, c = \overrightarrow{CA},$
 $d = \overrightarrow{BC}, l = BA, \alpha = 5, \beta = 3;$
 (Ответ: а) $\sqrt{18\ 666};$ б) (-487); г) $(\frac{3}{8}, \frac{19}{4}, \frac{24}{4})$)
- 2.22. $A(-5, -2, -6), B(3, 4, 5), C(2, -5, 4), a = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{AB}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{BC}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{11\ 387};$ б) (1 549); г) $(-2, \frac{-23}{7}, \frac{-12}{7})$)
- 2.23. $A(3, 4, 1), B(5, -2, 6), C(4, 2, -7), a = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3;$
 (Ответ: а) $\sqrt{6\ 826};$ б) (-1 120); г) $(\frac{19}{5}, \frac{8}{5}, 3)$)
- 2.24. $A(4, 3, 2), B(-4, -3, 5), C(6, 4, -3), a = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}, b = \overrightarrow{BA}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{1\ 885};$ б) (-434); г) $(\frac{-8}{7}, -1, \frac{19}{7})$)

- 2.25. $A(-5, 4, 3), B(4, 5, 2), C(2, 7, -4), a = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{CA}, c = b, d = \overrightarrow{AB},$
 $l = BC, \alpha = 3, \beta = 4;$
 (Ответ: а) $\sqrt{608};$ б) $(-248);$ г) $(\frac{22}{7}, \frac{41}{7}, \frac{-4}{7})$)
- 2.26. $A(6, 4, 5), B(-7, 1, 8), C(2, -5, -7), a = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{CB},$
 $d = \overrightarrow{CB}, l = AB, \alpha = 3, \beta = 2;$
 (Ответ: а) $\sqrt{11\,899};$ б) $(697);$ г) $(\frac{-9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{34}{5}, -)$)
- 2.27. $A(6, 5, -4), B(-5, -2, 2), C(3, 3, 2), a = -6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}, b = \overrightarrow{AC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{CB}, l = BC, \alpha = 1, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{3\,789};$ б) $(396);$ г) $(\frac{-11}{3}, \frac{-7}{6}, 2))$
- 2.28. $A(-3, -5, 6), B(3, 5, -4), C(2, 6, 4), a = 4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}, b = \overrightarrow{CB}, c = \overrightarrow{BA},$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BA, \alpha = 4, \beta = 2;$
 (Ответ: а) $\sqrt{14\,700};$ б) $(-508);$ г) $(-1, \frac{-5}{3}, \frac{8}{3})$)
- 2.29. $A(3, 5, 4), B(4, 2, -3), C(-2, 4, 7), a = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{BA},$
 $d = \overrightarrow{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5;$
 (Ответ: а) $\sqrt{539};$ б) $(-85);$ г) $(\frac{26}{7}, \frac{20}{7}, -1))$
- 2.30. $A(4, 6, 7), B(2, -4, 1), C(-3, -4, 1), a = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{BC}, c = b,$
 $d = \overrightarrow{AB}, l = BA, \alpha = 3, \beta = 4;$
 (Ответ: а) $\sqrt{1316};$ б) $(-40);$ г) $(\frac{22}{7}, \frac{12}{7}, \frac{31}{7}))$

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

- 3.1. $a = (5, 4, 1), b = (-3, 5, 2), c = (2, -1, 3) d = (7, 23, 4);$
 (Ответ: $(3, 2, -1)$)
- 3.2. $a = (2, -1, 4), b = (-3, 0, -2), c = (4, 5, -3) d = (0, 11, -14);$
 (Ответ: $(-1, 2, 2)$)
- 3.3. $a = (-1, 1, 2), b = (2, -3, -5), c = (-6, 3, -1) d = (28, -19, -7);$
 (Ответ: $(2, 3, -4)$)
- 3.4. $a = (1, 3, 4), b = (-2, 5, 0), c = (3, -2, -4) d = (13, -5, -4);$
 (Ответ: $(2, -1, 3)$)
- 3.5. $a = (1, -1, 1), b = (-5, -3, 1), c = (2, -1, 0) d = (-15, -10, 5);$
 (Ответ: $(2, 3, -1)$)

- 3.6. $a = (3, 1, 2)$, $b = (-7, -2, -4)$, $c = (-4, 0, 3)$ $d = (16, 6, 15)$;
(Ответ: $(2, -2, 1)$)
- 3.7. $a = (-3, 0, 1)$, $b = (2, 7, -3)$, $c = (-4, 3, 5)$ $d = (-16, 33, 13)$;
(Ответ: $(2, 3, 4)$)
- 3.8. $a = (5, 1, 2)$, $b = (-2, 1, -3)$, $c = (4, -3, 5)$ $d = (-45, 15, 66)$;
(Ответ: $(-1, 28, 4)$)
- 3.9. $a = (0, 2, -3)$, $b = (4, -3, -2)$, $c = (-5, -4, 0)$ $d = (-19, -5, -4)$;
(Ответ: $(2, -1, 3)$)
- 3.10. $a = (3, -1, 2)$, $b = (-2, 3, 1)$, $c = (4, -5, -3)$ $d = (-3, 2, -3)$;
(Ответ: $(-1, 2, 1)$)
- 3.11. $a = (5, 3, 1)$, $b = (-1, 2, -3)$, $c = (3, -4, 2)$ $d = (-9, 34, -20)$;
(Ответ: $(2, 4, -5)$)
- 3.12. $a = (3, 1, -3)$, $b = (-2, 4, 1)$, $c = (-1, -3, 5)$ $d = (1, 12, -20)$;
(Ответ: $(2, 1, -3)$)
- 3.13. $a = (6, 1, -3)$, $b = (-3, 2, 1)$, $c = (-1, -3, 4)$ $d = (15, 6, -17)$;
(Ответ: $(1, -2, -3)$)
- 3.14. $a = (4, 2, 3)$, $b = (-3, 1, 8)$, $c = (2, -4, 5)$ $d = (-12, 14, -31)$;
(Ответ: $(0, 2, -3)$)
- 3.15. $a = (-2, 1, 3)$, $b = (3, -6, 2)$, $c = (-5, -3, -1)$ $d = (31, -6, 22)$;
(Ответ: $(3, 4, -5)$)
- 3.16. $a = (1, 3, 6)$, $b = (-3, 4, 5)$, $c = (1, -7, 2)$ $d = (8, 47, 65)$;
(Ответ: $(12, 1, -1)$)
- 3.17. $a = (7, 2, 1)$, $b = (5, 1, -2)$, $c = (-3, 4, 5)$ $d = (26, 11, 1)$;
(Ответ: $(2, 3, 1)$)
- 3.18. $a = (3, 5, 4)$, $b = (-2, 7, -5)$, $c = (6, -2, 1)$ $d = (6, -9, 22)$;
(Ответ: $(2, -3, -1)$)
- 3.19. $a = (5, 3, 2)$, $b = (2, -5, 1)$, $c = (-7, 4, -3)$ $d = (36, 1, 15)$;
(Ответ: $(5, 2, -1)$)
- 3.20. $a = (11, 1, 2)$, $b = (-3, 3, 4)$, $c = (-4, -2, 7)$ $d = (-5, 11, -15)$;
(Ответ: $(-1, 2, -3)$)
- 3.21. $a = (9, 5, 3)$, $b = (-3, 2, 1)$, $c = (4, -7, 4)$ $d = (-10, -13, 8)$;
(Ответ: $(-1, 3, 2)$)

- 3.22. $a = (7, 2, 1)$, $b = (3, -5, 6)$, $c = (-4, 3, -4)$ $d = (-1, 18, -16)$;
(Ответ: $(2, -1, 3)$)
- 3.23. $a = (1, 2, 3)$, $b = (-5, 3, -1)$, $c = (-6, 4, 5)$ $d = (-4, 11, 20)$;
(Ответ: $(3, -1, 2)$)
- 3.24. $a = (-2, 5, 1)$, $b = (3, 2, -7)$, $c = (4, -3, 2)$ $d = (-4, 22, -13)$;
(Ответ: $(3, 2, -1)$)
- 3.25. $a = (3, 1, 2)$, $b = (-4, 3, -1)$, $c = (2, 3, 4)$ $d = (14, 14, 20)$;
(Ответ: $(2, 0, 4)$)
- 3.26. $a = (3, -1, 2)$, $b = (-2, 4, 1)$, $c = (4, -5, -1)$ $d = (-5, 11, 1)$;
(Ответ: $(-1, 5, 2)$)
- 3.27. $a = (4, 5, 1)$, $b = (1, 3, 1)$, $c = (-3, -6, 7)$ $d = (19, 33, 0)$;
(Ответ: $(3, 4, -1)$)
- 3.28. $a = (1, -3, 1)$, $b = (-2, -4, 3)$, $c = (0, -2, 3)$ $d = (-8, -10, 13)$;
(Ответ: $(-2, 3, 2)$)
- 3.29. $a = (5, 7, -2)$, $b = (-3, 1, 3)$, $c = (1, -4, 6)$ $d = (14, 9, -1)$;
(Ответ: $(2, -1, 1)$)
- 3.30. $a = (-1, 4, 3)$, $b = (3, 2, -4)$, $c = (-2, -7, 1)$ $d = (6, 20, -3)$;
(Ответ: $(1, 1, -2)$)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $a = -m + 6n$ и $b = 3m + 4n$, где $|m| = 2$; $|n| = 5$; $(\widehat{m}, n) = 2\pi/3$. Найти: а) $a \cdot b$; б) $\text{пр}_b(4a - 5b)$; в) $\cos(\widehat{2b - a, 4b})$.

а) Вычисляем:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-m + 6n) \cdot (3m + 4n) = \\ &= -3m^2 + 14|m||n| \cos(\widehat{m}, n) + 24n^2 = \\ &= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5 \left(-\frac{1}{2}\right) + 24 \cdot 5^2 = 518; \end{aligned}$$

б) Пусть $c = 4a - 5b = -19m + 4n$. Тогда

$$\text{пр}_b c = \frac{c \cdot b}{|b|},$$

$$\begin{aligned}
c \cdot b &= (-19m + 4n) \cdot (3m + 4n) = \\
&= -57m^2 - 64|m||n| \cos(\widehat{m, n}) + 16n^2 = 492, \\
|b| &= \sqrt{b^2} = \sqrt{(3m + 4n)^2} = \\
&= \sqrt{9m^2 + 24|m||n| \cos(\widehat{m, n}) + 16n^2} = \sqrt{316}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_b c(4 - 5b) = \frac{492}{\sqrt{316}};$$

в) Пусть $d = 2b - a = 7m + 2n, e = 4b = 12m + 16n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{d, e}) &= \frac{d \cdot e}{|d||e|}, \\
d \cdot e &= (7m + 2n) \cdot (12m + 16n) = \\
&= 84m^2 + 136|m||n| \cos(\widehat{m, n}) + 32n^2 = 456, \\
|d| &= \sqrt{(7m + 2n)^2} = \sqrt{49m^2 + 28|m||n| \cos(\widehat{m, n}) + 4n^2} = \sqrt{156}, \\
|e| &= \sqrt{(12m + 16n)^2} = \\
&= \sqrt{144m^2 + 384|m||n| \cos(\widehat{m, n}) + 256n^2} = \sqrt{5056}.
\end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2b - a, 4b}) = 456 / \sqrt{788736} \approx 0,5.$$

2. По координатам точек $A(-5, 1, 6), B(1, 4, 3)$ и $C(6, 3, 9)$ найти: а) модуль вектора $a = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) скалярное произведение векторов a и $b = \overrightarrow{BC}$; в) проекцию вектора $c = b$ на вектор $d = \overrightarrow{AB}$; г) координаты точки M , делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:3.

а) Последовательно находим $\overrightarrow{AB} = (6, 3, 9), \overrightarrow{BC} = (5, -1, 6), 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (29, 11, -6),$

$$|4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998};$$

б) Имеем $a = (29, 11, -6), b = (5, -1, 6).$ Тогда

$$a \cdot b = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_d c = \frac{c \cdot d}{|d|}, d = (6, 3, -3),$$

$$c \cdot d = 30 - 3 - 18 = 9, |d| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{BC} = \frac{9}{\sqrt{54}};$$

г) Имеем $\lambda = 1/3, r_M = \frac{r_A + \lambda r_B}{1 + \lambda}.$ Следовательно,

$$x_M = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}, \quad y = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4},$$

$$z_M = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}, \quad M\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right).$$

3. Доказать, что векторы $a = (3, -1, 0), b = (2, 3, 1), c = (-1, 4, 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $d = (2, 3, 7)$ в этом базисе.

Вычисляем:

$$abc = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0;$$

Следовательно, векторы a, b, c образуют базис, и вектор d линейно выражается через базисные векторы:

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

или в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma &= 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3, \\ \beta + 3\gamma &= 7. \end{aligned} \right\}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера. Находим:
 $\Delta = 22$,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \frac{\Delta(\alpha)}{\Delta} = 3, \quad \beta = \frac{\Delta(\beta)}{\Delta} = -2, \quad \gamma = \frac{\Delta(\gamma)}{\Delta} = 3, \text{ поэтому } d = (3, -2, 3) = 3a - 2b + 3c.$$

ИДЗ-2.2

1. Даны векторы a , b и c . Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

- 1.1. $a = 2i - 3j + k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$; а) a , $3b$, c ; б) $3a$, $2c$; в) b , $-4c$; г) a , c ; д) a , $2b$, $3c$;

(Ответ: а) -261 ; б) $\sqrt{19\,116}$; в) 40)

- 1.2. $a = 3i + 4j + k$, $b = i - 2j + 7k$, $c = 3i - 6j + 21k$; а) $5a$, $2b$, c ; б) $4b$, $2c$; в) a , c ; г) b , c ; д) $2a$, $-3b$, c ;

(Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 6)

- 1.3. $a = 2i - 4j - 2k$, $b = 7i + 3j$, $c = 3i + 5j - 7k$; а) a , $2b$, $3c$; б) $3a$, $-7b$; в) c , $-2a$; г) a , c ; д) $2a$, $-3b$, c ;

(Ответ: а) -1740 ; б) $\sqrt{612\,108}$; в) 0)

- 1.4. $a = -7i + 2k$, $b = 2i - 6j + 4k$, $c = i - 3j + 2k$; а) a , $-2b$, $-7c$; б) $4b$, $3c$; в) $2a$, $-7c$; г) b , c ; д) $2a$, $4b$, $3c$;

(Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 42)

- 1.5. $a = -4i + 2j - k$, $b = 3i + 5j - 2k$, $c = j + 5k$; а) a , $6b$, $3c$; б) $2b$, a ; в) a , $-4c$; г) a , b ; д) a , $6b$, $3c$;
(Ответ: а) - 2538; б) $\sqrt{3192}$; в) 12)
- 1.6. $a = 3i - 2j + k$, $b = 2j - 3k$, $c = -3i + 2j - k$; а) a , $-3b$, $2c$; б) $5a$, $3c$; в) $-2a$, $4b$; г) a , c ; д) $5a$, $4b$, $3c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) 56)
- 1.7. $a = 4i - j + 3k$, $b = 2i + 3j - 5k$, $c = 7i + 2j + 4k$; а) $7a$, $-4b$, $2c$; б) $3a$, $5c$; в) $2b$, $4c$; г) b , c ; д) $7a$, $2b$, $5c$;
(Ответ: а) -4480; б) $\sqrt{78750}$; в) 0)
- 1.8. $a = 4i + 2j - 3k$, $b = 2i + k$, $c = -12i - 6j + 9k$; а) $2a$, $3b$, c ; б) $4a$, $3b$; в) b , $-4c$; г) a , c ; д) $2a$, $3b$, $-4c$;
(Ответ: а) 0; б) $\sqrt{17\,280}$; в) 60)
- 1.9. $a = -i + 5k$, $b = -3 + 2j + 2k$, $c = -2i - 4j + k$; а) $3a$, $-4b$, $2c$; б) $7a$, $-3c$; в) $2b$, $3a$; г) b , c ; д) $7a$, $2b$, $-3c$;
(Ответ: а) -1 680; б) $\sqrt{219\,177}$; в) 78)
- 1.10. $a = 6i - 4j + 6k$, $b = 9i - 6j + 9k$, $c = 1 - 8k$; а) $2a$, $-4b$, $3c$; б) $3b$, $-9c$; в) $3a$, $-5c$; г) a , b ; д) $3a$, $-4b$, $-9c$;
(Ответ: а) 0; б) $\sqrt{6488829}$; в) 630)
- 1.11. $a = 5i - 3j + 4k$, $b = 2i - 4j - 2k$, $c = 3i + 5j - 7k$; а) a , $-4b$, $2c$; б) $-2b$, $4c$; в) $-3a$, $6c$; г) b , c ; д) a , $-2b$, $6c$;
(Ответ: а) -2032; б) $\sqrt{127\,488}$; в) 504)
- 1.12. $a = -4i + 3j - 7k$, $b = 4i + 6j - 2k$, $c = 6i + 9j - 3k$; а) $-2a$, b , $-2c$; б) $4b$, $7c$; в) $5a$, $-3b$; г) b , c ; д) $-2a$, $4b$, $7c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) - 240)
- 1.13. $a = -5i + 2j - 2k$, $b = 7i - 5k$, $c = 2i + 3j - 2k$; а) $2a$, $4b$, $-5c$; б) $-3b$, $11c$; в) $8a$, $-6c$; г) a , c ; д) $8a$, $-3b$, $11c$;
(Ответ: а) 4360; б) $33\sqrt{682}$; в) 0)
- 1.14. $a = -4i - 6j + 2k$, $b = 2i + 3j - k$, $c = -i + 5j - 3k$; а) $5a$, $7b$, $2c$; б) $-4b$, $11a$; в) $3a$, $-7c$; г) a , b ; д) $3a$, $7b$, $-2c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) 672)
- 1.15. $a = -4i + 2j - 3k$, $b = -3j + 5k$, $c = 6i + 6j - 4k$; а) $5a$, $-b$, $3c$; б) $-7a$, $4c$; в) $3a$, $9b$; г) a , c ; д) $3a$, $-9b$, $4c$;
(Ответ: а) -1170; б) $56\sqrt{638}$; в) -567)

- 1.16.** $a = -3i + 8j$, $b = 2i + 3j - 2k$, $c = 8i + 12j - 8k$; а) $4a, -6b, 5c$; б) $-7a, 9c$; в) $3b, -8c$; г) b, c ; д) $4a, -6b, 9c$;
(Ответ: а) 0; б) $252\sqrt{917}$; в) -1632)
- 1.17.** $a = 2i - 4j - 2k$, $b = -9i + 2k$, $c = 3i + 5j - Tk$; а) $7a, 5b, -c$; б) $-5a, 4b$; в) $3b, -8c$; г) a, c ; д) $7a, 5b, -c$;
(Ответ: а) -10430 ; б) $40\sqrt{389}$; в) 984)
- 1.18.** $a = 9i - 3j + k$, $b = 3i - 15j + 21k$, $c = i - 5j + 7k$; а) $2a, -7b, 3c$; б) $-6a, 4c$; в) $5b, 7a$; г) b, c ; д) $2a, -7b, 4c$;
(Ответ: а) 0; б) $48\sqrt{1466}$; в) 3255)
- 1.19.** $a = -2i + 4j - 3k$, $b = 5i + j - 2k$, $c = 7i + 4j - k$; а) $a, -6b, 2c$; б) $-8b, 5c$; в) $-9a, 7c$; г) a, b ; д) $a, -6b, 5c$;
(Ответ: а) 1068 ; б) $\sqrt{478\,400}$; в) -315)
- 1.20.** $a = -9i + 4j - 5k$, $b = i - 2j + 4k$, $c = -5i + 10j - 20k$; а) $-2a, 7b, 5c$; б) $-6b, 7c$; в) $9a, 4c$; г) b, c ; д) $-2a, 7b, 4c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) $6\,660$)
- 1.21.** $a = 2i - 7j + 5k$, $b = -i + 2j - 6k$, $c = 3i + 2j - 4k$; а) $-3a, +6b, -c$; б) $5b, 3c$; в) $7a, -4b$; г) b, c ; д) $7a, -4b, 3c$;
(Ответ: а) $2\,196$; б) $\sqrt{126\,900}$; в) $1\,288$)
- 1.22.** $a = 7i - 4j - 5k$, $b = i - 11j + 3k$, $c = 5i + 5j + 3k$; а) $3a, -7b, 2c$; б) $2b, 6c$; в) $-4a, -5c$; г) a, c ; д) $-4a, 2b, 6c$;
(Ответ: а) $28\,728$; б) $\sqrt{870\,912}$; в) 0)
- 1.23.** $a = 4i - 6j - 2k$, $b = -2i + 3j + k$, $c = 3i - 5j + 7k$; а) $6a, 3b, 8c$; б) $-7b, 6a$; в) $-5a, 4c$; г) a, b ; д) $-5a, 3b, 4c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) -560)
- 1.24.** $a = 3i - j + 2k$, $b = -i + 5j - 4k$, $c = 6i - 2j + 4k$; а) $4a, -7b, -2c$; б) $6a, -4c$; в) $-2a, 5b$; г) a, c ; д) $6a, -7b, -2c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) 160)
- 1.25.** $a = -3i - j - 5k$, $b = 2i - 4j + 8k$, $c = 3i + 7j - k$; а) $2a, -b, 3c$; б) $-9a, 4c$; в) $5b, -6c$; г) b, c ; д) $2a, 5b, -6c$;
(Ответ: а) 0; б) $\sqrt{251\,9424}$; в) 900)
- 1.26.** $a = -3i + 2j + 7k$, $b = i - 5k$, $c = 6i + 4j - k$; а) $-2a, b, 7c$; б) $5a, -2c$; в) $3b, c$; г) a, c ; д) $-2a, 3b, 7c$;
(Ответ: а) 1260 ; б) $10\sqrt{2997}$; в) 33)

- 1.27. $a = 3i - j + 5k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = i - 2j + 3k$; а) $-3a, 4b, -5c$; б) $6b, 3c$; в) $a, 4c$; г) b, c ; д) $-3a, 4b, -5c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) 80)
- 1.28. $a = 4i - 5j - 4k$, $b = 5i - j$, $c = 2i + 4j - 3k$; а) $a, 7b, -2c$; б) $-5a, 4b$; в) $8c, -3a$; г) a, c ; д) $-3a, 4b, 8c$;
(Ответ: а) 2114; б) $20\sqrt{857}$; в) 0)
- 1.29. $a = -9i + 4k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = 3i - 6j + 9k$; а) $3a, -5b, -4c$; б) $6b, 2c$; в) $-2a, 8c$; г) b, c ; д) $3a, 6b, -4c$;
(Ответ: а) 0; б) 0; в) -144)
- 1.30. $a = 5i - 6j - 4k$, $b = 4i + 8j - 7k$, $c = 3j - 4k$; а) $5a, 3b, -4c$; б) $4b, a$; в) $7a, -2c$; г) a, b ; д) $5a, 4b, -2c$;
(Ответ: а) 11940; б) $4\sqrt{9933}$; в) 28)

2. Вершины пирамиды находятся в точках А, В, С и D. Вычислить:
а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды ABCD.

- 2.1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$; а) ACD; б) l = AB; C и D.
- 2.2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD; б) l = CD, A и B.
- 2.3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD; б) l = BC, A и D.
- 2.4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$; а) ABD; б) l = AC, B и D.
- 2.5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD; б) l = BC, A и D.
- 2.6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$; а) ABD; б) l = BD, A и C.
- 2.7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD; б) l = AD, B и C.
- 2.8. $A(7, 5, 8)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$; а) BCD; б) l = BC, A и D.
- 2.9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD; б) l = BD, A и C.

- 2.10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$; а) BCD; б) $l = AD$, B и C.
- 2.11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2, -4, 5)$; а) ACD; б) $l = BD$, A и C.
- 2.12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$ а) ABD; б) $l = AB$, C и D.
- 2.13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$ а) BCD; б) $l = BC$, A и D.
- 2.14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.
- 2.15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.
- 2.16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD; б) $l = AD$, B и C.
- 2.17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$; а) BCD; б) $l = BC$, A и D.
- 2.18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.
- 2.19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$; а) BCD; б) $l = AD$, B и C.
- 2.20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD; б) $l = BD$, A и C.
- 2.21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$. а) ABD; б) $l = AB$, C и D.
- 2.22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$, $D(2, 1, 4)$; а) BCD; б) $l = BC$, A и D.
- 2.23. 2.23. $A(-6, -3, -5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$, $D(4, -2, 9)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.
- 2.24. 2.24. $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$, $D(7, -9, 1)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.
- 2.25. $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$, $D(4, 6, -5)$; а) ACD; б) $l = AD$, B и C.

- 2.26. $A(4, 3, 1)$, $B(2, 7, 5)$, $C(-4, -2, 4)$, $D(2, -3, -5)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D .
- 2.27. $A(-9, -7, 4)$, $B(-4, 3, -1)$, $C(5, -4, 2)$, $D(3, 4, 4)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B .
- 2.28. $A(3, 5, 3)$, $B(-3, 2, 8)$, $C(-3, -2, 6)$, $D(7, 8, -2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C .
- 2.29. $A(4, 2, 3)$, $B(-5, -4, 2)$, $C(5, 7, -4)$, $D(6, 4, -7)$; а) ABD ; б) $l = AD$, B и C .
- 2.30. $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$, $D(6, -4, 1)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D .

3. Сила F приложена к точке A . Вычислить: а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ; б) модуль момента силы F относительно точки B .

- 3.1. $F = (5, -3, 9)$, $A(3, 4, -6)$, $B(2, 6, 5)$.
- 3.2. $F = (-3, 1, -9)$, $A(6, -3, 5)$, $B(9, 5, -7)$.
- 3.3. $F = (2, 19, -4)$, $A(5, 3, 4)$, $B(6, -4, -1)$.
- 3.4. $F = (-4, 5, -7)$, $A(4, -2, 3)$, $B(7, 0, -3)$.
- 3.5. $F = (4, 11, -6)$, $A(3, 5, 1)$, $B(4, -2, -3)$.
- 3.6. $F = (3, -5, 7)$, $A(2, 3, -5)$, $B(0, 4, 3)$.
- 3.7. $F = (5, 4, 11)$, $A(6, 1, -5)$, $B(4, 2, -6)$.
- 3.8. $F = (-9, 5, 7)$, $A(1, 6, -3)$, $B(4, -3, 5)$.
- 3.9. $F = (6, 5, -7)$, $A(7, -6, 4)$, $B(4, 9, -6)$.
- 3.10. $F = (-5, 4, 4)$, $A(3, 7, -5)$, $B(2, -4, 1)$.
- 3.11. $F = (4, 7, -3)$, $A(5, -4, 2)$, $B(8, 5, -4)$.
- 3.12. $F = (2, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $B(2, 4, 0)$.

Даны три силы P , Q , R , приложенные к точке A . Вычислить: а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее

приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку В; б) величину момента равнодействующих этих сил относительно точки В.

3.13. $P = (9, -3, 4)$, $Q = (5, 6, -2)$, $R = (-4, -2, 7)$, $A(-5, 4, -2)$, $B(4, 6, -5)$.

3.14. $P = (5, -2, 3)$, $Q = (4, 5, -3)$, $R = (-1, -3, 6)$, $A(7, 1, -5)$, $B(2, -3, -6)$.

3.15. $P = (3, -5, 4)$, $Q = (5, 6, -3)$, $R = (-7, -1, 8)$, $A(-3, 5, 9)$, $B(5, 6, -3)$.

3.16. $P = (-10, 6, 5)$, $Q = (4, -9, 7)$, $R = (5, 3, -3)$, $A(4, -5, 9)$, $B(4, 7, -5)$.

3.17. $P = (5, -3, 1)$, $Q = (4, 2, -6)$, $R = (-5, -3, 7)$, $A(-5, 3, 7)$, $B(3, 8, -5)$.

3.18. $P = (-5, 8, 4)$, $Q = (6, -7, 3)$, $R = (3, 1, -5)$, $A(2, -4, 7)$, $B(0, 7, 4)$.

3.19. $P = (7, -5, 2)$, $Q = (3, 4, -8)$, $R = (-2, -4, 3)$, $A(-3, 2, 0)$, $B(6, 4, -3)$.

3.20. $P = (3, -4, 2)$, $Q = (2, 3, -5)$, $R = (-3, -2, 4)$, $A(5, 3, -7)$, $B(4, -1, -4)$.

3.21. $P = (4, -2, -5)$, $Q = (5, 1, -3)$, $R = (-6, 2, 5)$, $A(-3, 2, -6)$, $B(4, 5, -3)$.

3.22. $P = (7, 3, -4)$, $Q = (9, -4, 2)$, $R = (-6, 1, 4)$, $A(-7, 2, 5)$, $B(4, -2, 11)$.

3.23. $P = (9, -4, 4)$, $Q = (-4, 6, -3)$, $R = (3, 4, 2)$, $A(5, -4, 3)$, $B(4, -5, 9)$.

3.24. $P = (6, -4, 5)$, $Q = (-4, 7, 8)$, $R = (5, 1, -3)$, $A(-5, -4, 2)$, $B(7, -3, 6)$.

3.25. $P = (5, 5, -6)$, $Q = (7, -6, 6)$, $R = (-4, 3, 4)$, $A(-9, 4, 7)$, $B(8, -1, 7)$.

3.26. $P = (7, -6, 2)$, $Q = (-6, 2, -1)$, $R = (1, 6, 4)$, $A(3, -6, 1)$, $B(6, -2, 7)$.

3.27. $P = (4, -2, 3)$, $Q = (-2, 5, 6)$, $R = (7, 3, -1)$, $A(-3, -2, 5)$, $B(9, -5, 4)$.

3.28. $P = (7, 3, -4)$, $Q = (3, -2, 2)$, $R = (-5, 4, 3)$, $A(-5, 0, 4)$, $B(4, -3, 5)$.

3.29. $P = (3, -2, 4)$, $Q = (-4, 4, -3)$, $R = (3, 4, 2)$, $A(1, -4, 3)$, $B(4, 0, -2)$.

3.30. $P = (2, -1, -3)$, $Q = (3, 2, -1)$, $R = (-4, 1, 3)$, $A(-1, 4, -2)$, $B(2, 3, -1)$.

Решение типового варианта

1. Даны векторы $a = 4i + 4k$, $b = -i + 3j + 2k$ и $c = 3i + 5j$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов a, b и $5c$; б) найти модуль векторного произведения $3c$ и b ; в) вычислить скалярное произведение векторов a и $3b$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a, b и c .

а) Так как $5c = 15i + 25j$, то

$$(a \times b) \cdot 5c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30i + 27k + 15k - 18j = \\ = 30i - 18j + 42k,$$

$$|3c \times b| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3b = -3i + 9j + 6k$, $a \cdot 3b = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$;

г) Так как $a = (4, 0, 4)$, $b = (-1, 3, 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы a и b не коллинеарны. Поскольку

$$a \cdot b = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то векторы a и b не ортогональны;

д) векторы a, b, c компланарны, если $abc = 0$. Вычисляем:

$$abc = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т.е. векторы a, b и c не компланарны.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) площадь сечения, проходящего через середины рёбер AB, AC, AD ; в) объем пирамиды $ABCD$.

а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 9i + 5j + 2k.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110};$$

б) Середины рёбер AB, AC и AD находятся в точках $K(3, 5; 3, 5), M(1, 5; 2, 5; 3), N(0; 1, 5; 1, 5)$. Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN}|, \quad \overrightarrow{KM} = (-1, 5; -2, 5; -0, 5),$$

$$\overrightarrow{KN} = (-3; -3, 5; -2),$$

$$\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1, 5 & -2, 5 & -0, 5 \\ -3 & -3, 5 & -2 \end{vmatrix} = 3, 25i - 1, 5j - 2, 25k,$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \sqrt{3, 25^2 + 1, 5^2 + 2, 25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{17, 875};$$

$$\text{в) Поскольку } V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\text{то } V = \frac{11}{6}.$$

3. Сила $F = (2, 3, -5)$ приложена к точке $A(1, -2, 2)$. Вычислить: а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1, 4, 0)$; б) модуль момента силы F относительно точки B .

Так как $A = F \cdot s, s = \overrightarrow{AB} = (0, 6, -2)$, то

$$F \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5)(-2) = 28, \quad A = 28;$$

б) Момент силы $M = \overrightarrow{BA} \times F, \overrightarrow{BA} = (0, -6, 2),$

$$\overrightarrow{BA} \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24i + 4j + 12k.$$

Следовательно, $|M| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}.$

Теоретические вопросы

1. Дайте определение вектора.
2. Какие векторы называются равными?
3. Что такое направляющие косинусы?
4. Каким свойством обладают направляющие косинусы?
5. Какие векторы называются коллинеарными?
6. Какие векторы называются ортогональными?
7. Что такое линейные операции над векторами?
8. Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?
9. Дайте определение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.
10. Как проверяем векторы на параллельность и перпендикулярность?
11. Как вычисляем угол между векторами?
12. В каком случае векторное произведение векторов равно 0?
13. В каком случае смешанное произведение векторов равно 0?
14. Как вычисляем площадь треугольника и параллелограмма, если известны координаты вершин?
15. Сформулируйте геометрический смысл смешанного произведения трех векторов.
16. Что такое скалярный квадрат?
17. Как вычисляем проекцию одного вектора на другой?
18. Какой вектор называется единичным?

Список литературы

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Лань, 2017. – 448 с. – URL: <http://e.lanbook.com/book/91080>
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике- М.: Айрис Пресс, 2017. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз).
3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>
4. Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Мир и образование, 2014, 2017. — 368 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз).
5. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы
Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз).