



Федеральное агентство по рыболовству  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Астраханский государственный технический университет"  
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована  
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

*Институт/факультет Институт морских технологий,  
энергетики и транспорта*

*Кафедра «Общеинженерные дисциплины и транспорт»*

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Методические указания для практических занятий по дисциплине  
«Соппротивление материалов»**

Для обучающихся по направлению

**26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое  
обеспечение судоходства**  
**Профиль Управление водными и мультимодальными перевозками**

**Авторы:** доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и транспорт»

С.Б. Джахьяева

**Рецензент:** Дульгер Н.В., к.т.н. доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и транспорт»

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Сопротивление материалов» по направлению 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов профиль Автомобильный сервис утверждены на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и транспорт», протокол № 6 от 28 июня 2024 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                       | стр |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| Введение                                                              | 4   |
| <i>Практическая работа № 1</i>                                        | 6   |
| Метод сечений, порядок построения эпюр ВСФ                            |     |
| <i>Практическая работа № 2, 3</i>                                     | 10  |
| Решение задач на тему "Центральное растяжение сжатие"                 |     |
| <i>Практическая работа № 4</i>                                        | 19  |
| Расчет болтовых и заклепочных соединений на срез и смятие             |     |
| <i>Практическая работа № 5</i>                                        | 37  |
| Решение задач на тему "Геометрические характеристики плоских сечений" |     |
| <i>Практическая работа № 6</i>                                        | 54  |
| Решение задач на тему "Кручение вала"                                 |     |
| <i>Практическая работа № 7</i>                                        | 70  |
| Решение задач на тему "Изгиб"                                         |     |
| <i>Практическая работа № 8</i>                                        | 82  |
| Решение задач на тему "Устойчивость сжатых стержней"                  |     |
| <i>Практическая работа № 9</i>                                        | 93  |
| Решение задач на тему "Сложное сопротивление"                         |     |
| Приложения                                                            | 136 |

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Сопротивление материалов** – это раздел «Технической механики». Основной задачей сопротивления материалов является изучение методов расчета простейших элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

**Прочность** – это способность элемента конструкции сопротивляться действию приложенных к нему внешних сил не разрушаясь.

**Жесткость** – это способность элемента конструкции не изменять размеры и форму, т.е. не деформироваться под действием внешних сил или деформироваться в пределах установленных норм (малые упругие деформации).

**Устойчивость** – это способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил. Реальные тела не являются абсолютно твердыми, поэтому под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, т.е. деформируются. Если после снятия нагрузки тело полностью восстановило свою форму и размеры, то деформацию называют **упругой**. Если деформация частично остается, то она называется **пластической** или **остаточной**.

### **Виды расчетов:**

1. **Расчет на прочность** – обеспечивает неразрушение конструкции.
2. **Расчет на жесткость** – обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.
3. **Расчет на устойчивость** – обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает искривление длинных стержней.

**Расчетная схема** – это освобождение реального объекта от несущественных особенностей, которые не влияют на работу системы в целом.

Для перехода от реального объекта к расчетной схеме необходимо провести основные допущения свойств материала, системы приложенных сил, геометрии реального объекта, типов опорных реакций и т.д.

### **Основные допущения свойств материала:**

1. Материал считается однородным и непрерывным, все физико-механические свойства во всех направлениях одинаковы.
2. Материал представляет сплошную среду – заполняет весь объем

тела без пустот.

3. Материал считается изотропным – обладает одинаковыми упругими свойствами во всех направлениях.

4. Материал обладает идеальной упругостью – полностью восстанавливает форму и размеры после снятия нагрузки.

5. Материалы подчиняются закону Гука – форма и размеры упругого тела меняются прямо пропорционально изменению нагрузок.

6. Считается, что в материале до его нагружения нет никаких напряжений.

### **Виды конструктивных элементов:**

1. **Брус** – тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (стержни, стойки, балки, валы). По форме поперечного сечения брус может быть: прямоугольным, круглым, двутавровым, кольцевым и т.д.

2. **Пластина** – тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими.

3. **Массив** – тело, у которого три размера одинаковые.

**Практическая работа № 1**  
**Метод сечений, порядок построения эпюр ВСФ**

**1.1 Внутренние силы, внутренние силовые факторы (ВСФ), метод сечений**

***Внутренние силы** – это силы взаимодействия между смежными частями тела, возникающие под действием внешних нагрузок.*

Внутренние силы являются распределенными по сечению тела. Прочность, жесткость и устойчивость стержня зависит от внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, т.е. сечении перпендикулярном оси стержня.

Для определения внутренних сил используется ***метод сечений***, который заключается в следующем:

1) стержень, находящийся в статическом равновесии под действием внешних нагрузок (активных и реактивных), *рассекаем плоскостью перпендикулярной его оси* в произвольном сечении (рисунок 1.1, а);

2) *отбрасываем* одну из частей, например, правую и изображаем оставшуюся часть (левую) (рисунок 1.1, б);

3) действие отброшенной части на оставшуюся *заменяем* внутренними силами, распределенными по всему сечению. Эту систему внутренних сил можно привести к одной силе  $R$  (главному вектору) и к одной паре сил  $M$  (главному моменту), которые можно разложить на силовую систему координат  $XYZ$  с полюсом в центре тяжести сечения  $C$ :

–  $N, Q_x, Q_y$  – проекции  $R$  на оси  $Z, X, Y$ ;

–  $M_x, M_y, T (M_z)$  – составляющие  $M$  относительно осей  $X, Y, Z$ .

***Проекции главного вектора и главного момента на силовую систему координат называют внутренними силовыми факторами (ВСФ) или внутренними усилиями.*** Для упрощения расчетов изначально принимается положительное направление ВСФ:

$N$  – продольная или нормальная сила считается положительной, если вызывает растяжение оставшейся части, т.е. направлена от сечения, если вызывает сжатие, то отрицательной;

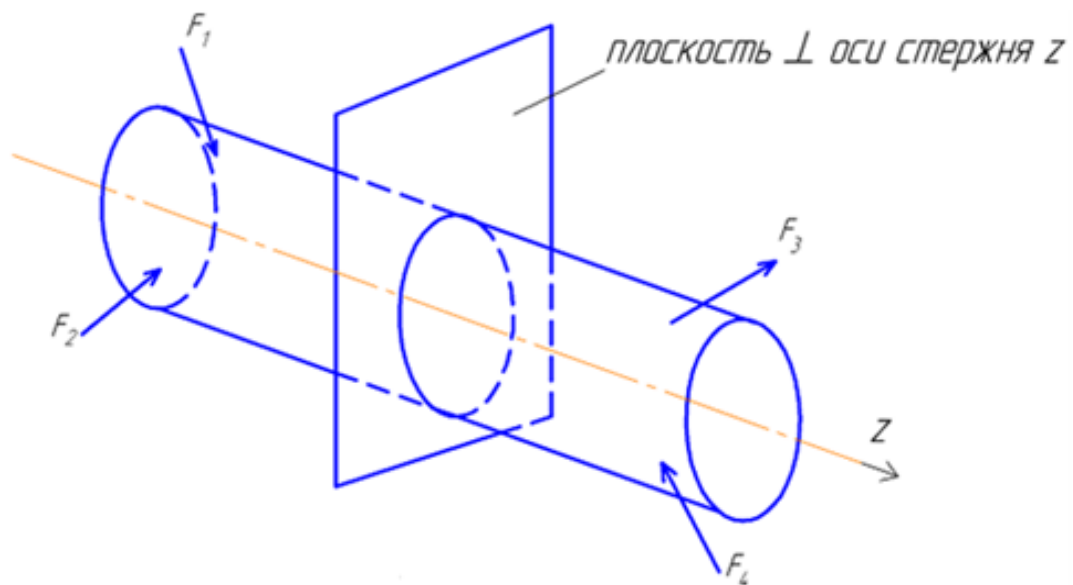
$Q_x, Q_y$  – поперечные или перерезывающие силы считаются положительными, если вызывают вращение оставшейся части по ходу часовой стрелки;

$T (M_z, M_{кр})$  – крутящий момент считается положительным, если в сечении направлен против хода часовой стрелки;

$M_x$  – изгибающий момент относительно оси  $X$  считается положительным, если вызывает сжатие верхних волокон стержня;

$M_y$  – изгибающий момент относительно оси  $Y$  считается положительным, если вызывает сжатие волокон за осью.

а)



б)

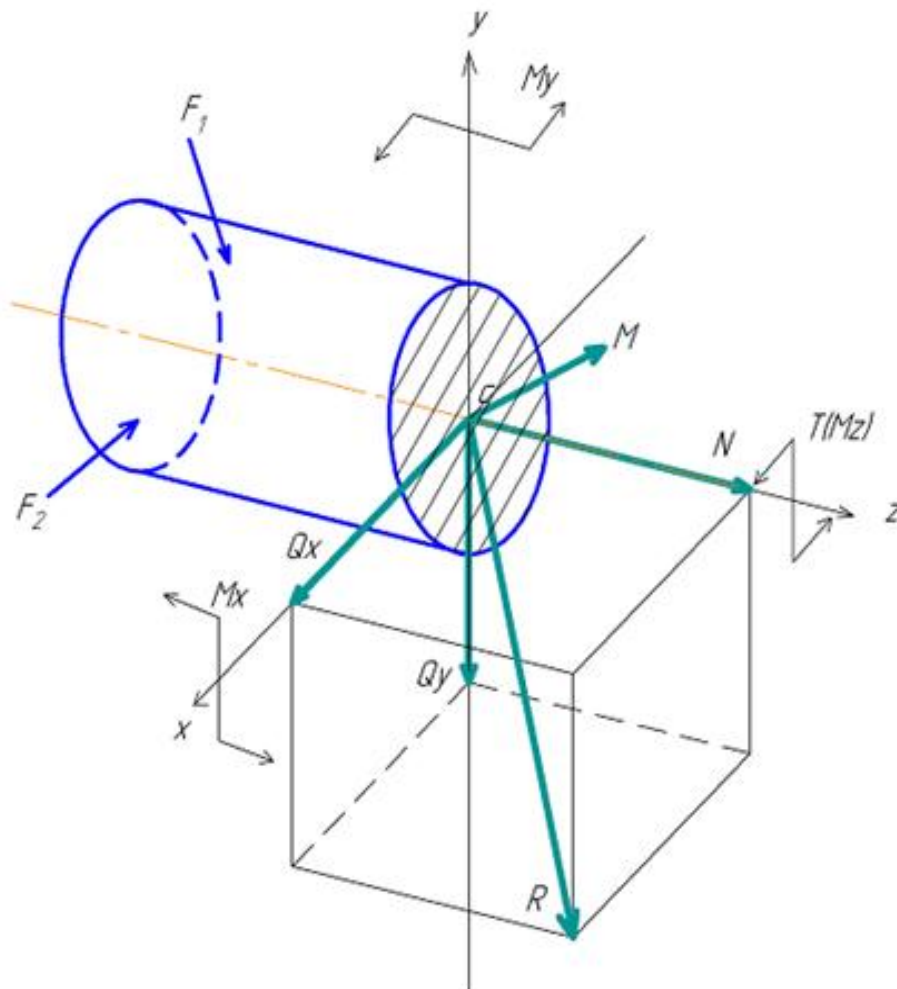


Рисунок 1.1 - Метод сечений

**Волокно** – это материальная линия в стержне параллельная его оси. На рисунок 1.1, б показаны положительно направленные ВСФ.

4) *уравновешиваем* оставшуюся часть, то есть составляем уравнения статического равновесия, из которых устанавливаем математическую связь между внутренними силовыми факторами и внешней нагрузкой в зависимости от координаты сечения  $Z$ .

В общем случае уравнений статического равновесия шесть:

– суммы проекций сил на каждую из силовых осей координат

$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0$ , из которых определяются  $N, Q_x, Q_y$ ;

– суммы моментов всех сил относительно осей

$\sum M_{(x)} = 0; \sum M_{(y)} = 0; \sum M_{(z)} = 0$ , из которых определяются  $M_x, M_y, T$ .

## 1.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов (ВСФ)

Поскольку значения и направление (знаки) ВСФ могут меняться при переходе от одного сечения к другому, то принято строить эпюры ВСФ.

*Эпюрой* внутреннего силового фактора называется график зависимости ВСФ от координаты  $Z$  поперечного сечения. Эпюра строится на базисной линии, параллельной оси стержня; каждая ордината эпюры равна значению ВСФ в данном поперечном сечении стержня.

### **Порядок построения эпюр ВСФ:**

– определяются реакции связей в заданном стержне, т.к. должны быть известны все внешние нагрузки;

– стержень разделяется на силовые (грузовые) участки.

**Силовой участок** – это часть длины стержня, в пределах которой не меняются законы для ВСФ. Границами силовых участков являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов и начало или конец распределенной нагрузки;

– методом сечений определяются законы для ВСФ и по ним строятся эпюры. На эпюрах проставляются значения ординат на границах силовых участков и экстремальные значения ВСФ;

– выполняется проверка правильности построения эпюр по «скачкам» (разрывам в значениях ординат) и по дифференциальным зависимостям (см. Примеры решения задач).

## 1.3 Понятие о простых и сложных сопротивлениях (нагружениях)

В зависимости от того, какие ВСФ возникают в поперечных сечениях стержня различают *простые и сложные сопротивления*.

*К простым сопротивлениям относятся:*

- осевое (центральное) растяжение-сжатие, когда в сечениях возникает только один ВСФ – продольная сила, т.е.  $N \neq 0$ ;
- чистое кручение, когда один крутящий момент  $T \neq 0$ ;
- чистый срез, когда в сечениях возникает только поперечная сила, т.е.  $Q \neq 0$ ;
- плоский изгиб, когда в поперечных сечениях возникает один изгибающий момент и одна поперечная сила, т.е.  $(M_x \text{ и } Q_y) \neq 0$  или  $(M_y \text{ и } Q_x) \neq 0$ .

Все остальные случаи сопротивления называются *сложными*, например:

- изгиб с кручением:  $(T \text{ и } M_x) \neq 0$  или  $(T, M_x, M_y) \neq 0$ ;
- косой изгиб:  $(M_x \text{ и } M_y) \neq 0$ ;
- изгиб с растяжением-сжатием:  $(N, M_x) \neq 0$  или  $(N, M_x, M_y) \neq 0$  и т.д.

## Практическая работа № 2, 3

### Решение задач на тему "Центральное растяжение сжатие"

**Растяжением (сжатием)** называется такой вид нагружения, при котором к стержню приложены только силы, линии действия которых совпадают с осью стержня, тогда в сечениях возникает одна продольная сила  $N$  (см. схемы из табл. 1).

Мерой интенсивности силы  $N$  является **нормальное напряжение  $\sigma$** , численно равное внутренней силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня. Доказано, что при растяжении-сжатии во всех точках  $i$  – го сечения нормальные напряжения  $\sigma_i$  одинаковы и вычисляются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}, \quad (1)$$

где  $N_i$  – продольная (нормальная) сила в  $i$ -ом сечении,

$A_i$  – площадь  $i$ -го поперечного сечения.

Из (1) следует, что при растяжении (сжатии) напряжения зависят от величины площади поперечного сечения, но не зависят от формы сечения.

При растяжении (сжатии) происходит изменение длины стержня  $\Delta L$ , которое можно вычислить по формуле

$$\Delta L_i = \int_{L_i} \frac{N_i}{EA_i} dz, \quad (2)$$

где  $L_i$  – длина  $i$ -го участка, в пределах которого  $N_i$ ,  $A_i$  – функции монотонные и непрерывные;

$E$  – модуль продольной упругости материала.

Если в пределах длины участка  $\frac{N_i}{EA_i} = const$ , то

$$\Delta L_i = \frac{N_i L_i}{EA_i}, \quad (3)$$

где  $EA$  – жесткость поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).

По принципу независимости действия сил полное изменение длины стержня определяется как алгебраическая сумма изменения длин отдельных участков

$$\Delta L_{общ} = \sum_{i=1}^k \Delta L_i, \quad (4)$$

где  $k$  – число участков, где применимы формулы (2) или (3).

### Расчет на прочность при растяжении (сжатии)

Прочность стержня будет обеспечена, если максимальные нормальные напряжения в стержне не превышают допустимого напряжения для материала стержня.

**Условие прочности при растяжении (сжатии)**

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (5)$$

где  $\sigma_{\max}$  – фактическое максимальное напряжение в стержне;

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n} - \text{допускаемое напряжение для материала стержня.} \quad (5^*)$$

Здесь  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение для материала стержня.

Для пластичных материалов предельное напряжение – предел текучести  $\sigma_T$ , для хрупких – предел прочности  $\sigma_B$ , которые принимаются по таблицам физико-механических свойств материалов;  $n$  – нормативный или необходимый коэффициент запаса прочности, который задается или принимается по справочным рекомендациям.

Учитывая (1) или (5\*), условие прочности принимает вид

$$\frac{N}{A} \Big|_{\max} \leq \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}. \quad (6)$$

Можно решать различные задачи из условия (6):

- если заданы размеры сечения и материал, то определяется допускаемая внешняя нагрузка, т.к. продольная сила зависит от внешней нагрузки;
- если задана внешняя нагрузка и материал, то определяются прочные размеры сечения;
- если заданы нагрузки, размеры сечения, то можно подобрать материал, определив из (6)  $\sigma_{\text{пред}}$ .

Если требуется проверить прочность стержня, когда известны все его параметры, то вычисляется *фактический (действительный)* коэффициент запаса прочности

$$n_{\phi} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}} \quad (7)$$

и сравнивается с нормативным для оценки прочности.

### Расчет на жесткость при растяжении (сжатии)

Если работоспособность стержня определяется ограничением его деформации, то параметры стержня определяются из условия жесткости.

**Условие жесткости:**

$$\Delta L \leq [\Delta L], \quad (8)$$

где  $\Delta L$  – общее изменение длины стержня или определенной части ее длины под действием внешней нагрузки;

$[\Delta L]$  – допускаемое изменение длины, которое задается в зависимости от условий работы стержня.

С учетом (3) и (4) условие жесткости можно записать так

$$\sum_{i=1}^k \frac{N_i L_i}{EA_i} \leq [\Delta L]. \quad (9)$$

Из (9) следует, что из расчета на жесткость можно определять те же параметры для стержня, как и из расчета на прочность: размеры сечения, допускаемую нагрузку и даже длину стержня.

Если требуется найти перемещение  $\delta$  какого-либо сечения стержня после приложения внешней нагрузки, то оно численно равно изменению длины той части стержня, которая находится между этим сечением и неподвижным (закрепленным) сечением стержня, т.е.

$$\delta = \Delta L. \quad (10)$$

### Пример решения задачи на тему «Центральное растяжение (сжатие)»

**Пример №1.** Стальной стержень находится под действием сил (рисунок 2.1). Построить эпюры продольной силы  $N$ , нормального напряжения  $\sigma$  и деформаций  $\Delta l$  если дано:  $A_1=10 \text{ см}^2$ ,  $A_2=40 \text{ см}^2$ ,  $A_3=20 \text{ см}^2$ ,  $F_1=300 \text{ кН}$ ,  $F_2=500 \text{ кН}$ ,  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

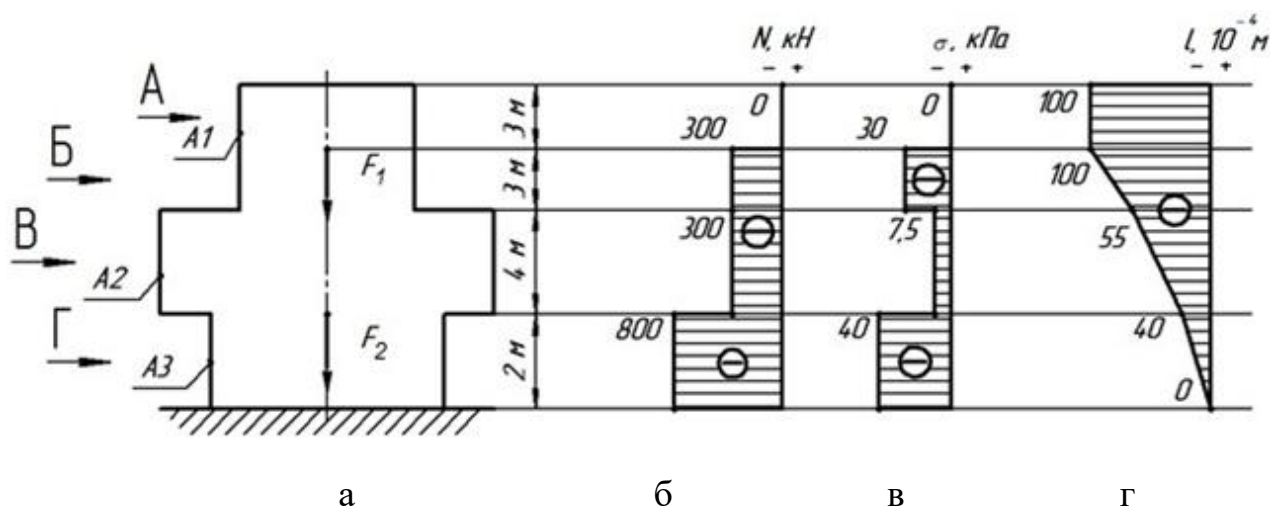
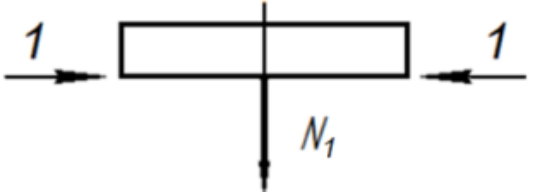
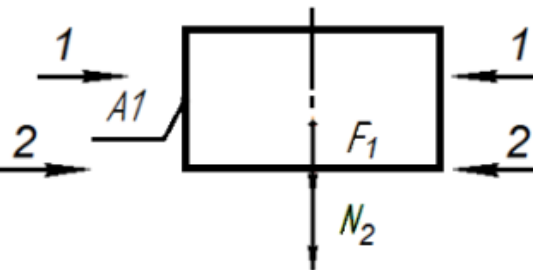
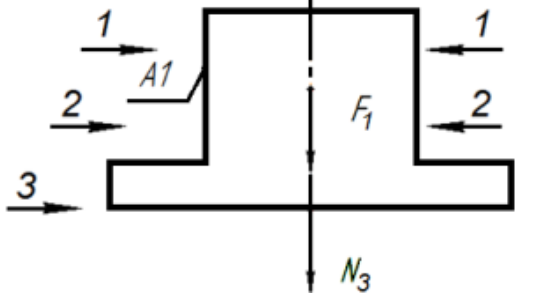
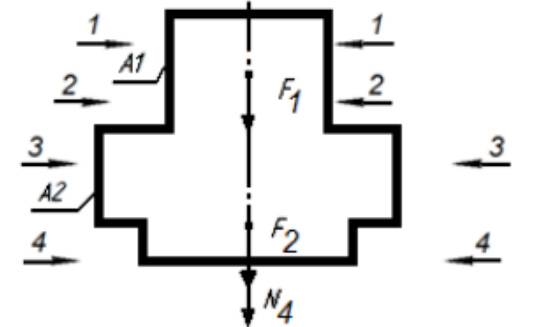


Рисунок 2.1

**Решение.** Рассекаем фигуру на четыре части: 1-1, 2-3, 3-3, 4-4 (рисунок 2.17а) и находим продольные силы  $N$  и нормальные напряжения  $\sigma$  на соответствующих участках.

| Сечение 1-1                                                                         |                                                                                            |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
|    | $N_1 = 0$                                                                                  | (2.1)  |
|                                                                                     | $\sigma_1 = \frac{N_2}{A_1} = 0$                                                           | (2.2)  |
| Сечение 2-2                                                                         |                                                                                            |        |
|    | $-N_2 - F_2 = 0$                                                                           | (2.3)  |
|                                                                                     | $N_2 = -F_1 = -300 \text{ кН}$                                                             | (2.4)  |
|                                                                                     | $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-300}{10 \cdot 10^{-4}} = -30 \cdot 10^4 \text{ кПа}$  | (2.5)  |
| Сечение 3-3                                                                         |                                                                                            |        |
|   | $-N_3 - F_2 = 0$                                                                           | (2.6)  |
|                                                                                     | $N_3 = -F_1 = -300 \text{ кН}$                                                             | (2.7)  |
|                                                                                     | $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-300}{40 \cdot 10^{-4}} = -7,5 \cdot 10^4 \text{ кПа}$ | (2.8)  |
| Сечение 4-4                                                                         |                                                                                            |        |
|  | $-N_4 - F_1 - F_2 = 0$                                                                     | (2.9)  |
|                                                                                     | $N_4 = -F_1 - F_2 = -800 \text{ кН}$                                                       | (2.10) |
|                                                                                     | $\sigma_4 = \frac{N_4}{A_3} = \frac{-800}{20 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^4 \text{ кПа}$  | (2.11) |

Строим эпюры продольных сил  $N$  (значения берем из формул: 2.1, 2.4, 2.7, 2.10) и нормальных напряжений  $\sigma$  (значения берем из формул: 2.2, 2.5, 2.8, 2.11) (рисунок 2.1б, в).

Определяем деформацию отдельных участков  $\Delta l_k$  и полное укорочение бруса  $\Delta l$ .

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l}{EA_3} = \frac{-800 \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA_2} = \frac{-300 \cdot 4}{2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = -15 \cdot 10^{-4} \text{ м} + \Delta l_4$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_1} = \frac{-300 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -45 \cdot 10^{-4} \text{ м} + \Delta l_4 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} = \frac{0 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0 + \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2$$

Полное укорочение бруса  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = (0 - 45 - 15 - 40) \cdot 10^{-4} = -100 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1 \text{ см}$$

Строим эпюру  $\Delta l$  (рисунок 2.1г).

## Контрольные задания

### Статически определимые системы

Стержень находится под действием сил (рисунок 2.2 - 2.4). Построить эпюры продольной силы  $N$ , нормального напряжения  $\sigma$  и перемещения  $\Delta l$ . Данные своего варианта смотрите в таблице 2.1, модуль упругости  $E$  в приложении 2.

Таблица 2.1 Исходные данные

| №  | $A, \text{см}^2$ | $F, \text{кН}$ | Линейные размеры, м |     |     | Материал стержня |
|----|------------------|----------------|---------------------|-----|-----|------------------|
|    |                  |                | $a$                 | $b$ | $c$ |                  |
| 1  | 5                | 10             | 1                   | 2   | 3   | сталь            |
| 2  | 8                | 15             | 2                   | 3   | 4   | дерево           |
| 3  | 10               | 20             | 3                   | 4   | 5   | серый чугун      |
| 4  | 2                | 11             | 4                   | 5   | 6   | медь             |
| 5  | 4                | 13             | 5                   | 6   | 7   | Алюминий катаный |
| 6  | 12               | 16             | 1                   | 2   | 2   | сталь            |
| 7  | 19               | 14             | 2                   | 3   | 3   | дерево           |
| 8  | 7                | 19             | 3                   | 4   | 4   | серый чугун      |
| 9  | 9                | 12             | 4                   | 5   | 5   | медь             |
| 10 | 15               | 17             | 5                   | 6   | 6   | алюминий         |
| 11 | 11               | 10             | 1                   | 2   | 2   | сталь            |
| 12 | 14               | 15             | 2                   | 3   | 3   | дерево           |
| 13 | 6                | 20             | 3                   | 4   | 4   | серый чугун      |
| 14 | 13               | 11             | 4                   | 5   | 5   | медь             |
| 15 | 18               | 13             | 5                   | 6   | 6   | алюминий         |
| 16 | 5                | 16             | 1                   | 2   | 2   | сталь            |
| 17 | 8                | 14             | 2                   | 3   | 3   | дерево           |
| 18 | 10               | 19             | 3                   | 4   | 4   | серый чугун      |
| 19 | 2                | 12             | 4                   | 5   | 5   | медь             |
| 20 | 4                | 17             | 5                   | 6   | 6   | алюминий         |
| 21 | 12               | 10             | 1                   | 2   | 2   | сталь            |
| 22 | 7                | 15             | 2                   | 3   | 3   | дерево           |
| 23 | 9                | 20             | 3                   | 4   | 4   | серый чугун      |
| 24 | 15               | 11             | 4                   | 5   | 5   | медь             |
| 25 | 11               | 13             | 5                   | 6   | 6   | алюминий         |
| 26 | 14               | 16             | 1                   | 2   | 2   | сталь            |
| 27 | 6                | 14             | 2                   | 3   | 3   | дерево           |
| 28 | 13               | 19             | 3                   | 4   | 4   | серый чугун      |
| 29 | 18               | 12             | 4                   | 5   | 5   | медь             |
| 30 | 19               | 17             | 5                   | 6   | 6   | алюминий         |

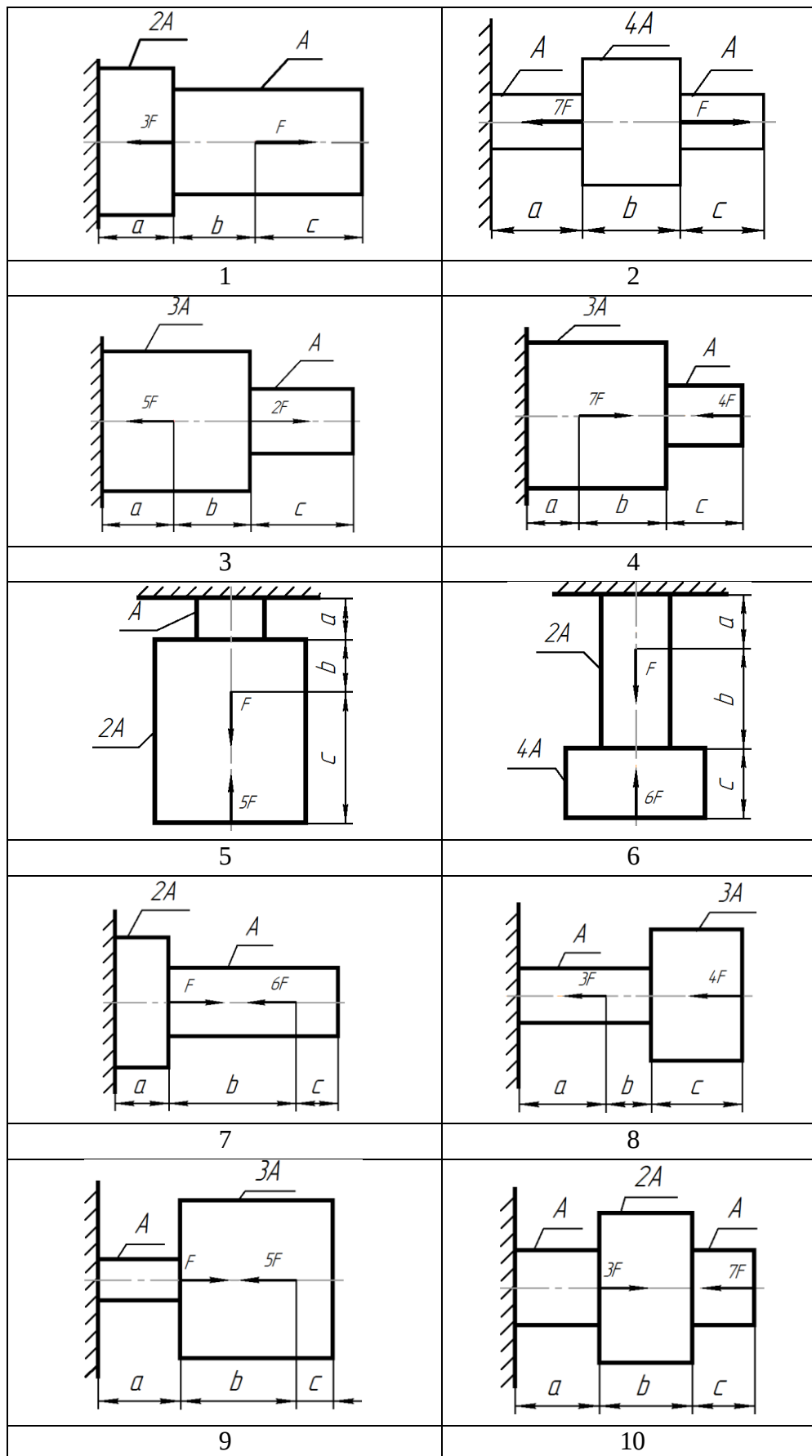


Рисунок 2.2 – Варианты для самостоятельного решения задачи на тему  
«Центральное растяжение сжатие»

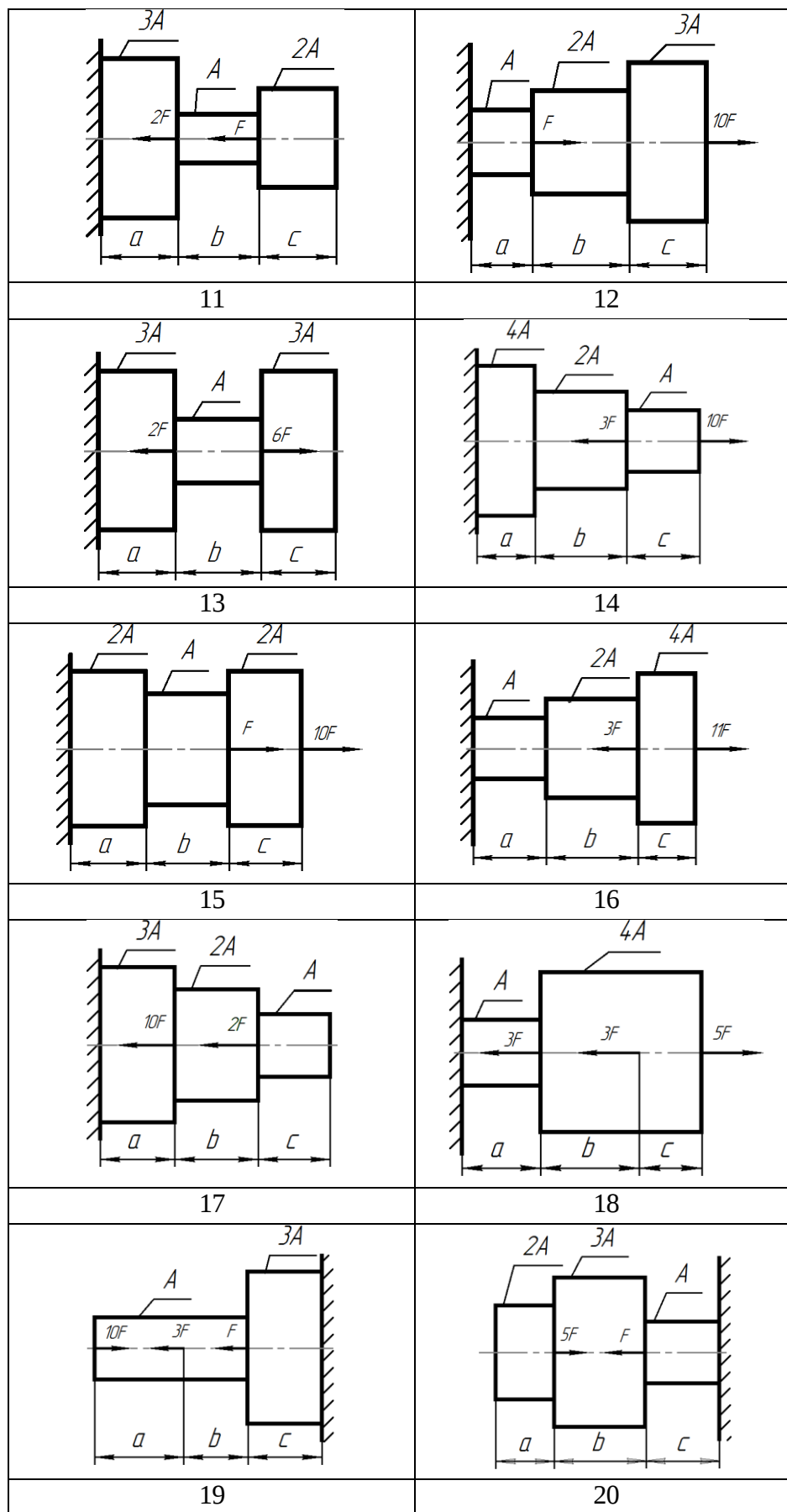


Рисунок 2.3 – Варианты для самостоятельного решения задачи на тему  
«Центральное растяжение сжатие»

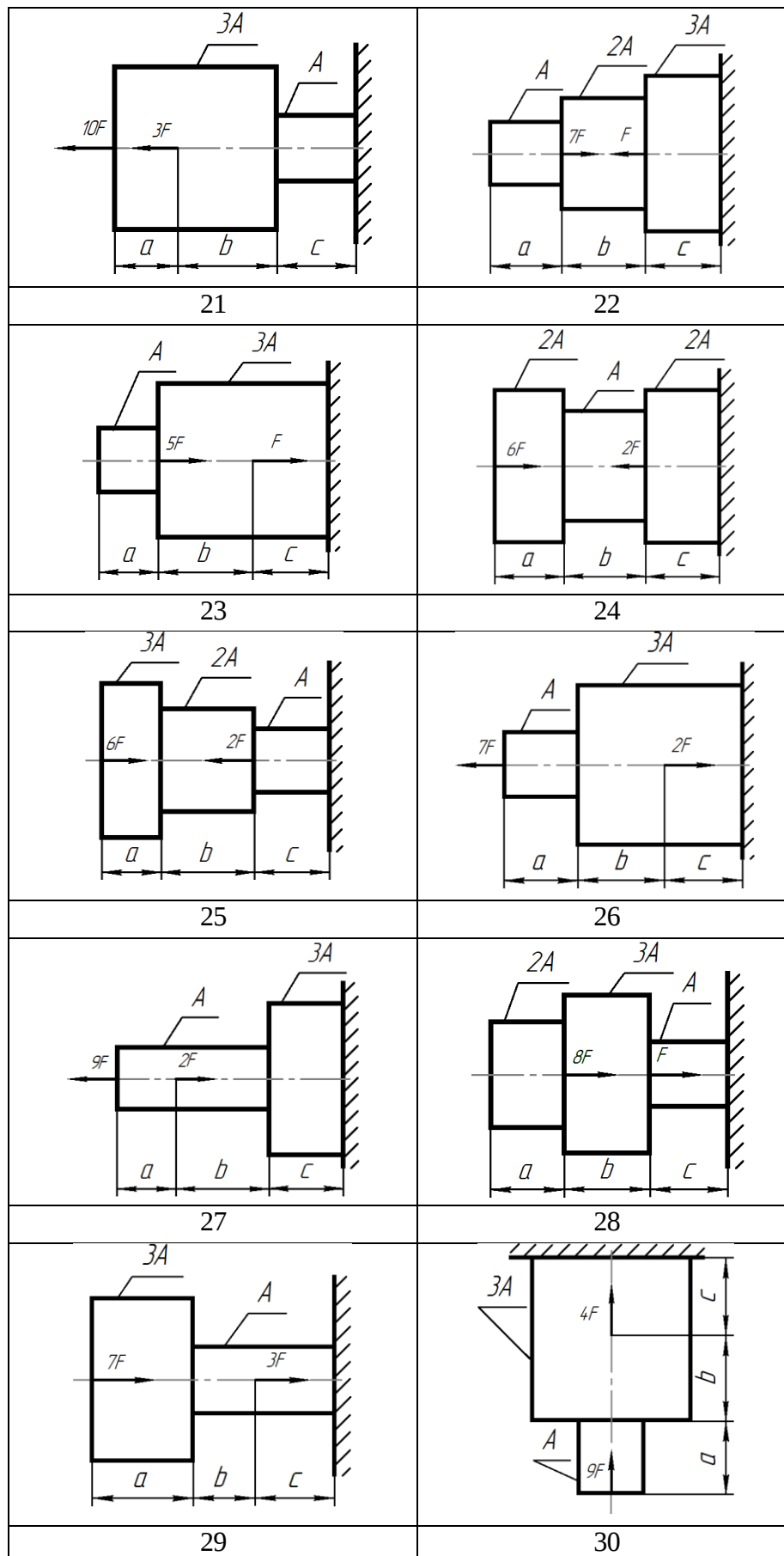


Рисунок 2.4 – Варианты для самостоятельного решения задачи на тему  
«Центральное растяжение сжатие»

## Практическая работа № 4

### Расчет болтовых и заклепочных соединений на срез и смятие

#### 4.1 Сдвиг (срез), закон Гука при сдвиге

Сдвиг – это вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только одна поперечная сила (рисунок 4.1).

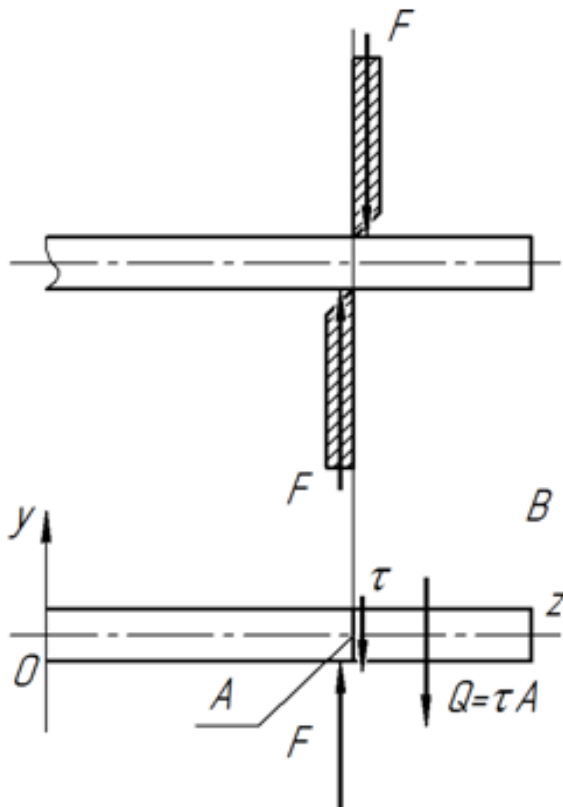


Рисунок 4.1

Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелипипеда, к граням которого приложены напряжения (рисунок 4.2). Внутри бруса на каждой из его грани возникает касательное напряжение  $\tau$ . На противоположных гранях образуются пары сил. Такое напряженное состояние называется **ЧИСТЫМ СДВИГОМ**.

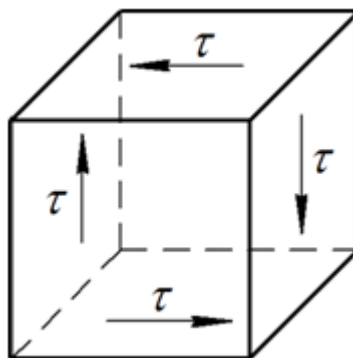


Рисунок 4.2

В результате сдвига грани сдвигаются на угол,  $\gamma$  который называется **углом сдвига** (рисунок 4.3).

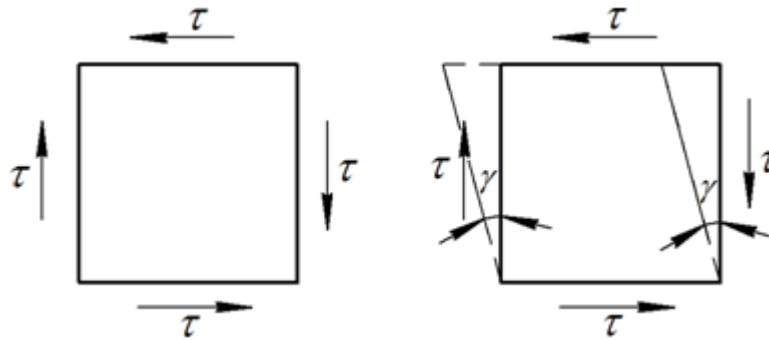


Рисунок 4.3

При сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения:

$$\tau_c = \frac{Q_y}{A_c}$$

$$Q = \frac{F}{z}$$

где:  $Q_y$  – поперечная сила;  $A$  – площадь сдвига;  $z$  – количество деталей.

При сдвиге выполняется **закон Гука**:

$$\tau = G\gamma$$

где:  $\tau$  – напряжение;  $G$  – модуль сдвига;  $\gamma$  – угол сдвига.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

где:  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

1. При расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается.
2. Силы упругости распределены по сечению равномерно.

При использовании нескольких деталей внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Условие прочности при сдвиге (срезе):

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leq [\tau_c]$$

где:  $[\tau_c]$  – допускаемое напряжение сдвига.

Допускаемое напряжение  $[\tau_c]$  определяется по формуле:

$$[\tau_c] = (0,25 \div 0,35) \sigma_T$$

где:  $\sigma_T$  – предел текучести материала.

Сдвиг, при котором материал разрушается, называется **срезом**.

#### 4.2 Смятие

При передаче нагрузки от одной поверхности к другой, в месте контакта двух деталей одновременно со сдвигом может происходить смятие поверхности (например – разрушение болтов или деталей которые они соединяют, рисунок 4.4а).

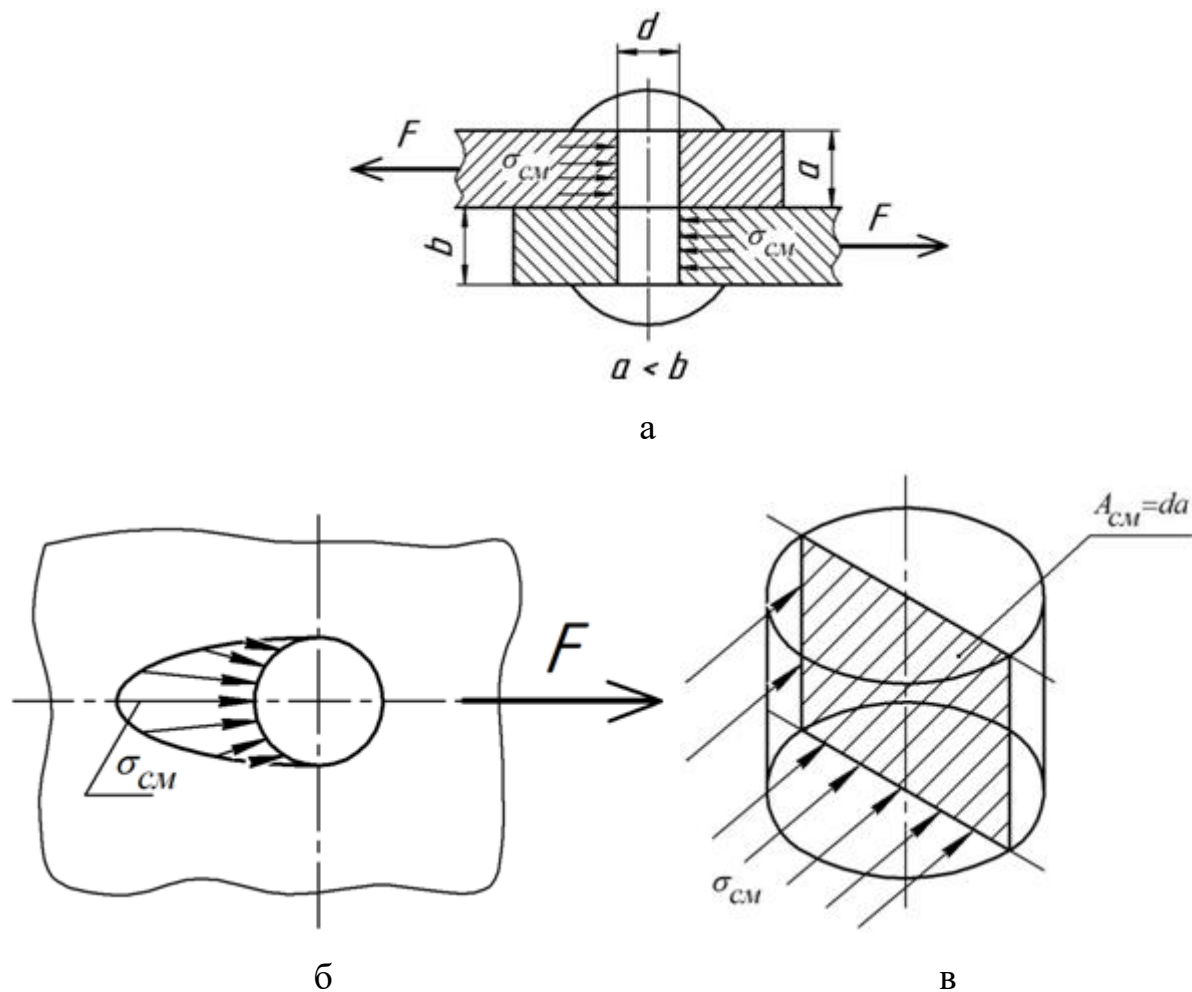


Рисунок 4.4

При расчете на смятие принимают ряд допущений принятых для сдвига, но для расчета боковой цилиндрической поверхности используют условную плоскую поверхность, которая проходит через осевые линии цилиндра. На рисунке 4.4б представлена действительная поверхность смятия, на рисунке 4.4в – условная поверхность смятия.

Детали, работающие на сдвиг (срез) и смятие:

1. Ось (рисунок 4.5).

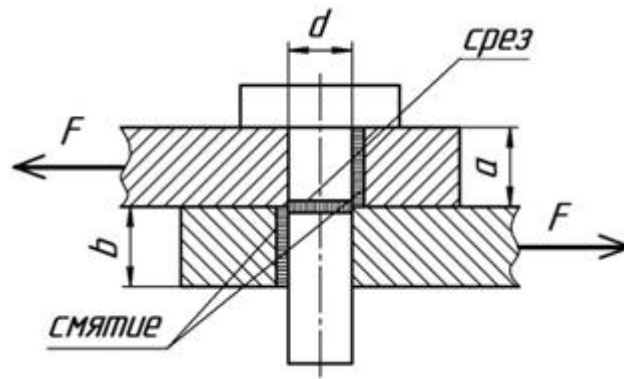


Рисунок 4.5

Если  $a < b$ :

$$A_{см} = da$$

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} i, i = 1$$

где:  $i$  – количество площадей среза.

2. Болт (рисунок 4.6).

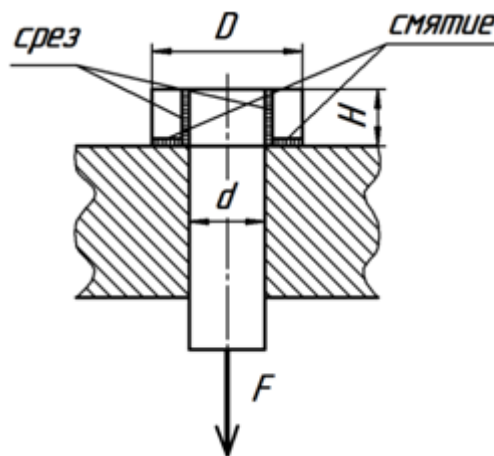


Рисунок 4.6

$$A_c = \pi dH$$

$$A_{см} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

3. Заклепка односрезная (рисунок 4.7)

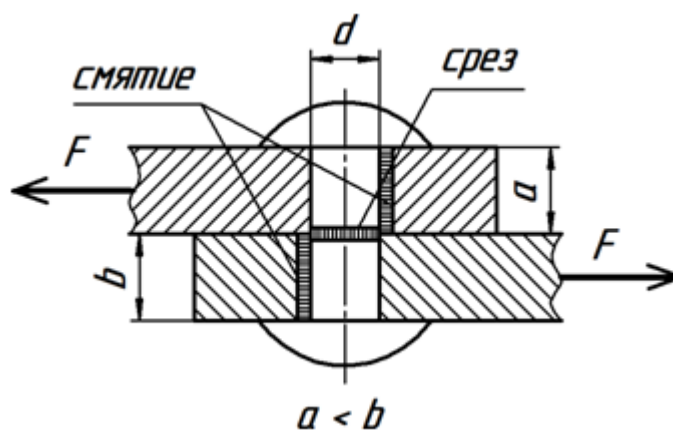


Рисунок 4.7

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A_{cm} = da$$

4. Заклепка двухсрезная (рисунок 4.8).

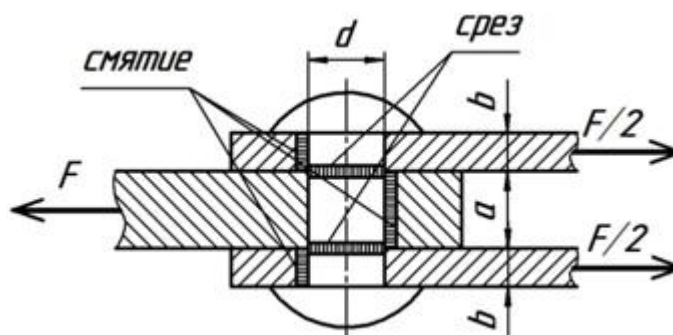


Рисунок 4.8

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} i, i = 2$$

$$A_c = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$A_{cm} = db$$

## 5. Сварное соединение (рисунок 4.9)

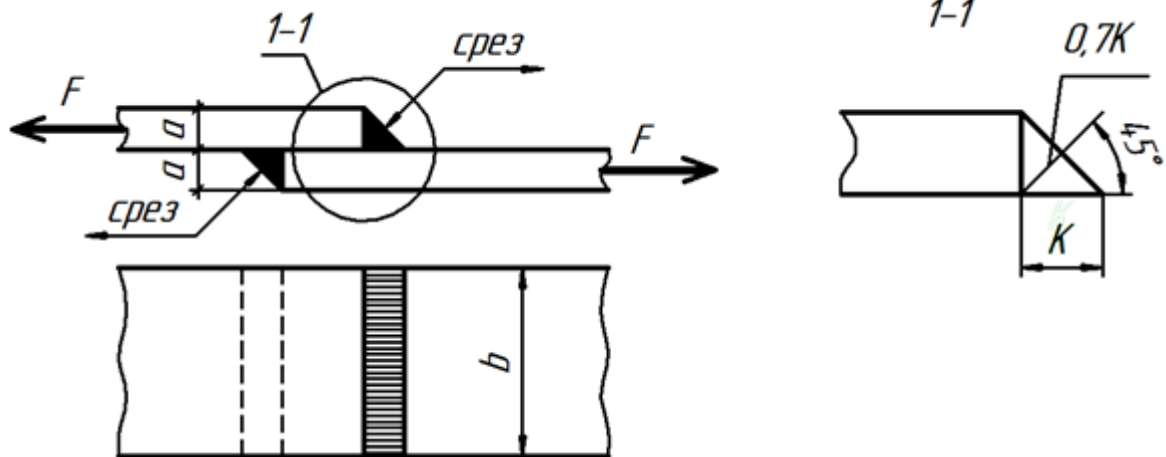


Рисунок 4.9

Двухсторонний шов:

$$A_c = 2 \cdot 0,7Kb$$

## 4.3 Примеры решения задач

**Пример №1.** Определить необходимое количество заклепок диаметром  $d=20$  мм для соединения внахлестку двух листов толщиной  $a=8$  мм и  $b=10$  мм (рисунок 4.10). Сила  $F$  равна 196 кН. Допускаемые напряжения: на срез  $[\tau_c]=140$  МПа, на смятие  $[\sigma_{см}]=320$  МПа,  $[\sigma]=160$  МПа.

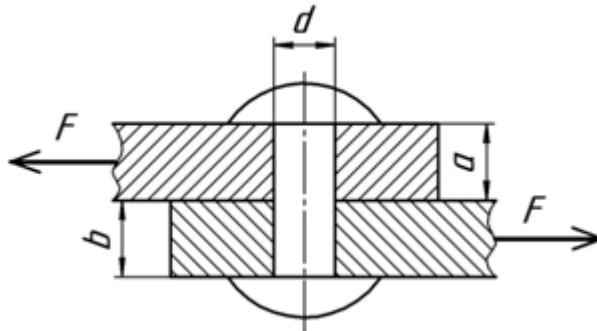


Рисунок 4.10

**Решение.** Из уравнения прочности на срез определяем необходимое число заклепок:

$$\tau_c = \frac{F}{nA_c} \leq [\tau_c], \quad A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau_c]} = \frac{196 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 20^2}{4} \cdot 140} = 4,5 \approx 5$$

Из уравнения прочности на смятие определяем необходимое число заклепок:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{nA_{см}} \leq [\sigma_{см}], A_{см} = da$$

$$n \geq \frac{F}{da[\sigma_{см}]} = \frac{196 \cdot 10^3}{20 \cdot 8 \cdot 320} = 3,8 \approx 4$$

Для обеспечения прочности на срез и смятие необходимо 5 заклепок.

При установке заклепок, расстояние между ними и от края листа регламентируется: расстояние между центрами заклепок  $3d$ , расстояние до края  $1,5d$ . Для установки 5 заклепок диаметром 20 мм в ряд необходима ширина листа  $l=300$  мм (рисунок 4.11).

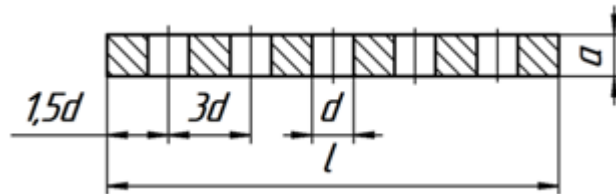


Рисунок 4.11

Проверяем прочность листов на растяжение, а именно самый тонкий лист.

Записываем условие прочности на растяжение:

$$\sigma_{раст} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{раст}]$$

Определяем ширину листа  $l$  согласно регламенту:

$$l = 2 \cdot 1,5 \cdot d + 4 \cdot 3 \cdot d = 2 \cdot 1,5 \cdot 20 + 4 \cdot 3 \cdot 20 = 300 \text{ мм}$$

$$A = (l - nd) \cdot a = (300 - 5 \cdot 20) \cdot 8 = 1600 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_{раст} = \frac{196 \cdot 10^3}{1600} = 122,5$$

$$\sigma_{раст} \leq [\sigma_{раст}]$$

$$122,5 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$$

**Ответ:** прочность листа обеспечена.

**Пример №2.** Определить диаметр болта в соединении (рис. 3.12) если растягивающая сила  $F=196$  кН,  $a=15$  мм,  $b=20$  мм, допускаемые напряжения для материала болта: на срез  $[\tau_c]=80$  МПа, на смятие  $[\sigma_{см}]=200$  МПа. Гайку заворачивают, но не затягивают.

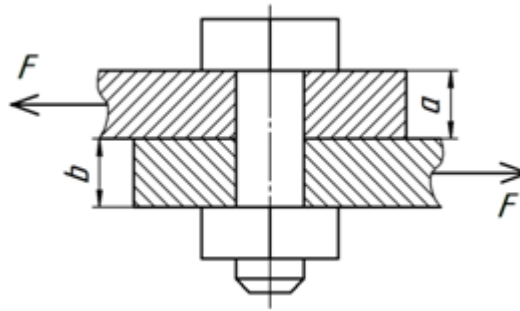


Рисунок 4.12

**Решение.** Из уравнения прочности на срез определяем необходимый диаметр болта:

$$\tau_c = \frac{F}{nA_c} \leq [\tau_c], \quad A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_c]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 196 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80}} = 56 \text{ мм}$$

Из уравнения прочности на смятие определяем необходимый диаметр болта:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{nda} \leq [\sigma_{см}]$$

$$d \geq \frac{F}{na[\sigma_{см}]} = \frac{196 \cdot 10^3}{15 \cdot 200} = 65 \text{ мм}$$

**Ответ:** для обеспечения прочности на срез и смятие необходим болт диаметром 65 мм.

**Пример №3.** Проверить прочность сварного соединения на срез (рис. 3.13), если: действующая нагрузка  $F=196$  кН,  $a=15$  мм,  $b=120$  мм, допускаемое напряжение шва на срез  $[\tau_c]=80$  МПа.

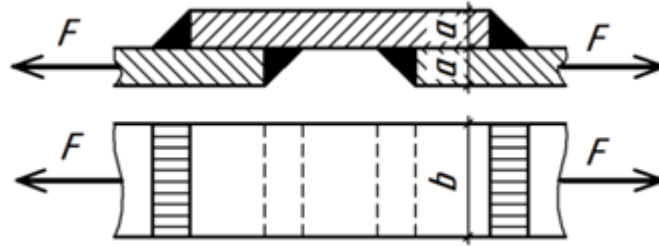


Рисунок 4.13

Нагрузка воздействует на швы последовательно – два справа и два слева. Записываем уравнение прочности на срез:

$$\tau_c = \frac{F}{A_c} \leq [\tau_c]$$

$$A_c = 2 \cdot 0,7 \cdot K b = 2 \cdot 0,7 \cdot 15 \cdot 120 = 2520 \text{ мм}^2$$

$$\tau_c = \frac{196 \cdot 10^3}{2520} = 77,8 \text{ МПа}$$

$$77,8 \text{ МПа} \leq 80 \text{ МПа}$$

**Ответ:** прочность сварного шва обеспечена.

## 4.4 Контрольные задания

### Срез и смятие

1. На листы соединенные внахлестку действует растягивающая сила  $F$ . Определить необходимое количество заклепок диаметром  $d$  для соединения двух листов толщиной  $a$  и  $b$  (рисунок 4.14). Заклепки расположить в один ряд. Проверить соединяемые листы на прочность. Данные для расчета взять из таблицы 4.1.

Таблица 4.1

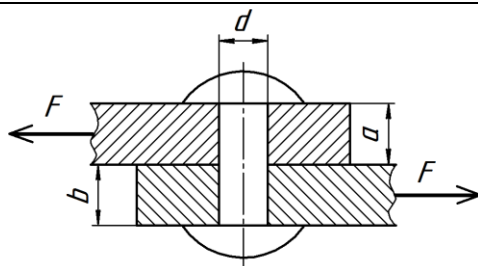


Рисунок 4.14

| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $d$ , мм | $F$ , кН | $[\sigma]$ , МПа | $[\sigma_{см}]$ , МПа | $[\tau_c]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|----------|------------------|-----------------------|------------------|
| 1  | 2        | 4        | 8        | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 2  | 4        | 6        | 12       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 3  | 6        | 8        | 16       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 4  | 8        | 10       | 20       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 5  | 10       | 12       | 24       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 6  | 12       | 14       | 30       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 7  | 14       | 3        | 20       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 8  | 16       | 4        | 22       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 9  | 18       | 5        | 24       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 10 | 20       | 6        | 30       | 280      | 200              | 320                   | 140              |
| 11 | 3        | 3        | 8        | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 12 | 4        | 5        | 12       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 13 | 5        | 8        | 16       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 14 | 6        | 12       | 20       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 15 | 10       | 12       | 24       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 16 | 15       | 12       | 30       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 17 | 10       | 8        | 20       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 18 | 8        | 12       | 22       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 19 | 12       | 10       | 24       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 20 | 16       | 12       | 30       | 280      | 200              | 320                   | 140              |
| 21 | 4        | 3        | 8        | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 22 | 3        | 7        | 12       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 23 | 9        | 5        | 16       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 24 | 5        | 10       | 20       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 25 | 15       | 6        | 24       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 26 | 14       | 14       | 30       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 27 | 10       | 6        | 20       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 28 | 12       | 10       | 22       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 29 | 8        | 14       | 24       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 30 | 12       | 12       | 30       | 280      | 200              | 320                   | 140              |

2. Определить необходимое число заклепок диаметром  $d$  для соединения двух листов толщиной  $b$  к третьему листу толщиной  $a$  (рисунок 4.15) если известна сила  $F$ , растягивающая соединение. Заклепки расположить в один ряд. Проверить соединяемые листы на прочность. Данные для расчета взять из таблицы 4.2.

Таблица 4.2

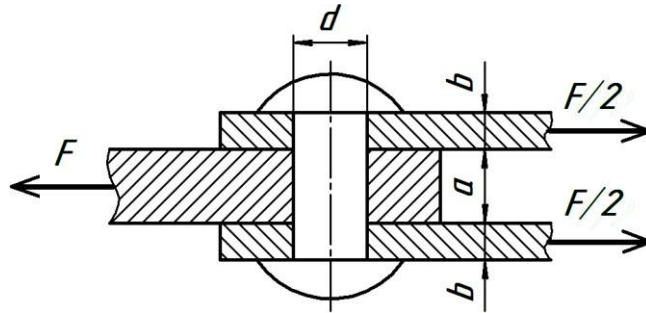


Рисунок 4.15

| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $d$ , мм | $F$ , кН | $[\sigma]$ , МПа | $[\sigma_{см}]$ , МПа | $[\tau_c]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|----------|------------------|-----------------------|------------------|
| 1  | 8        | 5        | 16       | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 2  | 10       | 6        | 20       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 3  | 12       | 8        | 24       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 4  | 14       | 10       | 30       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 5  | 16       | 12       | 30       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 6  | 8        | 6        | 16       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 7  | 10       | 5        | 16       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 8  | 12       | 6        | 20       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 9  | 14       | 8        | 24       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 10 | 16       | 10       | 30       | 280      | 200              | 320                   | 140              |
| 11 | 18       | 10       | 30       | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 12 | 8        | 4        | 16       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 13 | 12       | 10       | 24       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 14 | 10       | 4        | 16       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 15 | 14       | 6        | 24       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 16 | 16       | 8        | 30       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 17 | 8        | 3        | 16       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 18 | 10       | 8        | 20       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 19 | 12       | 4        | 20       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 20 | 16       | 6        | 24       | 280      | 200              | 320                   | 140              |
| 21 | 18       | 8        | 30       | 100      | 110              | 280                   | 100              |
| 22 | 12       | 5        | 20       | 120      | 120              | 320                   | 140              |
| 23 | 10       | 3        | 16       | 140      | 130              | 280                   | 100              |
| 24 | 14       | 5        | 24       | 160      | 140              | 320                   | 140              |
| 25 | 16       | 10       | 30       | 180      | 150              | 280                   | 100              |
| 26 | 18       | 6        | 30       | 200      | 160              | 320                   | 140              |
| 27 | 16       | 5        | 24       | 220      | 170              | 280                   | 100              |
| 28 | 18       | 5        | 30       | 240      | 180              | 320                   | 140              |
| 29 | 15       | 8        | 24       | 260      | 190              | 280                   | 100              |
| 30 | 13       | 10       | 30       | 280      | 200              | 320                   | 140              |

3. Определить необходимое число заклепок диаметром  $d$  для соединения впритык двух листов толщиной  $a$  при помощи двух накладок толщиной  $b$  (рисунок 4.16) если известна сила  $F$ , растягивающая соединение. Проверить прочность заклепочного соединения на срез и смятие. Данные для расчета взять из таблицы 4.3.

Таблица 4.3

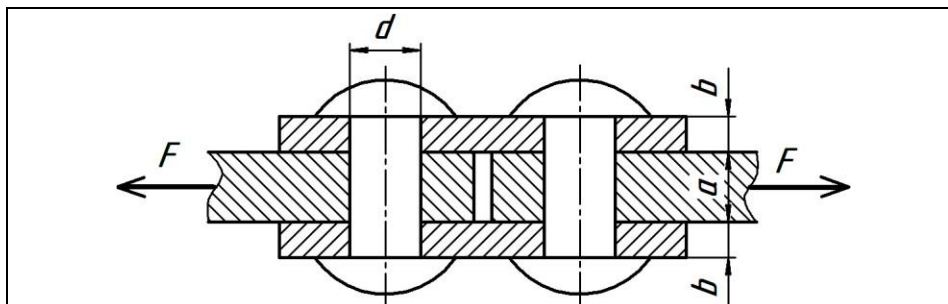


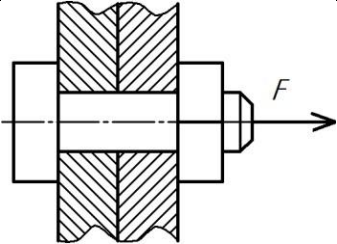
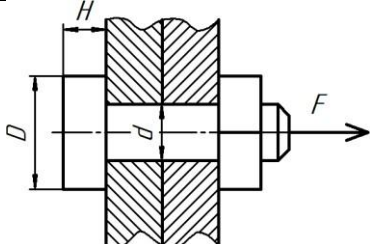
Рисунок 4.16

| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $d$ , мм | $F$ , кН | $[\sigma_{см}]$ , МПа | $[\tau_c]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|----------|-----------------------|------------------|
| 1  | 8        | 5        | 16       | 100      | 280                   | 100              |
| 2  | 10       | 6        | 20       | 120      | 320                   | 140              |
| 3  | 12       | 8        | 24       | 140      | 280                   | 100              |
| 4  | 14       | 10       | 30       | 160      | 320                   | 140              |
| 5  | 16       | 12       | 30       | 180      | 280                   | 100              |
| 6  | 8        | 6        | 16       | 200      | 320                   | 140              |
| 7  | 10       | 5        | 16       | 220      | 280                   | 100              |
| 8  | 12       | 6        | 20       | 240      | 320                   | 140              |
| 9  | 14       | 8        | 24       | 260      | 280                   | 100              |
| 10 | 16       | 10       | 30       | 280      | 320                   | 140              |
| 11 | 18       | 10       | 30       | 100      | 280                   | 100              |
| 12 | 8        | 4        | 16       | 120      | 320                   | 140              |
| 13 | 12       | 10       | 24       | 140      | 280                   | 100              |
| 14 | 10       | 4        | 16       | 160      | 320                   | 140              |
| 15 | 14       | 6        | 24       | 180      | 280                   | 100              |
| 16 | 16       | 8        | 30       | 200      | 320                   | 140              |
| 17 | 8        | 3        | 16       | 220      | 280                   | 100              |
| 18 | 10       | 8        | 20       | 240      | 320                   | 140              |
| 19 | 12       | 4        | 20       | 260      | 280                   | 100              |
| 20 | 16       | 6        | 24       | 280      | 320                   | 140              |
| 21 | 18       | 8        | 30       | 100      | 280                   | 100              |
| 22 | 12       | 5        | 20       | 120      | 320                   | 140              |
| 23 | 10       | 3        | 16       | 140      | 280                   | 100              |
| 24 | 14       | 5        | 24       | 160      | 320                   | 140              |
| 25 | 16       | 10       | 30       | 180      | 280                   | 100              |
| 26 | 18       | 6        | 30       | 200      | 320                   | 140              |
| 27 | 16       | 5        | 24       | 220      | 280                   | 100              |
| 28 | 18       | 5        | 30       | 240      | 320                   | 140              |
| 29 | 15       | 8        | 24       | 260      | 280                   | 100              |

4. На болт действует растягивающая осевая сила  $F$  (рисунок 4.17). Определить диаметр болта в соединении. Гайку заворачивают, но не затягивают. Данные взять из табл. 3.4.

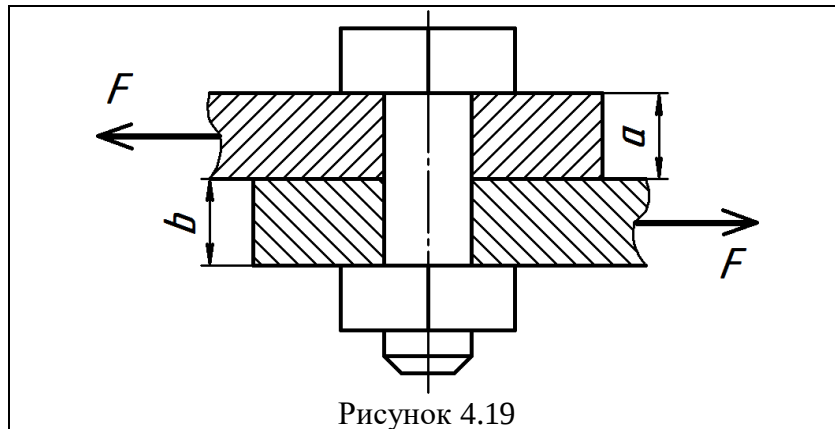
5. На болт действует осевая растягивающая сила (рисунок 4.18), при этом возникает смятие головки болта. Рассчитать величину площади смятия болта. Из условия прочности болта на смятие определить величину допускаемой нагрузки  $F$ . Гайку заворачивают, но не затягивают. Данные взять из таблицы 4.4.

Таблица 4.4

|  <p>Рисунок 4.17</p> |                |                               |  <p>Рисунок 4.18</p> |                |                |                             |                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|-----------------------------|------------------------|
| №                                                                                                     | $F, \text{кН}$ | $[\sigma_{расм}], \text{МПа}$ | $d, \text{мм}$                                                                                         | $D, \text{мм}$ | $H, \text{мм}$ | $[\sigma_{см}], \text{МПа}$ | $[\tau_c], \text{МПа}$ |
| 1                                                                                                     | 100            | 135                           | 6                                                                                                      | 10             | 6              | 160                         | 80                     |
| 2                                                                                                     | 120            | 125                           | 8                                                                                                      | 13             | 8              | 192                         | 96                     |
| 3                                                                                                     | 140            | 118                           | 10                                                                                                     | 16             | 10             | 240                         | 120                    |
| 4                                                                                                     | 160            | 112                           | 6                                                                                                      | 10             | 6              | 512                         | 256                    |
| 5                                                                                                     | 180            | 105                           | 8                                                                                                      | 13             | 8              | 160                         | 80                     |
| 6                                                                                                     | 200            | 100                           | 10                                                                                                     | 16             | 10             | 192                         | 96                     |
| 7                                                                                                     | 220            | 160                           | 12                                                                                                     | 18             | 12             | 240                         | 120                    |
| 8                                                                                                     | 240            | 150                           | 14                                                                                                     | 21             | 14             | 512                         | 256                    |
| 9                                                                                                     | 260            | 140                           | 16                                                                                                     | 24             | 16             | 160                         | 80                     |
| 10                                                                                                    | 280            | 130                           | 18                                                                                                     | 27             | 18             | 192                         | 96                     |
| 11                                                                                                    | 100            | 125                           | 20                                                                                                     | 30             | 20             | 240                         | 120                    |
| 12                                                                                                    | 120            | 120                           | 22                                                                                                     | 33             | 22             | 512                         | 256                    |
| 13                                                                                                    | 140            | 200                           | 24                                                                                                     | 36             | 24             | 160                         | 80                     |
| 14                                                                                                    | 160            | 187                           | 27                                                                                                     | 40             | 27             | 192                         | 96                     |
| 15                                                                                                    | 180            | 176                           | 30                                                                                                     | 45             | 30             | 240                         | 120                    |
| 16                                                                                                    | 200            | 166                           | 33                                                                                                     | 50             | 33             | 512                         | 256                    |
| 17                                                                                                    | 220            | 157                           | 36                                                                                                     | 54             | 36             | 160                         | 80                     |
| 18                                                                                                    | 240            | 150                           | 20                                                                                                     | 30             | 20             | 192                         | 96                     |
| 19                                                                                                    | 260            | 426                           | 22                                                                                                     | 33             | 22             | 240                         | 120                    |
| 20                                                                                                    | 280            | 400                           | 24                                                                                                     | 36             | 24             | 512                         | 256                    |
| 21                                                                                                    | 100            | 376                           | 10                                                                                                     | 16             | 10             | 160                         | 80                     |
| 22                                                                                                    | 120            | 355                           | 12                                                                                                     | 18             | 12             | 192                         | 96                     |
| 23                                                                                                    | 140            | 336                           | 14                                                                                                     | 21             | 14             | 240                         | 120                    |
| 24                                                                                                    | 160            | 320                           | 16                                                                                                     | 24             | 16             | 512                         | 256                    |
| 25                                                                                                    | 180            | 135                           | 18                                                                                                     | 27             | 18             | 160                         | 80                     |
| 26                                                                                                    | 200            | 125                           | 20                                                                                                     | 30             | 20             | 192                         | 96                     |
| 27                                                                                                    | 220            | 118                           | 22                                                                                                     | 33             | 22             | 240                         | 120                    |
| 28                                                                                                    | 240            | 112                           | 24                                                                                                     | 36             | 24             | 512                         | 256                    |
| 29                                                                                                    | 260            | 105                           | 27                                                                                                     | 40             | 27             | 160                         | 80                     |
| 30                                                                                                    | 280            | 100                           | 30                                                                                                     | 45             | 30             | 192                         | 96                     |

6. На болт действует растягивающая поперечная сила  $F$  (рисунок 4.19). Определить диаметр болта в соединении. Проверить прочность болтового соединения на срез и смятие. Данные для расчета взять из таблицы 4.5.

Таблица 4.5



| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $F$ , кН | $[\sigma_{см}]$ , МПа | $[\tau_c]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|-----------------------|------------------|
| 1  | 8        | 5        | 100      | 160                   | 80               |
| 2  | 10       | 6        | 120      | 192                   | 96               |
| 3  | 12       | 8        | 140      | 240                   | 120              |
| 4  | 14       | 10       | 160      | 512                   | 256              |
| 5  | 16       | 12       | 180      | 160                   | 80               |
| 6  | 8        | 6        | 200      | 192                   | 96               |
| 7  | 10       | 5        | 220      | 240                   | 120              |
| 8  | 12       | 6        | 240      | 512                   | 256              |
| 9  | 14       | 8        | 260      | 160                   | 80               |
| 10 | 16       | 10       | 280      | 192                   | 96               |
| 11 | 18       | 10       | 100      | 240                   | 120              |
| 12 | 8        | 4        | 120      | 512                   | 256              |
| 13 | 12       | 10       | 140      | 160                   | 80               |
| 14 | 10       | 4        | 160      | 192                   | 96               |
| 15 | 14       | 6        | 180      | 240                   | 120              |
| 16 | 16       | 8        | 200      | 512                   | 256              |
| 17 | 8        | 3        | 220      | 160                   | 80               |
| 18 | 10       | 8        | 240      | 192                   | 96               |
| 19 | 12       | 4        | 260      | 240                   | 120              |
| 20 | 16       | 6        | 280      | 512                   | 256              |
| 21 | 18       | 8        | 100      | 160                   | 80               |
| 22 | 12       | 5        | 120      | 192                   | 96               |
| 23 | 10       | 3        | 140      | 240                   | 120              |
| 24 | 14       | 5        | 160      | 512                   | 256              |
| 25 | 16       | 10       | 180      | 160                   | 80               |
| 26 | 18       | 6        | 200      | 192                   | 96               |
| 27 | 16       | 5        | 220      | 240                   | 120              |
| 28 | 18       | 5        | 240      | 512                   | 256              |
| 29 | 15       | 8        | 260      | 160                   | 80               |
| 30 | 13       | 10       | 280      | 192                   | 96               |

7. Рассчитать суммарную площадь среза сварных швов при передаче силы  $F$  (рисунок 4.20). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из таблицы 4.6.

Таблица 4.6

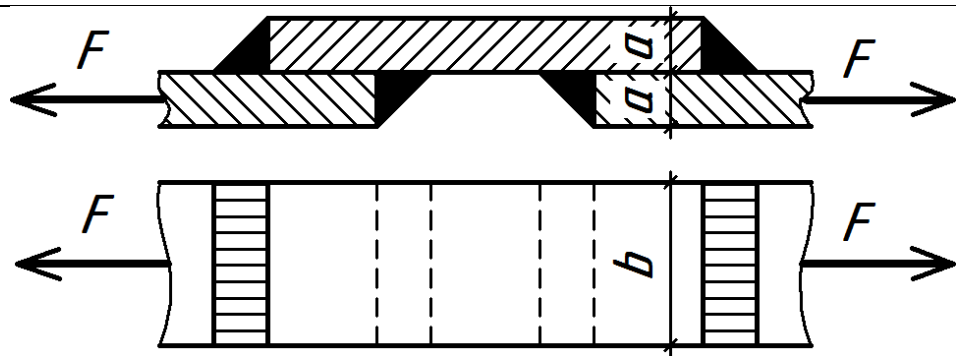


Рисунок 4.20

| №  | $a, \text{мм}$ | $b, \text{мм}$ | $F, \text{кН}$ | $[\tau_c], \text{МПа}$ |
|----|----------------|----------------|----------------|------------------------|
| 1  | 6              | 60             | 100            | 80                     |
| 2  | 8              | 80             | 120            | 96                     |
| 3  | 10             | 100            | 140            | 120                    |
| 4  | 12             | 120            | 160            | 256                    |
| 5  | 14             | 140            | 180            | 80                     |
| 6  | 16             | 160            | 200            | 96                     |
| 7  | 18             | 180            | 220            | 120                    |
| 8  | 20             | 200            | 240            | 256                    |
| 9  | 22             | 220            | 260            | 80                     |
| 10 | 24             | 240            | 280            | 96                     |
| 11 | 6              | 60             | 100            | 120                    |
| 12 | 8              | 80             | 120            | 256                    |
| 13 | 10             | 100            | 140            | 80                     |
| 14 | 12             | 120            | 160            | 96                     |
| 15 | 14             | 140            | 180            | 120                    |
| 16 | 16             | 160            | 200            | 256                    |
| 17 | 18             | 180            | 220            | 80                     |
| 18 | 20             | 200            | 240            | 96                     |
| 19 | 22             | 220            | 260            | 120                    |
| 20 | 24             | 240            | 280            | 256                    |
| 21 | 6              | 60             | 100            | 80                     |
| 22 | 8              | 80             | 120            | 96                     |
| 23 | 10             | 100            | 140            | 120                    |
| 24 | 12             | 120            | 160            | 256                    |
| 25 | 14             | 140            | 180            | 80                     |
| 26 | 16             | 160            | 200            | 96                     |
| 27 | 18             | 180            | 220            | 120                    |
| 28 | 20             | 200            | 240            | 256                    |
| 29 | 22             | 220            | 260            | 80                     |
| 30 | 24             | 240            | 280            | 96                     |

8. На листы, сваренные встык действует сила  $F$ , которая направлена перпендикулярно сваренному шву (рисунок 4.21). Проверить прочность сварного соединения на сжатие и растяжение. Данные для расчета взять из таблицы 4.7.

Таблица 4.7

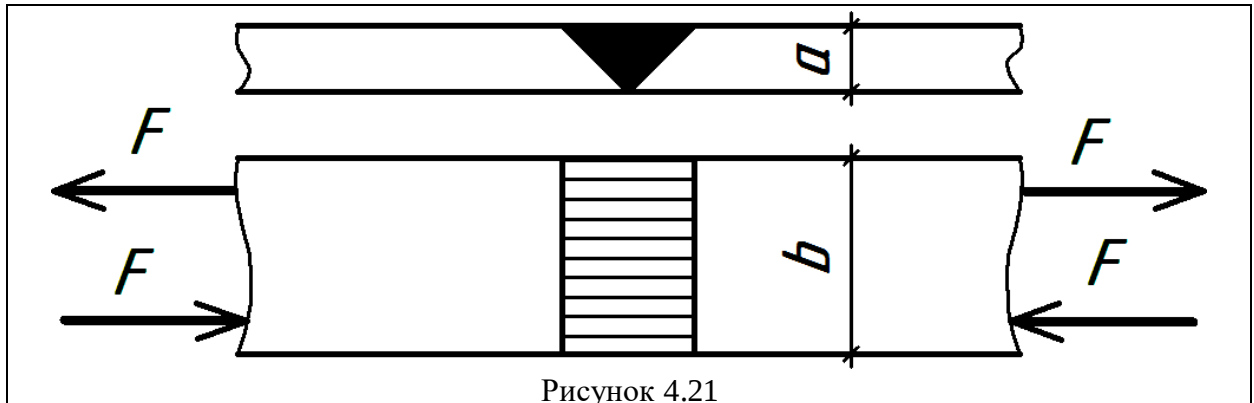
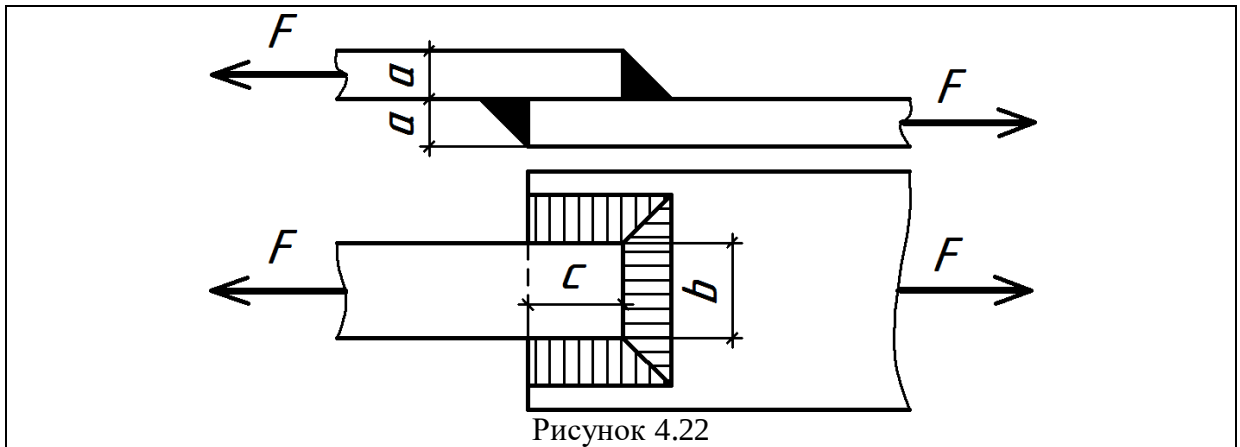


Рисунок 4.21

| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $F$ , кН | $[\sigma_{сж}]$ , МПа | $[\sigma_{раст}]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|-----------------------|-------------------------|
| 1  | 6        | 60       | 100      | 214                   | 183                     |
| 2  | 8        | 80       | 120      | 295                   | 214                     |
| 3  | 10       | 100      | 140      | 346                   | 244                     |
| 4  | 12       | 120      | 160      | 214                   | 254                     |
| 5  | 14       | 140      | 180      | 295                   | 285                     |
| 6  | 16       | 160      | 200      | 346                   | 295                     |
| 7  | 18       | 180      | 220      | 214                   | 346                     |
| 8  | 20       | 200      | 240      | 295                   | 183                     |
| 9  | 22       | 220      | 260      | 346                   | 214                     |
| 10 | 24       | 240      | 280      | 214                   | 244                     |
| 11 | 6        | 60       | 100      | 295                   | 254                     |
| 12 | 8        | 80       | 120      | 346                   | 285                     |
| 13 | 10       | 100      | 140      | 214                   | 295                     |
| 14 | 12       | 120      | 160      | 295                   | 346                     |
| 15 | 14       | 140      | 180      | 346                   | 183                     |
| 16 | 16       | 160      | 200      | 214                   | 214                     |
| 17 | 18       | 180      | 220      | 295                   | 244                     |
| 18 | 20       | 200      | 240      | 346                   | 254                     |
| 19 | 22       | 220      | 260      | 214                   | 285                     |
| 20 | 24       | 240      | 280      | 295                   | 295                     |
| 21 | 6        | 60       | 100      | 346                   | 346                     |
| 22 | 8        | 80       | 120      | 214                   | 183                     |
| 23 | 10       | 100      | 140      | 295                   | 214                     |
| 24 | 12       | 120      | 160      | 346                   | 244                     |
| 25 | 14       | 140      | 180      | 214                   | 254                     |
| 26 | 16       | 160      | 200      | 295                   | 285                     |
| 27 | 18       | 180      | 220      | 346                   | 295                     |
| 28 | 20       | 200      | 240      | 214                   | 346                     |
| 29 | 22       | 220      | 260      | 295                   | 285                     |
| 30 | 24       | 240      | 280      | 346                   | 295                     |

9. На листы, сваренные внахлестку с применением лобовых и фланговых швов действует сила  $F$  (рисунок 4.22). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из таблицы 4.8.

Таблица 4.8



| №  | $a, \text{мм}$ | $b, \text{мм}$ | $c, \text{мм}$ | $F, \text{кН}$ | $[\tau_c], \text{МПа}$ |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------|
| 1  | 6              | 60             | 80             | 100            | 132                    |
| 2  | 8              | 80             | 100            | 120            | 173                    |
| 3  | 10             | 100            | 120            | 140            | 203                    |
| 4  | 12             | 120            | 140            | 160            | 132                    |
| 5  | 14             | 140            | 160            | 180            | 173                    |
| 6  | 16             | 160            | 180            | 200            | 203                    |
| 7  | 18             | 180            | 200            | 220            | 132                    |
| 8  | 20             | 200            | 220            | 240            | 173                    |
| 9  | 22             | 220            | 240            | 260            | 203                    |
| 10 | 24             | 240            | 260            | 280            | 132                    |
| 11 | 6              | 60             | 100            | 100            | 173                    |
| 12 | 8              | 80             | 120            | 120            | 203                    |
| 13 | 10             | 100            | 140            | 140            | 132                    |
| 14 | 12             | 120            | 160            | 160            | 173                    |
| 15 | 14             | 140            | 180            | 180            | 203                    |
| 16 | 16             | 160            | 200            | 200            | 132                    |
| 17 | 18             | 180            | 220            | 220            | 173                    |
| 18 | 20             | 200            | 240            | 240            | 203                    |
| 19 | 22             | 220            | 260            | 260            | 132                    |
| 20 | 24             | 240            | 240            | 280            | 173                    |
| 21 | 6              | 60             | 120            | 100            | 203                    |
| 22 | 8              | 80             | 140            | 120            | 132                    |
| 23 | 10             | 100            | 160            | 140            | 173                    |
| 24 | 12             | 120            | 180            | 160            | 203                    |
| 25 | 14             | 140            | 200            | 180            | 203                    |
| 26 | 16             | 160            | 220            | 200            | 132                    |
| 27 | 18             | 180            | 240            | 220            | 173                    |
| 28 | 20             | 200            | 260            | 240            | 203                    |
| 29 | 22             | 220            | 240            | 260            | 132                    |
| 30 | 24             | 240            | 260            | 280            | 173                    |

10 На листы, сваренные угловыми швами с накладкой действует сила  $F$  (рисунок 4.23). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из таблицы 4.9.

Таблица 4.9

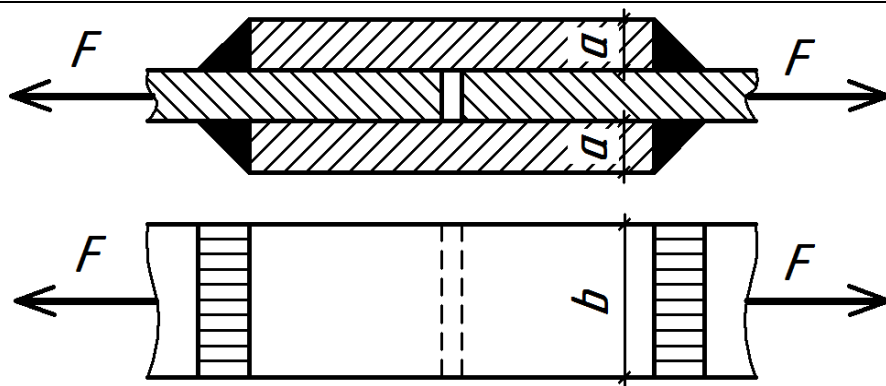


Рисунок 4.23

| №  | $a$ , мм | $b$ , мм | $F$ , кН | $[\tau_c]$ , МПа |
|----|----------|----------|----------|------------------|
| 1  | 6        | 60       | 100      | 132              |
| 2  | 8        | 80       | 120      | 173              |
| 3  | 10       | 100      | 140      | 203              |
| 4  | 12       | 120      | 160      | 132              |
| 5  | 14       | 140      | 180      | 173              |
| 6  | 16       | 160      | 200      | 203              |
| 7  | 18       | 180      | 220      | 132              |
| 8  | 20       | 200      | 240      | 173              |
| 9  | 22       | 220      | 260      | 203              |
| 10 | 24       | 240      | 280      | 132              |
| 11 | 6        | 60       | 100      | 173              |
| 12 | 8        | 80       | 120      | 203              |
| 13 | 10       | 100      | 140      | 132              |
| 14 | 12       | 120      | 160      | 173              |
| 15 | 14       | 140      | 180      | 203              |
| 16 | 16       | 160      | 200      | 132              |
| 17 | 18       | 180      | 220      | 173              |
| 18 | 20       | 200      | 240      | 203              |
| 19 | 22       | 220      | 260      | 132              |
| 20 | 24       | 240      | 280      | 173              |
| 21 | 6        | 60       | 100      | 203              |
| 22 | 8        | 80       | 120      | 132              |
| 23 | 10       | 100      | 140      | 173              |
| 24 | 12       | 120      | 160      | 203              |
| 25 | 14       | 140      | 180      | 203              |
| 26 | 16       | 160      | 200      | 132              |
| 27 | 18       | 180      | 220      | 173              |
| 28 | 20       | 200      | 240      | 203              |
| 29 | 22       | 220      | 260      | 132              |
| 30 | 24       | 240      | 280      | 173              |

## Практическая работа № 5

### Решение задач на тему "Геометрические характеристики плоских сечений"

#### 5.1 Статические моменты сечения. Центр тяжести

Рассмотрим произвольное сечение, изображенное на рисунок 5.1.

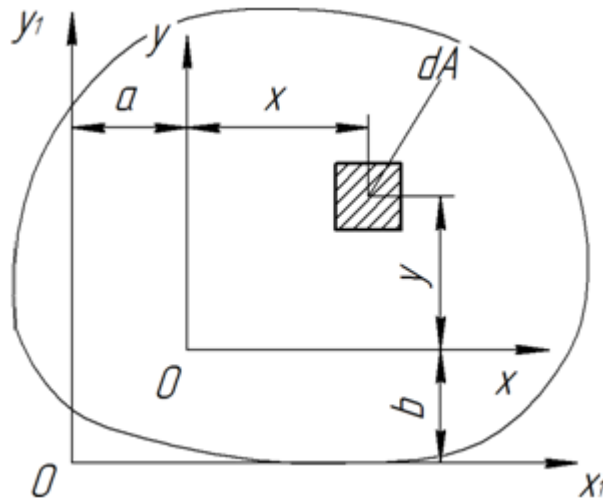


Рисунок 5.1

Разобьем данное сечение на бесконечно малые площадки  $dA$ , положение которого в прямоугольной системе координат определяется величинами  $x$  и  $y$ . Проинтегрировав произведение  $dA$  на расстояние до оси координат получим **статический момент** площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

**Статическим моментом** площадки плоского сечения относительно произвольной оси лежащей в той же плоскости называется распространенная на всю площадь сумма элементарных площадок умноженных на их расстояние до этой оси.

$$S_x = \sum_{k=1}^n A_k y_k = \int_A y dA$$
$$S_y = \sum_{k=1}^n A_k x_k = \int_A x dA$$

Статический момент измеряется в  $\text{м}^3$ ,  $\text{см}^3$ ,  $\text{мм}^3$ .

Статические моменты используются для нахождения центра тяжести сечения.

**Центром тяжести** – называется геометрическая точка неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести.

Для определения координат центра тяжести плоского сечения воспользуемся двумя формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{\sum_{k=1}^n A_k} = \frac{\sum_{k=1}^n S_y}{\sum_{k=1}^n A_k}$$
$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{\sum_{k=1}^n A_k} = \frac{\sum_{k=1}^n S_x}{\sum_{k=1}^n A_k}$$

Для определения координат центра тяжести воспользуемся следующими методами:

1. Метод разбиения – разбиваем фигуру на простые элементы центры тяжести, которых известны.
2. Использование симметрии.
3. Метод дополнений – при наличии в теле отверстия его можно рассматривать как разность двух тел.
4. Экспериментальный метод – тело подвешивается за разные точки и на пересечении линий действия сил тяжести находится центр тяжести.

В зависимости от положения координат,  $S_x$  и  $S_y$  могут принимать положительные или отрицательные значения.

Если оси проходят через центр тяжести  $x_c=0$ ,  $y_c=0$  то  $S_x=0$  и  $S_y=0$ , такие оси называют центральными.

## 5.2 Моменты инерции площади поперечного сечения

С помощью моментов инерции площади находят напряжения при изгибе и кручении.

1. Осевой или экваториальный момент инерции сечения относительно некоторой оси – это сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояний до этой оси, взятые по всей площади.

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_y = \int_A x^2 dA$$

2. Полярный момент инерции сечения относительно некоторого полюса (точки) – это сумма произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояний до этого центра, взятые по всей площади.

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A p^2 dA$$

3. Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (рисунок 5.2).

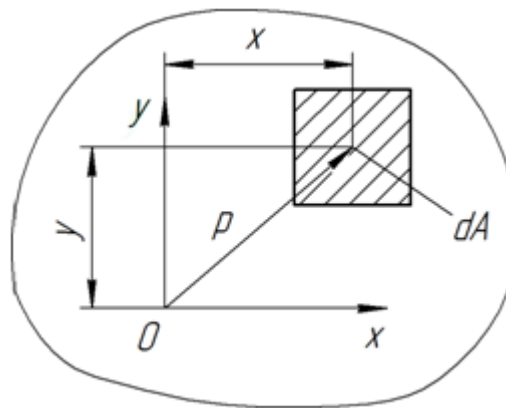


Рисунок 5.2

$$p^2 = x^2 + y^2$$

$$J_p = J_x + J_y$$

$$\int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A p^2 dA = J_p$$

4. Центробежный момент инерции относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется суммой произведений элементарных площадок  $dA$  на их расстояние до этой оси.

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

Момент инерции бывает положительным, отрицательным или равный нулю, когда одна из осей проходит через центр тяжести сечения.

Момент инерции измеряется в  $\text{м}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{мм}^4$ .

### 5.3 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

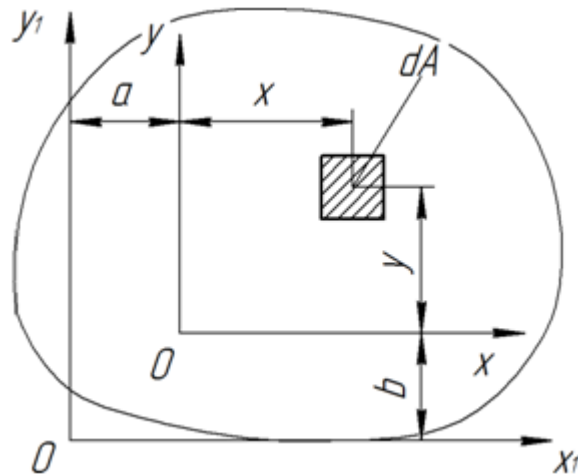


Рисунок 5.3

$$x_1 = x + a$$

$$y_1 = y + b$$

$$J_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2ybdA + \int_A b^2 dA = J_x + 2bS_x + b^2 A$$

$$J_{y1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x+a)^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A 2xadA + \int_A a^2 dA = J_y + 2aS_x + a^2 A$$

$$\begin{aligned} J_{x1y1} &= \int_A x_1 y_1 dA + \int_A (x+a)(y+b) dA = \int_A xy dA + \int_A bxdA + \\ &+ \int_A aydA + \int_A abdA = J_{xy} + bS_y + aS_x + abA = J_{xy} + abA \end{aligned}$$

Если оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести сечения, то формулы приобретают следующий вид:

$$J_{x1} = J_x + b^2 A$$

$$J_{y1} = J_y + a^2 A$$

$$J_{x1y1} = J_{xy} + abA$$

При вычислении моментов инерции сложных сечений пользуются теми же принципами, что и при определении центра тяжести сложных сечений: разбиваем сечение на простейшие элементы и, используя формулы параллельного переноса осей, производим вычисление.

$$J_x = \sum_{k=1}^n J_{xk} = J_{x1} + J_{x2} + \dots + J_{xk}$$

$$J_y = \sum_{k=1}^n J_{yk} = J_{y1} + J_{y2} + \dots + J_{yk}$$

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n J_{xkyk} = J_{x1y1} + J_{x2y2} + \dots + J_{xkyk}$$

Моменты инерции составных частей можно брать только относительно одной и той же оси, нельзя складывать моменты инерции, взятые относительно разных осей.

Главные оси инерции проходят через центр тяжести сечения.

Моменты инерции, взятые относительно центра тяжести называются главными осевыми моментами инерции.

Формулы перехода при параллельном переносе осей:

$$J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2$$

$$J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2$$

$$J_{xkyk} = J_{xkyk}^0 + A_k x_k y_k$$

где:  $J_x^0, J_y^0$  – собственные моменты инерции;  $x_k, y_k$  – расстояние от центральных осей до центра тяжести простейшего элемента.

Моменты инерции простых сечений см. в приложении 3.

### Примеры решения задач

**Пример №1.** Для фигуры (см. рисунок 5.4) определить: положение центра тяжести и осевые моменты инерции.  $a_x=a_y=2$  см,  $b_x=b_y=6$  см,  $c=8$  см.

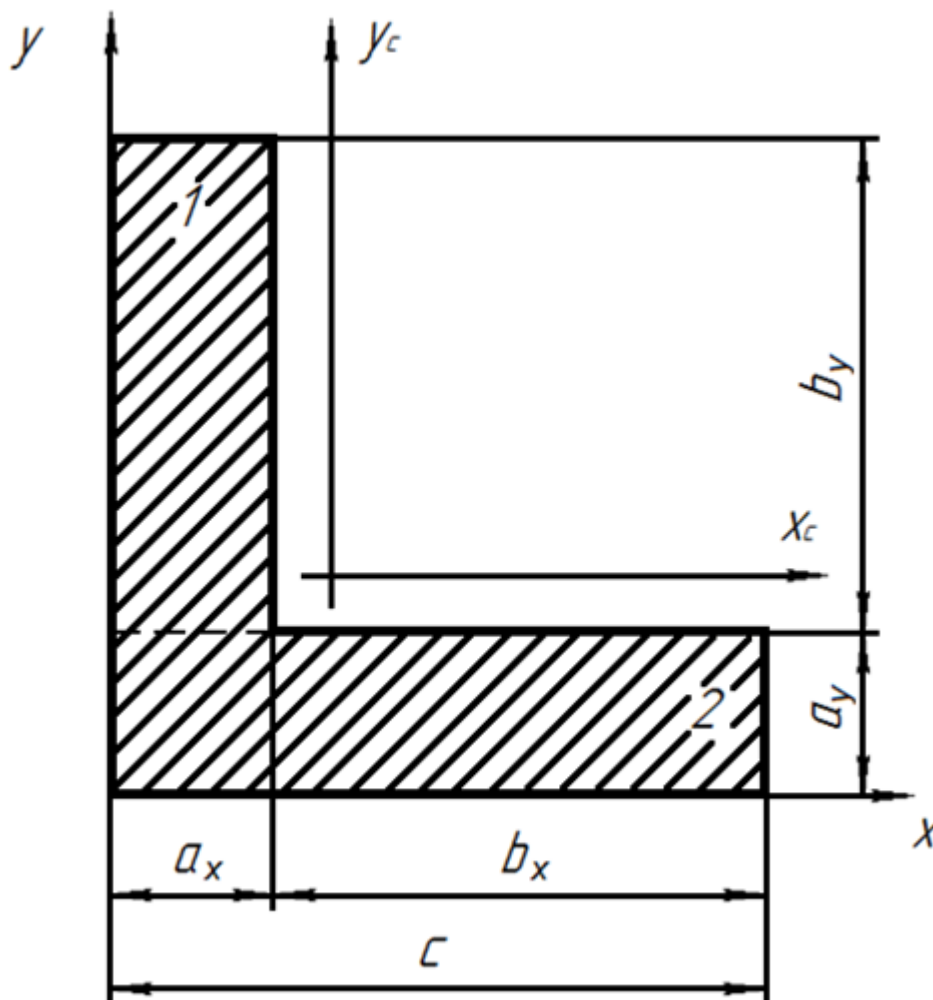


Рисунок 5.4

**Решение.** Разобьем фигуру на две составляющие: фигуру 1 и фигуру 2 (рисунок 5.4). Определяем центр тяжести фигуры. Фигура не имеет оси симметрии, поэтому следует находить обе координаты  $x_c$  и  $y_c$ .

1. Определяем координаты центра тяжести плоского сечения по формулам (5.1) и (5.2):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^2 S_{yk}}{\sum_{k=1}^2 A_k} = \frac{76}{28} = 2,7 \text{ см} \quad (5.1)$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^2 S_{xk}}{\sum_{k=1}^2 A_k} = \frac{76}{28} = 2,7 \text{ см} \quad (5.2)$$

Находим площади  $A_1$  и  $A_2$  фигур 1 и 2:

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_x b_y = 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}^2 \\
A_2 &= c a_y = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см}^2 \\
\sum_{k=1}^2 A_k &= A_1 + A_2 = 12 + 16 = 28 \text{ см}^2
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Находим статические моменты  $S_x$  и  $S_y$  фигур 1 и 2:

$$\begin{aligned}
S_{y1} &= A_1 x_1^0 \Rightarrow x_1^0 = 1 \text{ см} \\
S_{y1} &= 12 \cdot 1 = 12 \text{ см}^3 \\
S_{y2} &= A_2 x_2^0 \Rightarrow x_2^0 = 4 \text{ см} \\
S_{y2} &= 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^3 \\
\sum_{k=1}^2 S_{yk} &= S_{y1} + S_{y2} = 12 + 64 = 76 \text{ см}^3
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
S_{x1} &= A_1 y_1^0 \Rightarrow y_1^0 = 5 \text{ см} \\
S_{x1} &= 12 \cdot 5 = 60 \text{ см}^3 \\
S_{x2} &= A_2 y_2^0 \Rightarrow y_2^0 = 1 \text{ см} \\
S_{x2} &= 16 \cdot 1 = 16 \text{ см}^3 \\
\sum_{k=1}^2 S_{yx} &= S_{x1} + S_{x2} = 60 + 16 = 76 \text{ см}^3
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Значения формул (5.3), (5.4), (5.5) подставляем в формулы (5.1) и (5.2).

2. Определяем осевые моменты инерции сечения по формулам (5.6) и (5.7)

$$J_x = \sum_{k=1}^2 J_{xk}, \quad J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2 \tag{5.6}$$

$$J_y = \sum_{k=1}^2 J_{yk}, \quad J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2 \tag{5.7}$$

Определяем собственные моменты инерции фигур 1 и 2:

$$J_{x1}^0 = \frac{a_x b_y^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36 \text{ см}^4 \tag{5.8}$$

$$J_{x2}^0 = \frac{c a_y^3}{12} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,3 \text{ см}^4 \tag{5.9}$$

$$J_{y1}^0 = \frac{b_y a_x^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^3 \quad (5.10)$$

$$J_{y2}^0 = \frac{a_y c^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ см}^3 \quad (5.11)$$

Находим расстояния от центральных осей  $y_1, y_2, x_1, x_2$  до центра тяжести фигур 1 и 2:

$$y_1 = y_1^0 - y_c = 5 - 2,7 = 2,3 \text{ см} \quad (5.12)$$

$$y_2 = y_2^0 - y_c = 1 - 2,7 = -1,7 \text{ см} \quad (5.13)$$

$$x_1 = x_1^0 - x_c = 1 - 2,7 = -1,7 \text{ см} \quad (5.14)$$

$$x_2 = x_2^0 - x_c = 4 - 2,7 = 1,3 \text{ см} \quad (5.15)$$

Находим осевые моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  подстановкой значений формул (5.8-5.15) в формулы (5.6) и (5.7):

$$J_{x1} = 36 + 12 \cdot 2,3^2 = 99,48 \text{ см}^4$$

$$J_{x2} = 5,3 + 16 \cdot (-1,7)^2 = 51,54 \text{ см}^4$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 99,48 + 51,54 = 151,02 \text{ см}^4$$

$$J_{y1} = 4 + 12 \cdot (-1,7)^2 = 38,68 \text{ см}^4$$

$$J_{y2} = 85,3 + 16 \cdot 1,3^2 = 112,34 \text{ см}^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = 38,68 + 112,34 = 151,02 \text{ см}^4$$

**Ответ:**  $x_c = 2,7$  см,  $y_c = 2,7$  см,  $J_x = 151,02$  см<sup>4</sup>,  $J_y = 151,02$  см<sup>4</sup>.

**Пример №2.** Для поперечного сечения (рисунок 5.5) определить: положение центра тяжести, осевые моменты инерции. Фигура состоит из:

1. Двутавр №10,  $A_1 = 23,4$  см<sup>2</sup>,  $J_{x1} = 198$  см<sup>4</sup>,  $J_{y1} = 17,9$  см<sup>4</sup>.
2. Двутавр №10,  $A_2 = 23,4$  см<sup>2</sup>,  $J_{x2} = 198$  см<sup>4</sup>,  $J_{y2} = 17,9$  см<sup>4</sup>.
3. Швеллер №18,  $A_3 = 20,7$  см<sup>2</sup>,  $z_{03} = 1,94$  см,  $J_{x3} = 1090$  см<sup>4</sup>,  $J_{y3} = 86$  см<sup>4</sup>.

4. Швеллер №18,  $A_4=20,7 \text{ см}^2$ ,  $z_{04}=1,94 \text{ см}$ ,  $J_{x4}=1090 \text{ см}^4$ ,  $J_{y4}=86 \text{ см}^4$ .

5. Уголок неравнобокий 6,4/4,  $64 \times 40 \times 5$ ,  $A_5=4,98 \text{ см}^2$ ,  $x_{05}=0,95$ ,  $y_{05}=2,08$ ,  $J_{x5}=19,9 \text{ см}^4$ ,  $J_{y5}=6,26 \text{ см}^4$ .

6. Уголок неравнобокий 6,4/4,  $64 \times 40 \times 5$ ,  $A_6=4,98 \text{ см}^2$ ,  $x_{06}=0,95$ ,  $y_{06}=2,08$ ,  $J_{x6}=19,9 \text{ см}^4$ ,  $J_{y6}=6,26 \text{ см}^4$ .

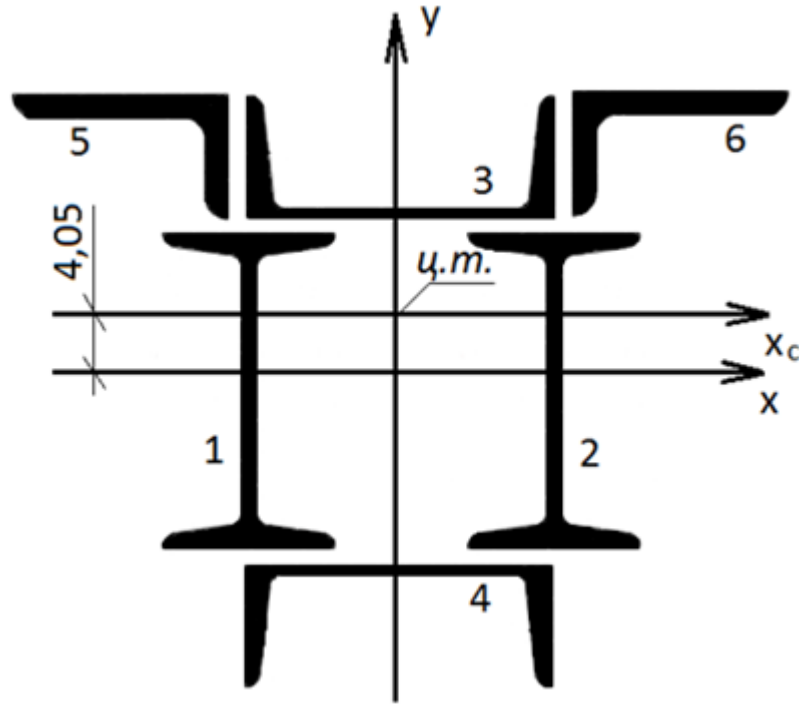


Рисунок 5.5

**Решение.** Находим центр тяжести. Так как фигура симметрична относительно оси  $y$  то центр тяжести лежит на этой оси и задача сводится к определению координат  $y_c$ .

Определяем координаты центра тяжести плоского сечения по формулам (5.16):

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^6 S_{xk}}{\sum_{k=1}^6 A_k} = \frac{397,374}{98,16} = 4,05 \text{ см} \quad (5.16)$$

Находим сумму площадей  $A_k$  всех фигур:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 2A_1 + 2A_3 + 2A_5 = 2 \cdot 23,4 + 2 \cdot 20,7 + 2 \cdot 4,98 = 98,16 \text{ см}^2 \quad (5.17)$$

Находим статические моменты  $S_x$  всех фигур:

$$\begin{aligned}
S_{x1} &= A_1 y_1^0 \Rightarrow y_1^0 = 0 \\
S_{x1} &= 0 \\
S_{x2} &= A_2 y_2^0 \Rightarrow y_2^0 = 0 \\
S_{x2} &= 0 \\
S_{x3} &= A_3 y_3^0 \Rightarrow y_3^0 = 5 + 1,94 = 6,94 \text{ см} \\
S_{x3} &= 20,7 \cdot 6,94 = 143,658 \text{ см}^3 \\
S_{x4} &= A_4 y_4^0 \Rightarrow y_4^0 = -5 - 1,94 = -6,94 \text{ см} \\
S_{x4} &= 20,7 \cdot (-6,94) = -143,658 \text{ см}^3 \\
S_{x5} &= A_5 y_5^0 \Rightarrow y_5^0 = 5 + 7 - 0,95 = 11,05 \text{ см} \\
S_{x5} &= 4,98 \cdot 11,05 = 55,029 \text{ см}^3 \\
S_{x6} &= A_6 y_6^0 \Rightarrow y_6^0 = 5 + 7 - 0,95 = 11,05 \text{ см} \\
S_{x6} &= 4,98 \cdot 11,05 = 55,029 \text{ см}^3 \\
\sum_{k=1}^6 S_{xk} &= 2S_3 + 2S_5 = 2 \cdot 143,658 + 2 \cdot 55,029 = 397,374 \text{ см}^3
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Значения формул (5.17) и (5.18) подставляем в формулу 5.16). Таким образом, необходимо поднять ось  $x$  на 4,05 см.

2. Определяем осевые моменты инерции по формулам (5.19) и (5.20):

$$J_x = \sum_{k=1}^6 J_{xk}, \quad J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2 \tag{5.19}$$

$$J_y = \sum_{k=1}^6 J_{yk}, \quad J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2 \tag{5.20}$$

Находим расстояние от центральных осей  $y$  и  $x$  до центра тяжести всех фигур:

$$y_1 = y_1^0 - y_c = 0 - 4,05 = -4,05 \text{ см} \tag{5.21}$$

$$y_2 = y_2^0 - y_c = -4,05 \text{ см} \tag{5.22}$$

$$y_3 = y_3^0 - y_c = 6,94 - 4,05 = 2,89 \text{ см} \tag{5.23}$$

$$y_4 = y_4^0 - y_c = -6,94 - 4,05 = -10,99 \text{ см} \quad (5.24)$$

$$y_5 = y_5^0 - y_c = 11,05 - 4,05 = 7 \text{ см} \quad (5.25)$$

$$y_6 = y_6^0 - y_c = 11,05 - 4,05 = 7 \text{ см} \quad (5.26)$$

$$x_1 = -9 \text{ см} \quad (5.27)$$

$$x_2 = 9 \text{ см} \quad (5.28)$$

$$x_3 = 0 \quad (5.29)$$

$$x_4 = 0 \quad (5.30)$$

$$x_5 = -11,08 \text{ см} \quad (5.31)$$

$$x_6 = 11,08 \text{ см} \quad (5.32)$$

Находим осевые моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  подстановкой значений формул (5.21-5.32) в формулы (5.19) и (5.20):

$$J_{x1} = 198 + 23,4 \cdot (-4,05)^2 = 581,82 \text{ см}^4$$

$$J_{x2} = 198 + 23,4 \cdot (-4,05)^2 = 581,82 \text{ см}^4$$

$$J_{x3} = 1090 + 20,7 \cdot 2,89^2 = 1262,89 \text{ см}^4$$

$$J_{x4} = 1090 + 20,7 \cdot (-10,99)^2 = 3590,15 \text{ см}^4$$

$$J_{x5} = 19,9 + 4,98 \cdot 7^2 = 263,92 \text{ см}^4$$

$$J_{x6} = 19,9 + 4,98 \cdot 7^2 = 263,92 \text{ см}^4$$

$$J_x = 2 \cdot 581,82 + 1262,89 + 3590,15 + 2 \cdot 263,92 = 6544,52 \text{ см}^4$$

$$J_{y1} = 17,9 + 23,4 \cdot (-9)^2 = 1913,3 \text{ см}^4$$

$$J_{y2} = 17,9 + 23,4 \cdot (-9)^2 = 1913,3 \text{ см}^4$$

$$J_{y3} = 86 \text{ см}^4$$

$$J_{y4} = 86 \text{ см}^4$$

$$J_{y5} = 6,26 + 4,98 \cdot (-11,08)^2 = 617,64 \text{ см}^4$$

$$J_{y6} = 6,26 + 4,98 \cdot 11,08^2 = 617,64 \text{ см}^4$$

$$J_y = 2 \cdot 1913,3 + 2 \cdot 86 + 2 \cdot 617,64 = 5233,88 \text{ см}^4$$

**Ответ:**  $y_c = 4,05 \text{ см}$ ,  $J_x = 6544,52 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 5233,88 \text{ см}^4$ .

## 5.4 Контрольные задания

### Геометрические характеристики плоских сечений

1. Вычислить центральные осевые моменты плоских сечений. Величины выбираются из таблица 5.1, рисунок 5.6 – 5.7.

Таблица 5.1

| №  | Линейные размеры, см |          |          |
|----|----------------------|----------|----------|
|    | <i>a</i>             | <i>b</i> | <i>c</i> |
| 1  | 5                    | 4        | 2        |
| 2  | 2                    | 7        | 1.5      |
| 3  | 4                    | 5        | 1        |
| 4  | 6                    | 4        | 2        |
| 5  | 1.5                  | 4        | 1        |
| 6  | 2                    | 8        | 2        |
| 7  | 8                    | 6        | 3        |
| 8  | 6                    | 4        | 1.5      |
| 9  | 8                    | 4.5      | 2        |
| 10 | 7                    | 5        | 2        |
| 11 | 6                    | 5        | 2        |
| 12 | 9                    | 9        | 3        |
| 13 | 8                    | 5        | 3        |
| 14 | 3                    | 7        | 2        |
| 15 | 2                    | 6        | 1        |
| 16 | 5                    | 6        | 3        |
| 17 | 3                    | 7        | 2        |
| 18 | 2                    | 5        | 2        |
| 19 | 10                   | 20       | 55       |
| 20 | 4                    | 6        | 2        |

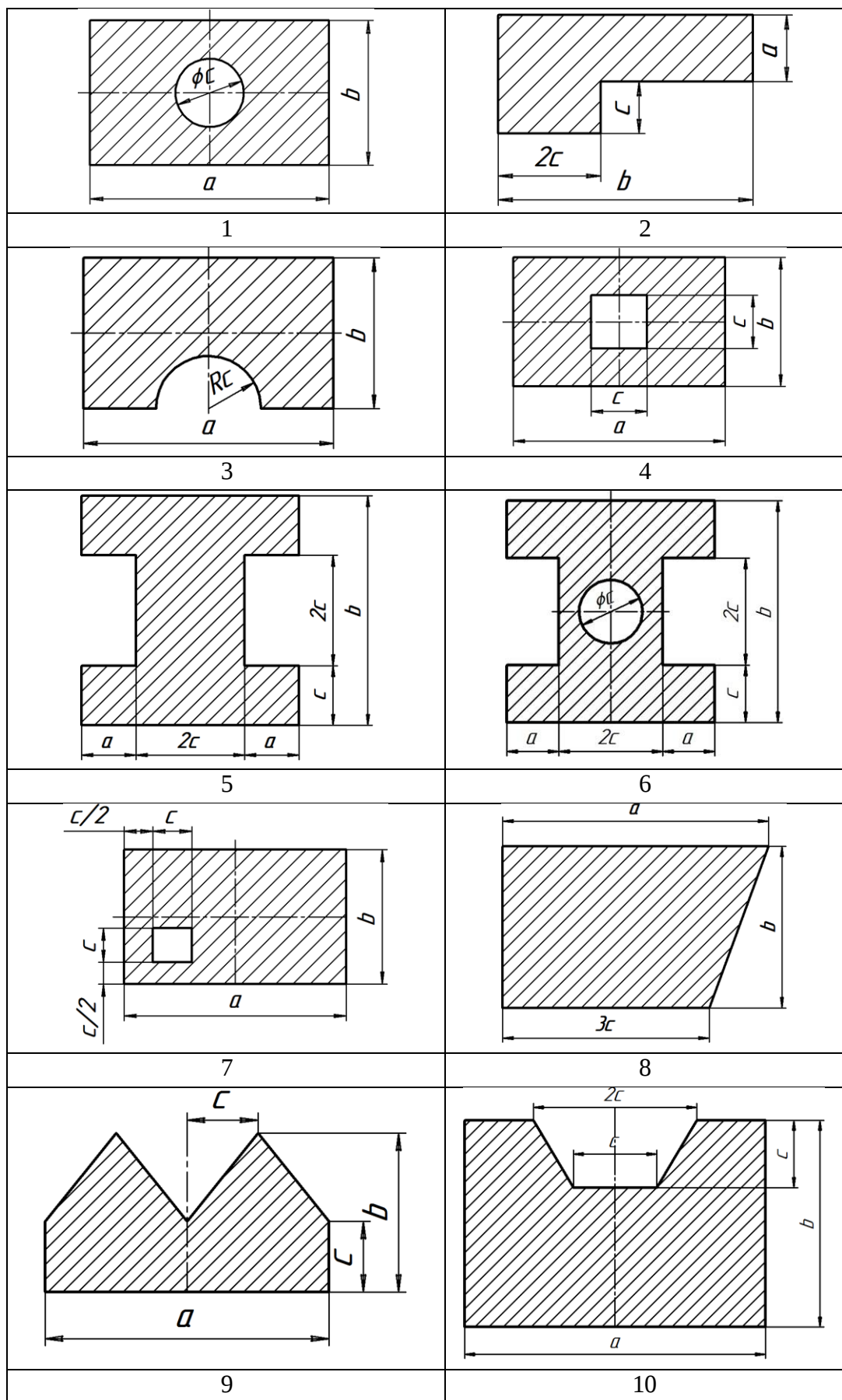


Рисунок 5.6

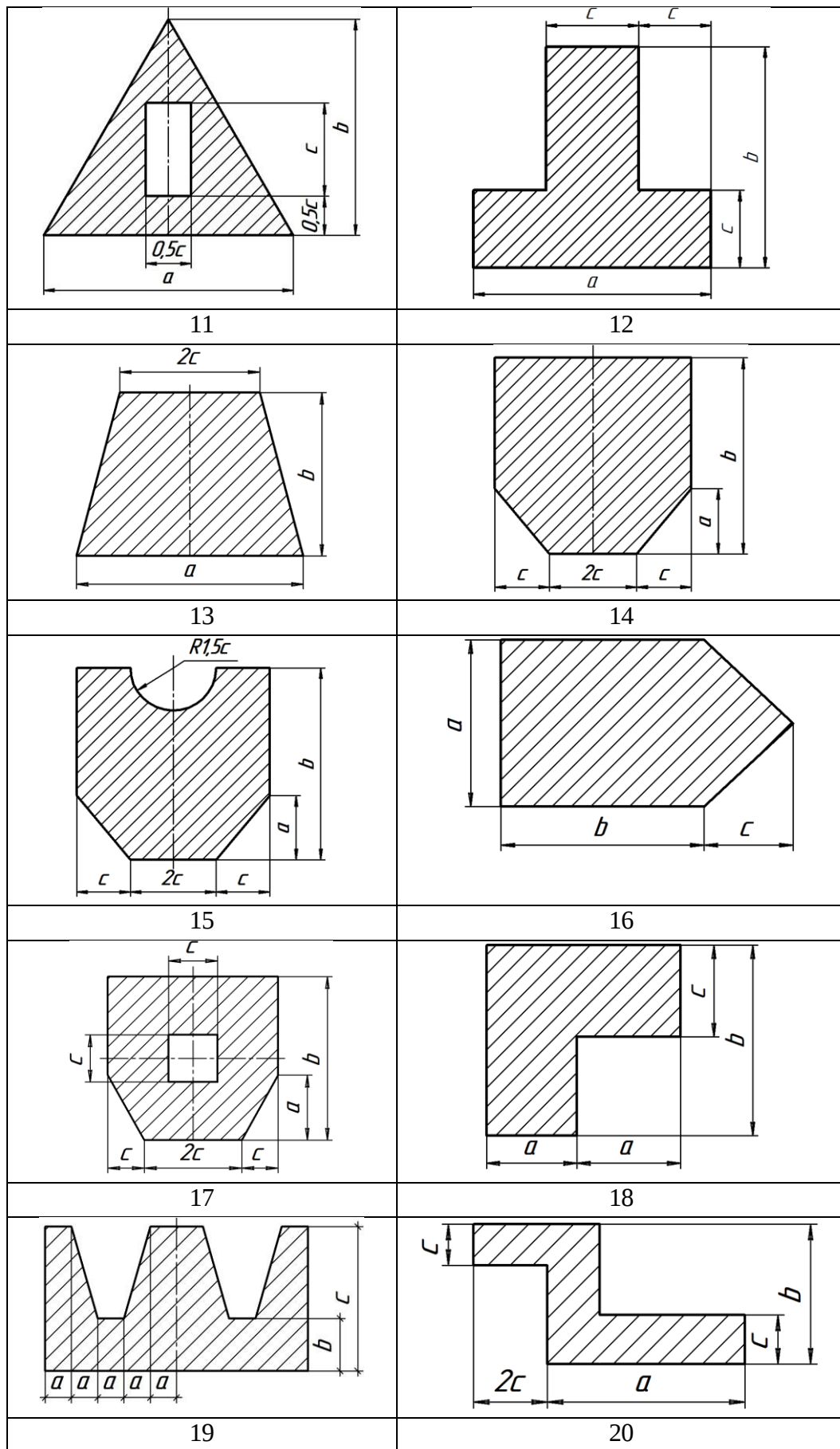


Рисунок 5.7

2. Вычислить центральные осевые моменты плоских сечений. Величины выбираются из таблицы 5.2, рисунков 5.8 – 5.9, геометрические характеристики профилей прокатных сталей выбирать из приложения 1.

Таблица 5.2

| №  | № Профиля |         |                       |                         |
|----|-----------|---------|-----------------------|-------------------------|
|    | Швеллер   | Двутавр | Равнобокий<br>уголок* | Неравнобокий<br>уголок* |
| 1  | 8         | 10      | -                     | -                       |
| 2  | 14        | 12      | -                     | -                       |
| 3  | 10        | 14      | -                     | -                       |
| 4  | 10        | 10      | -                     | -                       |
| 5  | 16        | 18      | -                     | -                       |
| 6  | 18        | 20      | -                     | -                       |
| 7  | 8         | 14      | -                     | -                       |
| 8  | 14a       | -       | -                     | -                       |
| 9  | 20        | -       | -                     | -                       |
| 10 | 5         | -       | 3.2 × 4               | -                       |
| 11 | 20a       | -       | 5 × 5                 | -                       |
| 12 | -         | -       | 2 × 3                 | 2.5/1.6                 |
| 13 | -         | -       | 2.5 × 3               | 3.2/2 × 3               |
| 14 | -         | -       | 2.8                   | 4/2.5 × 3               |
| 15 | -         | -       | 4 × 4                 | 5/3.2 × 4               |
| 16 | -         | 20a     | -                     | 12.5/8 × 10             |
| 17 | -         | 22      | -                     | 14/9 × 10               |
| 18 | -         | 14      | -                     | 7.5/5 × 5               |
| 19 | -         | 16      | 3.6 × 4               | -                       |
| 20 | -         | 18a     | 4.5/5                 | -                       |

\* Параметры уголков состоят из двух значений, например: 2 × 3 – первая цифра обозначает номер профиля, вторая цифра – толщину уголка ( $d$ ).

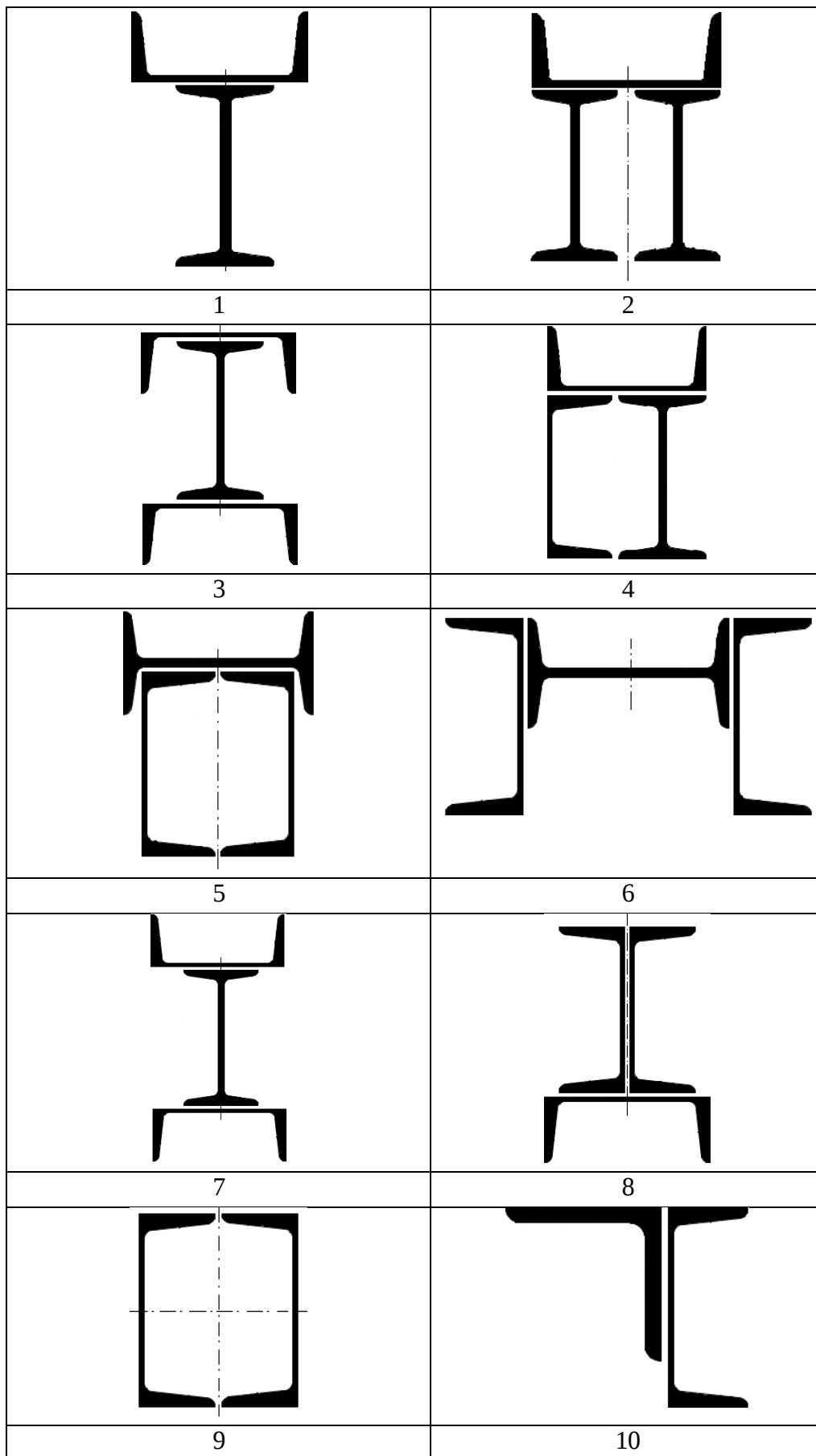


Рисунок 5.8

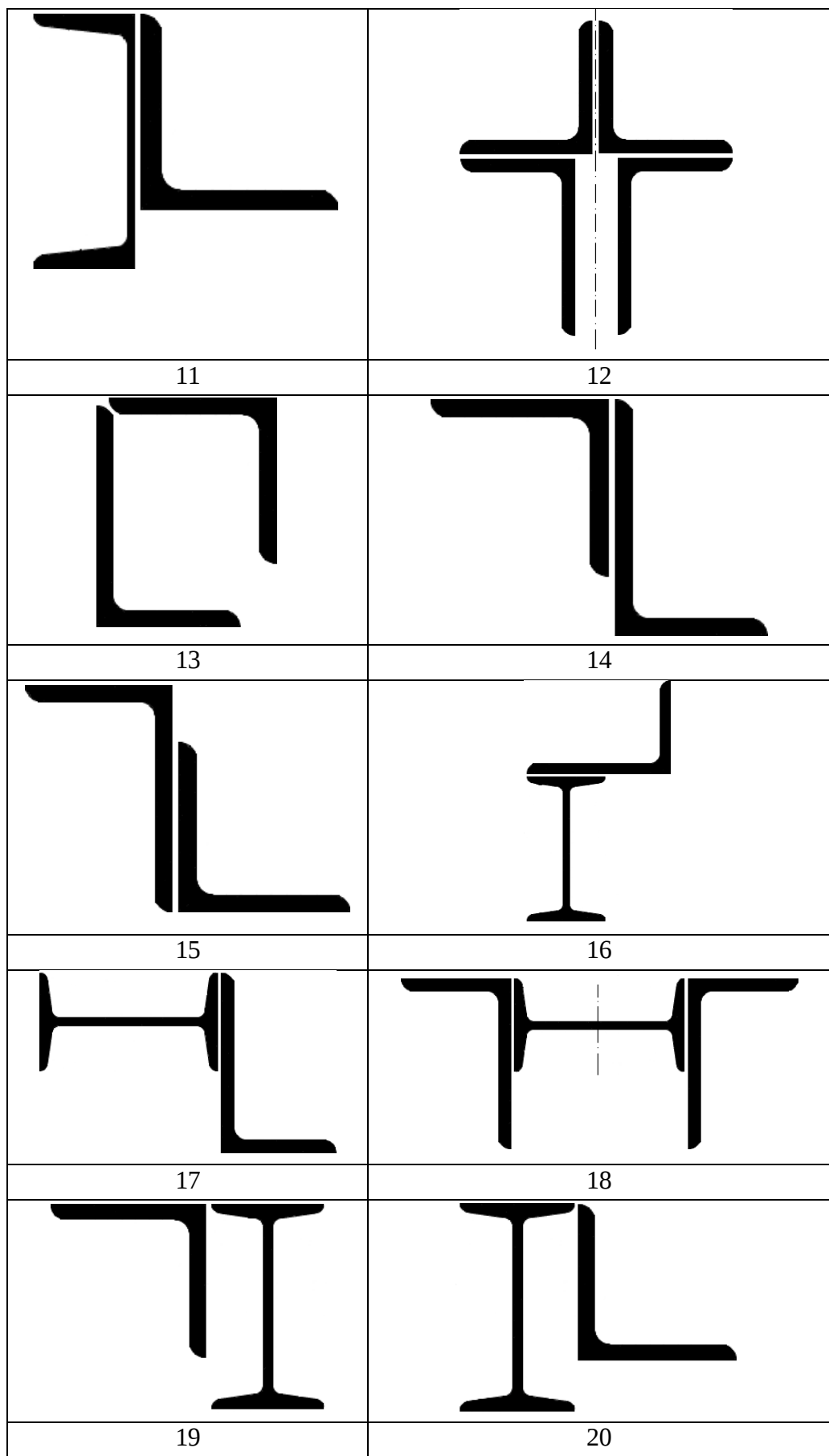


Рисунок 5.9

**Практическая работа № 6**  
**Решение задач на тему "Кручение вала"**

**Кручением** называется такой вид нагружения, когда к стержню приложены только внешние моменты (пары сил) в плоскостях перпендикулярных оси стержня (см. схемы из табл. 2). В этом случае в поперечных сечениях стержня возникает один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $T$  (или  $M_z$ ), создаваемый внутренними силами.

**Гипотезы кручения:**

1. Поперечные сечения бруса при кручении остаются круглыми, их радиусы не меняют своей длины и не искривляются.

2. Гипотеза плоских сечений Бернулли – поперечные сечения, плоские до приложения внешнего момента, остаются такими же и после нагружения, поворачиваясь относительно друг друга на некоторый угол.

Материал бруса при кручении подчиняется закону Гука при сдвиге.

Мерой интенсивности внутренних сил в этом случае являются **касательные напряжения  $\tau$** , лежащие в плоскости сечения. При кручении стержней сплошного круглого и кольцевого сечений выполняется гипотеза плоских сечений, т.е. при деформации поперечные сечения остаются *плоскими* и поворачиваются относительно друг друга на угол  $\varphi$  как жесткие диски. В этом случае касательные напряжения в точках на радиусе-векторе  $\rho$  (рисунке 6.1) вычисляются по формуле

$$\tau_{\rho} = \frac{T}{I_{\rho}} \cdot \rho, \quad (6.1)$$

где  $T$  – крутящий момент в сечении;  $\rho$  – радиус-вектор точек;

$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$  – полярный момент инерции сечения, зависящий от формы и размеров сечения.

Для сплошного круглого сечения (рисунке 6.1, а)

$$I_{\rho} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4. \quad (6.2)$$

Для кольцевого сечения (рисунке 6.1, б)

$$I_{\rho} = \frac{\pi R^4}{2} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right) = \frac{\pi D^4}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) \approx 0,1D^4 \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right). \quad (6.3)$$

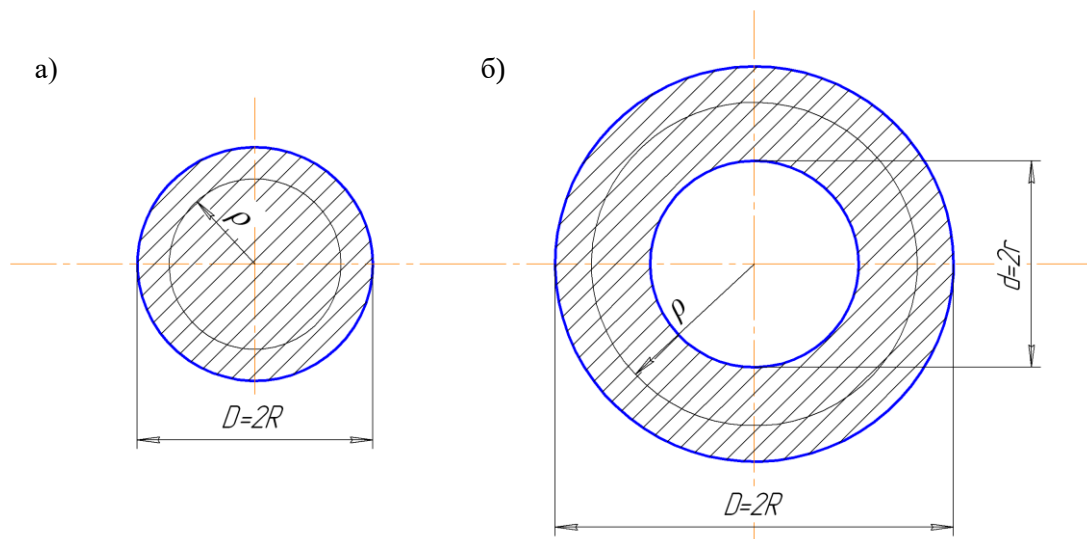


Рисунок 6.1. Сечения стержня, для которых применима формула (6.1)

Из формулы (6.1) следует, что касательные напряжения в сечении при кручении распределены по радиусу по линейному закону (рисунок 6.2, а, б); в точках, равноудаленных от центра сечения, касательные напряжения одинаковы, сонаправлены с крутящим моментом  $T$  и перпендикулярны радиусу точки. График распределения касательных напряжений в сечении называется эпюрой  $\tau$ .

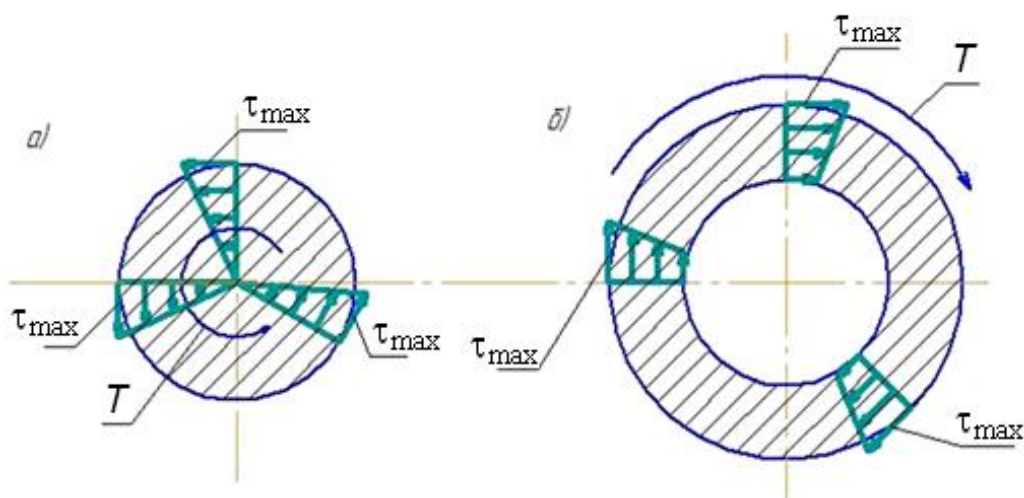


Рисунок 6.2 Эпюры касательных напряжений в сечениях стержней при кручении

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  возникают в точках, расположенных по наружному контуру сечения, при  $\rho = \rho_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\rho}} \cdot \rho_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}}, \quad (6.4)$$

где  $W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}}$  - полярный момент сопротивления сечения.

Для сплошного круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3. \quad (6.5)$$

Для кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) \approx 0,2D^3 \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right). \quad (6.6)$$

При кручении сечения стержня в результате деформации поворачиваются относительно друг друга на угол  $\varphi$ , который можно вычислить по формуле

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} \frac{T_i}{GI_{\rho_i}} dz, \quad (6.7)$$

где  $T_i$  – закон изменения крутящего момента на  $i$ -ом участке;

$G$  – модуль сдвига материала;

$I_{\rho_i}$  – полярный момент инерции сечения на  $i$ -ом участке;

$k$  – число участков, в пределах которых  $T_i$  – функция монотонная и непрерывная и жесткость поперечного сечения при кручении  $GI_{\rho_i} = const$ .

Если в пределах длины участка величина  $\frac{T_i}{GI_{\rho_i}} = const$ , то формула (6.7)

принимает вид

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \frac{T_i L_i}{GI_{\rho_i}}, \quad (6.8)$$

где  $k$  – число участков, на которых  $T_i$  и  $I_{\rho_i}$  постоянны;

$L_i$  – длина  $i$ -ого участка.

Полный угол закручивания  $\varphi$  может быть небольшим, т.к. по длине стержня крутящие моменты на участках могут иметь разные знаки, поэтому для оценки жесткости стержня вводится понятие – **относительный угол закручивания**, приходящийся на единицу длины участка

$$\theta_i = \frac{T_i}{GI_{\rho_i}}. \quad (6.9)$$

### **Условие прочности при кручении**

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (6.10)$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальное фактическое касательное напряжение в стержне;

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение для материала стержня.

В зависимости от выбранной методики (гипотезы прочности) принимается  $[\tau] = 0,5 [\sigma]$  или  $[\tau] = 0,575 [\sigma]$ .

С учетом (6.4) условие прочности (6.10) принимает вид

$$\frac{T}{W_p} \Big|_{\max} \leq [\tau], \quad (6.11)$$

из которого можно определять те же параметры стержня, что и из условия прочности при растяжении (сжатии).

### Расчеты на жесткость при кручении

В зависимости от предъявляемых ограничений в работе стержня можно рассматривать *два условия жесткости*:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad (6.12)$$

$$\text{и } \varphi_{\max} \leq [\varphi], \quad (6.13)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания, угол  $\theta$  выражается в 1/см, 1/м и т.д.;

$[\varphi]$  – допускаемый абсолютный угол закручивания конкретного сечения.

С учетом (6.9) и (6.8) условия жесткости (6.12) и (6.13) принимают вид

$$\frac{T}{GI_p} \Big|_{\max} \leq [\theta], \quad (6.14)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{T_i L_i}{GI_{p_i}} \leq [\varphi]. \quad (6.15)$$

Значение допускаемых углов закручивания  $[\theta]$  и  $[\varphi]$  назначаются из условий надежной работы стержня.

### Примеры решения задач

**Пример №1.** На вал выполненный из стали действует четыре момента (см. рисунок 6.3):  $M_1=4$  кН·м,  $M_2=3$  кН·м,  $M_3=2$  кН·м,  $M_4=1$  кН·м,  $a=0,1$  м,  $b=0,2$  м,  $c=0,3$  м,  $d=0,4$  м,  $[\tau]=35$  МПа. Построить эпюру крутящих моментов. Из условия прочности определить размеры поперечного

сечения вала, приняв сечение вала: круглым, кольцевым  $\frac{d}{D}=0,40$  (стандартные значения диаметров см. в приложении 2). Выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения. Найти наибольший относительный угол закручивания,  $\theta_{\max}$  если допустимый  $[\theta]=1$  град/м.

Построить эпюру углов закручивания для вала. Модуль сдвига  $G=0,8 \cdot 10^5$  МПа.

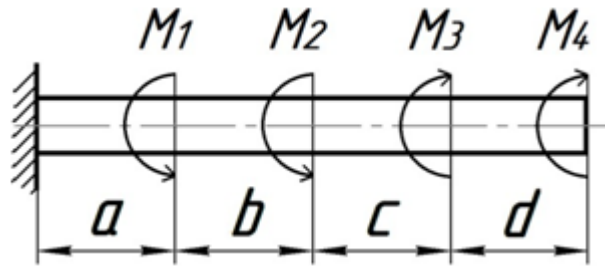


Рисунок 6.3

**Решение.** Вычисляем реактивный момент, возникающий в жесткой заделке, обозначив его как  $M_A$  и направив против часовой стрелки (см. рис. 6.4).

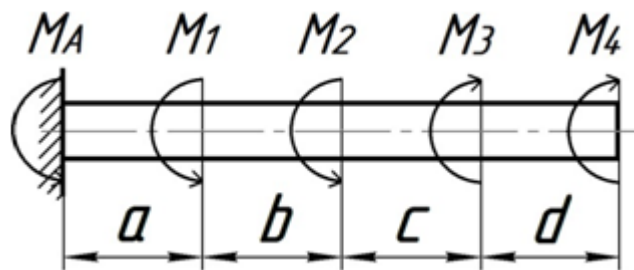


Рисунок 6.4

Запишем уравнение равновесия вала, при этом смотрим на вал со стороны свободного конца т.е оси  $z$ :

$$\begin{aligned}\sum M_z &= 0 \\ M_A + M_1 + M_2 - M_3 - M_4 &= 0 \\ M_A &= M_4 + M_3 - M_2 - M_1 = 1 + 2 - 3 - 4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}\end{aligned}$$

Знак «минус» в полученном выражении говорит о том, что мы не угадали с направлением реактивного момента  $M_A$ , возникающего в заделке.

Рассекаем вал на четыре части, обозначаем сечения как  $A-A$ ,  $B-B$ ,  $B-B$ ,  $\Gamma-\Gamma$ . Вычисляем крутящие моменты на участках вала (см. рисунок 6.5а):

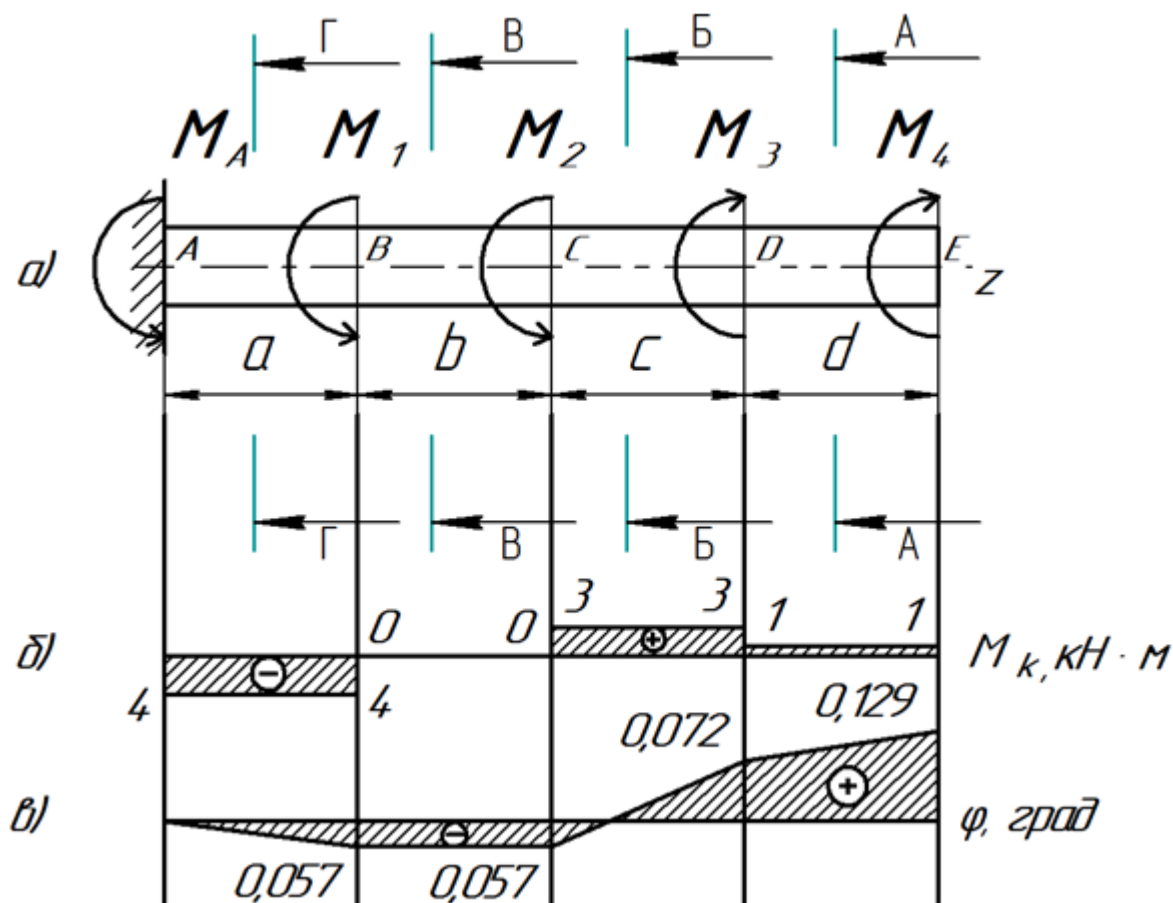


Рисунок 6.5

|              |                                                                           |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Сечение А-А: | $M_{K_{A-A}} = M_4 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$                         |
| Сечение Б-Б: | $M_{K_{Б-Б}} = M_4 + M_3 = 1 + 2 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$           |
| Сечение В-В: | $M_{K_{В-В}} = M_4 + M_3 - M_2 = 1 + 2 - 3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ |
| Сечение Г-Г: | $M_{K_{Г-Г}} = M_A = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}$                        |

Под основным чертежом строим эпюру крутящих моментов  $M_k$  (см. рисунок 6.5б).

Опасным является участок  $AB$ , момент на данном участке равен  $M=4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала круглым:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K_{\max}}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M K_{\max}}{\pi D^3} \leq [\tau]$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M K_{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,083 \text{ м} = 8,3 \text{ см}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный  $D=8,5$  см.

Находим площадь поперечно сечения (площадь круга):

$$A_{\text{круг}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{4} = 56,71 \text{ см}^2$$

Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала кольцевым:

$$\tau_{\max} = \frac{M K_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M K_{\max}}{\pi \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (1 - 0,4^4) 35 \cdot 10^6}} = 0,084 \text{ м} = 8,4 \text{ см}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный  $D=8,5$  см.

Находим площадь поперечно сечения (площадь кольца):

$$A_{\text{кольцо}} = \frac{\pi D^2}{4} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right) = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{4} (1 - 0,4^2) = 47,64 \text{ см}^2$$

Сравниваем площади поперечных сечений и выбираем наиболее экономичный:

$$A_{\text{круг}} = 56,71 \text{ см}^2 \geq A_{\text{кольцо}} = 47,64 \text{ см}^2$$

Выбираем вал кольцевого сечения.

Для выбранного вала с кольцевым сечением проверяем выполнение условия жесткости:

$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right) = \frac{3,14 \cdot 8,5^4}{32} (1 - 0,4^4) = 499,11 \text{ см}^4$$

Определяем жесткость вала при кручении:

$$GJ_P = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 499,11 \cdot 10^{-8} = 399,29 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Находим наибольший относительный угол закручивания,  $\theta$  если допустимый  $[\theta] = 1$  град/м:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{K\max}}{GJ_P} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{4}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,574 \text{ град/м}$$

Проверяем условие жесткости:

$$\Theta_{\max} = 0,574 \text{ град/м} < [\Theta] = 1 \text{ град/м}$$

Условие жесткости выполнено.

Находим углы закручивания на отдельных участках вала при этом угол закручивания в жесткой заделке равен  $\varphi_A = 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= \varphi_A + \frac{M_{K_{\Gamma-\Gamma}}^a}{GJ_P} \cdot \frac{180}{\pi} = 0 + \frac{-4 \cdot 0,1}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,057 \text{ град} \\ \varphi_C &= \varphi_B + \frac{M_{K_{B-B}}^b}{GJ_P} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,057 + \frac{0 \cdot 0,2}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,057 \text{ град} \\ \varphi_D &= \varphi_C + \frac{M_{K_{B-B}}^c}{GJ_P} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,057 + \frac{3 \cdot 0,3}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,072 \text{ град} \\ \varphi_E &= \varphi_D + \frac{M_{K_{A-A}}^d}{GJ_P} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,072 + \frac{1 \cdot 0,4}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,129 \text{ град} \end{aligned}$$

Строим эпюру углов закручивания (см. рисунок 6.5в).

**Пример №2.** Какую максимальную мощность может передать стальной вал диаметром 105 мм без нарушения прочности и жесткости, если известны: допускаемое напряжение  $[\tau] = 57$  МПа, допустимый наибольший относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,007$  рад/м и угловая скорость вращения  $\omega = 93 \text{ с}^{-1}$ . Модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

**Решение.** Определяем мощность по формуле:

$$P_{\max} = M_{K\max} \omega$$

Из условия прочности вала определяем момент передаваемый валом:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K\max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow M_{K\max} = W_p [\tau]$$
$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 10,5^3}{16} = 227,2 \text{ см}^3$$

Подставляя полученные данные в формулу мощности, находим максимальную мощность на валу:

$$P_{\max} = W_p [\tau] \omega = 227,2 \cdot 10^{-6} \cdot 57 \cdot 10^6 \cdot 93 = 1204,4 \text{ кВт}$$

Из условия жесткости вала определяем момент передаваемый валом:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{K\max}}{GJ_p} \leq [\Theta] \Rightarrow M_{K\max} = GJ_p [\Theta]$$
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10,5^4}{32} = 1192,72 \text{ см}^4$$

Подставляя полученные данные в формулу мощности, находим максимальную мощность на валу:

$$P_{\max} = GJ_p [\Theta] \omega = 8 \cdot 10^{10} \cdot 1192,72 \cdot 10^{-8} \cdot 0,007 \cdot 93 = 621,2 \text{ кВт}$$

**Ответ:** максимальная мощность на валу  $P_{\max} = 621,2 \text{ кВт}$ .

**Пример №3.** Из расчетов на прочность и жесткость определить диаметр вала для передачи заданной мощности  $P=105 \text{ кВт}$ . Известно: угловая скорость вращения  $\omega=43 \text{ рад/с}$ , допускаемое напряжение  $[\tau]=52 \text{ МПа}$ , допустимый наибольший относительный угол закручивания  $[\theta]=0,06 \text{ рад/м}$ . Модуль сдвига  $G=0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Записываем условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

Определяем вращательный момент из формулы мощности:

$$P_{\max} = M_{K\max} \omega$$

$$M_{\text{вращ}} = M_{K\max}$$

$$P_{\max} = M_{\text{вращ}} \omega \Rightarrow M_{\text{вращ}} = \frac{P_{\max}}{\omega} = \frac{105 \cdot 10^3}{43} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Определяем момент сопротивления вала при кручении:

$$W_P \geq \frac{M_{\text{вращ}}}{[\tau]} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^6} = 0,046 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 4,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

Определяем диаметр вала:

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4,6 \cdot 10^4}{3,14}} = 62 \text{ мм}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный  $D=63$  мм.

Записываем условие жесткости при кручении:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{вращ}}}{G J_P} \leq [\Theta]$$

Определяем момент инерции сечения:

$$J_P \geq \frac{M_{\text{вращ}}}{G [\Theta]} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,06} = 50 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 500 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$$

Определяем диаметр вала:

$$J_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 J_P}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 500 \cdot 10^3}{3,14}} = 48 \text{ мм}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный  $D=48$  мм.

**Ответ:** для обеспечения прочности и жесткости выбираем диаметр вала равный  $D=63$  мм.

## Контрольные задания

### Кручение вала

1. На вал действуют четыре момента (см. рисунок 6.6-6.8.9):  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ . Построить эпюру крутящих моментов. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала: круглым, кольцевым (стандартные значения диаметров см. в приложении 2). Выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения. Найти наибольший относительный угол закручивания,  $\theta$  если допустимый  $[\theta]=1$  град/м. Построить эпюру углов закручивания для вала. Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига  $G$  и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 6.1

| №  | $M_1$ ,<br>кН·м | $M_2$ ,<br>кН·м | $M_3$ ,<br>кН·м | $M_4$ ,<br>кН·м | $a$ ,<br>м | $b$ , м | $c$ , м | $[\tau]$ ,<br>МПа | $\frac{d}{D}$ | №<br>материала |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|---------|---------|-------------------|---------------|----------------|
| 1  | 1               | 2               | 3               | 4               | 0,2        | 0,3     | 0,4     | 35                | 0,40          | 1              |
| 2  | 2               | 3               | 4               | 5               | 0,3        | 0,4     | 0,5     | 40                | 0,45          | 2              |
| 3  | 3               | 4               | 5               | 6               | 0,4        | 0,5     | 0,6     | 45                | 0,50          | 3              |
| 4  | 4               | 5               | 6               | 7               | 0,5        | 0,6     | 0,7     | 50                | 0,55          | 4              |
| 5  | 5               | 6               | 7               | 8               | 0,6        | 0,7     | 0,8     | 55                | 0,60          | 5              |
| 6  | 6               | 7               | 8               | 9               | 0,7        | 0,8     | 0,9     | 60                | 0,65          | 7              |
| 7  | 7               | 8               | 9               | 10              | 0,8        | 0,9     | 1       | 65                | 0,70          | 9              |
| 8  | 8               | 9               | 10              | 1               | 0,9        | 1       | 1,2     | 70                | 0,75          | 1              |
| 9  | 9               | 10              | 1               | 2               | 1          | 1,2     | 1,3     | 75                | 0,80          | 2              |
| 10 | 10              | 1               | 2               | 3               | 1,2        | 1,3     | 1,4     | 80                | 0,85          | 3              |
| 11 | 1               | 2               | 3               | 4               | 0,2        | 0,3     | 0,4     | 35                | 0,40          | 4              |
| 12 | 2               | 3               | 4               | 5               | 0,3        | 0,4     | 0,5     | 40                | 0,45          | 5              |
| 13 | 3               | 4               | 5               | 6               | 0,4        | 0,5     | 0,6     | 45                | 0,50          | 7              |
| 14 | 4               | 5               | 6               | 7               | 0,5        | 0,6     | 0,7     | 50                | 0,55          | 9              |
| 15 | 5               | 6               | 7               | 8               | 0,6        | 0,7     | 0,8     | 55                | 0,60          | 1              |
| 16 | 6               | 7               | 8               | 9               | 0,7        | 0,8     | 0,9     | 60                | 0,65          | 2              |
| 17 | 7               | 8               | 9               | 10              | 0,8        | 0,9     | 1       | 65                | 0,70          | 3              |
| 18 | 8               | 9               | 10              | 1               | 0,9        | 1       | 1,2     | 70                | 0,75          | 4              |
| 19 | 9               | 10              | 1               | 2               | 1          | 1,2     | 1,3     | 75                | 0,80          | 5              |
| 20 | 10              | 1               | 2               | 3               | 1,2        | 1,3     | 1,4     | 80                | 0,85          | 7              |
| 21 | 1               | 2               | 3               | 4               | 0,2        | 0,3     | 0,4     | 35                | 0,40          | 9              |
| 22 | 2               | 3               | 4               | 5               | 0,3        | 0,4     | 0,5     | 40                | 0,45          | 1              |
| 23 | 3               | 4               | 5               | 6               | 0,4        | 0,5     | 0,6     | 45                | 0,50          | 2              |
| 24 | 4               | 5               | 6               | 7               | 0,5        | 0,6     | 0,7     | 50                | 0,55          | 3              |
| 25 | 5               | 6               | 7               | 8               | 0,6        | 0,7     | 0,8     | 55                | 0,60          | 4              |
| 26 | 6               | 7               | 8               | 9               | 0,7        | 0,8     | 0,9     | 60                | 0,65          | 5              |
| 27 | 7               | 8               | 9               | 10              | 0,8        | 0,9     | 1       | 65                | 0,70          | 7              |
| 28 | 8               | 9               | 10              | 1               | 0,9        | 1       | 1,2     | 70                | 0,75          | 9              |
| 29 | 9               | 10              | 1               | 2               | 1          | 1,2     | 1,3     | 75                | 0,80          | 1              |
| 30 | 10              | 1               | 2               | 3               | 1,2        | 1,3     | 1,4     | 80                | 0,85          | 2              |

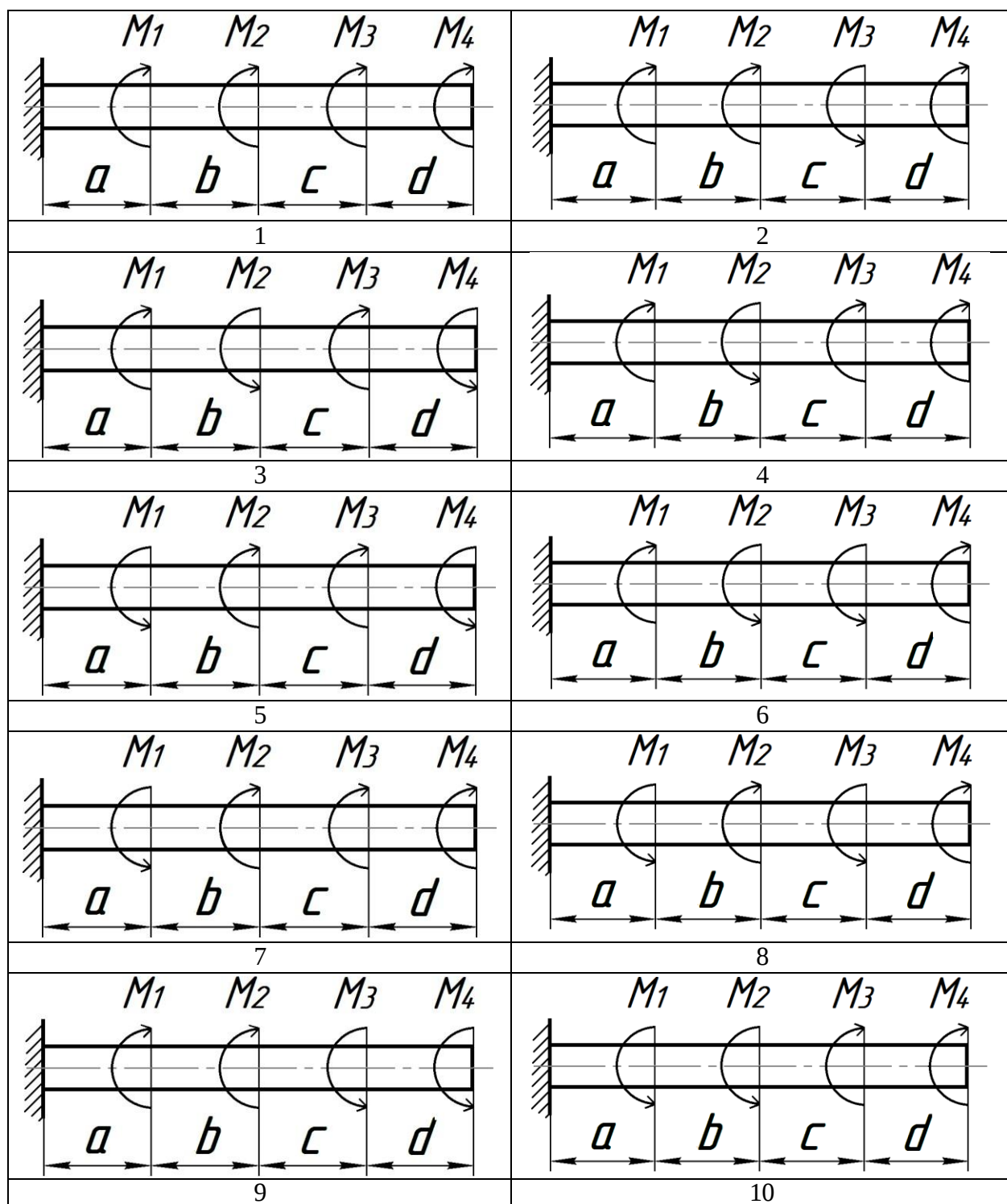


Рисунок 6.6

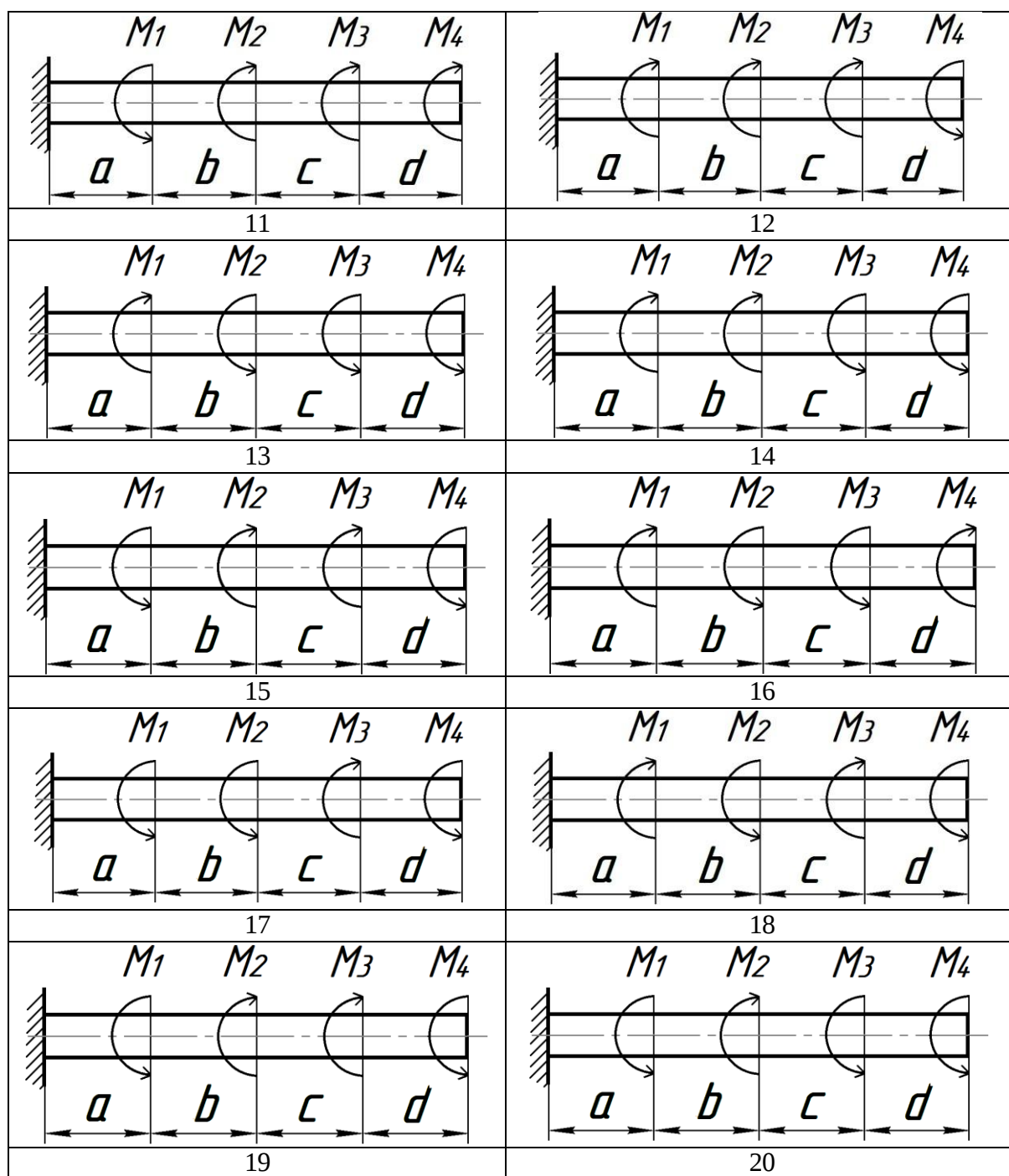


Рисунок 6.7

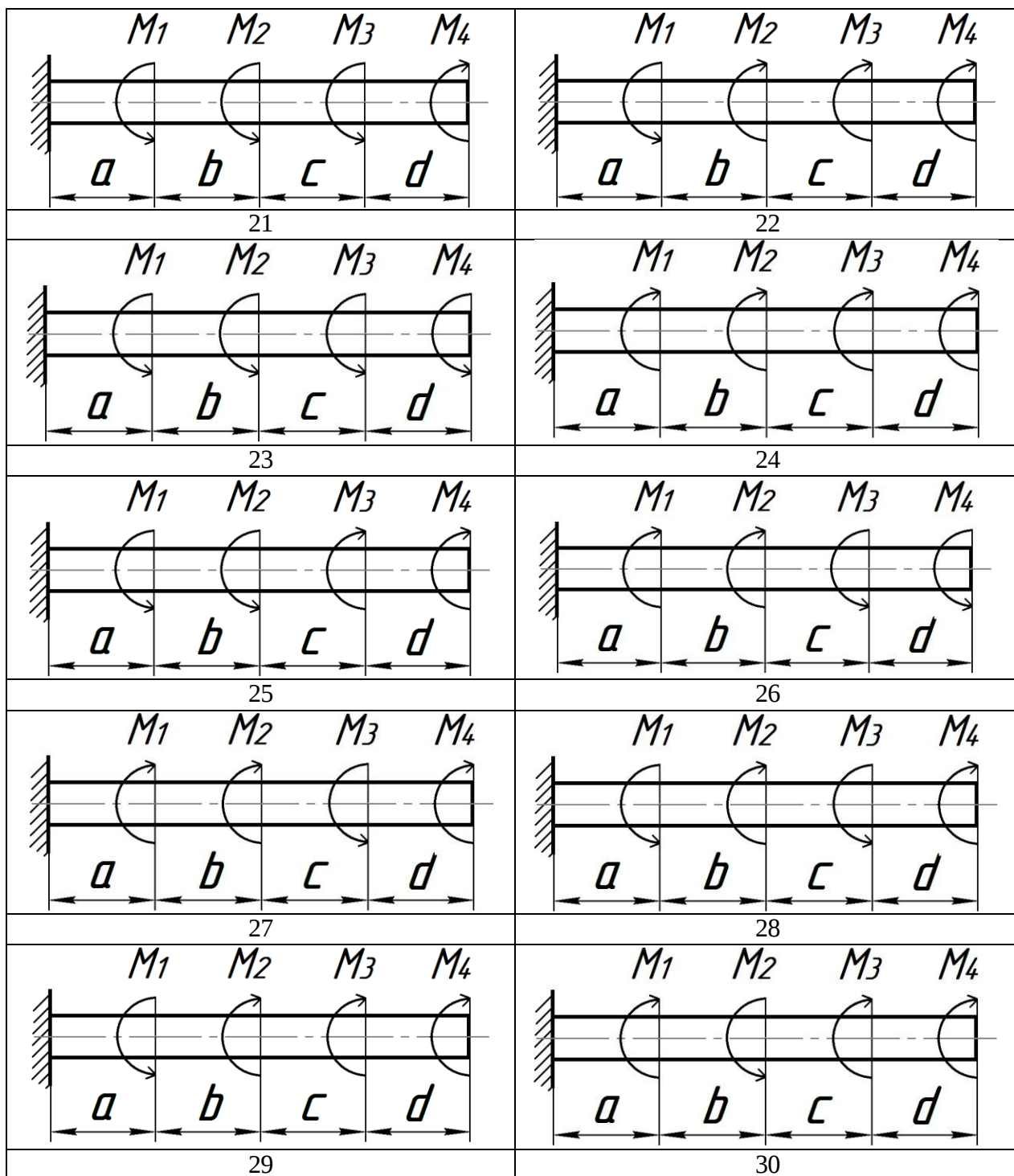


Рисунок 6.8

2 Какую максимальную мощность может передать вал заданного диаметра без нарушения прочности и жесткости, если известны: допускаемое напряжение  $[\tau]$ , допустимый наибольший относительный угол закручивания  $[\theta]$  и угловая скорость вращения  $\omega$ . Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига  $G$  и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 6.2

| №  | $D$ , мм | $[\tau]$ , МПа | $\omega$ , с <sup>-1</sup> | $[\theta]$ , рад/м | № материала |
|----|----------|----------------|----------------------------|--------------------|-------------|
| 1  | 50       | 25             | 40                         | 0,004              | 1           |
| 2  | 55       | 30             | 42                         | 0,005              | 2           |
| 3  | 60       | 35             | 44                         | 0,006              | 3           |
| 4  | 65       | 40             | 46                         | 0,007              | 4           |
| 5  | 70       | 45             | 48                         | 0,008              | 5           |
| 6  | 75       | 50             | 50                         | 0,009              | 7           |
| 7  | 80       | 55             | 52                         | 0,01               | 9           |
| 8  | 85       | 60             | 54                         | 0,02               | 1           |
| 9  | 90       | 65             | 56                         | 0,03               | 2           |
| 10 | 95       | 70             | 58                         | 0,04               | 3           |
| 11 | 100      | 75             | 60                         | 0,05               | 4           |
| 12 | 52       | 25             | 62                         | 0,004              | 5           |
| 13 | 54       | 30             | 64                         | 0,005              | 7           |
| 14 | 56       | 35             | 66                         | 0,006              | 9           |
| 15 | 58       | 40             | 68                         | 0,007              | 1           |
| 16 | 60       | 45             | 70                         | 0,008              | 2           |
| 17 | 62       | 50             | 72                         | 0,009              | 3           |
| 18 | 64       | 55             | 74                         | 0,01               | 4           |
| 19 | 66       | 60             | 76                         | 0,02               | 5           |
| 20 | 68       | 65             | 78                         | 0,03               | 7           |
| 21 | 70       | 70             | 80                         | 0,04               | 9           |
| 22 | 72       | 75             | 64                         | 0,05               | 1           |
| 23 | 74       | 40             | 66                         | 0,007              | 2           |
| 24 | 76       | 45             | 68                         | 0,008              | 3           |
| 25 | 78       | 50             | 70                         | 0,009              | 4           |
| 26 | 80       | 55             | 72                         | 0,01               | 5           |
| 27 | 82       | 60             | 74                         | 0,02               | 7           |
| 28 | 84       | 65             | 76                         | 0,03               | 9           |
| 29 | 86       | 70             | 78                         | 0,04               | 1           |
| 30 | 88       | 75             | 80                         | 0,05               | 2           |

3. Из расчетов на прочность и жесткость определить диаметр вала для передачи заданной мощности  $P$ . Известно: угловая скорость вращения  $\omega$ , допускаемое напряжение  $[\tau]$ , допустимый наибольший относительный угол закручивания  $[\theta]$ . Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига  $G$  и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 6.3

| №  | $P$ , кВт | $\omega$ , рад/с | $[\tau]$ , МПа | $[\theta]$ , рад/м | № материала |
|----|-----------|------------------|----------------|--------------------|-------------|
| 1  | 50        | 18               | 15             | 0,01               | 1           |
| 2  | 52        | 20               | 17             | 0,02               | 2           |
| 3  | 54        | 22               | 19             | 0,03               | 3           |
| 4  | 56        | 24               | 21             | 0,04               | 4           |
| 5  | 58        | 26               | 23             | 0,05               | 5           |
| 6  | 60        | 28               | 25             | 0,06               | 7           |
| 7  | 62        | 30               | 27             | 0,07               | 9           |
| 8  | 64        | 32               | 29             | 0,08               | 1           |
| 9  | 66        | 34               | 31             | 0,09               | 2           |
| 10 | 68        | 36               | 33             | 0,02               | 3           |
| 11 | 70        | 38               | 35             | 0,03               | 4           |
| 12 | 72        | 40               | 37             | 0,04               | 5           |
| 13 | 74        | 42               | 39             | 0,05               | 7           |
| 14 | 76        | 44               | 41             | 0,06               | 9           |
| 15 | 78        | 46               | 42             | 0,07               | 1           |
| 16 | 80        | 48               | 44             | 0,08               | 2           |
| 17 | 82        | 50               | 46             | 0,09               | 3           |
| 18 | 84        | 40               | 48             | 0,03               | 4           |
| 19 | 86        | 42               | 50             | 0,04               | 5           |
| 20 | 88        | 44               | 51             | 0,05               | 7           |
| 21 | 90        | 46               | 53             | 0,06               | 9           |
| 22 | 92        | 48               | 55             | 0,07               | 1           |
| 23 | 94        | 50               | 57             | 0,08               | 2           |
| 24 | 96        | 40               | 59             | 0,09               | 3           |
| 25 | 98        | 42               | 61             | 0,04               | 4           |
| 26 | 100       | 44               | 62             | 0,05               | 5           |
| 27 | 82        | 46               | 51             | 0,06               | 7           |
| 28 | 84        | 48               | 53             | 0,07               | 9           |
| 29 | 86        | 50               | 55             | 0,08               | 1           |
| 30 | 88        | 46               | 57             | 0,09               | 2           |

**Практическая работа № 7**  
**Решение задач на тему "Изгиб"**

**Изгибом** называют такой вид деформации, при которой происходит искривление продольной оси бруса.

Если все внешние нагрузки расположены в одной плоскости проходящей через центр тяжести балки, то такой изгиб называют **прямым**.

При прямом изгибе поперечных сечений балки возникают два внутренних силовых фактора:  $M_x$  – изгибающий момент и  $Q_y$  – поперечная сила.

Если в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент  $M_x$ , то такой изгиб называется **чистым**.

Если при изгибе в поперечном сечении балки возникают изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ , то такой изгиб называется **поперечным**.

Брус, работающий на изгиб принято называть балкой.

Простые балки (статически определимые) бывают трех видов:

1. Однопролетные (рисунок 7.1).

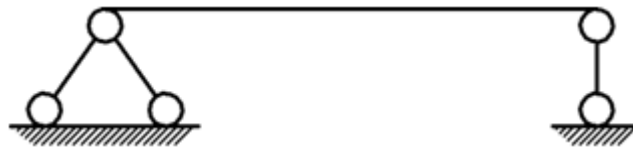


Рисунок 7.1

2. Консольные (рисунок 7.2).

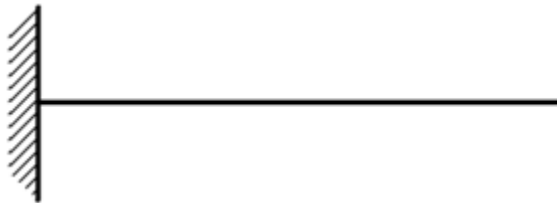


Рисунок 7.2

### 3. Пролетная с консолями (рисунок 7.3).



Рисунок 7.3

При чистом изгибе выполняются гипотезы плоских сечений Бернулли и ненадавливаемости слоев:

При воздействии на брус изгибающих моментов между растянутыми и сжатыми волокнами будет расположен слой продольных волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины – такой слой называется **нейтральным** (рисунок 7.4).

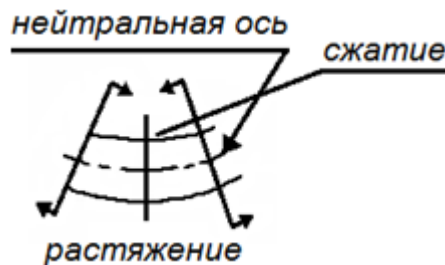


Рисунок 7.4

1. Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

2. Сечения плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации.

#### Правила знаков:

1. Изгибающий момент  $M$  считается положительным, если внешний силовой фактор растягивает нижние волокна балки относительно точки сечения (рисунок 7.5 а, б).



Рисунок 7.5

2. Поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она вращает отсеченную часть балки по часовой стрелки (рисунок 7.6а, б).



Рисунок 7.6

### 7.1 Зависимость между поперечной силой, изгибающим моментом и нагрузкой для построения эпюр

1. На участках балки, где поперечная сила  $Q$  положительна, изгибающий момент  $M$  возрастает и наоборот.
2. Если  $Q=0$  то на эпюре изгибающего момента  $M$  – экстремум.
3. На незагруженных участках балки эпюра поперечной силы – прямая линия параллельная базе, эпюра изгибающего момента – наклонная прямая.
4. Под распределенной нагрузкой эпюра изгибающего момента – квадратичная парабола выпуклостью в сторону действия нагрузки, эпюра поперечной силы – наклонная прямая.
5. В точке приложения сосредоточенной нагрузки на эпюре поперечной силы скачек на величину нагрузки, на эпюре изгибающего момента – излом в сторону действия нагрузки.
6. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре изгибающего момента скачек на величину этого момента, эпюра поперечной силы без изменения.

### 7.2 Дифференциальные зависимости при изгибе

Изгибающий момент, поперечная сила и интенсивность распределенной нагрузки связаны зависимостями Д.Н. Журавского:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q$$
$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Если  $M_x = \text{const}$  то  $Q_y = 0$ , если  $Q_y = \text{const}$  то  $q = 0$ .

### 7.3 Нормальные напряжения при изгибе

Рассмотрим элемент балки длиной  $dz$  (рисунок 7.7).

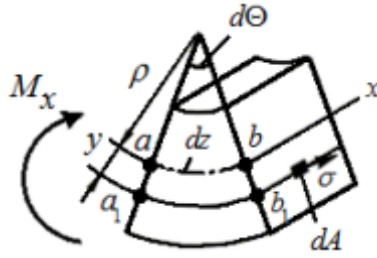


Рисунок 7.7

Относительное изменение длины волокна:

$$\varepsilon_{a_1b_1} = \frac{a_1b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

где:  $\rho$  – радиус нейтральной линии;  $d\theta$  – угол поворота сечения;  
 $ab=dz$  – длина нейтральной линии для выбранного элемента.

Согласно закону Гука:

$$\sigma_z = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$

Изгибающий момент:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \frac{Ey}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EJ_x}{\rho}$$

где:  $EJ_x$  – жесткость поперечного сечения при изгибе;

$\int_A y^2 dA = J_x$  – статический момент сечения.

Нахождение нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{J_x}$$

Следовательно, абсолютная величина напряжения тем выше, чем больше расстояние  $y$  от нейтральной линии.

Максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_{\max}}{J_x} = \frac{M_x}{W_x}$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

где:  $y_{\max}$  – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения;  $W_x$  – момент сопротивления сечения при изгибе, [м<sup>3</sup>].

#### 7.4 Расчет на прочность при изгибе

**1. Проектный расчет** – определяем максимальное расчетное напряжение, затем сравниваем его с допускаемым напряжением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

где:  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

**2. Проектный расчет** – подбор сечения бруса (рисунок 7.8):

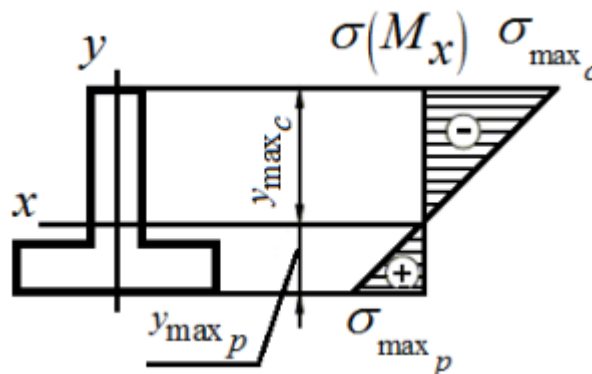


Рисунок 7.8

$$\sigma_{\max}^{раст} = \frac{M_x y_{\max}^{раст}}{J_x} \leq [\sigma_{раст}]$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = \frac{M_x y_{\max}^{сж}}{J_x} \leq [\sigma_{сж}]$$

Если  $\frac{y_{\max}^{сж}}{y_{\max}^{раст}} > \frac{[\sigma_{сж}]}{[\sigma_{раст}]}$  – опасными являются сжатые волокна.

Если  $\frac{y_{\max}^{сж}}{y_{\max}^{раст}} < \frac{[\sigma_{сж}]}{[\sigma_{раст}]}$  – опасными являются растянутые волокна.

### 3. Определение наибольшего допускаемого изгибающего момента:

$$[M_x] = W_x [\sigma]$$

#### 7.5 Касательные напряжения при изгибе

При прямом изгибе касательные напряжения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{omc}}{J_x b}$$

где:  $Q_y$  – поперечная сила;  $S_x^{omc}$  – статический момент отсеченной части относительно оси  $x$ ;  $J_x$  – момент инерции сечения;  $b$  – ширина балки.

#### Примеры решения задач

**Пример №1.** Для стальной балки (см. рисунок 7.9) написать выражения  $Q$  и  $M$  для каждого участка, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{max}$ , подобрать размеры круглого, прямоугольного  $(\frac{h}{b} = 2)$  и двутаврового сечений, если известно:  $q=8$  кН/м,  $F=100$ кН,  $[\sigma]=160$  МПа.

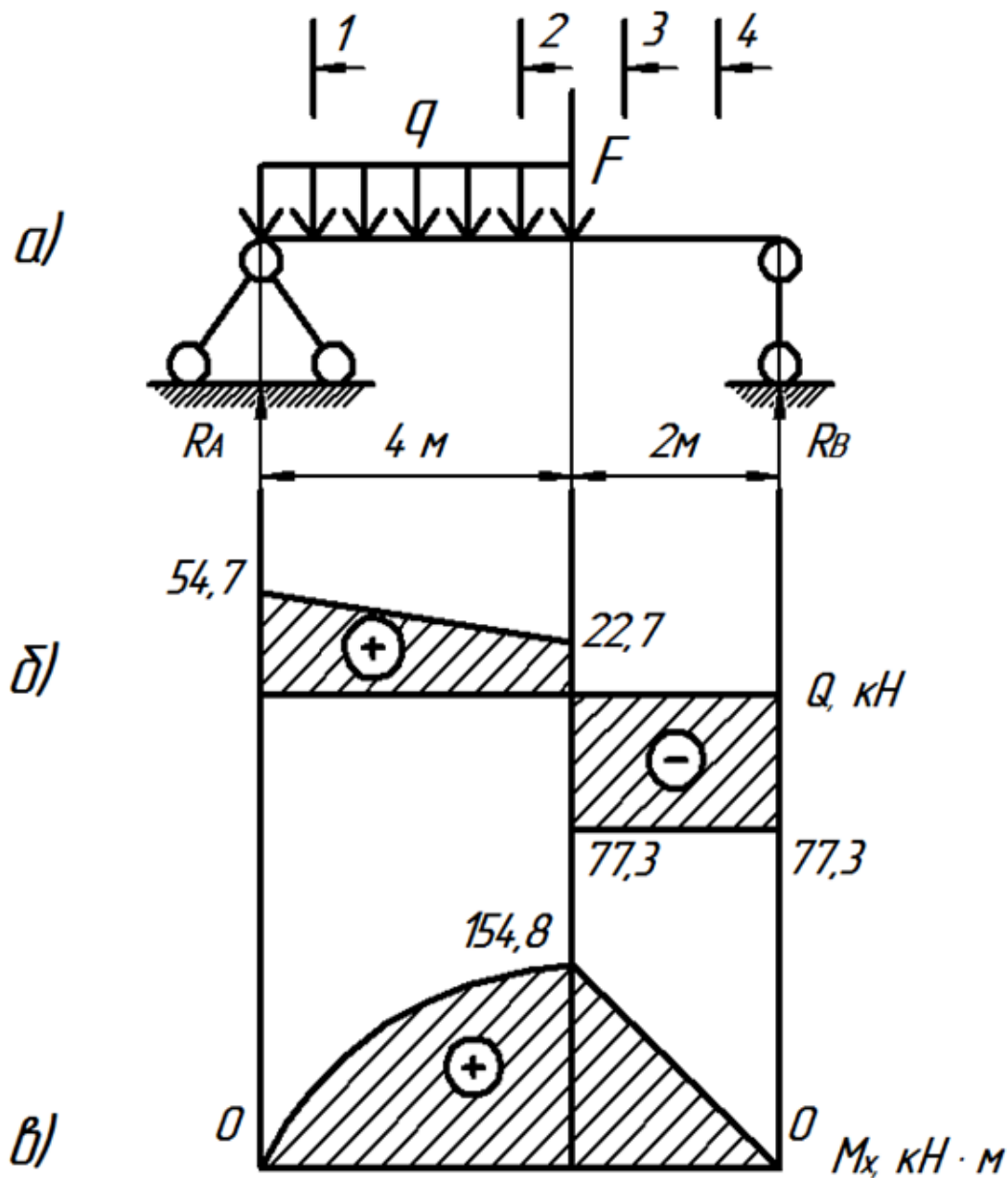


Рисунок 7.9

**Решение.** Из условия равновесия определяем реакции опор:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 4 - R_B \cdot 6 &= 0 \\ R_B &= \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 4}{6} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2 + 100 \cdot 4}{6} = 77,3 \text{ кН} \\ \sum M_B &= 0 \\ R_A \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 - F \cdot 2 &= 0 \\ R_A &= \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + F \cdot 2}{6} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 4 + 100 \cdot 2}{6} = 54,7 \text{ кН}\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\sum y &= 0 \\ R_A + R_B - F - q \cdot 4 &= 54,7 + 77,3 - 100 - 32 = 0\end{aligned}$$

Реакции определены верно.

Определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях. Мысленно рассекаем брус на четыре части (см. рис. 5.9а) 1-1, 2-2, 3-3, 4-4:

$$\begin{aligned}
 Q_{1-1} &= R_A = 54,7 \text{ кН} \\
 Q_{2-2} &= R_A - q \cdot 4 = 54,7 - 8 \cdot 4 = 22,7 \text{ кН} \\
 Q_{3-3} &= R_A - q \cdot 4 - F = 54,7 - 8 \cdot 4 - 100 = -77,3 \text{ кН} \\
 Q_{4-4} &= Q_{3-3} = -77,3 \text{ кН} \\
 M_{1-1} &= 0 \\
 M_{2-2} &= R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 54,7 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \\
 M_{3-3} &= M_{2-2} = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \\
 M_{4-4} &= 0
 \end{aligned}$$

Строим эпюры Q и M (см. рисунок 5.9б, в).

Из эпюры изгибающих моментов находим максимальный по модулю изгибающий момент  $M_{\max} = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Из условия прочности определяем осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{154,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,9675 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 967,5 \text{ см}^3$$

**Подбираем сечение:**

*Круглое сечение:*

$$\begin{aligned}
 W_x &= \frac{\pi d^3}{32} \\
 d &= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 967,5}{3,14}} = 21,44 \text{ см}
 \end{aligned}$$

Выбираем окончательный диаметр  $d = 22 \text{ см}$ .

$$A_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 22^2}{4} = 379,94 \text{ см}^2$$

**Прямоугольное сечение:**

$$\begin{aligned}
 W_x &= \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \\
 b &= \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 967,5}{2}} = 11,32 \text{ см} \\
 h &= 2b = 2 \cdot 11,32 = 22,64 \text{ см} \\
 A_{\text{прямо}} &= bh = 11,32 \cdot 22,64 = 256,28 \text{ см}^2
 \end{aligned}$$

### Двутавровое сечение:

Из таблицы сортамента (приложение 2) подбираем необходимый номер двутавра равный или больший расчетному  $W_x=967,5 \text{ см}^3$ .

Выбираем двутавр №45:  $h=450 \text{ мм}$ ,  $b=160 \text{ мм}$ ,  $d=8,6 \text{ мм}$ ,  $t=14,2 \text{ мм}$ ,  $A=83,0 \text{ см}^2$ ,  $J_x=27450 \text{ см}^4$ ,  $W_x=1220 \text{ см}^3$ ,  $S_x=699 \text{ см}^3$ .

## 7.6 Контрольные задания

### Изгиб

Построить эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$ . Из расчета на прочность подобрать стальные балки скруглым, кольцевым, прямоугольным ( $\frac{h}{b}=2$ ), квадратным и двутавровым поперечными сечениями.

Таблица 7.1

| №  | $a, \text{ м}$ | $b, \text{ м}$ | $c, \text{ м}$ | $F, \text{ кН}$ | $q, \text{ кН/м}$ | $M, \text{ кН} \times \text{ м}$ | $[\sigma], \text{ МПа}$ | $\frac{d}{D}$ |
|----|----------------|----------------|----------------|-----------------|-------------------|----------------------------------|-------------------------|---------------|
| 1  | 0,5            | 0,1            | 1              | 2               | 20                | 2                                | 110                     | 0,40          |
| 2  | 0,6            | 0,2            | 1,2            | 4               | 18                | 3                                | 120                     | 0,45          |
| 3  | 0,7            | 0,3            | 1,4            | 6               | 16                | 4                                | 130                     | 0,50          |
| 4  | 0,8            | 0,4            | 1,6            | 8               | 14                | 5                                | 140                     | 0,55          |
| 5  | 0,9            | 0,5            | 1,8            | 10              | 12                | 6                                | 150                     | 0,60          |
| 6  | 1              | 0,6            | 2              | 12              | 10                | 7                                | 160                     | 0,65          |
| 7  | 1,1            | 0,7            | 2,2            | 14              | 8                 | 8                                | 170                     | 0,70          |
| 8  | 1,2            | 0,8            | 2,4            | 16              | 6                 | 9                                | 180                     | 0,75          |
| 9  | 1,3            | 0,9            | 2,6            | 18              | 4                 | 10                               | 190                     | 0,80          |
| 10 | 1,4            | 1              | 2,8            | 20              | 2                 | 11                               | 200                     | 0,85          |
| 11 | 0,5            | 0,1            | 1              | 2               | 20                | 2                                | 110                     | 0,40          |
| 12 | 0,6            | 0,2            | 1,2            | 4               | 18                | 3                                | 120                     | 0,45          |
| 13 | 0,7            | 0,3            | 1,4            | 6               | 16                | 4                                | 130                     | 0,50          |
| 14 | 0,8            | 0,4            | 1,6            | 8               | 14                | 5                                | 140                     | 0,55          |
| 15 | 0,9            | 0,5            | 1,8            | 10              | 12                | 6                                | 150                     | 0,60          |
| 16 | 1              | 0,6            | 2              | 12              | 10                | 7                                | 160                     | 0,65          |
| 17 | 1,1            | 0,7            | 2,2            | 14              | 8                 | 8                                | 170                     | 0,70          |
| 18 | 1,2            | 0,8            | 2,4            | 16              | 6                 | 9                                | 180                     | 0,75          |
| 19 | 1,3            | 0,9            | 2,6            | 18              | 4                 | 10                               | 190                     | 0,80          |
| 20 | 1,4            | 1              | 2,8            | 20              | 2                 | 11                               | 200                     | 0,85          |
| 21 | 0,5            | 0,1            | 1              | 2               | 20                | 2                                | 110                     | 0,40          |
| 22 | 0,6            | 0,2            | 1,2            | 4               | 18                | 3                                | 120                     | 0,45          |
| 23 | 0,7            | 0,3            | 1,4            | 6               | 16                | 4                                | 130                     | 0,50          |
| 24 | 0,8            | 0,4            | 1,6            | 8               | 14                | 5                                | 140                     | 0,55          |
| 25 | 0,9            | 0,5            | 1,8            | 10              | 12                | 6                                | 150                     | 0,60          |
| 26 | 1              | 0,6            | 2              | 12              | 10                | 7                                | 160                     | 0,65          |
| 27 | 1,1            | 0,7            | 2,2            | 14              | 8                 | 8                                | 170                     | 0,70          |
| 28 | 1,2            | 0,8            | 2,4            | 16              | 6                 | 9                                | 180                     | 0,75          |
| 29 | 1,3            | 0,9            | 2,6            | 18              | 4                 | 10                               | 190                     | 0,80          |
| 30 | 1,4            | 1              | 2,8            | 20              | 2                 | 11                               | 200                     | 0,85          |

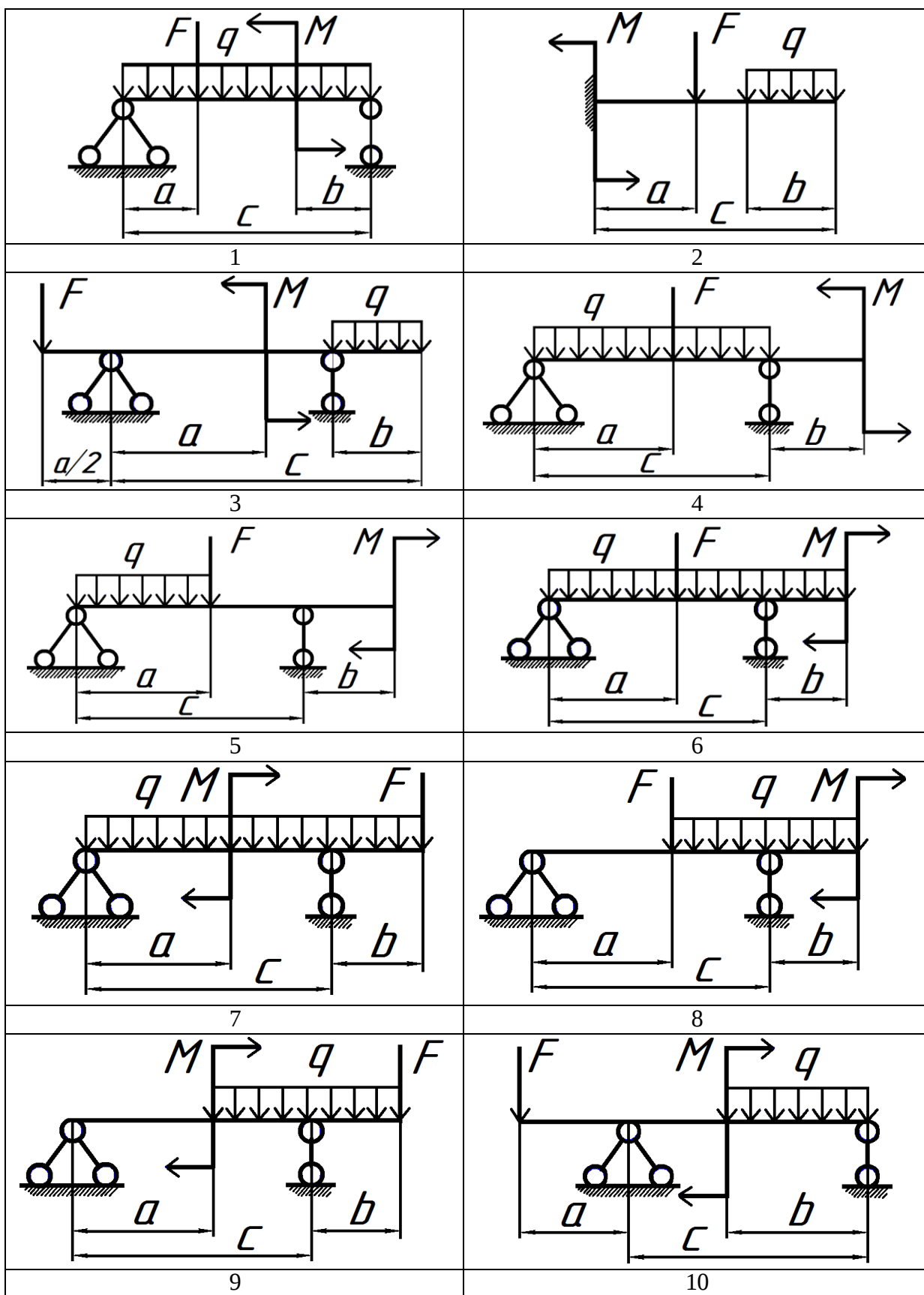


Рисунок 7.10

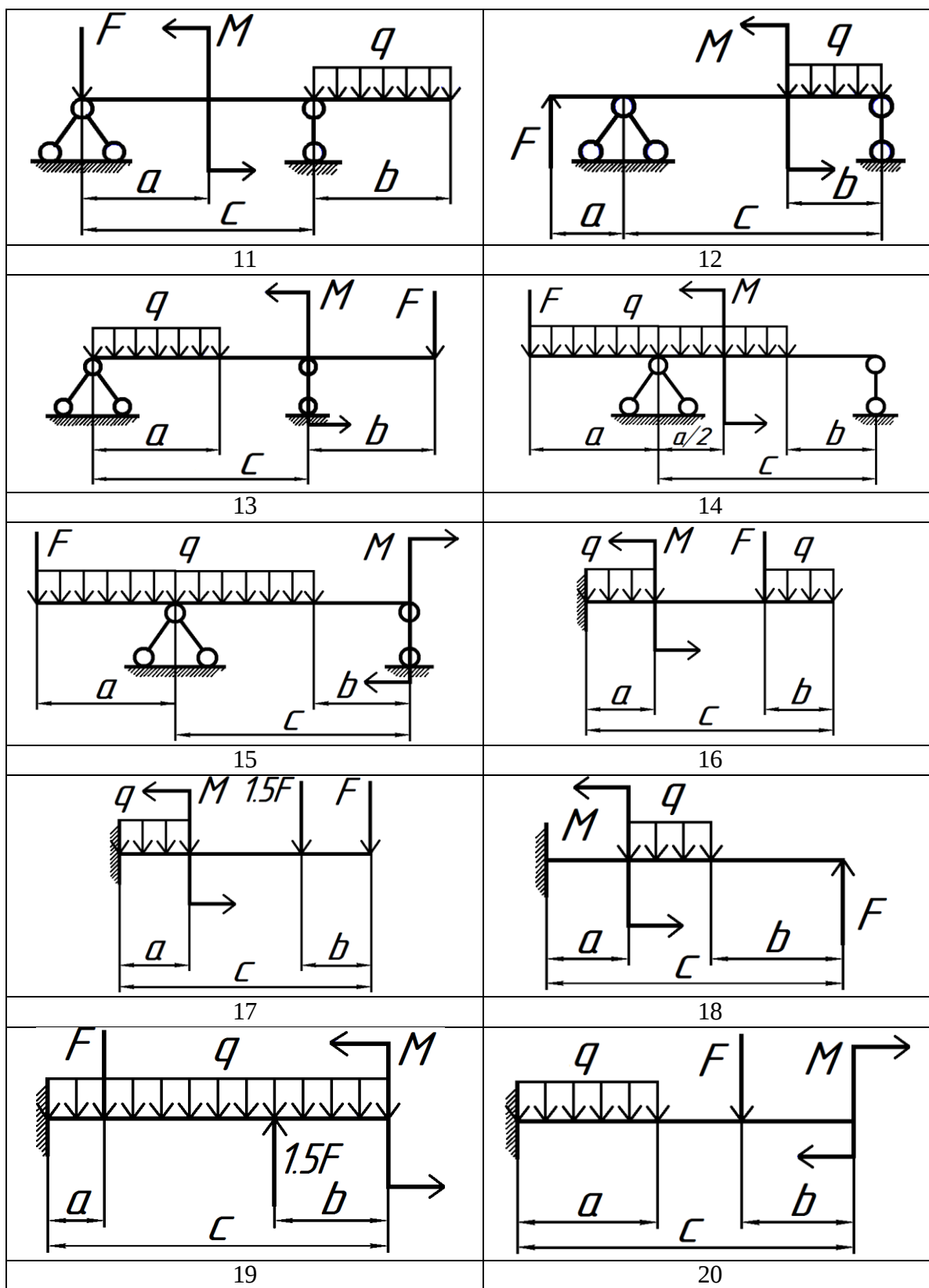


Рисунок 7.11

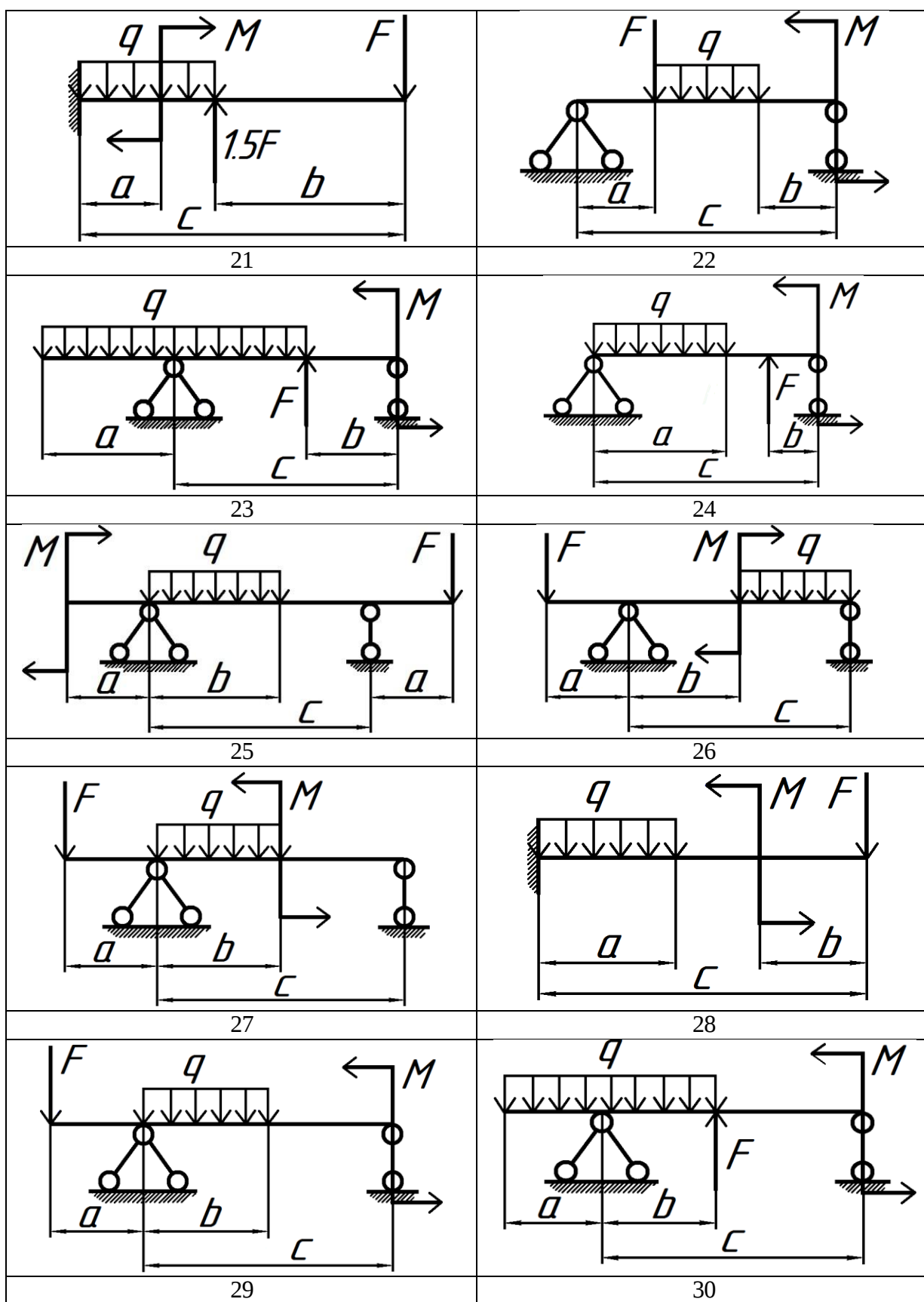


Рисунок 7.12

## Практическая работа № 8

### Решение задач на тему "Устойчивость сжатых стержней"

Расчет на устойчивость имеет большое значение для элементов конструкций, которые представляют собой длинные и тонкие стержни, тонкие пластины и оболочки.

Если стержень, отклоненный от положения равновесия возвращается в исходное положение после устранения причины вызвавшее это отклонение то такое равновесие называется **устойчивым**.

**Продольный изгиб** – это стержень, изгиб которого привел к потере устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Наибольшее значение центрально приложенной сжимающей силы, до которого прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, называется критическим  $F_{кр}$  (рисунок 8.1).

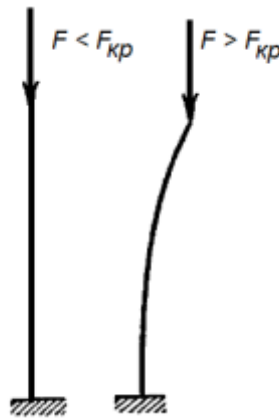


Рисунок 8.1

При сжимающей силе, меньше критической стержень работает на сжатие.

При сжимающей силе, большей критической, стержень работает на сжатие **и** изгиб.

При небольшом превышении сжимающей нагрузки критического значения прогибы стержня и напряжения приводят к его разрушению. Поэтому в практических расчетах критическая сила считается разрушающей нагрузкой.

### 8.1 Формула Эйлера

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, один конец прикреплен к шарнирно-подвижной опоре (есть возможность продольного перемещения), а другой к шарнирно-неподвижной (рисунок 8.2).

На стержень действует центрально сжимающая продольная сила  $F$ . Собственным весом стержня можно пренебречь.

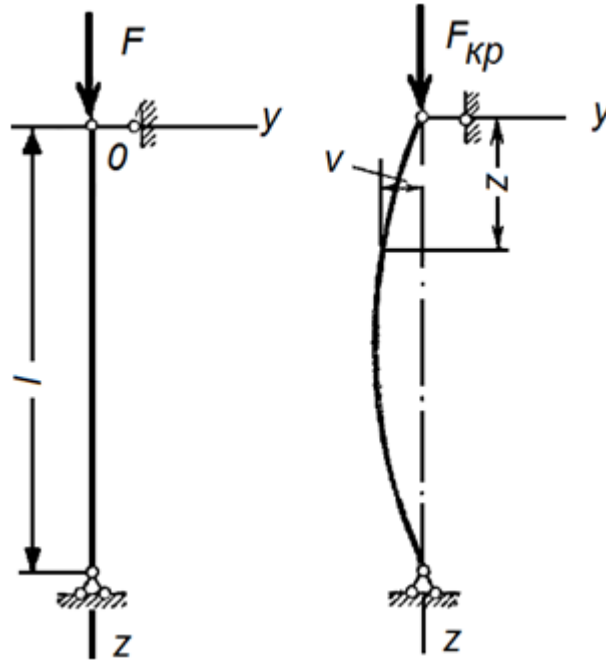


Рисунок 8.2

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x = -Fv$$

$$\frac{F}{EJ_x} = k^2$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = 0$$

Общий интеграл уравнения:

$$v = A \sin kz + B \cos kz$$

где:  $A, B$  – постоянные интегрирования.

Краевые условия на концах стержня дают два уравнения:

1. При  $z=0, v=0$ :

$$v = A \sin 0 + B \cos 0 = B = 0$$

При  $z=l, v=0$ :

$$0 = A \sin kl + B \cos kl = A \sin kl = 0$$

Решение  $A=0$  является прямолинейной формой равновесия сжатого стержня т.е.  $v=0$  и поэтому не представляет интереса.

Следовательно:

$$\begin{aligned}
 A &\neq 0, \\
 \sin kl &= 0, \\
 k &= \frac{\pi n}{l}, \\
 n &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

где:  $n$  – различные устойчивые формы равновесия стержня (рисунок 8.3).

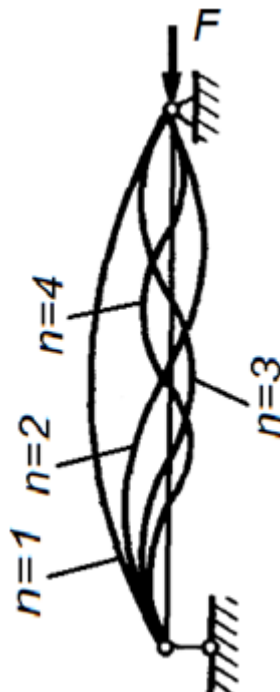


Рисунок 8.3

**Формула Эйлера** для критической силы  $F_{кр}$  при  $n=1$ :

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

где:  $E$  – модуль упругости;  $J_{\min}$  – минимальный осевой момент инерции;  $l$  – длина стержня.

## 8.2 Определение критической силы $F_{кр}$

Если учитывать особенности перемещения стержней при различном их закреплении можно использовать формулу Эйлера и на другие расчетные случаи (рисунок 8.4).

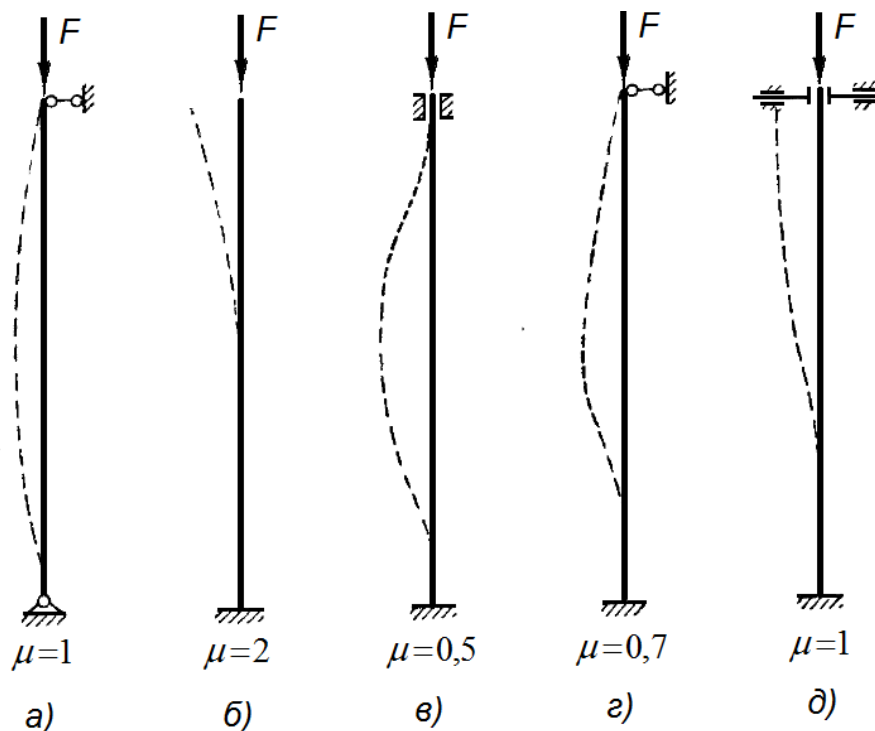


Рисунок 8.4. Закрепление концов стержня:

*а* – оба конца стержня закреплены шарнирно (могут сближаться); *б* – нижний конец жестко зашпелен, верхний свободен; *в* – оба конца жестко зашпелены (могут сближаться); *г* – нижний конец зашпелен жестко, верхний – шарнирно (могут сближаться); *д* – нижний конец зашпелен жестко, верхний имеет «плавающую заделку»

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}$$

где:  $\mu$  – коэффициент приведения длины, часто встречающиеся случаи закрепления стержня смотри на рисунке 8.4 а-д.

### 8.3 Критическое напряжение Пределы применимости формулы Эйлера

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы называется критическим.

Напряжение от сжимающей силы:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A}$$

где:  $\sigma_{кр}$  – напряжение сжатия.

Минимальный радиус инерции  $i_{\min}$ :

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

Окончательная формула для расчета критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}$$

где:  $\frac{\mu l}{i_{\min}} = \lambda$  – гибкость стержня.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

### Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера справедлива лишь в пределах применимости закона Гука, т.е. критическое напряжение не должно превышать предела пропорциональности материала стержня:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{\text{пц}}$$
$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}$$

Гибкость стержня:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}$$

где:  $\lambda_{\text{пред}}$  – предельная гибкость стержня.

Предельная гибкость зависит от физико-механических свойств материала стержня и не зависит от его размеров. Предельная гибкость – величина постоянная для данного материала.

Стержни, для которых справедлива формула Эйлера, называются **стержнями большой гибкости**.

В случае неприменимости формулы Эйлера величина критического напряжения определяется по формулам, составленным Ф.С.Ясинским на основе опытов.

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda < \sigma_m$$

где:  $a, b$  – коэффициенты, зависящие от материала (см. таблицу 8.1 и рисунок 8.5);

$\sigma_m$  – предел текучести.

Таблица 8.1

| Материал         | $a, \text{н/мм}^2$ | $b, \text{н/мм}^2$ | $\lambda_0$ | $\lambda_{пред}$ |
|------------------|--------------------|--------------------|-------------|------------------|
| Сталь Ст2        | 250                | 0,668              | 60          | 105              |
| Сталь Ст3        | 310                | 1,14               | 60          | 100              |
| Сталь 20, Ст4    | 343                | 1,42               | 60          | 95               |
| Сталь 45         | 589                | 3,82               | 60          | 85               |
| Дюралюминий Д16Т | 400                | 3,33               | 30          | 60               |
| Сосна, ель       | 29,3               | 0,184              | -           | 70               |

Стержни, для которых справедлива формула Ясинского, называются **стержнями средней гибкости**.

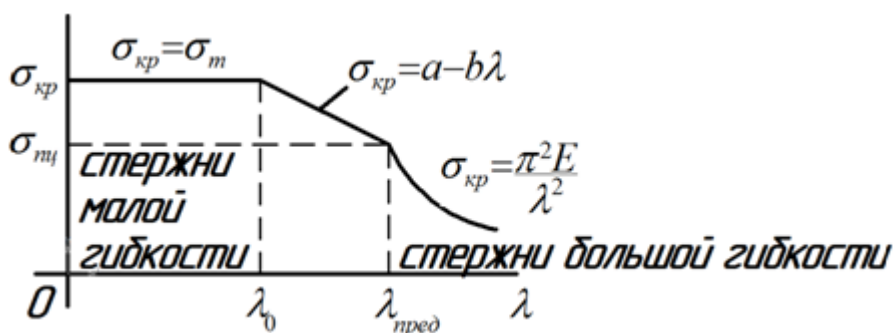


Рисунок 8.5

1. При  $\lambda \geq \lambda_{пред}$  расчет устойчивости ведется по формуле Эйлера (**стержни большой гибкости**):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

2. При  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред}$  расчет устойчивости ведется по формуле Ф.С. Ясинского (**стержни средней гибкости**):

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

3. При  $\lambda < \lambda_0$  расчет ведут не на устойчивость, а на прочность. Критическое напряжение считается постоянным при  $\sigma_{кр} = \sigma_m$ .

## 8.4. Расчеты на устойчивость

### Расчеты на устойчивость:

1. **Проверочный расчет** – определяем коэффициент запаса устойчивости  $s_y$  и сравниваем с требуемым или нормативным его значением  $[s_y]$ .

$$s_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [s_y]$$

где:  $F$  – значение сжимающей нагрузки.

2. **Определяем допускаемую нагрузку:**

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}$$

3. **Проектный расчет** – определяем размеры поперечного сечения стержня.

### Расчет на устойчивость по коэффициентам продольного изгиба

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y]$$
$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{[s_y]}$$

где:  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость;

$[s_y]$  – коэффициент запаса устойчивости;  $A$  – площадь поперечного сечения.

$[\sigma_y]$  – выражают через основное допускаемое напряжение на сжатие:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma]$$

где:  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба стержня,  $\varphi \leq 1$ , данный коэффициент зависит от материала стержня и от его гибкости (см. табл. 8.2);

$[\sigma]$  – основное допускаемое напряжение на сжатие.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}$$

где:  $[s]$  – коэффициент запаса прочности.

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = \varphi \frac{\sigma_{пред}}{[s]} = \frac{\sigma_{кр}}{[s_y]}$$

тогда

$$\varphi = \frac{[\sigma] \sigma_{кр}}{[\sigma_y] \sigma_{пред}}$$

Таблица 8.2

**Значения коэффициентов продольного изгиба**

| $\lambda$ | $\varphi$         |              |                                                   |        |
|-----------|-------------------|--------------|---------------------------------------------------|--------|
|           | Сталь<br>Ст3, Ст4 | Сталь<br>Ст5 | Чугун<br>СЧ12-28<br>СЧ15-32<br>СЧ18-36<br>СЧ21-40 | Дерево |
| 0         | 1                 | 1            | 1                                                 | 1      |
| 10        | 0,9               | 0,98         | 0,97                                              | 0,99   |
| 20        | 0,97              | 0,96         | 0,91                                              | 0,97   |
| 30        | 0,95              | 0,93         | 0,81                                              | 0,93   |
| 40        | 0,92              | 0,9          | 0,69                                              | 0,87   |
| 50        | 0,89              | 0,85         | 0,57                                              | 0,8    |
| 60        | 0,86              | 0,8          | 0,44                                              | 0,71   |
| 70        | 0,81              | 0,74         | 0,34                                              | 0,61   |
| 80        | 0,75              | 0,67         | 0,26                                              | 0,49   |
| 90        | 0,69              | 0,59         | 0,2                                               | 0,38   |
| 100       | 0,6               | 0,5          | 0,16                                              | 0,31   |
| 110       | 0,52              | 0,43         | -                                                 | 0,25   |
| 120       | 0,45              | 0,37         | -                                                 | 0,22   |
| 130       | 0,4               | 0,32         | -                                                 | 0,18   |
| 140       | 0,36              | 0,28         | -                                                 | 0,16   |
| 150       | 0,32              | 0,25         | -                                                 | 0,14   |
| 160       | 0,29              | 0,23         | -                                                 | 0,12   |
| 170       | 0,26              | 0,21         | -                                                 | 0,11   |
| 180       | 0,23              | 0,19         | -                                                 | 0,1    |
| 190       | 0,21              | 0,17         | -                                                 | 0,09   |
| 200       | 0,19              | 0,15         | -                                                 | 0,08   |
| 210       | 0,17              | 0,14         | -                                                 | -      |
| 220       | 0,16              | 0,13         | -                                                 | -      |

### Расчеты на устойчивость:

1. Проверочный расчет:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

2. Определяем допускаемую нагрузку:

$$[F] = A\varphi[\sigma]$$

3. Проектный расчет:

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$$

## 8.5. Примеры решения задач

**Пример.** Используя формулу Эйлера, определить величины критической силы  $F_{кр}$  и критического напряжения  $\sigma_{кр}$  для сжатой стойки двутаврового поперечного сечения №22. Оба конца стойки шарнирно оперты (рис. 8.4а). Длина стойки 5 м. Материал стойки – сталь с пределом пропорциональности  $\sigma_{пл} = 2000 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** По сортаменту стали (приложение 1) определяем геометрические характеристики двутавровой стойки:  $A=30,6 \text{ см}^2$ ,  $J_{min}=J_y=157 \text{ см}^4$ ,  $i_{min}=i_y= 2,27 \text{ см}$ .

1. Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 500}{2,27} = 220$$
$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пл}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100$$

$\lambda \geq \lambda_{пред}$  т.е.  $220 > 100$ , формула Эйлера применима.

2. Определяем критическое усилие  $F_{кр}$ :

$$F_{кр} = \frac{E J_{min} \pi^2}{(\mu l)^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 157 \cdot 3,14^2}{(1 \cdot 500)^2} = 12400 \text{ кг}$$

3. Определяем критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{12400}{30,6} = 405 \text{ кг/см}^2$$

## 8.6. Контрольные задания

### Устойчивость сжатых стержней

1. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту на продольную сжимающую нагрузку  $F$  двутавровое поперечное сечение стойки длиной  $l$ . Коэффициент приведения длины  $\mu$  (см. рис. 8.4), коэффициент запаса устойчивости  $\gamma_y$  смотри в таблице 8.3. Материал стойки сталь Ст3.

Таблица 8.3

| №  | $F$ , кН | $l$ , м | $s_y$ | $M$ |
|----|----------|---------|-------|-----|
| 1  | 0,5      | 1       | 1     | 0,5 |
| 2  | 0,6      | 1,1     | 1,1   | 0,7 |
| 3  | 0,7      | 1,2     | 1,2   | 1   |
| 4  | 0,8      | 1,3     | 1,3   | 2   |
| 5  | 0,9      | 1,4     | 1,4   | 0,5 |
| 6  | 1        | 1,5     | 1,5   | 0,7 |
| 7  | 1,1      | 1,6     | 1,6   | 1   |
| 8  | 1,2      | 1,7     | 1,7   | 2   |
| 9  | 1,3      | 1,8     | 1,8   | 0,5 |
| 10 | 1,4      | 1,9     | 1,9   | 0,7 |
| 11 | 1,5      | 2       | 2     | 1   |
| 12 | 1,6      | 2,1     | 2,1   | 2   |
| 13 | 1,7      | 2,2     | 2,2   | 0,5 |
| 14 | 1,8      | 2,3     | 2,3   | 0,7 |
| 15 | 1,9      | 2,4     | 2,4   | 1   |
| 16 | 2        | 2,5     | 2,5   | 2   |
| 17 | 2,1      | 2,6     | 2,6   | 0,5 |
| 18 | 2,2      | 2,7     | 2,7   | 0,7 |
| 19 | 2,3      | 2,8     | 2,8   | 1   |
| 20 | 2,4      | 2,9     | 2,9   | 2   |
| 21 | 2,5      | 3       | 3     | 0,5 |
| 22 | 2,6      | 1       | 1,1   | 0,7 |
| 23 | 2,7      | 1,1     | 1,2   | 1   |
| 24 | 2,8      | 1,2     | 1,3   | 2   |
| 25 | 2,9      | 1,3     | 1,4   | 0,5 |
| 26 | 3        | 1,4     | 1,5   | 0,7 |
| 27 | 3,1      | 1,5     | 1,6   | 1   |
| 28 | 3,2      | 1,6     | 1,7   | 2   |
| 29 | 3,3      | 1,7     | 1,8   | 0,5 |
| 30 | 3,4      | 1,8     | 1,9   | 0,7 |

2. Пользуясь таблицей значений коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  (таблица 8.2), определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки  $[F]$  на стойку двутаврового поперечного сечения из стали Ст3 при основном допускаемом напряжении  $[\sigma]$ . Длину стойки  $l$ , основное допускаемое напряжение  $[\sigma]$ , коэффициент приведения длины  $\mu$ , № профиля взять из таблицы 8.4. Схему закрепления концов стержня см. на рис. 8.4.

Таблица 8.4

| №  | $[\sigma]$ , МПа | $l$ , м | № профиля | $M$ |
|----|------------------|---------|-----------|-----|
| 1  | 100              | 1       | 10        | 0,5 |
| 2  | 105              | 1,1     | 12        | 0,7 |
| 3  | 110              | 1,2     | 14        | 1   |
| 4  | 115              | 1,3     | 16        | 2   |
| 5  | 120              | 1,4     | 18        | 0,5 |
| 6  | 125              | 1,5     | 20        | 0,7 |
| 7  | 130              | 1,6     | 22        | 1   |
| 8  | 135              | 1,7     | 24        | 2   |
| 9  | 140              | 1,8     | 27        | 0,5 |
| 10 | 145              | 1,9     | 30        | 0,7 |
| 11 | 150              | 2       | 33        | 1   |
| 12 | 155              | 2,1     | 36        | 2   |
| 13 | 160              | 2,2     | 40        | 0,5 |
| 14 | 165              | 2,3     | 45        | 0,7 |
| 15 | 170              | 2,4     | 50        | 1   |
| 16 | 175              | 2,5     | 10        | 2   |
| 17 | 180              | 2,6     | 12        | 0,5 |
| 18 | 185              | 2,7     | 14        | 0,7 |
| 19 | 190              | 2,8     | 16        | 1   |
| 20 | 195              | 2,9     | 18        | 2   |
| 21 | 200              | 3       | 20        | 0,5 |
| 22 | 152              | 1       | 22        | 0,7 |
| 23 | 154              | 1,1     | 24        | 1   |
| 24 | 156              | 1,2     | 27        | 2   |
| 25 | 158              | 1,3     | 30        | 0,5 |
| 26 | 160              | 1,4     | 33        | 0,7 |
| 27 | 162              | 1,5     | 36        | 1   |
| 28 | 164              | 1,6     | 40        | 2   |
| 29 | 166              | 1,7     | 45        | 0,5 |
| 30 | 168              | 1,8     | 50        | 0,7 |

**Практическая работа № 9**  
**Решение задач на тему "Сложное сопротивление"**

**9.1 Основные понятия**

Сложным сопротивлением называется такой вид сопротивления, когда имеет место комбинация простейших деформаций: растяжение и сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. При расчетах на сложное сопротивление применяется принцип независимости действия сил, который справедлив в том случае, если деформации малы, упругие и выполняется закон Гука. При этом действие одной из сил не вызывает существенного изменения в расположении других сил. Сначала определяются напряжения и деформации от действия отдельных силовых факторов, а затем находится полное напряжение и деформация как геометрическая или алгебраическая сумма напряжений и деформаций, определенных от каждой силы в отдельности. На практике имеет место различные комбинации простейших видов деформаций и соответственно различные случаи сложного сопротивления: косой изгиб, внецентренное растяжение (сжатие), изгиб с кручением. Комбинация всех простейших деформаций: растяжения (сжатия), кручения, сдвига и изгиба — называется общим случаем сложного сопротивления. Внецентренным растяжением или сжатием называется случай сложного сопротивления, возникающий в том случае, когда линия действия силы не совпадает с геометрической осью бруса, при этом она параллельна геометрической оси бруса (рис. 9.1, а). Можно также дать следующее определение внецентренному растяжению или сжатию: это случай сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная сила и изгибающий момент. Момент обычно представляется в виде двух составляющих, действующих в двух главных плоскостях инерции.

## 9.2 Определение внутренних усилий и нормальных напряжений

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом сечений. Мысленно проводим плоскость на расстоянии  $z$  от начала координат (рисунке 9.1, б), правую часть отбрасываем, а левую оставляем в рассмотрении под действием заданной силы  $F$ , координаты точки приложения которой известны ( $x_F$  и  $y_F$ ) и внутренних усилий  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$ . Индексы при  $M$  показывают, относительно какой оси вращает момент. На рисунке 9.1 а, б оси  $Ox$  и  $Oy$  являются главными центральными осями инерции, а  $Oz$  — геометрическая ось бруса.

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum \bar{z} &= 0; F - N_z = 0; N_z = F; \\ \sum M_x &= 0; F \cdot y_F - M_x = 0; M_x = F \cdot y_F; \\ \sum M_y &= 0; F \cdot x_F - M_y = 0; M_y = F \cdot x_F.\end{aligned}\tag{9.1}$$

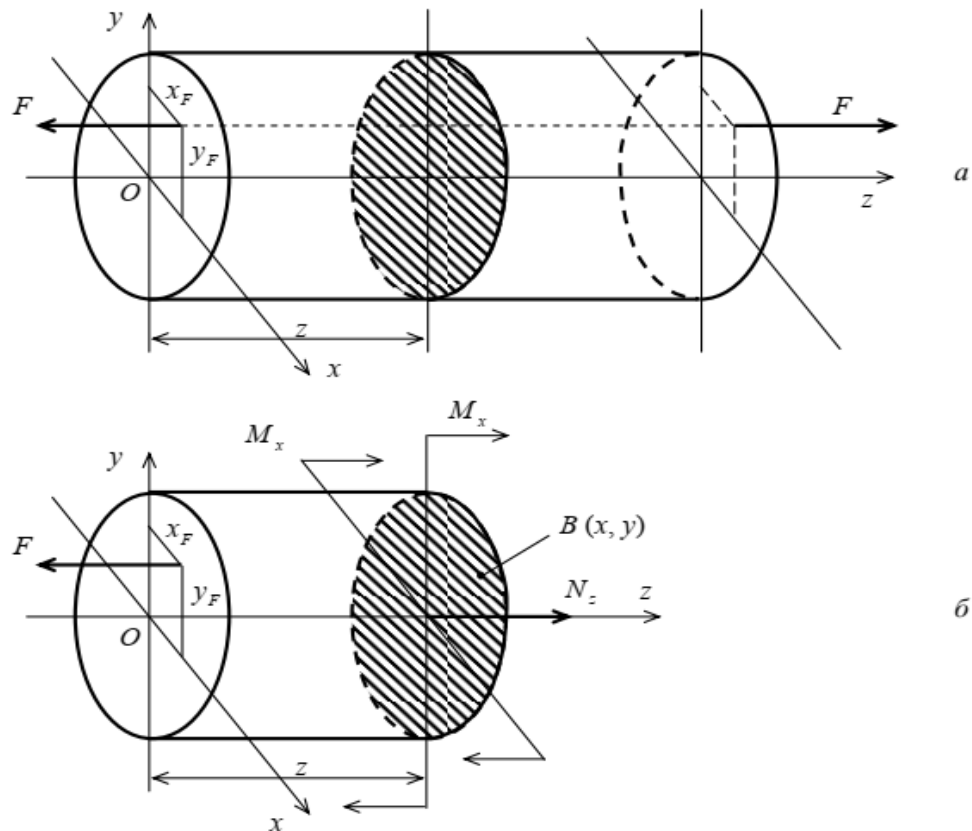


Рисунок 9.1

Остальные три уравнения равновесия не рассматриваются, так как эти уравнения тождественно равны нулю. Рассмотрим напряженное состояние, возникающее в точке  $B$  с координатами  $x$  и  $y$ . По граням выделенного элемента действуют нормальные напряжения от изгибающих моментов  $M_x$  —  $\sigma_{M_x}$ ,  $M_y$  —  $\sigma_{M_y}$  и от продольной силы  $N_z$  —  $\sigma_{N_z}$  (рисунок 9.2).

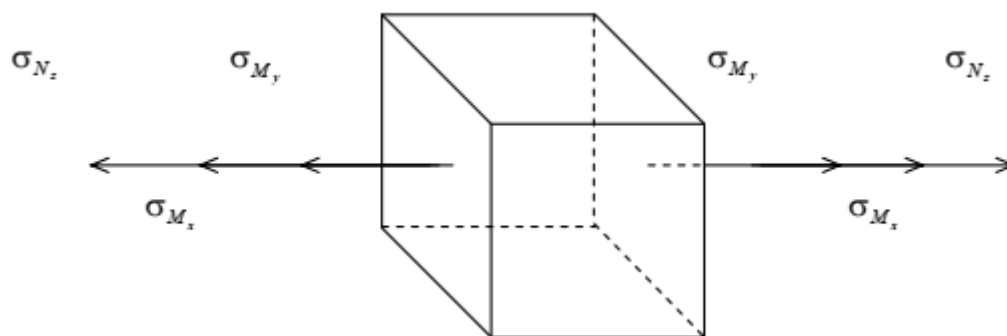


Рисунок 9.2

Воспользуемся принципом независимости действия сил и определим результирующее напряжение как алгебраическую сумму напряжений, полученных от соответствующих внутренних усилий.

$$\sigma = \sigma_{N_z} + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}. \quad (9.2)$$

Составляющие напряжения определим по формулам известным из первой части курса, где рассмотрены простейшие виды деформаций:

$$\sigma_{N_z} = \frac{N_z}{A}, \quad (9.3)$$

$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x \cdot y}{I_x}, \quad (9.4)$$

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y \cdot x}{I_y}, \quad (9.5)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения бруса;

$x, y$  — координаты точки  $B$ ;

$I_x, I_y$  — осевые моменты инерции.

Рассматривая совместно уравнения (9.3 – 9.5) и уравнение (9.2) получим формулу для определений нормальных напряжений в следующем виде

$$\sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} + \frac{M_x \cdot y}{I_x}. \quad (9.6)$$

Знак напряжений определяется по знаку деформаций: для растяжения “+”, для сжатия “–”.

Если в формулу (9.6) подставить значение внутренних усилий из формул (9.1) то получим:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot x_F \cdot x}{I_y} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_x}. \quad (9.7)$$

Вынося за скобку  $\frac{F}{A}$  и имея ввиду, что

$$\frac{I_x}{A} = i_x^2, \quad \frac{I_y}{A} = i_y^2,$$

где  $i$  — радиусы инерции, будем иметь

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right) \quad (9.8)$$

Получен другой вид формулы для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении или сжатии. Формулы (9.7) и (9.8) используются при выполнении расчетов на внецентренное растяжение или сжатие.

### 9.3 Определение положения нейтральной линии

Рассмотрим поперечное сечение, показанное на рисунке 9.3. По определению, на нейтральной линии напряжения и деформации равны нулю, т. е.

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right) = 0. \quad (9.9)$$

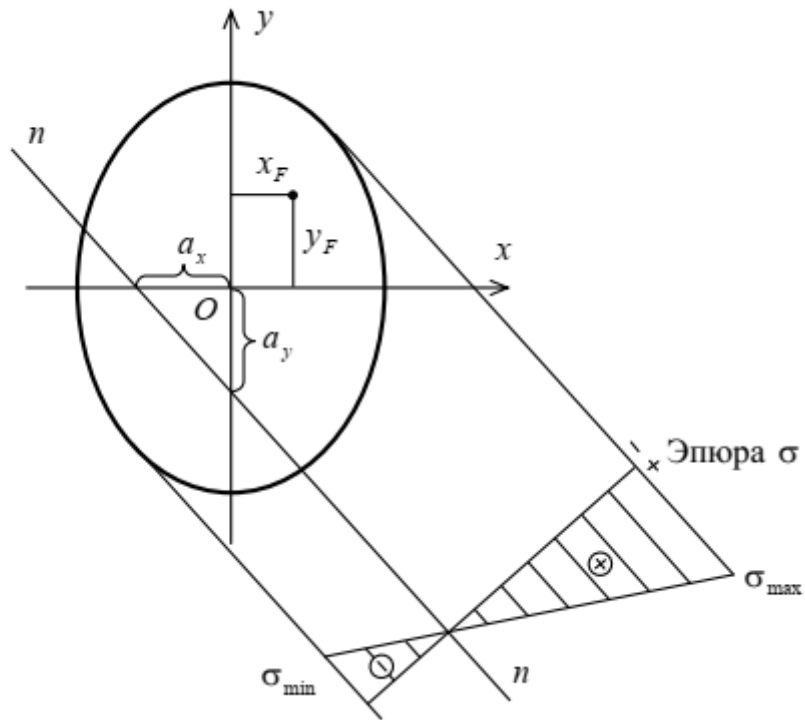


Рисунок 9.3

Так как  $\frac{F}{A} \neq 0$  (если  $F = 0$ , отсутствует случай внецентренного растяжения или сжатия), приравниваем к нулю выражение, стоящее в скобках формулы (9.9), имеем

$$1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} = 0,$$

или

$$\frac{x}{-\frac{i_y^2}{x_F}} + \frac{y}{-\frac{i_x^2}{y_F}} = 1. \quad (9.10)$$

Приняв

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}, a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}, \quad (9.11)$$

Имеем

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1 \quad (9.12)$$

Получено уравнение нейтральной линии в отрезках координат. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией  $n - n$  показаны на рисунке 9.3.

Формула для определения нормальных напряжений (9.7 и 9.8) в координатах  $\sigma$ ,  $x$ ,  $y$  представляет собой уравнение плоскости не проходящей через начало координат, т. е. в общем случае эпюра  $\sigma$  должна иметь пространственный вид. Если провести плоскость перпендикулярно нейтральной линии через центр тяжести поперечного сечения, то в пересечении ее с плоскостью, описываемой формулой для нормальных напряжений, получим прямую линию. Эпюра  $\sigma$  в этом случае будет иметь вид, показанный на рисунке 9.3. Из рассмотрения рисунка 9.3 можно сделать очень важный вывод о том, что экстремальные значения напряжений будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

Возможны три случая расположения нейтральной по отношению к плоскости поперечного сечения:

- 1) нейтральная линия пересекает плоскость поперечного сечения (рис.9.3);
- 2) нейтральная линия находится за пределами поперечного сечения (рис. 9.4, а);
- 3) нейтральная линия касается поперечного сечения (рис. 9.4, б).

Рассмотрение формул для определения отрезков координат (9.11) позволяет сделать ряд выводов. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией от координат  $Ox$  и  $Oy$  противоположны по знаку координатам точки приложения силы. Отрезки  $a_x$  и  $a_y$  обратно пропорциональны координатам точки приложения силы  $F_x$  и  $F_y$ , т. е. с увеличением  $F_x$  и  $F_y$  уменьшаются отрезки  $a_x$  и  $a_y$ , с уменьшением  $F_x$  и  $F_y$  увеличиваются отрезки  $a_x$  и  $a_y$ . Необходимо помнить, что в случае плоского изгиба нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения, а в случае центрального сжатия  $x_F = 0$ ,  $y_F = 0$ , т. е. точка приложения силы находится в центре тяжести поперечного сечения. В общем

случае внецентренного растяжения или сжатия при произвольных координатах точки приложения силы  $x_F$  и  $y_F$  в центре тяжести поперечного сечения ( $x=0, y=0$ ).

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (9.13)$$

Очевидно, что такое же значение напряжения будет при центральном растяжении, сжатии.

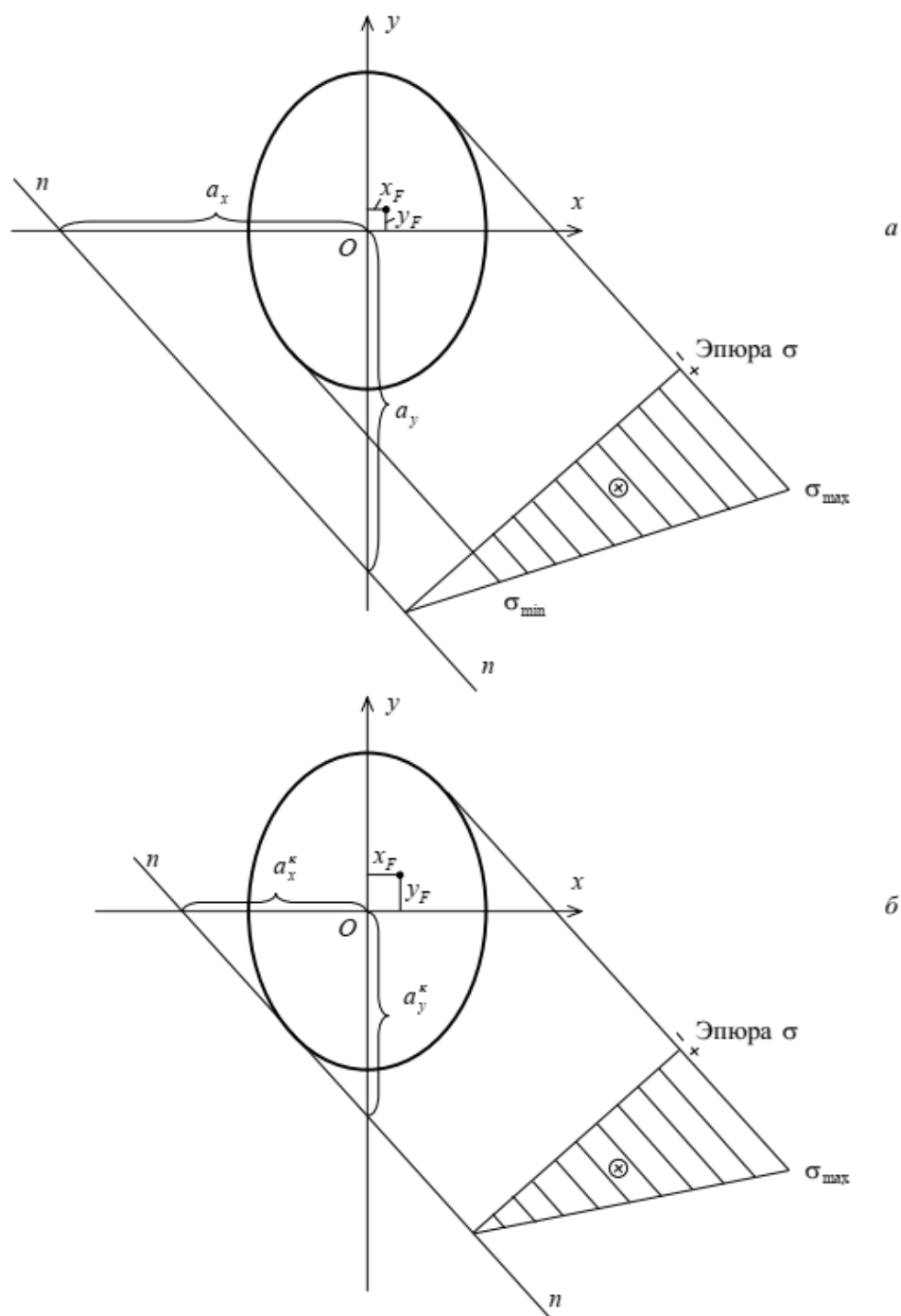


Рисунок 9.4

## 9.4 ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА СЕЧЕНИЯ

Как видно из рис. 9.3 в случае внецентренного растяжения или сжатия знак нормальных напряжений может быть как положительный, так и отрицательный. На практике некоторые из применяемых материалов (хрупкие материалы), например бетон, кирпичная кладка различно сопротивляются действию растягивающих и сжимающих напряжений. Сопротивляемость сжатию существенно превосходит сопротивляемость растяжению. Такие материалы могут работать лишь в элементах конструкций, в которых не возникают растягивающие напряжения.

Поэтому при внецентренном сжатии представляет интерес определение некоторой центральной области в поперечном сечении, при приложении силы в которой во всем поперечном сечении должны возникать напряжения одного знака. Эта область называется ядром сечения. Дадим определение ядра сечения.

*Ядром сечения* называется некоторая область, расположенная вблизи центра тяжести и обладающая тем свойством, что если точка приложения силы находится в пределах ядра сечения, во всем поперечном сечении возникают напряжения одного знака. Напряжения одного знака в поперечном сечении возникают в том случае, когда нейтральная линия касается контура поперечного сечения или располагается за пределами контура поперечного сечения. Введем понятие контура ядра сечения.

*Контуром ядра сечения* называется геометрическое место точек приложения силы, при которых нейтральная линия обкатывается по контуру поперечного сечения.

Введем следующие обозначения:

$a_x^k$  и  $a_y^k$  — отрезки, отсекаемые нейтральной линией от осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно, когда она касается контура поперечного сечения;

$x_F^x$  и  $y_F^y$  — координаты точки приложения силы, при которых нейтральная линия касается контура поперечного сечения.

Если известны  $a_x^\kappa, a_y^\kappa, i_x^2, i_y^2$ , то из формул (9.11), получим

$$x_F^\pi = -\frac{i_y^2}{a_x^\kappa}, y_F^\pi = -\frac{i_x^2}{a_y^\kappa}. \quad (9.16)$$

Получены формулы для определения положения контура ядра сечения.

## 9.5 Примеры решения задач

**Пример 1.** Стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 9.5, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $B$ . Требуется определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через  $F$  и размеры сечения  $a = 4$  см,  $b = 5$  см.

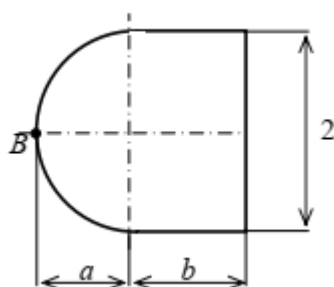


Рисунок 9.5

### Решение:

Для заданного сечения, состоящего из двух фигур (полукруг 1 и прямоугольник 2 (рисунок 9.6)) необходимо определить положение главных центральных осей инерции. Известно, что одной из главных центральных осей инерции является ось симметрии. Для определения 2-й главной центральной оси необходимо найти положение точки центра тяжести плоской фигуры, расположенной на оси симметрии. Предварительно вычислим площади и координаты центров тяжести фигур в произвольных осях  $x, y_C$  (рисунок 9.6).

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi (2a)^2}{8} = \frac{3,14 \cdot (2 \cdot 4)^2}{8} = 25,12 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = a - x_{C_1},$$

где  $x_{C_1}$  определяется по формуле, приведенной в приложении 5

$$x_{C_1} = \frac{2d}{3\pi} = \frac{2 \cdot 2a}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 3,14} = 1,7 \text{ см};$$

$$x_1 = a - x_{C_1} = 4 - 1,7 = 2,3 \text{ см}; \quad y_1 = 0;$$

$$A_2 = b \cdot 2a = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40 \text{ см}^2;$$

$$x_2 = a + \frac{b}{2} = 4 + \frac{5}{2} = 6,5 \text{ см}; \quad y_2 = 0.$$

Центр тяжести всего сечения находится на оси симметрии, следовательно  $y_C = 0$ , а для определения  $x_C$  воспользуемся формулой:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} \quad (9.14)$$

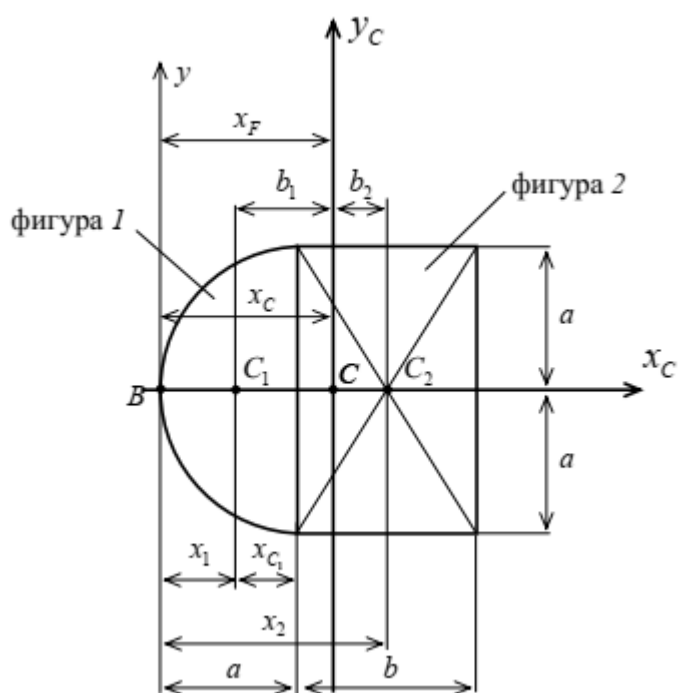


Рисунок 9.6

При вычислении координат центра тяжести воспользуемся таблицей 9.1.

Таблица 9.1

| №<br>фигуры | $A_i$ ,<br>см <sup>2</sup> | $x_i$ ,<br>см | $S_{y_i} = A_i x_i$ ,<br>см <sup>3</sup> | $b_i$ ,<br>см | $S_{y_{\alpha}} = A_i b_i$ ,<br>см <sup>3</sup> |
|-------------|----------------------------|---------------|------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------|
| 1           | 25,12                      | 2,3           | 57,8                                     | -2,58         | -64,8                                           |
| 2           | 40                         | 6,5           | 260                                      | 1,62          | 64,8                                            |
| $\Sigma$    | 65,12                      |               | 317,8                                    |               | 0                                               |

Имеем координаты т.  $C$  — центра тяжести заданного сечения:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{317,8}{65,12} = 4,88 \text{ см}, y_C = 0$$

Проведем центральные оси  $x_c$ ,  $y_c$  и определим координаты центров тяжести фигур, составляющих заданное сечение, в этих осях (см. рис. 9.6):

$$b_1 = -(x_c - x_1) = -(4,88 - 2,3) = -2,58 \text{ см};$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 6,5 - 4,88 = 1,62 \text{ см}.$$

Для проверки правильности определения положения центра тяжести вычислим статический момент  $S_{y_i} = A_i b_i$  относительно центральной оси  $y_c$ , который должен быть равен нулю (см. табл. 9.1).

Определим осевые моменты инерции фигур, составляющих сечение, по формулам, указанным в приложении I, относительно собственных центральных осей:

$$I_{x_1} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi (2a)^4}{128} = \frac{3,14 \cdot (2 \cdot 4)^4}{128} = 100,48 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_1} = 0,11 r^4 = 0,11 a^4 = 0,11 \cdot 4^4 = 72,51 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2a)^3}{12} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 4)^3}{12} = 213,33 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2ab^3}{12} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5^3}{12} = 83,33 \text{ см}^4.$$

Для определения осевых моментов инерции всего сечения относительно центральных осей  $x_c$  и  $y_c$  воспользуемся формулами:

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^2 (I_{x_i} + a_i^2 A_i); \quad I_{y_c} = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} + b_i^2 A_i), \quad (9.15)$$

где  $a_1, a_2 = 0$  (учитывая, что оси  $x$  каждой из фигур совпадают с осью симметрии  $x_c$ ),  $b_1 = -2,58$  см,  $b_2 = 1,62$  см (см. табл. 9.1).

Расчет значений выполним с помощью табл. 9.2.

Таблица 9.2

| №<br>фигуры | $I_{x_i}, \text{см}^4$ | $I_{y_i}, \text{см}^4$ | $b_i^2 A_i, \text{см}^4$ | $I_{y_i} + b_i^2 A_i, \text{см}^4$ |
|-------------|------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 1           | 100,48                 | 72,51                  | 167,08                   | 239,59                             |
| 2           | 213,33                 | 83,33                  | 104,98                   | 188,31                             |
| $\Sigma$    | 313,81                 | 155,84                 | 272,06                   | 427,9                              |

Имеем

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^2 I_{x_i} = 313,81 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} + b_i^2 A_i) = 427,9 \text{ см}^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции по формулам:

$$i_{x_c}^2 = \frac{I_{x_c}}{A}, \quad i_{y_c}^2 = \frac{I_{y_c}}{A},$$

$$\text{где } A = \sum_{i=1}^2 A_i = 65,12 \text{ см}^2.$$

Получим:

$$i_{x_c}^2 = \frac{I_{x_c}}{A} = \frac{313,81}{65,12} = 4,83 \text{ см}^2,$$

$$i_{y_c}^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{427,9}{65,12} = 6,58 \text{ см}^2.$$

Для построения нейтральной линии воспользуемся формулами (9.11)

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F},$$

где  $x_F = -x_c = -4,88 \text{ см}$ ,  $y_F = 0$  — координаты точки приложения силы  $F$  (см. рис. 6).

Имеем:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{6,58}{-4,88} = 1,35 \text{ см},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{2,20}{0} = \infty,$$

следовательно, нейтральная линия параллельна оси  $y_c$ .

На положительной полуоси  $x_c$  от центра тяжести  $C$  откладываем отрезок  $a_x = 1,35 \text{ см}$  и строим нейтральную линию  $HO$  (рис. 9.7, а).

Наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии: в точке  $B$  — наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{\min}$ , в точке  $D$  —

наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{\max}$ . Координаты точки  $B$  (точки приложения силы  $F$ ) уже определены:

$$x_B = x_F = -4,88 \text{ см}, y_B = y_F = 0.$$

Вычислим координаты точки  $D$  (рис. 9.7 а):

$$x_D = a + b - x_B = 4 + 5 - 4,88 = 4,12 \text{ см}, y_D = 0.$$

Определим  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  по формуле (9.8):

$$\sigma_{\max} = \sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_D}{i_{y_c}^2} \right) = -\frac{F}{65,12 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{(-4,88) \cdot 4,12}{6,58} \right) = 315,44F,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_B}{i_{y_c}^2} \right) = -\frac{F}{65,12 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{(-4,88) \cdot (-4,88)}{6,58} \right) = -709,08F.$$

Получены значения наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего напряжений, выраженные через  $F$ . Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 9.7, б.

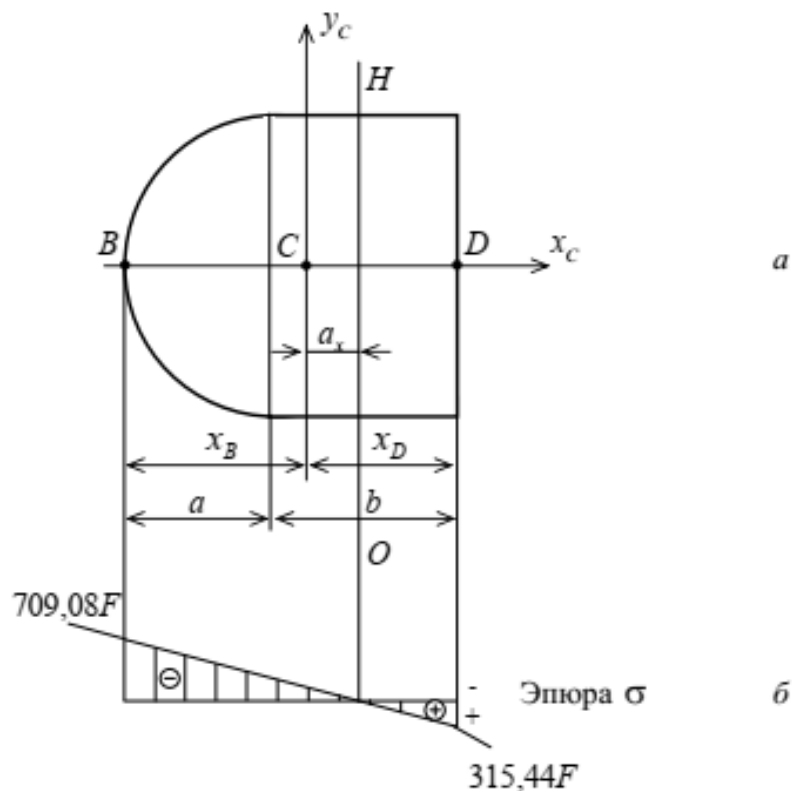


Рисунок 9.7

**Пример 2.** Построить ядро сечения для круга с диаметром  $d$  (рис. 9.8).

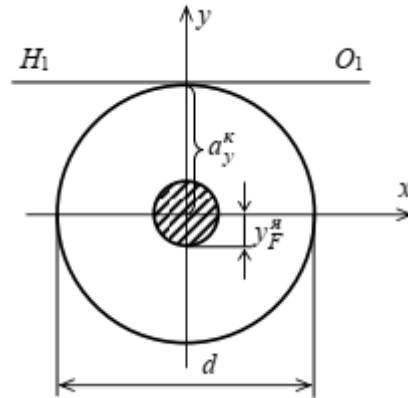


Рисунок 9.8

**Решение:**

Рассмотрим положение нейтральной линии  $H_1O_1$ , когда она касается контура круга. Имеем

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d^2}{16};$$

$$a_y^к = \frac{d}{2}; a_x^к = \infty;$$

$$y_F^я = -\frac{i_x^2}{a_y^к} = -\frac{\frac{d^2}{16}}{\frac{d}{2}} = -\frac{d}{8}; x_F^я = -\frac{i_y^2}{a_x^к} = -\frac{\frac{d^2}{16}}{\infty} = 0.$$

Такое же значение будет получено для круга для любых других случаев, когда нейтральная линия касается окружности. Следовательно, ядро сечения можно представить в виде круга с диаметром  $d/4$  (см. рис. 9.8).

**Пример 3.** Построить ядро сечения для прямоугольника со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 9.9).

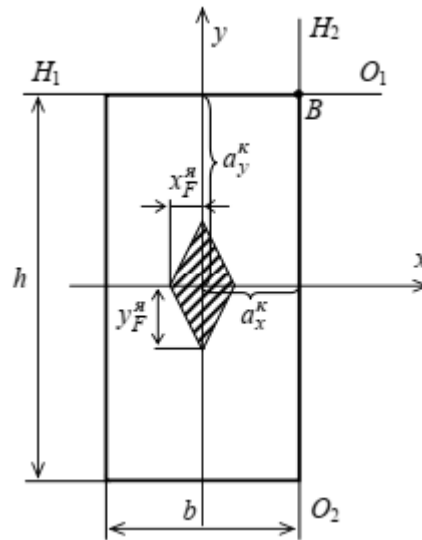


Рисунок 9.9

Решение:

Для построения ядра сечения рассмотрим положение нейтральной линии  $H_1O_1$ , когда она касается контура прямоугольника. Определим координату точки приложения силы

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12}; a_y^k = \frac{h}{2};$$

$$y_F^y = -\frac{i_x^2}{a_y^k} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}.$$

Затем рассмотрим положение нейтральной линии  $H_2O_2$ .

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b^3h}{12}}{bh} = \frac{b^2}{12}; a_x^k = \frac{b}{2};$$

$$x_F^x = -\frac{i_y^2}{a_x^k} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{b}{2}} = -\frac{b}{6}.$$

При переходе нейтральной линии из положения  $H_1O_1$  в положение  $H_2O_2$  нейтральная линия проходит через одну и ту же точку  $B$  с

координатами  $x_B$  и  $y_B$ . Подставим эти значения в уравнение нейтральной линии (9.12), получим

$$\frac{x_B}{\frac{i_y^2}{x_F}} + \frac{y_B}{\frac{i_x^2}{y_F}} = 1.$$

Представим это уравнение в следующем виде

$$\frac{x_F}{\frac{i_y^2}{x_B}} + \frac{y_F}{\frac{i_x^2}{y_B}} = 1.$$

Следовательно, при перемещении  $H_1O_1$  в положение  $H_2O_2$  точка приложения силы перемещается по прямой. Используя условие симметрии построим ядро сечения (см. рис. 9.9).

### **ПРИМЕР РАСЧЕТ БРУСА ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ**

Для бруса со сложным поперечным сечением с известными размерами ( $a = 28$  см) (рис. 9.10), изготовленного из бетона ( $R = 3,3$  МПа, коэффициент условия работы  $\gamma = 0,85$ ) необходимо:

1. Определить положение центра тяжести, положение главных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции, главные радиусы инерции.
2. Построить ядро сечения.
3. Определить допускаемую силу  $[F]$  из условия прочности по первому предельному состоянию.
4. Исследовать изменение напряжений в поперечном сечении при перемещении силы  $F$  вдоль одной из главных осей для 5-и случаев:
  - 1) сила приложена в точке пресечения положительной полуоси с контуром поперечного сечения;
  - 2) сила приложена в точке пересечения положительной полуоси с контуром ядра сечения;

- 3) сила приложена в центре тяжести;
- 4) сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром ядра сечения;
- 5) сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром поперечного сечения.

Построить эпюры напряжений для каждого случая нагружения.

5. Для указанных точек в поперечном сечении приложения силы построить положения нейтральной оси.

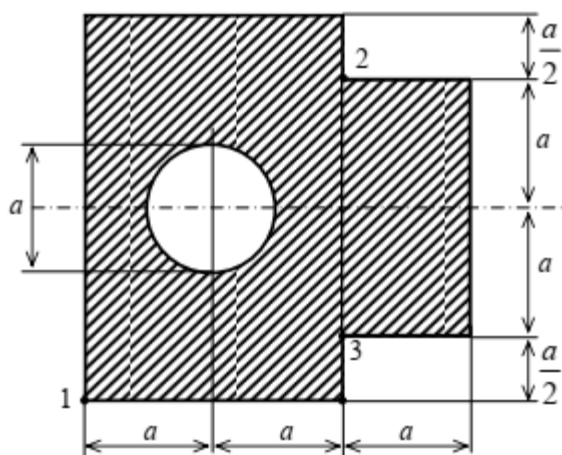


Рисунок 9.10

### Решение:

1. *Определение положения центра тяжести, главных центральных моментов инерции, главных радиусов инерции*

Пронумеруем фигуры, составляющие заданное поперечное сечение (рис. 9.11): прямоугольник с размерами  $3a \times 2a$  — I, прямоугольник с размерами  $2a \times a$  — II, круг диаметром  $a$  — III.

Определим площади всех фигур:

$$A_1 = 2a \cdot 3a = 6a^2 = 6 \cdot 28^2 = 4704 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 2a \cdot a = 2a^2 = 2 \cdot 28^2 = 1568 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 28^2}{4} = 615,4 \text{ см}^2;$$

При вычислении координат центра тяжести удобно пользоваться табл.

Таблица 9.3

| №№ п/п   | $A_i, \text{см}^2$ | $x_i, \text{см}$ | $S_{y_i} = A_i \cdot x_i, \text{см}^3$ |
|----------|--------------------|------------------|----------------------------------------|
| 1        | 4704               | 28               | 131712                                 |
| 2        | 1568               | 70               | 109760                                 |
| 3        | 615,4              | 28               | 17232,2                                |
| $\Sigma$ | 5657               |                  | 224240                                 |

Координаты центра тяжести всей фигуры вычислим относительно произвольных координатных осей  $x$  и  $y$ . Будем считать, что ось  $Oy$  совпадает с левой гранью прямоугольника I, а ось  $Ox$  с осью симметрии сечения (рис. 9.11).

Тогда

$$x_1 = x_3 = a = 28 \text{ см}, x_2 = 2,5a = 2,5 \cdot 28 = 70 \text{ см},$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0.$$

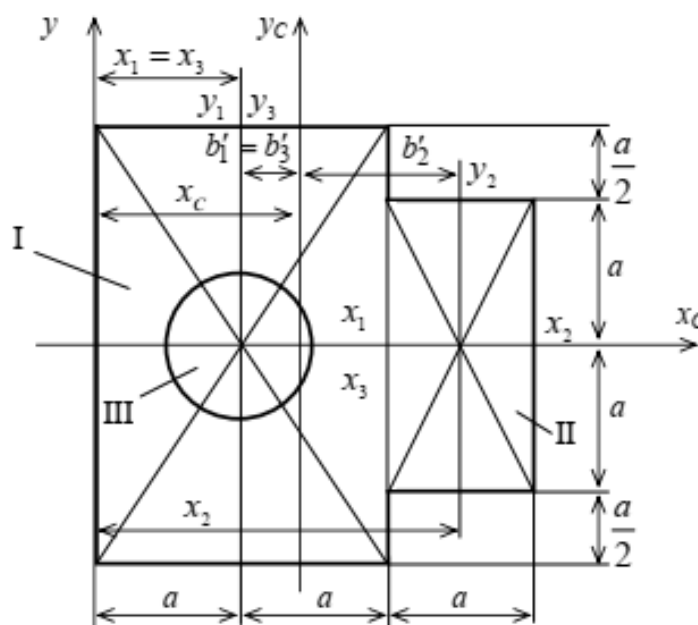


Рисунок 9.11

Полученные значения координат  $x_i$  отдельных фигур и вычисленные значения статических моментов  $S_{y_i}$  вписываем в табл. 9.3.

Вычисляем координаты центра тяжести всей фигуры по формулам:

$$x_c = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i} = \frac{224240}{5657} = 39,6 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i} = 0.$$

Проведем центральные оси для всей фигуры  $x_c$  и  $y_c$  (см. рис. 9.11).  
Определим расстояние между центральными осями всей фигуры и центральными осями каждой из фигур:

$$b'_1 = b'_3 = x_1 - x_c = 28 - 39,6 = -11,6 \text{ см}; b'_2 = x_2 - x_c = 70 - 39,6 = 30,4 \text{ см};$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Определим осевые моменты инерции каждой фигуры:

$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{2a \cdot (3a)^3}{12} = \frac{54a^4}{12} = 4,5a^4 = 4,5 \cdot 28^4 = 2,77 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{8a^4}{12} = \frac{2}{3}a^4 = \frac{2}{3}28^4 = 4,098 \cdot 10^5 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi a^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 28^4}{64} = 3,02 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 2a^4 = 2 \cdot 28^4 = 1,23 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{1}{6}a^4 = \frac{1}{6} \cdot 28^4 = 1,024 \cdot 10^5 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_3} = I_{x_3} = 3,02 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

Для вычисления центральных осевых моментов инерции всего заданного сечения  $I_{xc}$  и  $I_{yc}$  составим табл. 9.4. Как заполняются графы этой таблицы, видно из их наименования.

Таблица 9.4

| №<br>п/п | $I_{x_i},$<br>см <sup>4</sup> | $I_{y_i},$<br>см <sup>4</sup> | $A_i,$<br>см <sup>2</sup> | $a_i,$<br>см | $b'_i,$<br>см | $a_i^2 \cdot A_i,$<br>см <sup>4</sup> | $(b'_i)^2 \cdot A_i,$<br>см <sup>4</sup> | $I_{x_i} + a_i^2 A_i,$<br>см <sup>4</sup> | $I_{y_i} + (b'_i)^2 A_i,$<br>см <sup>4</sup> |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------|--------------|---------------|---------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1        |                               |                               | 4704                      | 0            | -11,6         | 0                                     | $6,33 \cdot 10^5$                        |                                           | $1,863 \cdot 10^6$                           |
| 2        | $4,098 \cdot 10^5$            | $1,024 \cdot 10^5$            | 1568                      | 0            | 30,4          | 0                                     | $1,45 \cdot 10^6$                        | $4,098 \cdot 10^5$                        | $1,551 \cdot 10^6$                           |
| 3        |                               |                               | 615,4                     | 0            | -11,6         | 0                                     | $8,28 \cdot 10^4$                        |                                           | $1,13 \cdot 10^5$                            |
| Σ        | $3,15 \cdot 10^6$             | $1,302 \cdot 10^6$            | 5657                      |              |               | 0                                     | $2,0 \cdot 10^6$                         | $3,15 \cdot 10^6$                         | $3,30 \cdot 10^6$                            |

Из таблицы получим

$$I_{xc} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i} + a_i^2 A_i) = 3,15 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i} + (b'_i)^2 A_i) = 3,30 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

При заполнении последних строк табл. 9.3 и табл. 9.4 необходимо учитывать, что 3-я фигура представляет собой круглый вырез, и, следовательно, при суммировании значения геометрических характеристик этой фигуры вычитаются.

Определим главные радиусы инерции

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{A}} = \sqrt{\frac{3,15 \cdot 10^6}{5657}} = \sqrt{557} = 23,6 \text{ см}; i_{x_c}^2 = 557 \text{ см}^2;$$

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{3,30 \cdot 10^6}{5657}} = \sqrt{582} = 24,1 \text{ см}; i_{y_c}^2 = 582 \text{ см}^2.$$

2. Построение ядра сечения (рис. 9.12).

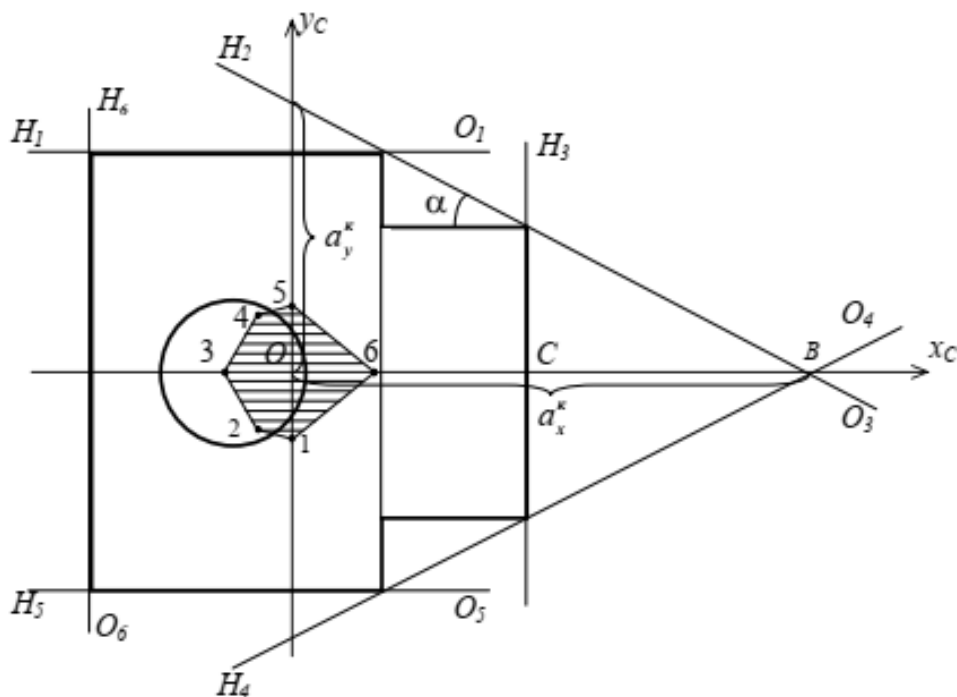


Рисунок 9.12

Рассмотрим шесть положений нейтральной линии и воспользуемся формулами (16).

2.1 Положение нейтральной линии  $H_1O_1$

$$a_y^* = 1,5a = 1,5 \cdot 28 = 42 \text{ см};$$

$$a_x^* = \infty; x_{F(1)}^* = 0; y_{F(1)}^* = -\frac{557}{42} = -13,3 \text{ см}.$$

Определено положение т. 1.

2.2 Положение нейтральной линии  $H_2O_2$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{a} = 0,5; OB = OC + BC = a_x^k;$$

$$OC = 3a - x_c = 3 \cdot 28 - 39,6 = 44,4 \text{ см};$$

$$\frac{a}{BC} = \operatorname{tg} \alpha; BC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{28}{0,5} = 56 \text{ см};$$

$$a_x^k = 100,4 \text{ см}; a_y^k = \frac{a_x^k}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{100,4}{2} = 50,2 \text{ см}; \frac{a_y^k}{a_x^k} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$y_{F(2)}^* = -\frac{557}{50,2} = -11,1 \text{ см}; x_{F(2)}^* = -\frac{582}{100,4} = -5,80 \text{ см}.$$

Определено положение т. 2.

2.3 Положение нейтральной линии  $H_3O_3$

$$a_y^k = \infty; a_x^k = OC = 44,4;$$

$$x_{F(3)}^* = -\frac{582}{44,4} = -13,1 \text{ см}; y_{F(3)}^* = 0.$$

Определено положение т. 3.

2.4 Положение нейтральной линии  $H_6O_6$

$$a_y^k = \infty; y_{F(6)}^* = 0; a_x^k = -39,6 \text{ см}; x_{F(6)}^* = -\frac{582}{(-39,6)} = 14,7 \text{ см}.$$

Определено положение т. 6. Вследствие симметрии точки 4 и 5 строятся симметрично точкам 2 и 1.

### 3. Определение допустимой силы $[F]$

Из условия прочности при внецентренном растяжении или сжатии

$$\sigma_{\text{расч}} = |\sigma_{\text{max}}| = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_{xc}^2} + \frac{x_F x}{i_{yc}^2} \right) \leq \gamma R. \quad (9.17)$$

имеем

$$[F] \leq \frac{\gamma R A}{\left(1 + \frac{y_F y}{i_{xc}^2} + \frac{x_F x}{i_{yc}^2}\right)}. \quad (9.18)$$

Определение допустимого значения силы будем выполнять из условия: напряжения во всем поперечном сечении должны быть одного знака. В этом случае точка приложения силы должна быть в пределах ядра сечения. Рассмотрим последовательно положения точки приложения силы на контуре ядра сечения. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть точки 1, 2, 3 и 6 (см. рис. 12).

1-я точка:

$$y_F = -y_{F(1)}^* = -13,3 \text{ см};$$

Наиболее удаленная точка от нейтральной линии в этом случае будет точка с координатами

$$x = 0 \text{ см}, y = -42 \text{ см}.$$

Тогда по формуле (9.18)

$$[F] = \frac{0,85 \cdot 3,3 \cdot 10^6 \cdot 5657 \cdot 10^{-4}}{\left(1 + \frac{-13,3 \cdot (-42)}{557}\right)} = 792 \cdot 10^3 \text{ Н} = 792 \text{ кН}.$$

2-я точка:

$$y_F = -y_F^* = -11,1 \text{ см}; x_F = -x_F^* = -5,8 \text{ см};$$

Наиболее удаленная точка от нейтральной линии в этом случае будет точка с координатами

$$x = -39,6 \text{ см}, y = -42 \text{ см}.$$

$$[F] = \frac{0,85 \cdot 3,3 \cdot 10^6 \cdot 5657 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(-11,1) \cdot (-42)}{557} + \frac{(-5,8) \cdot (-39,6)}{582}} = 711 \cdot 10^3 \text{ Н} = 711 \text{ кН}.$$

3-я точка:

$$y_F = 0; x_F = x_F^* = -13,1 \text{ см}.$$

Наиболее удаленная точка от нейтральной линии в этом случае будет точка с координатами

$$x = -39,6 \text{ см}, y = 0.$$

$$[F] = \frac{0,85 \cdot 3,3 \cdot 10^6 \cdot 5657 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{-13,3 \cdot (-39,6)}{582}} = 839 \cdot 10^3 \text{ Н} = 839 \text{ кН}.$$

6-я точка:

$$x_F = x_F^* = 14,7 \text{ см}; y = 0.$$

Наиболее удаленная точка в этом случае будет точка с координатами

$$y = 0; x = 3a - x_C = 3 \cdot 28 - 39,6 = 44,4 \text{ см}.$$

$$[F] = \frac{0,85 \cdot 3,3 \cdot 10^6 \cdot 5657 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{14,7 \cdot 44,4}{582}} = 748 \cdot 10^3 \text{ Н} = 748 \text{ кН}.$$

Для выполнения условия прочности необходимо выбрать наименьшее значение  $[F] = 711 \text{ кН}$ .

4. Исследование изменения напряжений в поперечном сечении при перемещении силы  $F$  вдоль одной из главных осей для 5-и случаев (рис. 9.13).

4.1. Сила приложена в точке пересечения положительной полуоси с контуром поперечного сечения

$$x_F = 0; y_F = 42 \text{ см}.$$

Для построения эпюры  $\sigma$  необходимо вычислить значения напряжения для 2-х точек: для крайних верхней точки  $B$  ( $x = 0; y = 42 \text{ см}$ ) и для нижней  $H$  ( $x = 0; y = -42 \text{ см}$ ) (рис. 9.13).

$$\sigma_{(B)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{42 \cdot 42}{557} \right) = -5,25 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -5,25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(H)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{42 \cdot (-42)}{557} \right) = 2,73 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 2,73 \text{ МПа}.$$

4.2. Сила приложена в точке пересечения положительной полуоси с контуром ядра сечения. В этом случае  $x_F = 0; y_F = 13,3 \text{ см}$ .

$$\sigma_{(B)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{13,3 \cdot 42}{557} \right) = -2,52 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -2,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(H)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{13,3 \cdot (-42)}{557} \right) = 0.$$

4.3. Сила приложена в центре тяжести  $x_F = 0; y_F = 0 \text{ см}$ .

В этом случае будет иметь место центральное сжатие

$$\sigma = \sigma_{(B)} = \sigma_{(H)} = \frac{F}{A} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} = -1,26 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2} = -1,26 \text{ МПа.}$$

4.4. Сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром ядра сечения. В этом случае

$$x_F = 0; y_F = -13,3 \text{ см}$$

$$\sigma_{(B)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{-13,3 \cdot 42}{557} \right) = 0;$$

$$\sigma_{(H)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{-13,3 \cdot (-42)}{557} \right) = -2,52 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2} = -2,52 \text{ МПа.}$$

4.5. Сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром поперечного сечения. В этом случае

$$x_F = 0; y_F = -42 \text{ см}$$

$$\sigma_{(B)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{-42 \cdot 42}{557} \right) = 2,73 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2} = 2,73 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(H)} = -\frac{711 \cdot 10^3}{5657 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{-42 \cdot (-42)}{557} \right) = -5,25 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2} = -5,25 \text{ МПа.}$$

Эпюры нормальных напряжений, построенные по результатам расчетов, показаны на рис. 9.13.

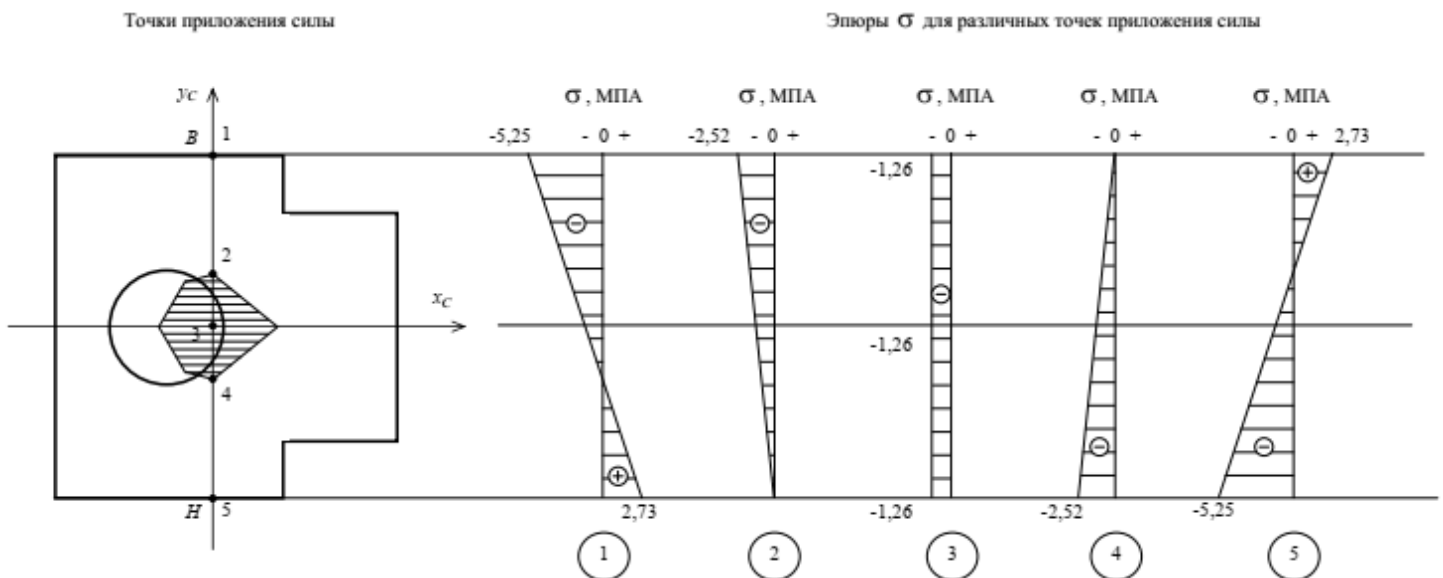


Рисунок 9.13

5. Определение положения нейтральной линии для точек приложения силы, указанных в поперечном сечении (рис. 9.14).

Воспользуемся формулами (9.11).

Точка 1:

$$x_F = -39,6 \text{ см}; y_F = -42 \text{ см}$$

Определим отрезки, отсекаемые нейтральной линией

$$a_{x_1} = -\frac{i_y^2}{x_{F_1}} = -\frac{582}{-39,6} = 14,7 \text{ см};$$

$$a_{y_1} = -\frac{i_x^2}{y_{F_1}} = -\frac{557}{-42} = 13,3 \text{ см}.$$

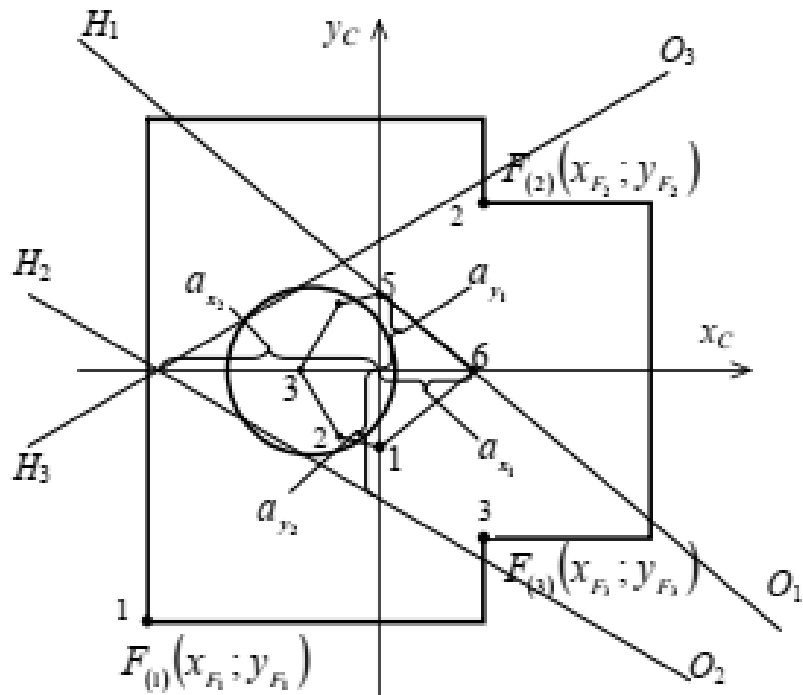


Рисунок 9.14

Очевидно, в данном случае отрезки, отсекаемые нейтральной линией должны совпадать с координатами точек контура ядра сечения (см. рис. 9.14):

$$a_{x1} = x_F^*(6) = 14,7 \text{ см}$$

$$a_{y1} = y_F^*(5) = 13,3 \text{ см}$$

Точка 2:

$$x_{F_2} = 2a - x_C = 2 \cdot 28 - 39,6 = 16,4 \text{ см}; y_{F_2} = a = 28 \text{ см}.$$

$$a_{x_2} = -\frac{i_y^2}{x_{F_2}} = -\frac{582}{16,4} = -35,5 \text{ см};$$

$$a_{y_2} = -\frac{i_x^2}{y_{F_2}} = -\frac{557}{28} = -19,9 \text{ см}.$$

Точка 3:

$$x_{F_3} = 16,4 \text{ см}; y_{F_3} = -28 \text{ см.}$$

$$a_{x_3} = -\frac{i_y^2}{x_{F_3}} = -\frac{582}{16,4} = -35,5 \text{ см};$$

$$a_{y_3} = -\frac{i_x^2}{y_{F_3}} = -\frac{557}{-28} = 19,9 \text{ см.}$$

Нейтральные линии  $H_2O_2$  и  $H_3O_3$  для точек приложения 2-й и 3-й сил показаны на рис. 9.14.

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА КОСОЙ ИЗГИБ

Для расчетной схемы (рис. 9.15) построить эпюры  $M_x$  и  $M_y$ . Определить размеры поперечного сечения, если:  $h = 5b$ ,  $M = 20 \text{ кНм}$ ,  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

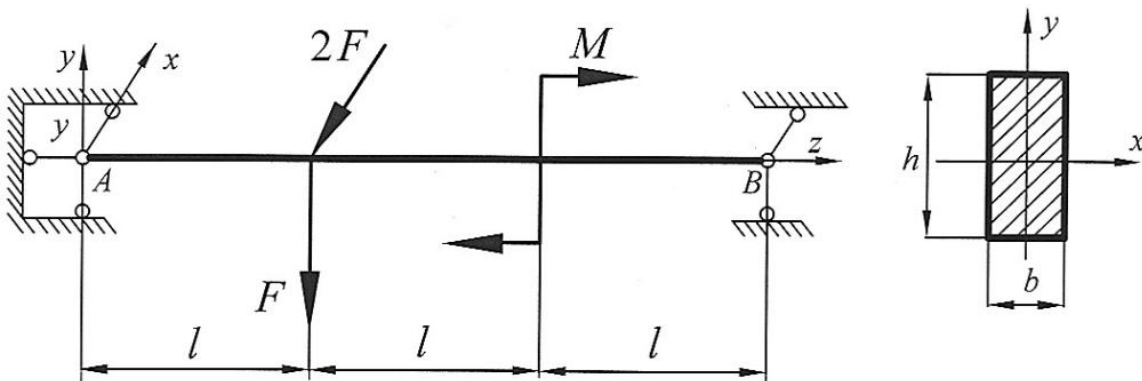


Рисунок 9.15

**Решение:**

Изобразим расчетную схему балки в вертикальной плоскости, определим реакции опор  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  и построим эпюры изгибающего момента  $M_x$ . (рис.11 б, в).

$$\sum M_A = 0: -F \cdot l - M + R_{By} \cdot 3l = 0,$$

$$-10 \cdot 1 - 20 + R_{By} \cdot 3 = 0,$$

$$R_{By} = (10 + 20)/3 = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0: -R_{Ay} \cdot 3l - M + F \cdot 2l = 0,$$

$$-R_{Ay} \cdot 3 - 20 + 10 \cdot 2 = 0,$$

$$R_{Ay} = (20 - 20)/3 = 0.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0: \quad R_{Ay} + R_{By} - F = 0,$$

$$10 - 10 = 0.$$

Строим эпюры  $M_x$ :

**Первый участок:**  $0 \leq Z_1 \leq 1 \text{ м};$

$$M_{x1} = R_{By} \cdot Z_1;$$

$$\text{при } Z_1 = 0 : \quad M_{x1} = 0,$$

$$\text{при } Z_1 = 1 \text{ м} \quad M_{x1} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кНм}.$$

**Второй участок:**  $0 \leq Z_2 \leq 1 \text{ м};$

$$M_{x2} = F \cdot Z_2,$$

$$\text{при } Z_2 = 0 \text{ м: } M_{x2} = 0,$$

$$\text{при } Z_2 = 1 \text{ м: } M_{x2} = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}.$$

Изобразим расчетную схему балки в горизонтальной плоскости. Вычислим реакции опор  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$ , построим эпюры  $M_y$  (рис. 9.16 з, д).

Определяем реакции опор  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$ :

$$\sum M_A = 0: \quad -2F \cdot l + R_{Bx} \cdot 3l = 0$$

$$-20 \cdot 1 + R_{By} \cdot 3 = 0,$$

$$R_{Bx} = 20/3 = 6,667 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad R_{Ax} \cdot 3 - 2F \cdot 2 = 0,$$

$$R_{Ax} \cdot 3 - 20 \cdot 2 = 0,$$

$$R_{Ax} = 13,333 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum X = 0: R_{Ax} + R_{Bx} - 2F = 0,$$

$$13,333 + 6,667 - 20 = 0.$$

Строим эпюры  $M_y$ :

**Первый участок:**  $0 \leq Z_1 \leq 2 \text{ м,}$

$$M_{y1} = R_{Bx} \cdot Z_1 = 6,667 \cdot Z_1,$$

при  $Z_1 = 0:$   $M_{y1} = 0,$

при  $Z_1 = 2 \text{ м:}$   $M_{y1} = 13,33 \text{ кНм,}$

при  $Z_1 = 1 \text{ м (в сечении С):}$   $M_{y1} = 6,667 \text{ кНм.}$

**Второй участок:**  $0 \leq Z_2 \leq 1 \text{ м,}$

$$M_{y2} = R_{Ax} \cdot Z_2 = 13,333 \cdot Z_2,$$

при  $Z_2 = 0:$   $M_{y2} = 0,$

при  $Z_2 = 1 \text{ м:}$   $M_{y2} = 13,33 \text{ кНм.}$

Из эпюр изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  видно, что опасным является сечение С. Поэтому, для определения максимальных напряжений  $\sigma_{\max}$ , вычислим напряжение в сечении С.

Сечение С:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right) = \left( \frac{10}{W_x} + \frac{6,66}{W_y} \right), \text{ (кПа)}$$

так как  $h = 5b$ , то

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(5b)^2}{6} = \frac{25b^3}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{5b^3}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{10 \cdot 6}{25b^3} + \frac{6,66 \cdot 6}{5b^3} \right) = \frac{10 \cdot 6 + 6,66 \cdot 6 \cdot 5}{25b^3} = \frac{259,8}{25b^3} = \frac{10,4}{b^3}.$$

Записываем условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{10,4}{b^3} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности находим  $b$ :

$$b \geq \sqrt[3]{10,4 / 100 \cdot 10^3} \geq 0,047 \text{ м} \geq 4,7 \text{ см.}$$

$$h = 5b$$

$$h \geq 5 \cdot 4,7 \geq 23,5 \text{ см}$$

Ответ:  $b \geq 4,7 \text{ см}$ ,  $h \geq 23,5 \text{ см}$ .

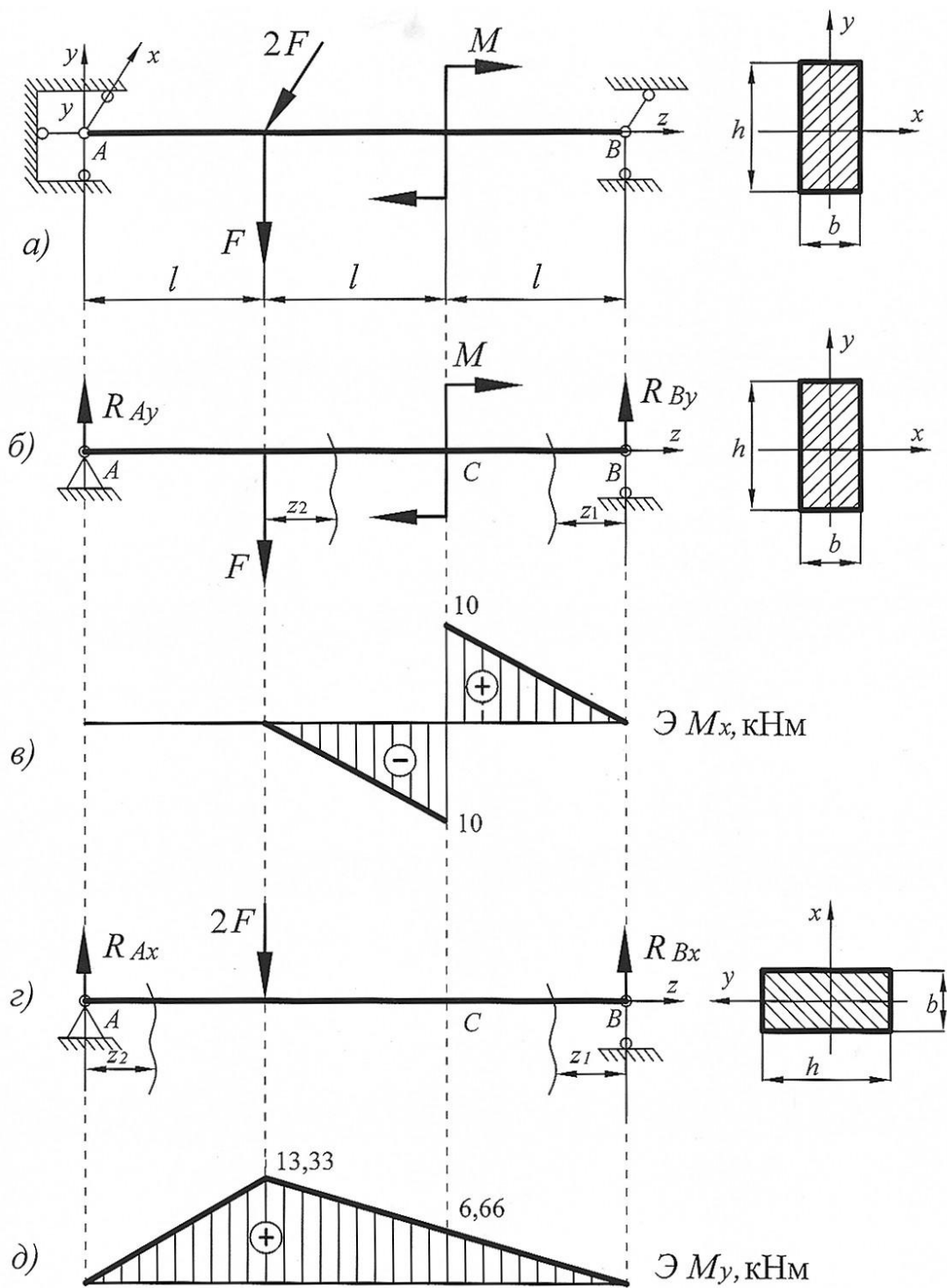


Рисунок 9.16

## 9.6 Контрольные задания

### Расчет бруса при внецентренном действии сосредоточенной сжимающей силы

Для бруса со сложным поперечным сечением (рис. 9.15) с известными размерами необходимо:

1. Определить положение центра тяжести, положение главных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции, главные радиусы инерции.

2. Построить ядро сечения.

3. Определить допускаемую силу  $[F]$  из условия прочности по первому предельному состоянию.

4. Исследовать изменение напряжений в поперечном сечении при перемещении силы  $F$  вдоль одной из главных осей для 5-и случаев:

1) сила приложена в точке пресечения положительной полуоси с контуром поперечного сечения;

2) сила приложена в точке пересечения положительной полуоси с контуром ядра сечения;

3) сила приложена в центре тяжести;

4) сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром ядра сечения;

5) сила приложена в точке пересечения отрицательной полуоси с контуром поперечного сечения. Построить эпюры напряжений для каждого случая нагружения.

5. Для указанных точек в поперечном сечении приложения силы построить положения нейтральной оси. Исходные данные приведены в таблице 9.5.

Таблица 9.5

| № варианта | $b$ , м | Бетон    |           | Кирпичная кладка |           |
|------------|---------|----------|-----------|------------------|-----------|
|            |         | $\gamma$ | $R$ , МПа | $\gamma$         | $R$ , МПа |
| 1          | 0,20    | 0,85     | 0,95      | 0,65             | 2,0       |
| 2          | 0,24    | 0,80     | 2,1       | 0,65             | 1,6       |
| 3          | 0,22    | 0,80     | 2,2       | 0,75             | 1,8       |
| 4          | 0,30    | 0,90     | 2,8       | 0,75             | 1,5       |
| 5          | 0,32    | 0,75     | 3,1       | 0,80             | 1,7       |
| 6          | 0,36    | 0,70     | 1,8       | 0,80             | 1,4       |
| 7          | 0,38    | 0,80     | 1,6       | 0,90             | 1,3       |
| 8          | 0,40    | 0,85     | 2,8       | 0,90             | 1,1       |
| 9          | 0,42    | 0,80     | 4,5       | 1,00             | 1,2       |
| 10         | 0,44    | 0,75     | 4,6       | 1,00             | 1,0       |

Схема 1

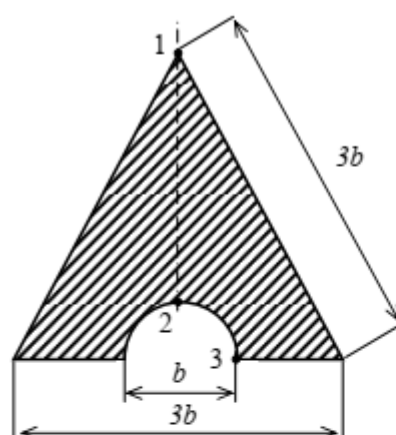


Схема 2

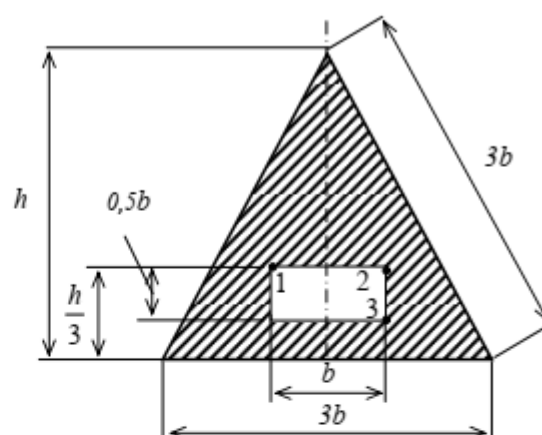


Схема 3

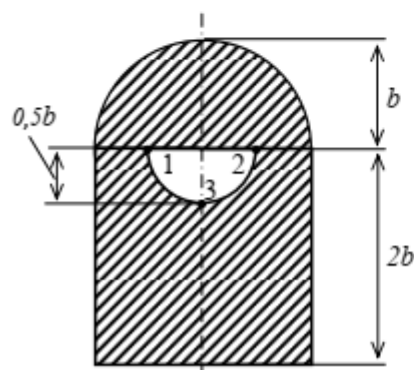


Схема 4

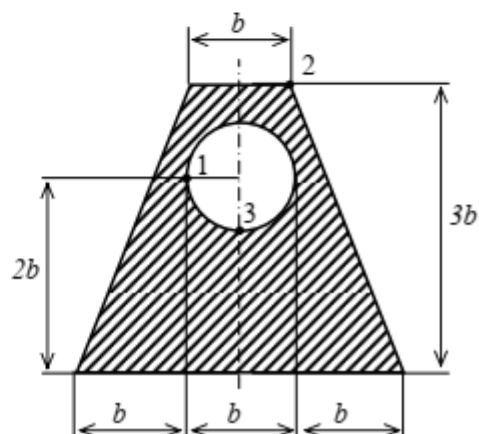


Схема 5

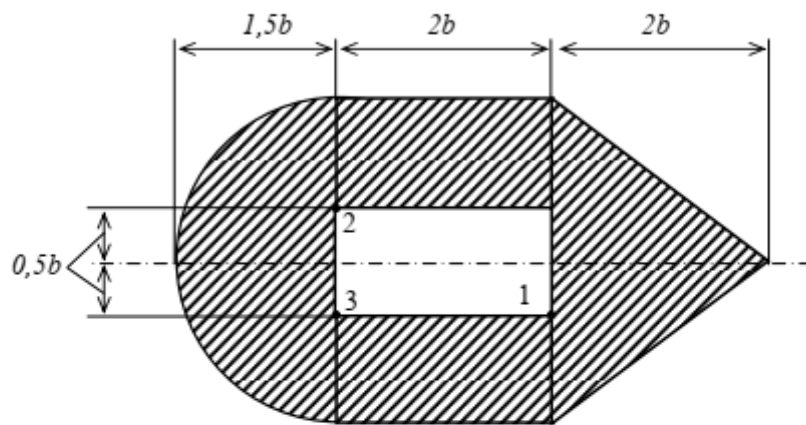


Схема 6

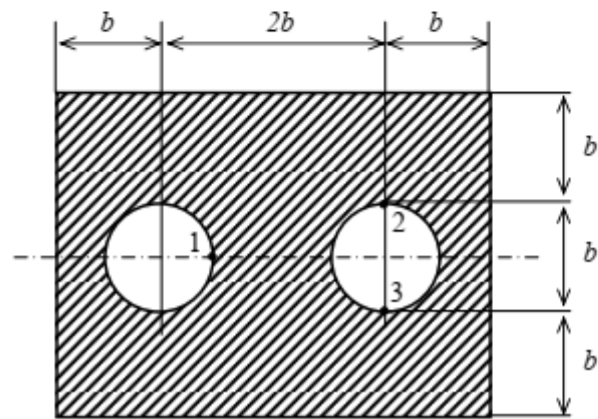


Схема 7

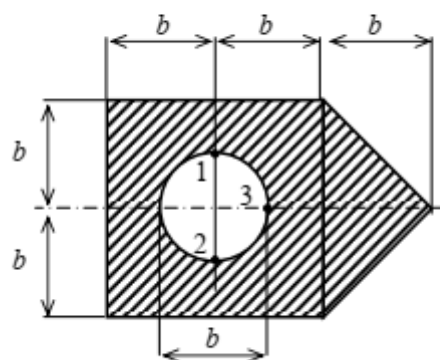


Схема 8

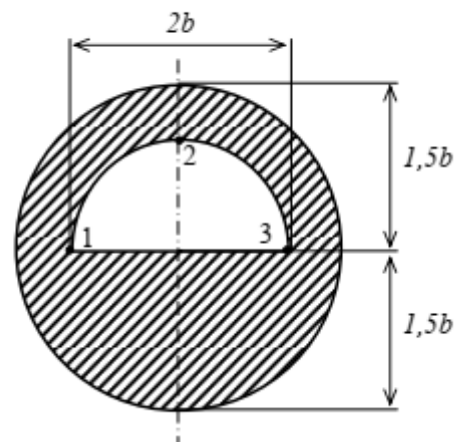


Схема 9

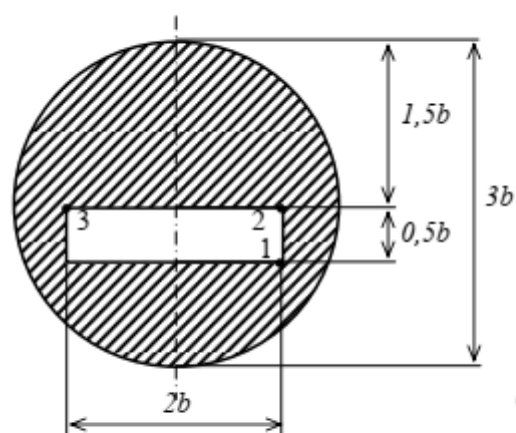


Схема 10

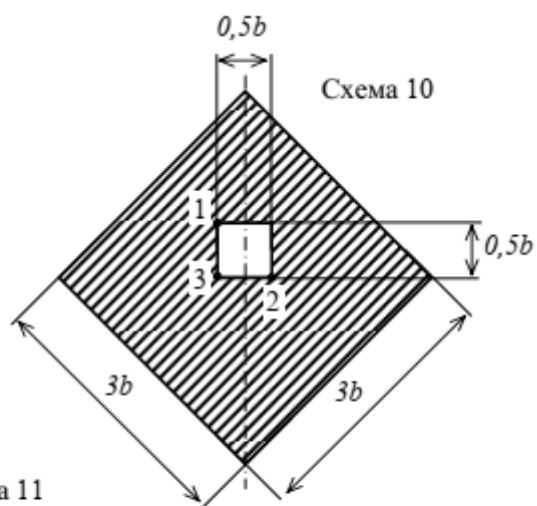


Схема 11

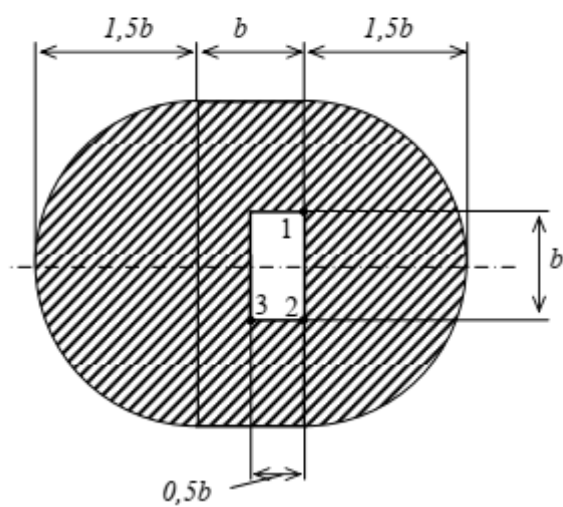


Схема 12

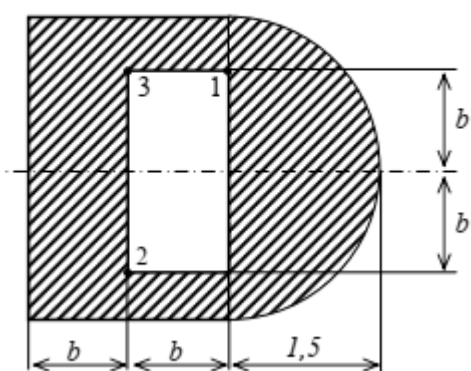
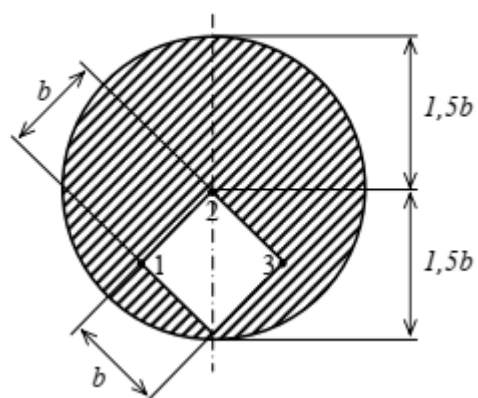


Схема 13



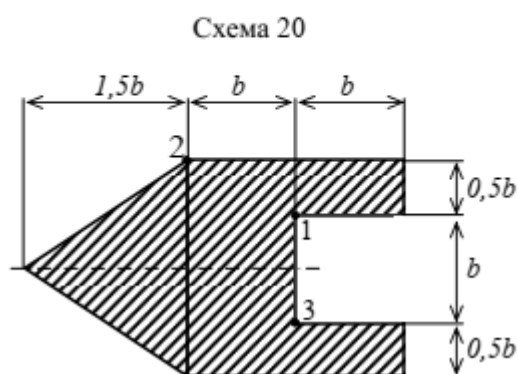
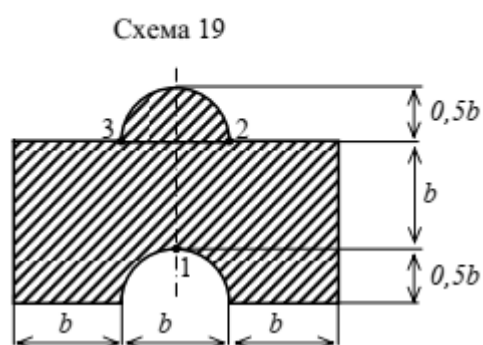
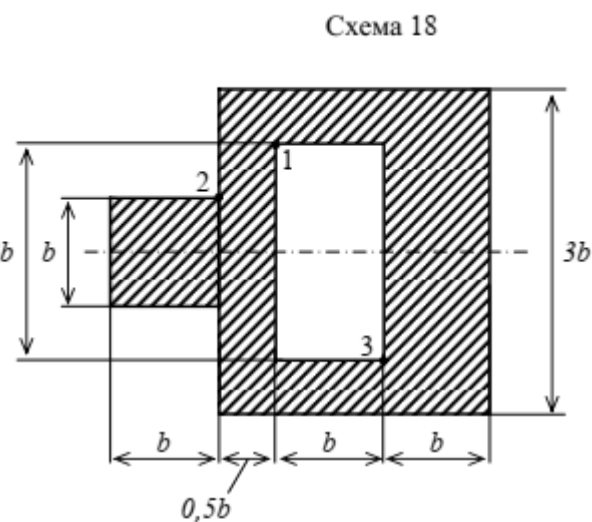
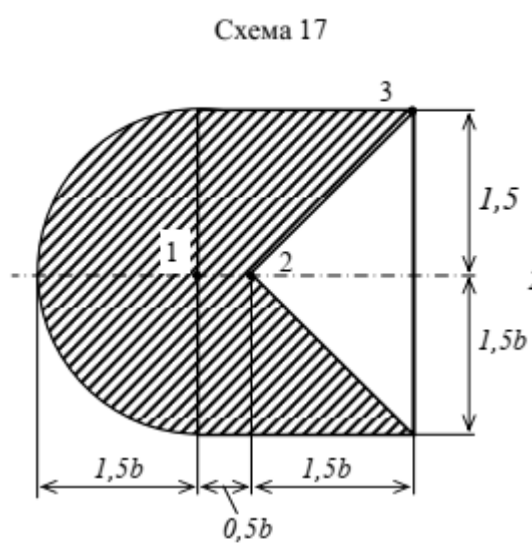
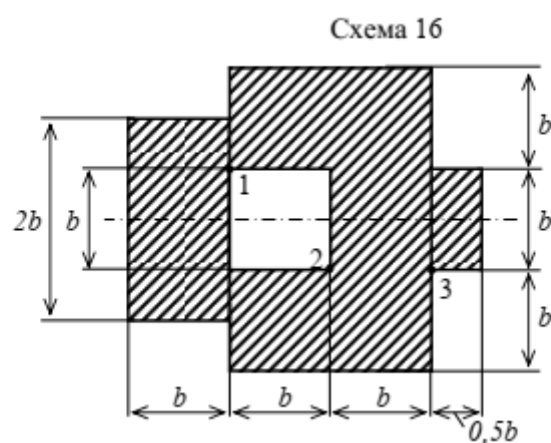
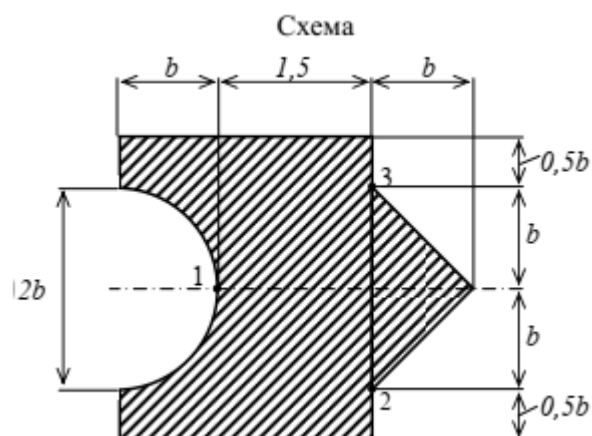
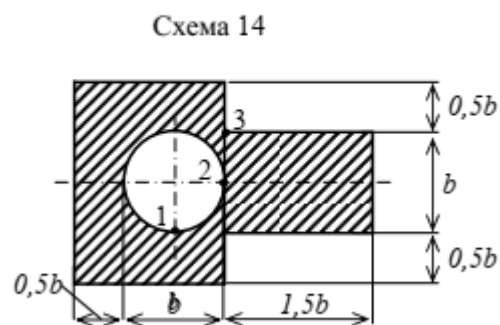


Схема 21

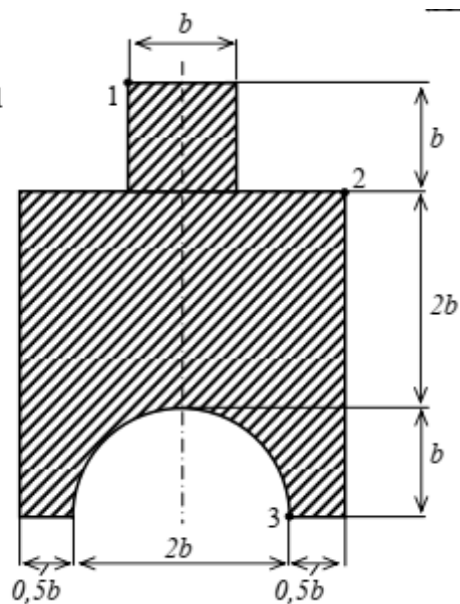


Схема 22

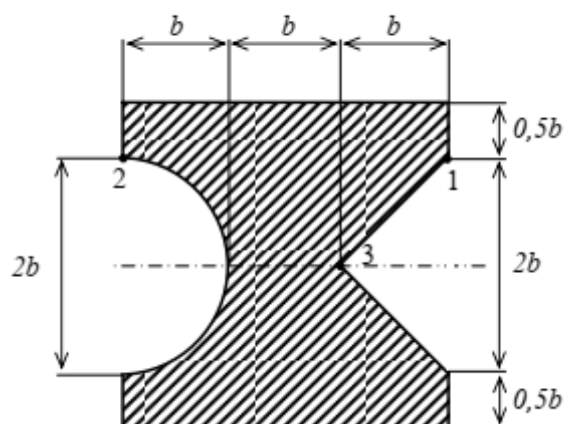


Схема 23

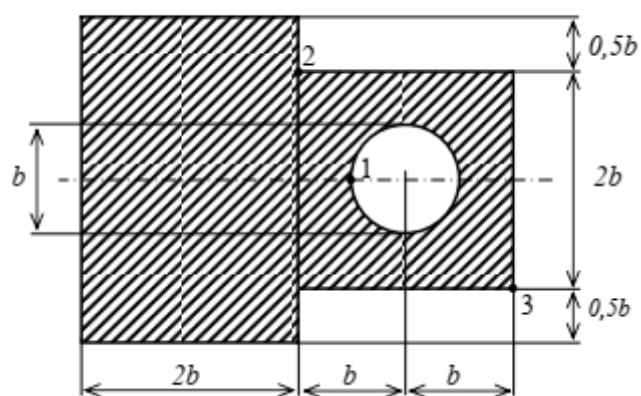


Схема 24

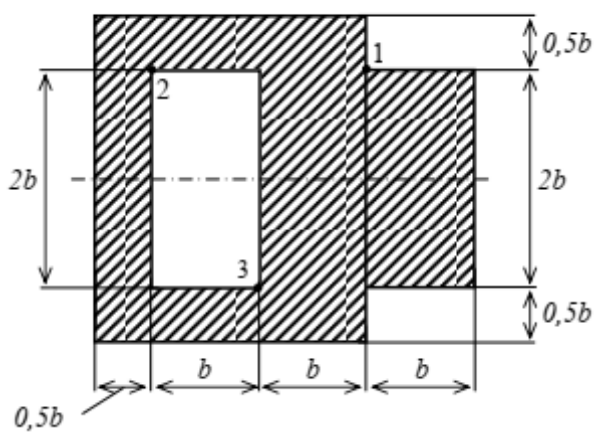


Схема 25

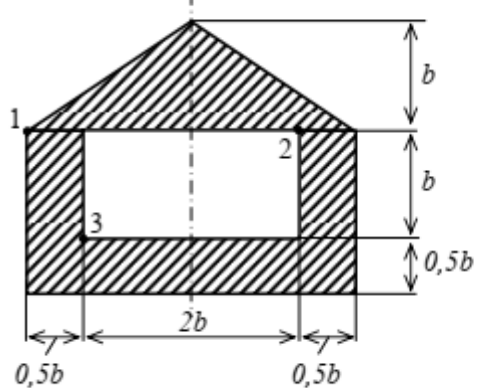


Схема 26

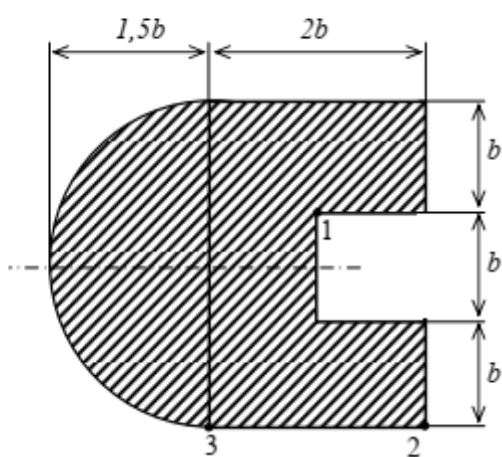


Схема 27

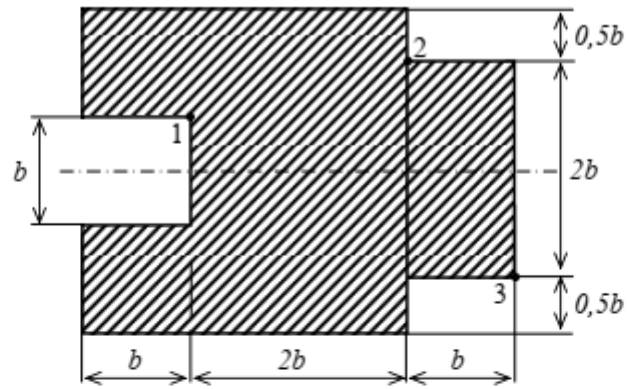


Схема 28

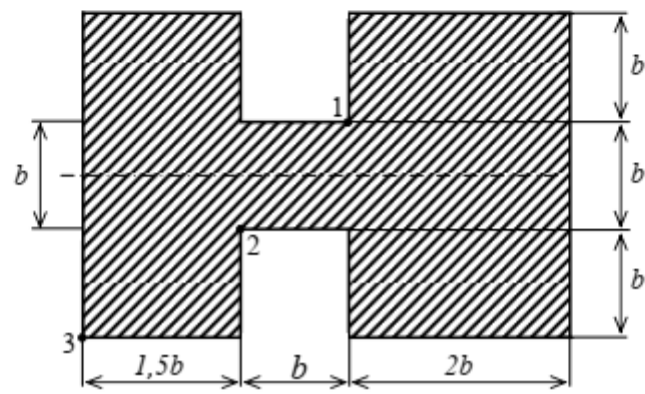


Схема 30

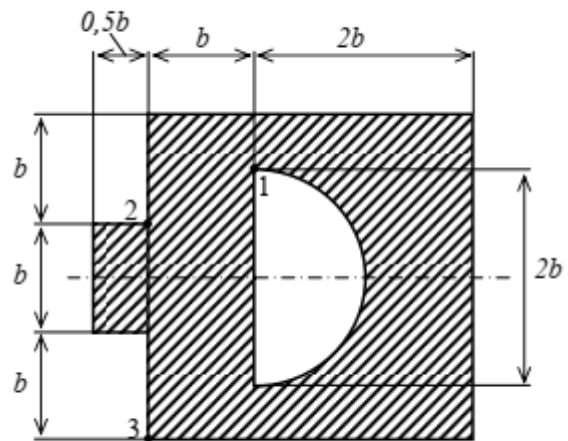
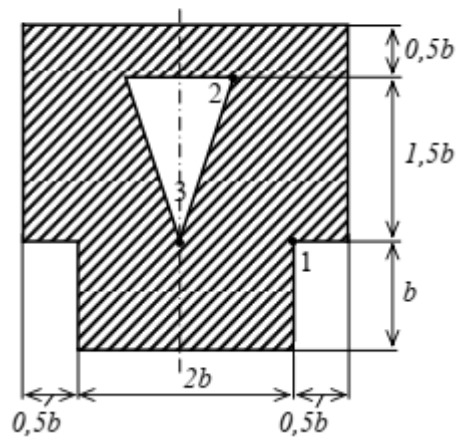


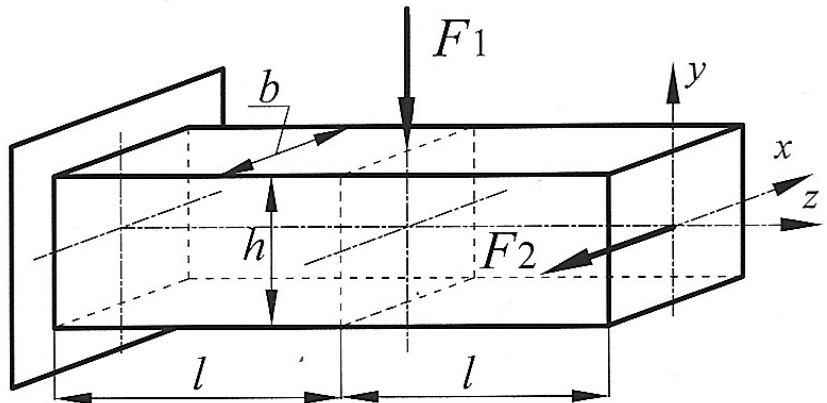
Схема 29



**Задачи для проверки студентами степени усвоения материала раздела:  
«Косой изгиб»**

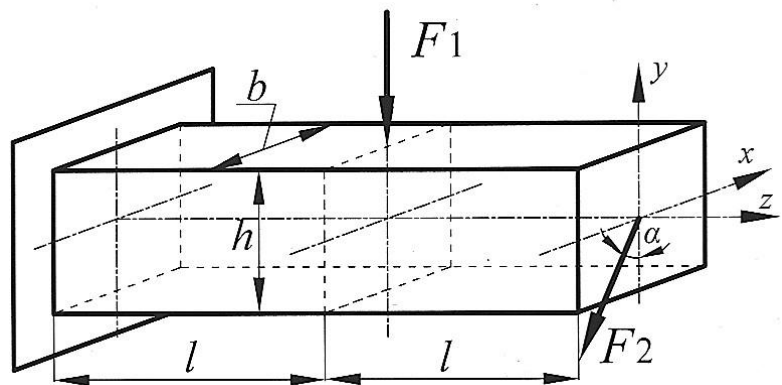
**Задача 1**

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них.  
 Если;  $l = 1 \text{ м}, F_1 = 8 \text{ кН},$   
 $F_2 = 15 \text{ кН}, h = 15 \text{ см},$   
 $b = 10 \text{ см}.$



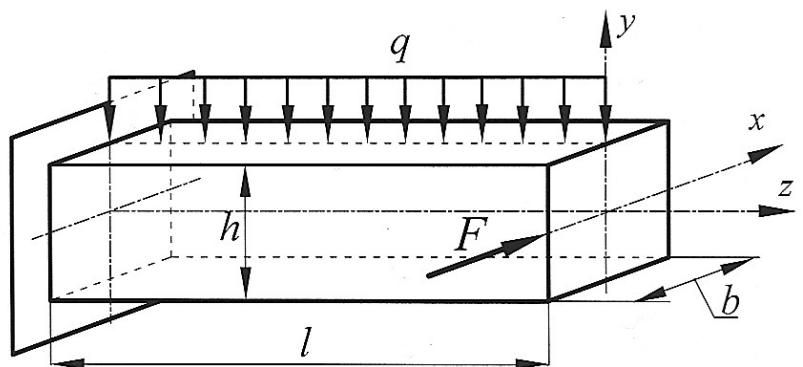
**Задача 2**

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них.  
 Если;  $l = 1 \text{ м}, F_1 = 10 \text{ кН},$   
 $F_2 = 12 \text{ кН}, h = 16 \text{ см},$   
 $b = 10 \text{ см}, \alpha = 30^\circ.$



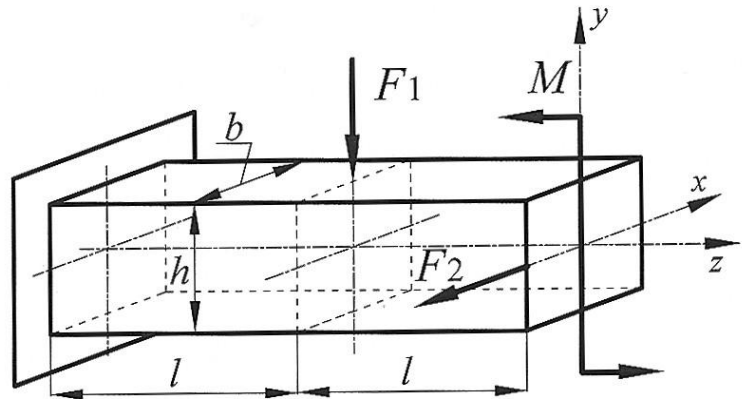
**Задача 3**

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них.  
 Если;  $l = 2 \text{ м}, F = 12 \text{ кН},$   
 $q = 10 \text{ кН/м}, h = 15 \text{ см},$   
 $b = 10 \text{ см}.$



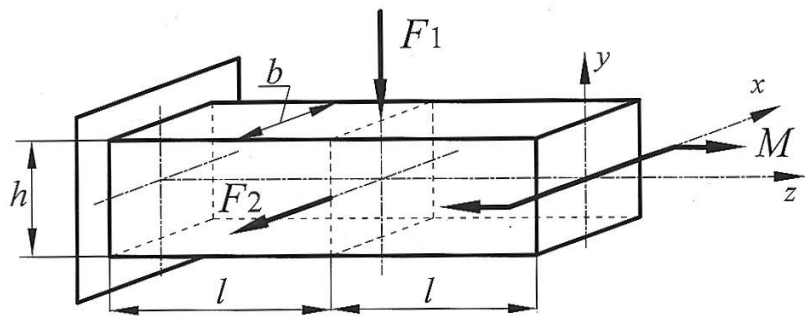
#### Задача 4

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них. Если;  
 $l = 1 \text{ м}$ ,  
 $M = 40 \text{ кНм}$ ,  $F_1 = 9 \text{ кН}$ ,  
 $F_2 = 13 \text{ кН}$ ,  $h = 16 \text{ см}$ ,  
 $b = 10 \text{ см}$ .



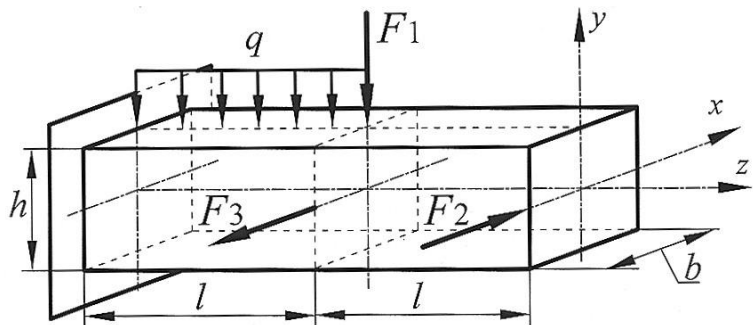
#### Задача 5

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них. Если;  
 $l = 1,2 \text{ м}$ ,  
 $M = 35 \text{ кНм}$ ,  $F_1 = 11 \text{ кН}$ ,  
 $F_2 = 14 \text{ кН}$ ,  $h = 13 \text{ см}$ ,  
 $b = 10 \text{ см}$ .



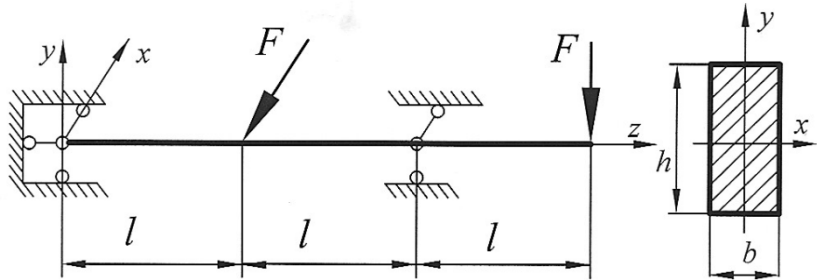
#### Задача 6

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить опасное сечение, опасные точки и напряжение в них. Если;  
 $l = 1 \text{ м}$ ,  $F_1 = 12 \text{ кН}$ ,  
 $F_2 = 14 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 13 \text{ кН}$ ,  
 $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $h = 15 \text{ см}$ ,  
 $b = 10 \text{ см}$ .



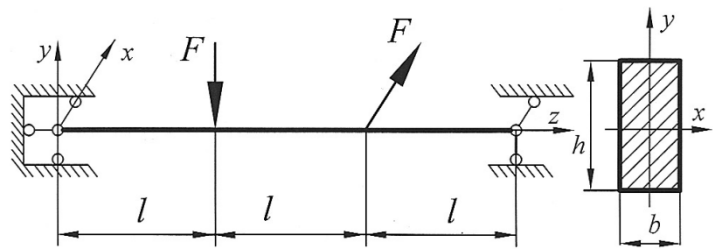
### Задача 7

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить допустимую  
 силу  $F$ , если:  
 $h = 12 \text{ см}$ ,  
 $b = 4 \text{ см}$ ,  $l = 1,5 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 130 \text{ МПа}$ .



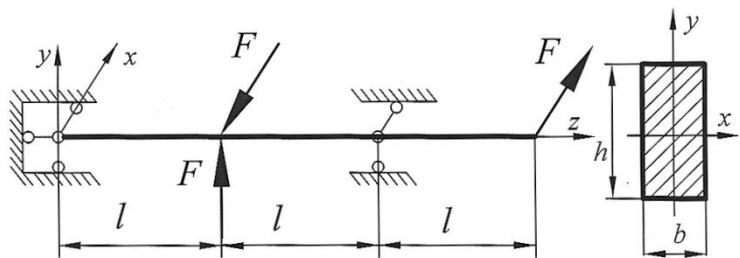
### Задача 8

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить  
 допустимую силу  $F$ , если:  
 $h = 15 \text{ см}$ ,  
 $b = 5 \text{ см}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .



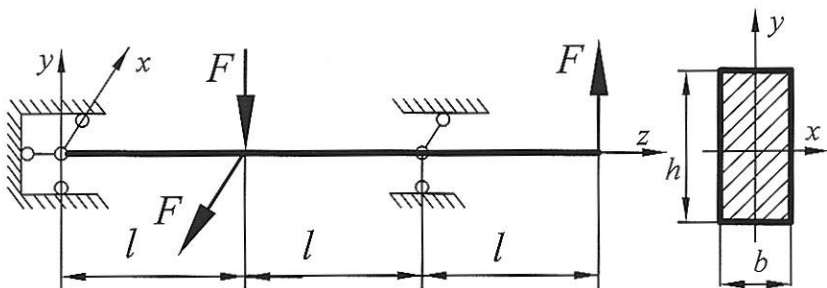
### Задача 9

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить допустимую  
 силу  $F$ , если:  
 $h = 9 \text{ см}$ ,  $b = 3 \text{ см}$ ,  
 $l = 0,5 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 130 \text{ МПа}$ .



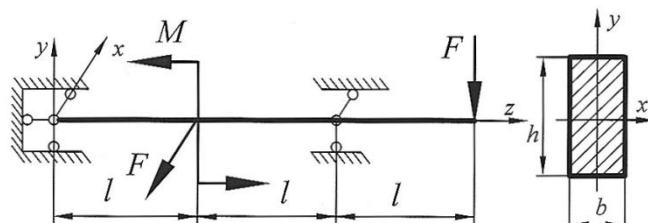
### Задача 10

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить допустимую  
 силу  $F$ , если:  
 $h = 12 \text{ см}$ ,  
 $b = 4 \text{ см}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 110 \text{ МПа}$ .



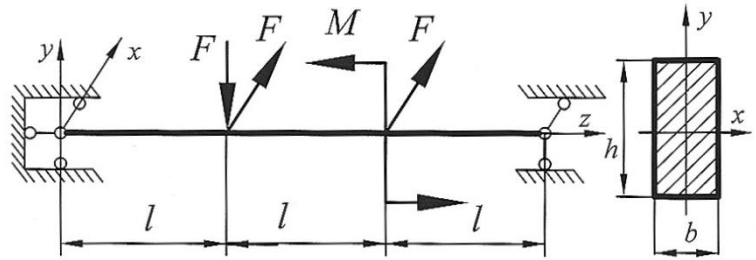
### Задача 11

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить  
 размеры поперечного сечения, если:  
 $h = 2b$ ,  
 $F = 10 \text{ кН}$ ,  $M = 40 \text{ кНм}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .



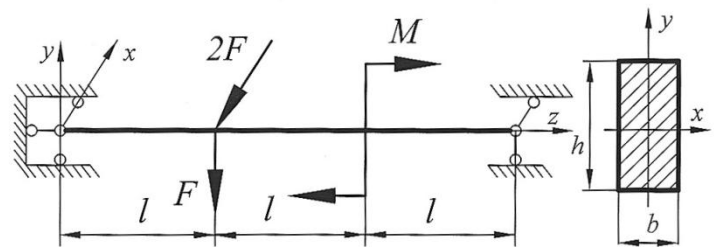
### Задача 12

Построить эпюры  $M_x, M_y$ .  
 Определить размеры поперечного сечения,  
 если:  $h = 4b, F = 20 \text{ кН}$   
 $M = 20 \text{ кНм}$   $l = 1,5 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ .



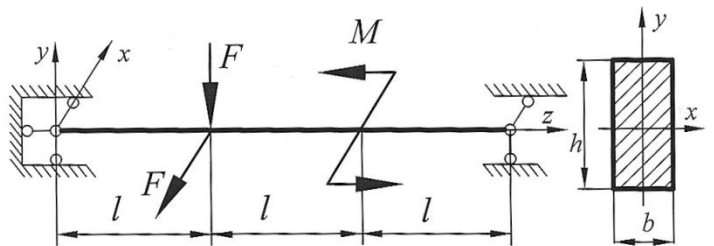
### Задача 13

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить  
 размеры поперечного сечения,  
 если:  $h = 5b, F = 10 \text{ кН}$   
 $M = 20 \text{ кНм}$   $l = 1 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .



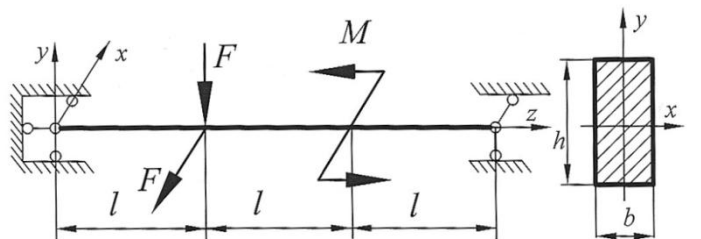
### Задача 14

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить  
 размеры поперечного сечения,  
 если:  $h = 4b, F = 15 \text{ кН}$   
 $M = 10 \text{ кНм}$   $l = 2 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ .



### Задача 15

Построить эпюры  $M_x, M_y$ . Определить  
 размеры поперечного сечения,  
 если:  $h = 4b, F = 15 \text{ кН}$   
 $M = 10 \text{ кНм}$   $l = 2 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ .





*Федеральное агентство по рыболовству*  
*Федеральное государственное бюджетное образовательное*  
*учреждение высшего образования*  
**«Астраханский государственный технический университет»**  
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована  
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт Морских технологий, энергетики и транспорта

Направление подготовки \_\_\_\_\_

Профиль \_\_\_\_\_

Кафедра Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт

## Отчет по практическим работам

по дисциплине: Сопротивление материалов

Вариант №

Работа выполнена студентом группы \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
ФИО студента

Проверил работы

\_\_\_\_\_  
уч. степень, уч. звание ФИО преподавателя

Астрахань 20\_\_\_\_

**ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ  
ПРПКТИЧЕСКИХ РАБОТ  
ПО «СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ»**

1. Пояснительная записка:

1.1. Выполняется на одной стороне листа формата А4.

1.2. Титульный лист (первый) оформляется согласно Приложения 1.

1.3. На второй странице приводятся условия всех задач и исходные данные к ним.

1.4. Работа должна быть оформлена чисто, аккуратно, четко. Вычисления должны сопровождаться краткими пояснениями.

1.5. Вычисления выполняются с точностью до трех значащих цифр, например,

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2P}{\pi d^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^2} = 19,7 \text{ кг/см}^2.$$

1.6. Листы пояснительной записки скрепляются неразъемно слева.

2. Графическая часть:

2.1. Выполняется на отдельном листе формата А4.

2.2. Расчетные схемы и эпюры (графики) выполняются с соблюдением масштабов.

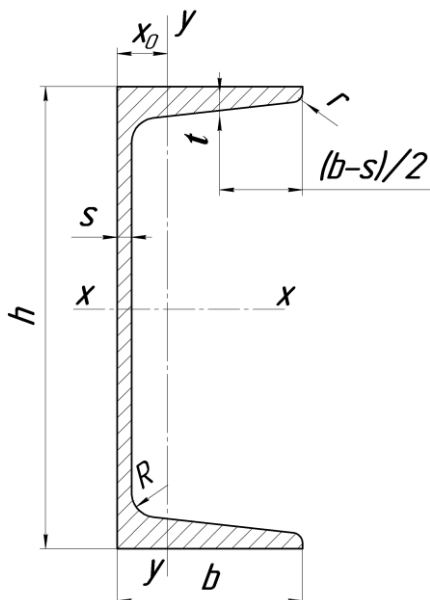
2.3. На расчетных схемах и эпюрах должны быть проставлены значения всех величин и размерность.

3. Ошибки исправляются на чистой стороне листа слева от текста.

# ТАБЛИЦЫ СОРТАМЕНТА ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Швеллеры стальные горячекатаные. Сортакмент (ГОСТ 8240-97).

## Швеллеры с уклоном внутренних граней полок



$h$  – высота (швеллера);

$I$  - момент инерции;

$b$  - ширина полки ;

$R$  - радиус внутреннего закругления;

$r$  - радиус закругления полки;

$s$  - толщина стенки;

$t$  - толщина полки;

$W$  - момент сопротивления;

$i$  - радиус инерции;

$S$  - статический момент полусечения;

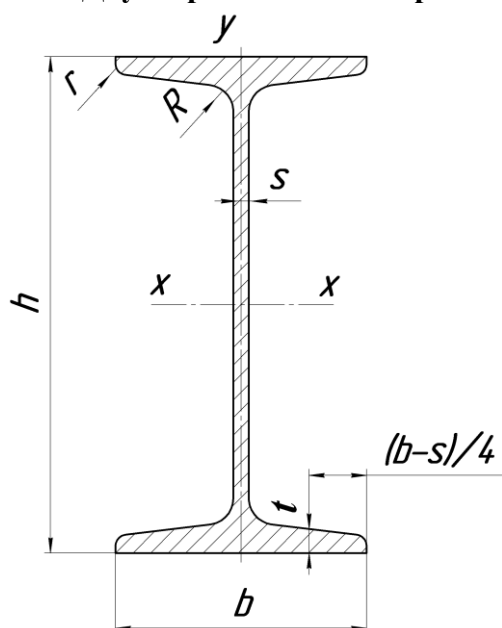
$X_0$  - расстояние от оси  $y - y$  до наружной грани стенки

$F$  - площадь поперечного сечения;

| Номер<br>швеллера | <i>h</i> | <i>b</i> | <i>s</i> | <i>t</i> | <i>R</i>    | <i>r</i>   | Площадь<br>поперечного<br>сечения <i>F</i> ,<br>см <sup>2</sup> | Масса<br>1 м,<br><br>кг | Справочные значения для осей               |                                            |                               |                                         |                                            |                                            |                               | <i>X</i> <sub>0</sub> ,<br>см |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|-------------|------------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                   |          |          |          |          | не<br>более | <i>X-X</i> |                                                                 |                         |                                            | <i>Y-Y</i>                                 |                               |                                         |                                            |                                            |                               |                               |
|                   | мм       |          |          |          |             |            |                                                                 |                         | <i>I</i> <sub>х</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>х</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>х</sub> ,<br>см | <i>S</i> <sub>х</sub> , см <sup>3</sup> | <i>I</i> <sub>у</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>у</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>0</sub> ,<br>см |                               |
| 5                 | 50       | 32       | 4,4      | 7,0      | 6,0         | 2,5        | 6,16                                                            | 4,84                    | 22,8                                       | 9,1                                        | 1,92                          | 5,59                                    | 5,61                                       | 2,75                                       | 0,95                          | 1,16                          |
| 6,5               | 65       | 36       | 4,4      | 7,2      | 6,0         | 2,5        | 7,51                                                            | 5,90                    | 48,6                                       | 15,0                                       | 2,54                          | 9,00                                    | 8,70                                       | 3,68                                       | 1,08                          | 1,24                          |
| 8                 | 80       | 40       | 4,5      | 7,4      | 6,5         | 2,5        | 8,98                                                            | 7,05                    | 89,4                                       | 22,4                                       | 3,16                          | 23,30                                   | 12,80                                      | 4,75                                       | 1,19                          | 1,31                          |
| 10                | 100      | 46       | 4,5      | 7,6      | 7,0         | 3,0        | 10,90                                                           | 8,59                    | 174,0                                      | 34,8                                       | 3,99                          | 20,40                                   | 20,40                                      | 6,46                                       | 1,37                          | 1,44                          |
| 12                | 120      | 52       | 4,8      | 7,8      | 7,5         | 3,0        | 13,30                                                           | 10,40                   | 304,0                                      | 50,6                                       | 4,78                          | 29,60                                   | 31,20                                      | 8,52                                       | 1,53                          | 1,54                          |
| 14                | 140      | 58       | 4,9      | 8,1      | 8,0         | 3,0        | 15,60                                                           | 12,30                   | 491,0                                      | 70,2                                       | 5,60                          | 40,80                                   | 45,40                                      | 11,00                                      | 1,70                          | 1,67                          |
| 16                | 160      | 64       | 5,0      | 8,4      | 8,5         | 3,5        | 18,10                                                           | 14,20                   | 747,0                                      | 93,4                                       | 6,42                          | 54,10                                   | 63,30                                      | 13,80                                      | 1,87                          | 1,80                          |
| 16а               | 160      | 68       | 5,0      | 9,0      | 8,5         | 3,5        | 19,50                                                           | 15,30                   | 823,0                                      | 103,0                                      | 6,49                          | 59,40                                   | 78,80                                      | 16,40                                      | 2,01                          | 2,00                          |
| 18                | 180      | 70       | 5,1      | 8,7      | 9,0         | 3,5        | 20,70                                                           | 16,30                   | 1090,0                                     | 121,0                                      | 7,24                          | 69,80                                   | 86,00                                      | 17,00                                      | 2,04                          | 1,94                          |

| Номер<br>швеллера | <i>h</i> | <i>b</i> | <i>s</i> | <i>t</i> | <i>R</i>    | <i>r</i> | Площадь<br>поперечного<br>сечения <i>F</i> ,<br>см <sup>2</sup> | Масса<br>1 м,<br><br>кг                    | Справочные значения для осей  |                                         |                                            |                                            |                               |       |      | <i>X</i> <sub>0</sub> ,<br>см |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|-------------|----------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------|-------|------|-------------------------------|
|                   |          |          |          |          | не<br>более |          |                                                                 |                                            | <i>X-X</i>                    |                                         |                                            |                                            | <i>Y-Y</i>                    |       |      |                               |
|                   | мм       |          |          |          |             |          | <i>I</i> <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup>                      | <i>W</i> <sub>x</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>x</sub> ,<br>см | <i>S</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup> | <i>I</i> <sub>y</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>y</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>0</sub> ,<br>см |       |      |                               |
| 18а               | 180      | 74       | 5,1      | 9,3      | 9,0         | 3,5      | 22,20                                                           | 17,40                                      | 1190,0                        | 132,0                                   | 7,32                                       | 76,10                                      | 105,00                        | 20,00 | 2,18 | 2,13                          |
| 20                | 200      | 76       | 5,2      | 9,0      | 9,5         | 4,0      | 23,40                                                           | 18,40                                      | 1520,0                        | 152,0                                   | 8,07                                       | 87,80                                      | 113,00                        | 20,50 | 2,20 | 2,07                          |
| 22                | 220      | 82       | 5,4      | 9,5      | 10,0        | 4,0      | 26,70                                                           | 21,00                                      | 2110,0                        | 192,0                                   | 8,89                                       | 110,00                                     | 151,00                        | 25,10 | 2,37 | 2,21                          |
| 24                | 240      | 90       | 5,6      | 10,0     | 10,5        | 4,0      | 30,60                                                           | 24,00                                      | 2900,0                        | 242,0                                   | 9,73                                       | 139,00                                     | 208,00                        | 31,60 | 2,60 | 2,42                          |
| 27                | 270      | 95       | 6,0      | 10,5     | 11,0        | 4,5      | 35,20                                                           | 27,70                                      | 4160,0                        | 308,0                                   | 10,90                                      | 178,00                                     | 262,00                        | 37,30 | 2,73 | 2,47                          |
| 30                | 300      | 100      | 6,5      | 11,0     | 12,0        | 5,0      | 40,50                                                           | 31,80                                      | 5810,0                        | 387,0                                   | 12,00                                      | 224,00                                     | 327,00                        | 43,60 | 2,84 | 2,52                          |
| 33                | 330      | 105      | 7,0      | 11,7     | 13,0        | 5,0      | 46,50                                                           | 36,50                                      | 7980,0                        | 484,0                                   | 13,10                                      | 281,00                                     | 410,00                        | 51,80 | 2,97 | 2,59                          |
| 36                | 360      | 110      | 7,5      | 12,6     | 14,0        | 6,0      | 53,40                                                           | 41,90                                      | 10820,0                       | 601,0                                   | 14,20                                      | 350,00                                     | 513,00                        | 61,70 | 3,10 | 2,68                          |
| 40                | 400      | 115      | 8,0      | 13,5     | 15,0        | 6,0      | 61,50                                                           | 48,30                                      | 15220,0                       | 761,0                                   | 15,70                                      | 444,00                                     | 642,00                        | 73,40 | 3,23 | 2,75                          |

# Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент (ГОСТ 8239-89)



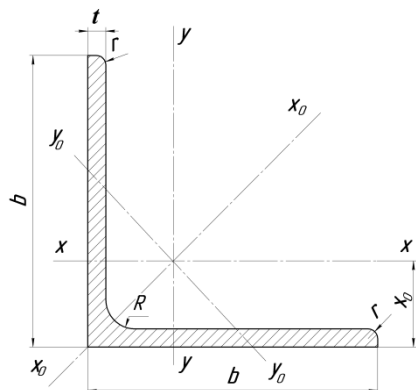
$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $R$  – радиус внутреннего закругления;  
 $r$  – радиус закругления полки;  
 $I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S_x$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции

| Номер<br><br>двутавра | Размеры  |          |          |          |          |          | Площадь<br><br>попереч-<br>ного<br><br>сечения,<br><br>см <sup>2</sup> | Масса<br><br>1 м,<br><br>кг | Справочные значения для осей |       |       |       |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|                       | <i>h</i> | <i>b</i> | <i>s</i> | <i>t</i> | <i>R</i> | <i>r</i> |                                                                        |                             | <i>X – X</i>                 |       |       |       | <i>Y – Y</i>         |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
|                       |          |          |          |          |          |          |                                                                        |                             | не более                     |       |       |       | <i>I<sub>x</sub></i> | <i>W<sub>x</sub></i> | <i>i<sub>x</sub></i> | <i>S<sub>x</sub></i> | <i>I<sub>y</sub></i> | <i>W<sub>y</sub></i> | <i>i<sub>y</sub></i> |
|                       |          |          |          |          |          |          |                                                                        |                             | мм                           |       |       |       |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
| 10                    | 100      | 55       | 4,5      | 7,2      | 7,0      | 2,5      | 12,0                                                                   | 9,46                        | 198                          | 39,7  | 4,06  | 23,0  | 17,9                 | 6,49                 | 1,22                 |                      |                      |                      |                      |
| 12                    | 120      | 64       | 4,8      | 7,3      | 7,5      | 3,0      | 14,7                                                                   | 11,50                       | 350                          | 58,4  | 4,88  | 33,7  | 27,9                 | 8,72                 | 1,38                 |                      |                      |                      |                      |
| 14                    | 140      | 73       | 4,9      | 7,5      | 8,0      | 3,0      | 17,4                                                                   | 13,70                       | 572                          | 81,7  | 5,73  | 46,8  | 41,9                 | 11,50                | 1,55                 |                      |                      |                      |                      |
| 16                    | 160      | 81       | 5,0      | 7,8      | 8,5      | 3,5      | 20,2                                                                   | 15,90                       | 873                          | 109,0 | 6,57  | 62,3  | 58,6                 | 14,50                | 1,70                 |                      |                      |                      |                      |
| 18                    | 180      | 90       | 5,1      | 8,1      | 9,0      | 3,5      | 23,4                                                                   | 18,40                       | 1290                         | 143,0 | 7,42  | 81,4  | 82,6                 | 18,40                | 1,88                 |                      |                      |                      |                      |
| 20                    | 200      | 100      | 5,2      | 8,4      | 9,5      | 4,0      | 26,8                                                                   | 21,00                       | 1840                         | 184,0 | 8,28  | 104,0 | 115,0                | 23,10                | 2,07                 |                      |                      |                      |                      |
| 22                    | 220      | 110      | 5,4      | 8,7      | 10,0     | 4,0      | 30,6                                                                   | 24,00                       | 2550                         | 232,0 | 9,13  | 131,0 | 157,0                | 28,60                | 2,27                 |                      |                      |                      |                      |
| 24                    | 240      | 115      | 5,6      | 9,5      | 10,5     | 4,0      | 34,8                                                                   | 27,30                       | 3460                         | 289,0 | 9,97  | 163,0 | 198,0                | 34,50                | 2,37                 |                      |                      |                      |                      |
| 27                    | 270      | 125      | 6,0      | 9,8      | 11,0     | 4,5      | 40,2                                                                   | 31,50                       | 5010                         | 371,0 | 11,20 | 210,0 | 260,0                | 41,50                | 2,54                 |                      |                      |                      |                      |
| 30                    | 300      | 135      | 6,5      | 10,2     | 12,0     | 5,0      | 46,5                                                                   | 36,50                       | 7080                         | 472,0 | 12,30 | 268,0 | 337,0                | 49,90                | 2,69                 |                      |                      |                      |                      |

| Номер<br><br><br><br>двутавра | Размеры |     |      |      |          |     | Площадь<br><br>попереч-<br>ного<br>сечения,<br><br>см <sup>2</sup> | Масса<br><br>1 м,<br><br><br>кг | Справочные значения для осей |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|-------------------------------|---------|-----|------|------|----------|-----|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|                               | h       | b   | s    | t    | R        | r   |                                                                    |                                 | X – X                        |                  |                  |                  | Y – Y            |                  |                  |
|                               |         |     |      |      | не более |     |                                                                    |                                 | I <sub>x</sub> ,             | W <sub>x</sub> , | i <sub>x</sub> , | S <sub>x</sub> , | I <sub>y</sub> , | W <sub>y</sub> , | i <sub>y</sub> , |
|                               |         |     |      |      | мм       |     |                                                                    |                                 |                              |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
| 33                            | 330     | 140 | 7,0  | 11.2 | 13,0     | 5,0 | 53,8                                                               | 42,20                           | 9840                         | 597,0            | 13,50            | 339,0            | 419,0            | 59,90            | 2,79             |
| 36                            | 360     | 145 | 7,5  | 12,3 | 14,0     | 6,0 | 61,9                                                               | 48,60                           | 13380                        | 743,0            | 14,70            | 423,0            | 516,0            | 71,10            | 2,89             |
| 40                            | 400     | 155 | 8,3  | 13,0 | 15,0     | 6,0 | 72,6                                                               | 57,00                           | 19062                        | 953,0            | 16,20            | 545,0            | 667,0            | 86,10            | 3,03             |
| 45                            | 450     | 160 | 9,0  | 14,2 | 16,0     | 7,0 | 84,7                                                               | 66,50                           | 27696                        | 1231,0           | 18,10            | 708,0            | 808,0            | 101,00           | 3,09             |
| 50                            | 500     | 170 | 10,0 | 15,2 | 17,0     | 7,0 | 100,0                                                              | 78,50                           | 39727                        | 1589,0           | 19,90            | 919,0            | 1043,0           | 123,00           | 3,23             |
| 55                            | 550     | 180 | 11,0 | 16,5 | 18,0     | 7,0 | 118,0                                                              | 92,60                           | 55962                        | 2035,0           | 21,80            | 1181,0           | 1356,0           | 151,00           | 3,39             |
| 60                            | 600     | 190 | 12,0 | 17,8 | 20,0     | 8,0 | 138,0                                                              | 108,00                          | 76806                        | 2560,0           | 23,60            | 1491,0           | 1725,0           | 182,00           | 3,54             |

# УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ

Сортамент (ГОСТ 8509-93)



$b$  – ширина полки;

$t$  – толщина полки;

$R$  – радиус внутреннего закругления;

$r$  – радиус закругления полок;

$F$  – площадь поперечного сечения;

$I$  – момент инерции;

$X_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;

$I_{xy}$  – центробежный момент инерции;

$i$  – радиус инерции.

| №<br>уголка | <i>b</i> | <i>t</i> | <i>R</i> | <i>r</i> | Площадь<br>поперечного<br>сечения, см <sup>2</sup> | Справочные величины для осей               |                                         |                               |                                                 |                                    |                                                 |                                             |                                    |                                             |                               | Масса<br><br>1 м, кг |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|
|             | мм       |          |          |          |                                                    | <i>X</i> - <i>X</i>                        |                                         |                               | <i>X</i> <sub>0</sub> - <i>X</i> <sub>0</sub>   |                                    | <i>Y</i> <sub>0</sub> - <i>Y</i> <sub>0</sub>   |                                             |                                    | <i>I</i> <sub>xy</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>X</i> <sub>0</sub> ,<br>см |                      |
|             |          |          |          |          |                                                    | <i>I</i> <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>x</sub> ,<br>см | <i>I</i> <sub>x0 max</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>i</i> <sub>x0 max</sub> ,<br>см | <i>I</i> <sub>y0 min</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>y0</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>y0 min</sub> ,<br>см |                                             |                               |                      |
| 2           | 20       | 3        | 3,5      | 1,2      | 1,13                                               | 0,4                                        | 0,28                                    | 0,59                          | 0,63                                            | 0,75                               | 0,17                                            | 0,2                                         | 0,39                               | 0,23                                        | 0,6                           | 0,89                 |
|             |          | 4        | 3,5      | 1,2      | 1,46                                               | 0,5                                        | 0,37                                    | 0,58                          | 0,78                                            | 0,73                               | 0,22                                            | 0,24                                        | 0,38                               | 0,28                                        | 0,64                          | 1,15                 |
| 2,5         | 25       | 3        | 3,5      | 1,2      | 1,43                                               | 0,81                                       | 0,46                                    | 0,75                          | 1,29                                            | 0,95                               | 0,34                                            | 0,33                                        | 0,49                               | 0,47                                        | 0,73                          | 1,12                 |
|             |          | 4        | 3,5      | 1,2      | 1,86                                               | 1,03                                       | 0,59                                    | 0,74                          | 1,62                                            | 0,93                               | 0,44                                            | 0,44                                        | 0,48                               | 0,59                                        | 0,76                          | 1,46                 |
| 2,8         | 28       | 3        | 4        | 1,3      | 1,62                                               | 1,16                                       | 0,58                                    | 0,85                          | 1,84                                            | 1,07                               | 0,48                                            | 0,42                                        | 0,55                               | 0,68                                        | 0,8                           | 1,27                 |

| №<br>уголка | <i>b</i> | <i>t</i> | <i>R</i> | <i>r</i> | Площадь<br>поперечного<br>сечения см <sup>2</sup> | Справочные величины для осей               |                                         |                               |                                                 |                                    |                                                 |                                             |                                    |                                             |                               | Масса<br>м, кг |
|-------------|----------|----------|----------|----------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------|----------------|
|             | мм       |          |          |          |                                                   | <i>X</i> - <i>X</i>                        |                                         |                               | <i>X</i> <sub>0</sub> - <i>X</i> <sub>0</sub>   |                                    | <i>Y</i> <sub>0</sub> - <i>Y</i> <sub>0</sub>   |                                             |                                    | <i>I</i> <sub>xy</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>X</i> <sub>0</sub> ,<br>см |                |
|             |          |          |          |          |                                                   | <i>I</i> <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>x</sub> ,<br>см | <i>I</i> <sub>x0 max</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>i</i> <sub>x0 max</sub> ,<br>см | <i>I</i> <sub>y0 min</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>y0</sub> ,<br>см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>y0 min</sub> ,<br>см |                                             |                               |                |
| 3           | 30       | 3        | 4        | 1,3      | 1,74                                              | 1,45                                       | 0,67                                    | 0,91                          | 2,3                                             | 1,15                               | 0,6                                             | 0,53                                        | 0,59                               | 0,85                                        | 0,85                          | 1,36           |
|             |          | 4        | 4        | 1,3      | 2,27                                              | 1,84                                       | 0,87                                    | 0,9                           | 2,92                                            | 1,13                               | 0,77                                            | 0,61                                        | 0,58                               | 1,08                                        | 0,89                          | 1,78           |
| 3,2         | 32       | 3        | 4,5      | 1,5      | 1,86                                              | 1,77                                       | 0,77                                    | 0,97                          | 2,8                                             | 1,23                               | 0,74                                            | 0,59                                        | 0,63                               | 1,03                                        | 0,89                          | 1,46           |
|             |          | 4        | 4,5      | 1,5      | 2,43                                              | 2,26                                       | 1                                       | 0,96                          | 3,58                                            | 1,21                               | 0,94                                            | 0,71                                        | 0,62                               | 1,32                                        | 0,94                          | 1,91           |
| 3,5         | 35       | 3        | 4,5      | 1,5      | 2,04                                              | 2,35                                       | 0,93                                    | 1,07                          | 3,72                                            | 1,35                               | 0,97                                            | 0,71                                        | 0,69                               | 1,37                                        | 0,97                          | 1,6            |
|             |          | 4        | 4,5      | 1,5      | 2,67                                              | 3,01                                       | 1,21                                    | 1,06                          | 4,76                                            | 1,33                               | 1,25                                            | 0,88                                        | 0,68                               | 1,75                                        | 1,01                          | 2,1            |
|             |          | 5        | 4,5      | 1,5      | 3,28                                              | 3,61                                       | 1,47                                    | 1,05                          | 5,71                                            | 1,32                               | 1,52                                            | 1,02                                        | 0,68                               | 2,1                                         | 1,05                          | 2,58           |
| 4           | 40       | 3        | 5        | 1,7      | 2,35                                              | 3,55                                       | 1,22                                    | 1,23                          | 5,63                                            | 1,55                               | 1,47                                            | 0,95                                        | 0,79                               | 2,08                                        | 1,09                          | 1,85           |
| 4,5         | 45       | 3        | 5        | 1,7      | 2,65                                              | 5,13                                       | 1,56                                    | 1,39                          | 8,13                                            | 1,75                               | 2,12                                            | 1,24                                        | 0,89                               | 3                                           | 1,21                          | 2,08           |
|             |          | 4        | 5        | 1,7      | 3,48                                              | 6,63                                       | 2,04                                    | 1,38                          | 10,52                                           | 1,74                               | 2,74                                            | 1,54                                        | 0,89                               | 3,89                                        | 1,26                          | 2,73           |
|             |          | 5        | 5        | 1,7      | 4,29                                              | 8,03                                       | 2,51                                    | 1,37                          | 12,74                                           | 1,72                               | 3,33                                            | 1,81                                        | 0,88                               | 4,71                                        | 1,3                           | 3,37           |

| №<br>уголка | <i>b</i> | <i>t</i> | <i>R</i> | <i>r</i> | Площадь<br>поперечного<br>сечения см <sup>2</sup> | Справочные величины для осей               |                                         |                               |                                               |                                 |                                               |                                          |                                 |                                             |                               | Масса<br>м, кг |
|-------------|----------|----------|----------|----------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------|----------------|
|             | мм       |          |          |          |                                                   | <i>X</i> - <i>X</i>                        |                                         |                               | <i>X</i> <sub>0</sub> - <i>X</i> <sub>0</sub> |                                 | <i>Y</i> <sub>0</sub> - <i>Y</i> <sub>0</sub> |                                          |                                 | <i>I</i> <sub>xy</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>X</i> <sub>0</sub> ,<br>см |                |
|             |          |          |          |          |                                                   | <i>I</i> <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | <i>W</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>x</sub> ,<br>см | <i>I</i> <sub>x0 max</sub> , см <sup>4</sup>  | <i>i</i> <sub>x0 max</sub> , см | <i>I</i> <sub>y0 min</sub> , см <sup>4</sup>  | <i>W</i> <sub>y0</sub> , см <sup>3</sup> | <i>i</i> <sub>y0 min</sub> , см |                                             |                               |                |
| 5           | 50       | 3        | 5,5      | 1,8      | 2,96                                              | 7,11                                       | 1,94                                    | 1,55                          | 11,27                                         | 1,95                            | 2,95                                          | 1,57                                     | 1                               | 4,16                                        | 1,33                          | 2,32           |
|             |          | 4        | 5,5      | 1,8      | 3,89                                              | 9,21                                       | 2,54                                    | 1,54                          | 14,63                                         | 1,94                            | 3,8                                           | 1,95                                     | 0,99                            | 5,42                                        | 1,38                          | 3,05           |
|             |          | 5        | 5,5      | 1,8      | 4,8                                               | 11,2                                       | 3,13                                    | 1,53                          | 17,77                                         | 1,92                            | 4,63                                          | 2,3                                      | 0,98                            | 6,57                                        | 1,42                          | 3,77           |
|             |          | 6        | 5,5      | 1,8      | 5,69                                              | 13,07                                      | 3,69                                    | 1,52                          | 20,72                                         | 1,91                            | 5,43                                          | 2,63                                     | 0,98                            | 7,65                                        | 1,46                          | 4,47           |
| 5,6         | 56       | 4        | 6        | 2        | 4,38                                              | 13,1                                       | 3,21                                    | 1,73                          | 20,79                                         | 2,18                            | 5,41                                          | 2,52                                     | 1,11                            | 7,69                                        | 1,52                          | 3,44           |
|             |          | 5        | 6        | 2        | 5,41                                              | 15,97                                      | 3,96                                    | 1,72                          | 25,36                                         | 2,16                            | 6,59                                          | 2,97                                     | 1,1                             | 9,41                                        | 1,57                          | 4,25           |
| 6,3         | 63       | 4        | 7        | 2,3      | 4,96                                              | 18,86                                      | 4,09                                    | 1,95                          | 29,9                                          | 2,45                            | 7,81                                          | 3,26                                     | 1,25                            | 11                                          | 1,69                          | 3,9            |
|             |          | 5        | 7        | 2,3      | 6,13                                              | 23,1                                       | 5,05                                    | 1,94                          | 36,8                                          | 2,44                            | 9,52                                          | 3,87                                     | 1,25                            | 13,7                                        | 1,74                          | 4,81           |
|             |          | 6        | 7        | 2,3      | 7,28                                              | 27,06                                      | 5,98                                    | 1,93                          | 42,91                                         | 2,43                            | 11,18                                         | 4,44                                     | 1,24                            | 15,9                                        | 1,78                          | 5,72           |
| 7           | 70       | 4,5      | 8        | 2,7      | 6,2                                               | 29,04                                      | 5,67                                    | 2,16                          | 46,03                                         | 2,72                            | 12,04                                         | 4,53                                     | 1,39                            | 17                                          | 1,88                          | 4,87           |
|             |          | 5        | 8        | 2,7      | 6,86                                              | 31,94                                      | 6,27                                    | 2,16                          | 50,67                                         | 2,72                            | 13,22                                         | 4,92                                     | 1,39                            | 18,7                                        | 1,9                           | 5,38           |
|             |          | 6        | 8        | 2,7      | 8,15                                              | 37,58                                      | 7,43                                    | 2,15                          | 59,64                                         | 2,71                            | 15,52                                         | 5,66                                     | 1,38                            | 22,1                                        | 1,94                          | 6,39           |
|             |          | 7        | 8        | 2,7      | 9,42                                              | 42,98                                      | 8,57                                    | 2,14                          | 68,19                                         | 2,69                            | 17,77                                         | 6,31                                     | 1,37                            | 25,2                                        | 1,99                          | 7,39           |
|             |          | 8        | 8        | 2,7      | 10,67                                             | 48,16                                      | 9,68                                    | 2,12                          | 76,35                                         | 2,68                            | 19,97                                         | 6,99                                     | 1,37                            | 28,2                                        | 2,02                          | 8,37           |

**ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ**  
(для ориентировочных расчетов)

| Материал                                                      | Предел прочности, $\text{кГ/мм}^2$ | Предел текучести, пропорциональности, $\text{кГ/мм}^2$ | Предел выносливости $\text{кГ/мм}^2$                             | Относительное удлинение (относительное сужение), % | Модуль упругости $E(G), \cdot 10^{-4} \text{кГ/мм}^2$ |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>Углеродистые стали обыкновенного качества, ГОСТ 380-71</b> |                                    |                                                        |                                                                  |                                                    |                                                       |
| СТ.-1                                                         | $\sigma_B=32-40$                   | $\sigma_T=18$                                          | $\sigma_{-1p}=12-15$<br>$\sigma_{-1}=16-22$<br>$\tau_{-1}=8-12$  | 28                                                 | —                                                     |
| СТ.-2                                                         | $\sigma_B=32-40$                   | $\sigma_T=19-22$                                       | $\sigma_{-1p}=12-16$<br>$\sigma_{-1}=17-22$<br>$\tau_{-1}=8-13$  | 26                                                 | —                                                     |
| СТ.-3                                                         | $\sigma_B=38-47$                   | $\sigma_T=21-24$                                       | $\sigma_{-1p}=12-16$<br>$\sigma_{-1}=17-22$<br>$\tau_{-1}=10-13$ | 21-23                                              | —                                                     |
| СТ.-4                                                         | $\sigma_B=42-52$                   | $\sigma_T=24-26$                                       | $\sigma_{-1p}=19-25$                                             | 19-21                                              | —                                                     |
| СТ.-5                                                         | $\sigma_B=50-62$                   | $\sigma_T=26-28$                                       | $\sigma_{-1p}=17-22$<br>$\sigma_{-1}=22-30$<br>$\tau_{-1}=13-18$ | 15-17                                              | —                                                     |
| СТ.-6                                                         | $\sigma_B=60-72$                   | $\sigma_T=30-31$                                       | $\sigma_{-1p}=19-25$<br>$\sigma_{-1}=25-34$<br>$\tau_{-1}=15-25$ | —                                                  | —                                                     |
| <b>Качественные стали, ГОСТ 1050-74</b>                       |                                    |                                                        |                                                                  |                                                    |                                                       |
| 10                                                            | $\sigma_B=34-42$                   | $\sigma_T=21$                                          | $\sigma_{-1p}=12-15$<br>$\sigma_{-1}=16-22$<br>$\tau_{-1}=8-12$  | 31(55)                                             | 1,90                                                  |
| 20                                                            | $\sigma_B=42-50$                   | $\sigma_T=25$                                          | $\sigma_{-1p}=12-16$<br>$\sigma_{-1}=17-22$<br>$\tau_{-1}=10-13$ | 25(55)                                             | 2,02                                                  |
| 30                                                            | $\sigma_B=50-60$                   | $\sigma_T=30$                                          | $\sigma_{-1p}=17-21$<br>$\sigma_{-1}=20-27$<br>$\tau_{-1}=11-14$ | 21(50)                                             | —                                                     |
| 40                                                            | $\sigma_B=58-70$                   | $\sigma_T=34$                                          | $\sigma_{-1p}=18-24$<br>$\sigma_{-1}=23-32$<br>$\tau_{-1}=14-19$ | 19(45)                                             | 2,135                                                 |

| Материал                          | Предел прочности, $\text{кГ/мм}^2$ | Предел текучести, пропорциональности, $\text{кГ/мм}^2$ | Предел выносливости $\text{кГ/мм}^2$                                   | Относительное удлинение (относительное сужение), % | Модуль упругости $E(G), *10^{-4} \text{кГ/мм}^2$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 45                                | $\sigma_B=61-75$                   | $\sigma_T=36$                                          | $\sigma_{-1p}=19-25$<br>$\sigma_{-1}=25-34$<br>$\tau_{-1}=15-20$       | 16(40)                                             | 2,04                                             |
| Качественные стали , ГОСТ 1050-74 |                                    |                                                        |                                                                        |                                                    |                                                  |
| 50                                | $\sigma_B=64-80$                   | $\sigma_T=38$                                          | $\sigma_{-1p}=20-26$<br>$\sigma_{-1}=27-35$<br>$\tau_{-1}=16-21$       | 14(40)                                             | 2,20                                             |
| 60                                | $\sigma_B=69-90$                   | $\sigma_T=41$                                          | $\sigma_{-1p}=22-28$<br>$\sigma_{-1}=31-38$<br>$\tau_{-1}=18-22$       | 12(35)                                             | 2,08                                             |
| 30Г                               | $\sigma_B=55-70$                   | $\sigma_T=32$                                          | $\sigma_{-1}=22-32$                                                    | 20(45)                                             | 2,17                                             |
| 60Г                               | $\sigma_B=71$                      | $\sigma_T=42$                                          | $\sigma_{-1p}=25-32$                                                   | 11(35)                                             | 2,109                                            |
| Легированные стали, ГОСТ 4543-71  |                                    |                                                        |                                                                        |                                                    |                                                  |
| 15ХСНД                            | $\sigma_B = 64-66$                 | $\sigma_T = 39-42$                                     | $\sigma_{-1} = 31$<br>$\tau_{-1} = 16$                                 | 18-21                                              | _____                                            |
| 20Х                               | $\sigma_B = 72-85$                 | $\sigma_T = 40-65$                                     | $\sigma_{-1} = 31-38$<br>$\tau_{-1} = 17-23$                           | _____                                              | 2,07                                             |
| 40Х                               | $\sigma_B = 73-105$                | $\sigma_T = 65-90$                                     | $\sigma_{-1p} = 24-34$<br>$\sigma_{-1} = 32-48$<br>$\tau_{-1} = 21-26$ | _____                                              | 2,185                                            |
| 45Х                               | $\sigma_B = 85-105$                | $\sigma_T = 70-95$                                     | $\sigma_{-1} = 40-50$                                                  | 9(45)                                              | 2,109                                            |
| 30ХМ                              | $\sigma_B = 74-100$                | $\sigma_T = 54-85$                                     | $\sigma_{-1p} = 37$<br>$\sigma_{-1} = 31-41$<br>$\tau_{-1} = 23$       | _____                                              | 2,130                                            |
| 40ХН                              | $\sigma_B = 100-145$               | $\sigma_T = 80-130$                                    | $\sigma_{-1p} = 31-42$<br>$\sigma_{-1} = 46-60$                        | _____                                              | 2,040                                            |
| 12ХН3А                            | $\sigma_B = 95-140$                | $\sigma_T = 70-110$                                    | $\sigma_{-1} = 42-64$<br>$\tau_{-1} = 22-30$                           | _____                                              | _____                                            |
| 20ХН3А                            | $\sigma_B = 95-145$                | $\sigma_T = 85-110$                                    | $\sigma_{-1} = 43-65$<br>$\tau_{-1} = 24-31$                           | _____                                              | 2,040                                            |
| 40ХНМА                            | $\sigma_B = 110-170$               | $\sigma_T = 85-160$                                    | $\sigma_{-1} = 50-70$<br>$\tau_{-1} = 27-38$                           | _____                                              | 2,040                                            |

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

$C$  - центр тяжести плоских сечений;

$A$  - площадь сечения;

$I_x, I_y$  - осевые моменты инерции сечения относительно главных осей;

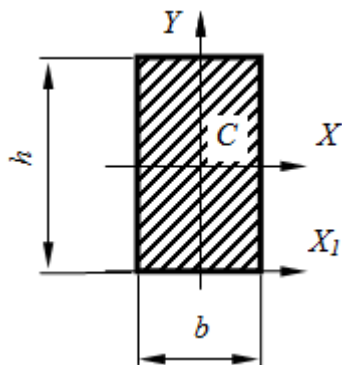
$I_{xI}, I_{yI}$  - осевые моменты инерции относительно вспомогательных осей;

$I_p$  - полярный момент инерции сечения;

$W_x, W_y$  - осевые моменты сопротивления;

$W_p$  - полярный момент сопротивления

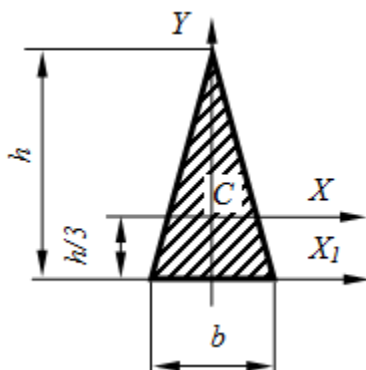
Прямоугольное сечение



$$A = bh, \quad I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{b^3h}{12}, \quad I_{xI} = \frac{bh^3}{3},$$

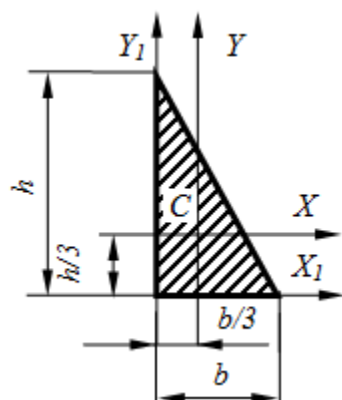
$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{b^2h}{6}.$$

Сечение – равнобедренный треугольник



$$A = \frac{bh}{2}, \quad I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{b^3h}{48}, \quad I_{xI} = \frac{bh^3}{12}.$$

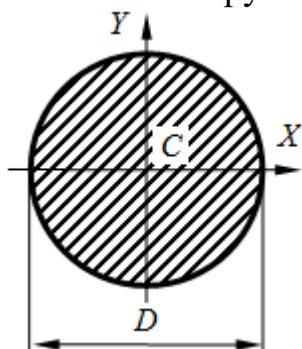
Сечение – прямоугольный треугольник



$$A = \frac{bh}{2}, \quad I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{b^3h}{36}, \quad I_{xI} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{yI} = \frac{b^3h}{12}.$$

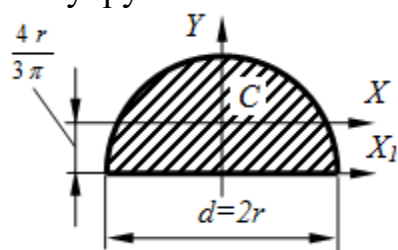
Сплошное – круглое сечение



$$A = \frac{\pi D^2}{4}, \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}, \quad I_\rho = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}, \quad W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}.$$

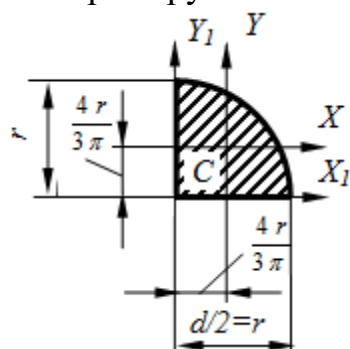
Полукруглое сечение



$$A = \frac{\pi d^2}{8}, \quad I_x = \frac{\pi d^4}{128} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) \approx 0,11r^4,$$

$$I_y = I_{xI} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} \approx 0,39r^4.$$

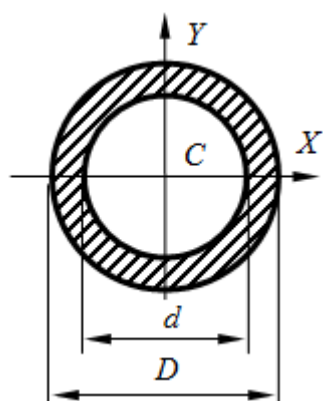
Четверть круглого сечения



$$A = \frac{\pi d^2}{16}, \quad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{256} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) \approx 0,055 r^4,$$

$$I_{xI} = I_{yI} = \frac{\pi d^4}{256} = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0,196 r^4.$$

## Кольцевое сечение

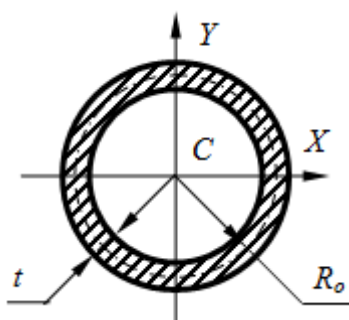


$$A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - c^2), \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4),$$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4), \quad W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4),$$

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4), \quad \text{где } c = \frac{d}{D}.$$

## Тонкостенное сечение (сечение трубы)



при  $R_o \gg t$

$$A = 2\pi R_o t, \quad I_x = I_y = \pi R_o^3 t, \quad I_\rho = 2\pi R_o^3 t,$$

$$W_x = W_y = \pi R_o^2 t, \quad W_\rho = 2\pi R_o^2 t.$$