



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины и наземный
транспорт»

РАСТЯЖЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело

18.03.01 Химическая технология

15.03.02 Технологические машины и оборудование

18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической
технологии, нефтехимии и биотехнологии

13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника

26.03.02 Кораблестроение, океанотехника и системотехника
объектов морской инфраструктуры

16.03.03. Холодильная криогенная техника и системы
жизнеобеспечения

20.03.02 Природообустройство и водопользование

26.05.07 Эксплуатация судового электрооборудования и средств
автоматики

26.05.06 Эксплуатация судовых энергетических установок

Астрахань 2024

Хахов А.А.

Растяжение прямого стержня. Методические указания и контрольные задания. – Астрахань: АГТУ, 2024. – 23с.

В пособии представлены теоретические сведения о растяжении и сжатии стержней, рассмотрен пример расчета стержня ступенчатого сечения и приведены контрольные задания.

Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика», «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»

Протокол заседания кафедры №2 от 28 февраля 2024 г.

Рецензент: Славин Р.Б., канд. техн. наук, доцент

© Хахов А.А., 2024

© Астраханский государственный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Модели формы.....	4
2. Силы и напряжения в поперечном сечении стержня	5
3. Перемещения и деформации.....	8
4. Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации	10
5. Расчёт стержня с учетом собственного веса.....	10
6. Механические характеристики материалов.....	11
7. Допускаемые напряжения.....	15
8. Условие прочности и жесткости конструкции.....	16
9. Пример расчета прямого стержня.....	16
10. Контрольные задания.....	21
Список литературы.....	23

1. МОДЕЛИ ФОРМЫ

Основными моделями формы в моделях прочностной надёжности являются:

- 1) брус,
- 2) пластина,
- 3) оболочка,
- 4) массив.

Брусом называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров (рис. 1.1). Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести площадей поперечных сечений бруса, называется *осью бруса*. Брус, работающий на растяжение, называется *стержнем*, на изгиб – *балкой*, на кручение – *валом*.

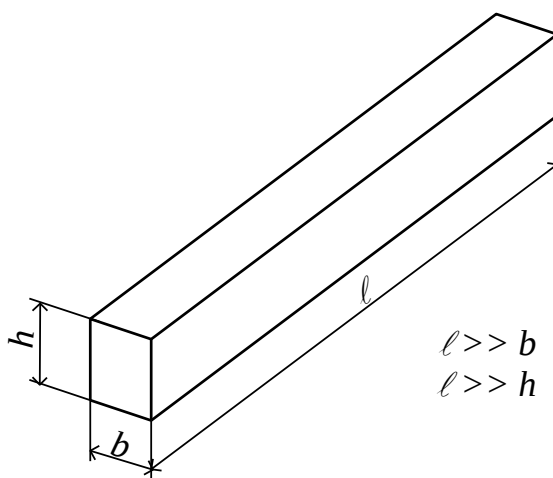


Рис. 1.1. Брус

Пластиной называется тело, ограниченное двумя плоскими или слабоизогнутыми поверхностями (рис. 1.2). Толщина пластины много меньше двух других размеров. Схеме пластины соответствуют плиты междуэтажных перекрытий, диски турбин и т.д.

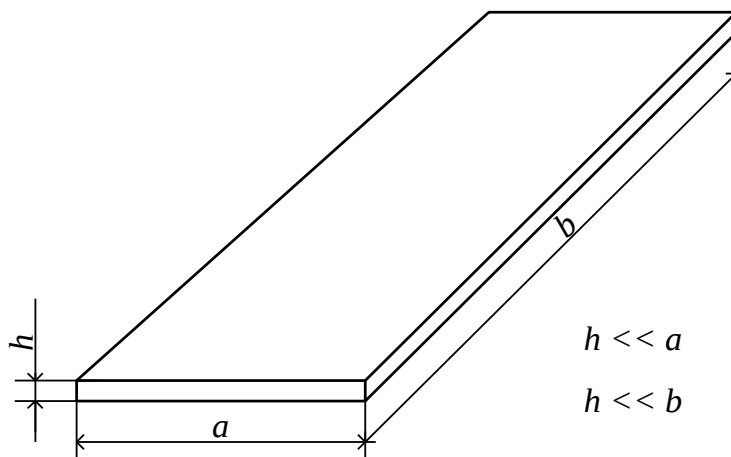


Рис. 1.2. Пластина

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя близкими криволинейными поверхностями. Расстояние между поверхностями – толщина оболочки – мало по сравнению с радиусами кривизны поверхностей (рис. 1.3). Оболочечной моделью описывается столь же большее количество конструкций, что и стержневой. Это трубопроводы, сосуды для хранения жидкостей и газов, корпуса химических аппаратов, кузова автомобилей и железнодорожных вагонов, корпуса самолётов и ракет, перекрытия концертных залов и стадионов и т.д.

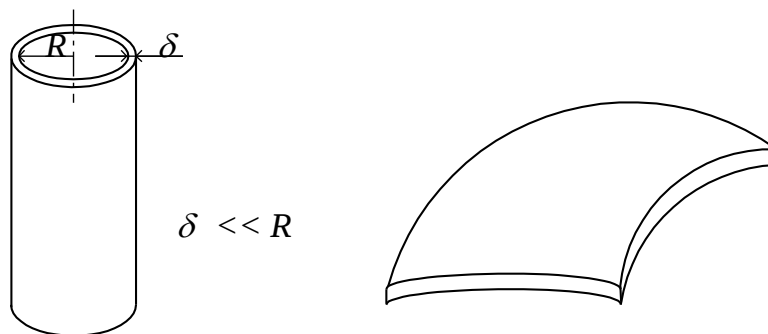


Рис. 1.3. Оболочки

Массивом называется тело, у которого все размеры одного порядка. Это могут быть элементы деталей машин (проушины, головки болтов, стержни с выточками или отверстиями). Этой модели соответствует значительно меньшее количество конструкций, чем стержневой или оболочечной (рис. 1.4).

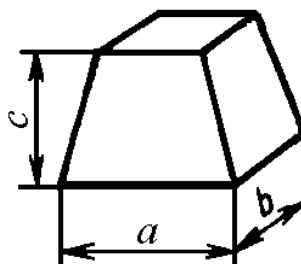


Рис. 1.4. Массив

В данном методическом пособии рассмотрены вопросы определения внутренних усилий, напряжений и деформаций стержней при их растяжении и сжатии.

2. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

Растяжение и сжатие весьма часто встречаются в элементах строительных конструкций и машин.

Если внутренние силы в поперечном сечении стержня сводятся только к одному силовому фактору – продольной силе N_z , а все остальные внутренние силы равны нулю, то имеет место центральное растяжение или сжатие.

Внешние силы, вызывающие растяжение или сжатие, приложенные к концевым или промежуточным сечениям стержня, должны быть также направлены по его оси или приводиться к равнодействующей, направленной по этой оси.

Передача сил P на этот стержень может быть осуществлена различными способами (рис. 2.1): можно, например, отогнуть концы стержня и захватить его за образовавшуюся петлю, можно изготовить стержень с буртиками и передать усилия через выступ, можно нарезать резьбу, можно сделать отверстие и в отверстие вставить палец. Всем этим, отличающимся друг от друга конструкциям, может быть поставлена в соответствие одна и та же расчётная схема (рис. 2.2). Это возможно благодаря справедливости принципа Сен-Венана, названному по имени французского учёного, сыгравшего большую роль в создании сопротивления материалов и теории упругости в середине XIX века.

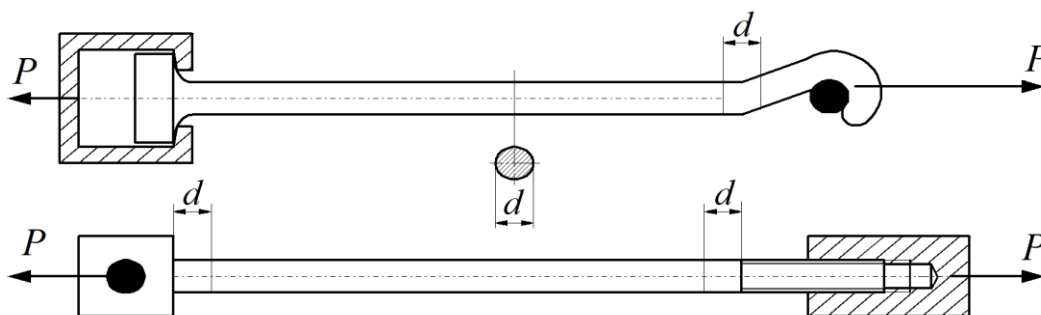


Рис. 2.1. Способы приложения внешних продольных сил к стержню

Принцип Сен-Венана утверждает следующее: *особенности приложения внешних сил сказываются на расстоянии, не превышающем характерный размер поперечного сечения*. Напряжения и деформации в стержне на достаточном удалении от мест захвата (равном характерному размеру поперечного сечения – диаметру d) будут одинаковы, если одинаковы приложенные силы. Применение принципа Сен-Венана позволяет существенно расширить общность основных расчётных формул сопротивления материалов, поскольку освобождает от необходимости учитывать конкретные особенности местного распределения сил.

Для определения внутренних продольных сил применяется метод сечений, который заключается в том, что стержень мысленно пересекается плоскостью, перпендикулярной оси стержня, на две части. Продольная сила N_z равна сумме проекций на ось стержня сил, действующих по одну сторону от сечения. Сила N_z считается положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

Рассмотрим расчётную схему стержня (рис. 2.2). Стержень рассекаем сечением $m-n$ и рассматриваем равновесие левой отсечённой части. Целесообразно неизвестную продольную силу N_z принимать положительной (растягивающей). Если при решении уравнения статики сила N_z получится со знаком « $-$ », то её направление надо поменять на противоположное и учитывать в дальнейшем расчёте, что стержень сжат. В нашем случае (рис. 2.2.):

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0, \\ N_z - P &= 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$N_z = P,$$

т.е. стержень растянут

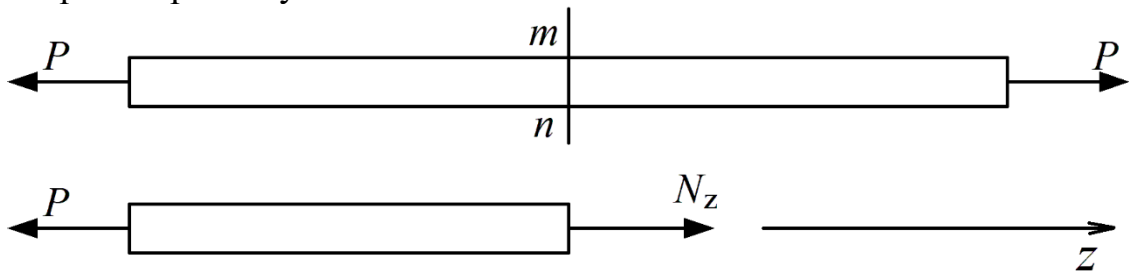


Рис. 2.2. Определение внутренней нормальной продольной силы методом сечений

В более сложных случаях нагружения стержня имеет смысл строить график изменения внутренних продольных сил по длине, называемый *эпюрой внутренних продольных сил*. На рис. 2.3 изображен стержень, находящийся под действием внешних сил, направленных вдоль оси z , и показана эпюра внутренних продольных сил.

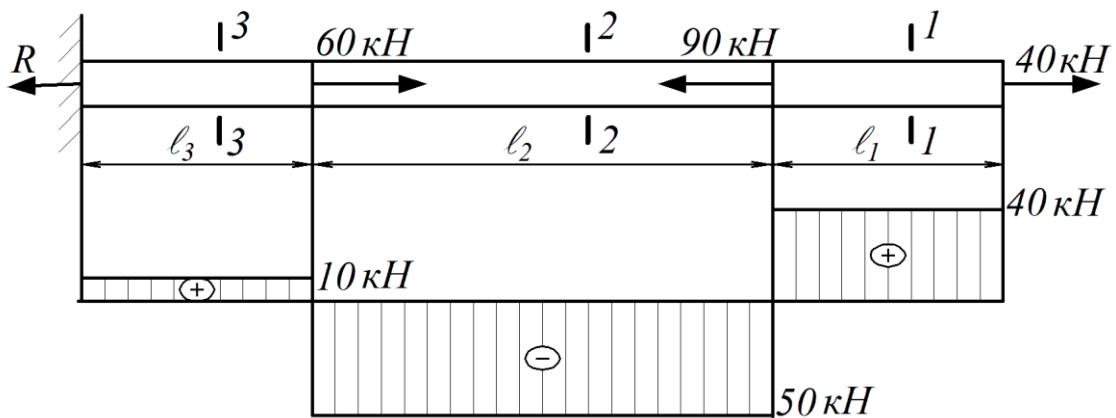
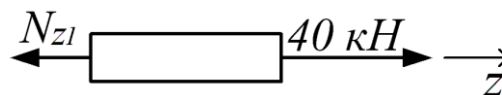


Рис. 2.3. Расчетная схема стержня и эпюра внутренних продольных сил

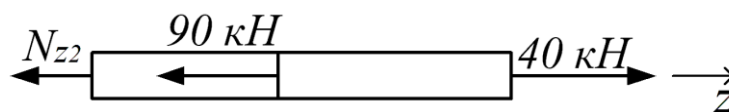
При построении эпюры N_z было рассмотрено равновесие отсечённых частей на каждом из участков с размерами l_1, l_2, l_3 :

1 участок



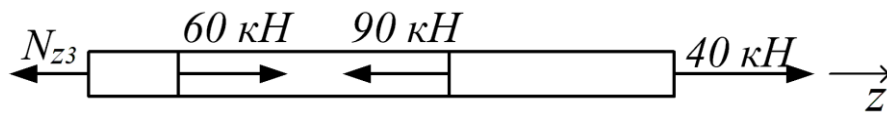
$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0; \\ 40 \text{ кН} - N_{z1} &= 0. \\ \text{Откуда } N_{z1} &= 40 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2 участок



$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0; \\ 40 \text{ кН} - 90 \text{ кН} - N_{z2} &= 0. \\ \text{Откуда } N_{z2} &= -50 \text{ кН}. \end{aligned}$$

3 участок



$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0; \\ 40 \text{ кН} - 90 \text{ кН} + 60 \text{ кН} - N_{z3} &= 0. \\ \text{Откуда } N_{z3} &= 10 \text{ кН}.\end{aligned}$$

При нахождении N_z рассматривалось равновесие правой отсечённой части. Это связано с тем обстоятельством, что реакция связи R не известна. Если бы реакция R была определена из уравнения статики, можно было бы рассматривать равновесие и левой отсечённой части. Построив эпюру N_z , получили $R = 10 \text{ кН}$.

С помощью построенной эпюры легко установить максимальное значение N_z , необходимое для расчёта на прочность. Так, в нашем примере получили $|N_{z\max}| = 50 \text{ кН}$. Это значение не совпадает ни с одной из внешних сил.

Продольная сила N_z , возникающая в поперечном сечении стержня, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределённых по площади поперечного сечения и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями зависимостью:

$$N_z = \int_A \sigma dA,$$

где σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dA ;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Согласно гипотезе Бернулли (гипотеза плоских сечений) все продольные волокна стержня деформируются одинаково, а это означает, что напряжения в поперечных сечениях одинаковы, т.е. $\sigma = \text{const}$.

В этом случае получаем

$$N_z = \sigma \int_A dA.$$

Откуда

$$\sigma = \frac{N_z}{A}.$$

Итак, в поперечных сечениях стержня при его растяжении (или сжатии) возникают равномерно распределённые нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

3. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

При растяжении стержня длиной l его длина увеличивается на величину Δl , а его диаметр d уменьшается на величину Δd (рис. 3.1).

Величина Δl называется абсолютной продольной деформацией, а Δd – абсолютной поперечной деформацией.

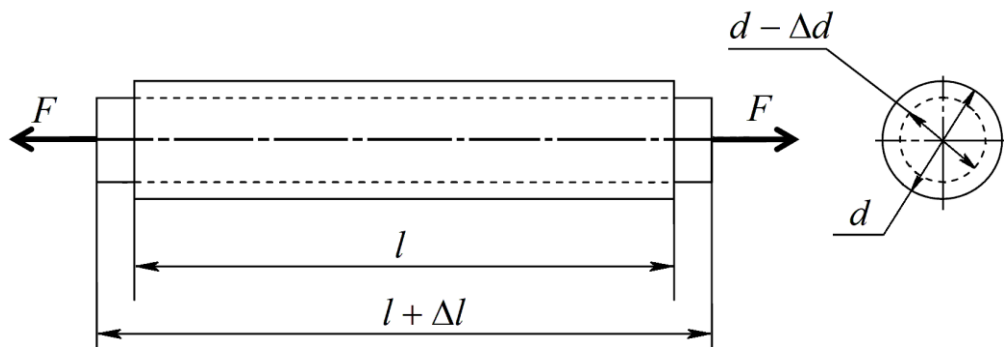


Рис. 3.1. Стержень круглого сечения до и после деформации растяжения

О степени деформирования стержня нельзя судить по значениям Δl и Δd , так как они зависят не только от действующих сил, но и от начальных размеров бруса. Для характеристики деформации стержня вводятся понятия: относительная продольная деформация ε и относительная поперечная деформация ε' , которые рассчитываются по зависимостям:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

Отношение $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона.

Для большинства материалов в стадии упругой деформации выполняется соотношение, представляющее собой математическое выражение закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – коэффициент пропорциональности, который получил название «модуль упругости первого рода».

Подставляя в выражение закона Гука σ и ε , получим зависимость для определения абсолютного удлинения бруса

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l},$$

Откуда

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Произведение EA называется жесткостью бруса при растяжении (сжатии).

Для ступенчатого стержня и стержня, нагруженного несколькими силами, удлинения подсчитываются по участкам с постоянными N_z и A и результаты суммируются алгебраически

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} l_i}{EA_i}.$$

Если эти величины изменяются по непрерывному закону, Δl вычисляется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}.$$

4. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Внешние силы при нагружении совершают работу на вызываемых ими перемещениях. Работа внешних сил W полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации U при статическом нагружении:

$$W = U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{N_z^2 l}{2EA}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации, накопленная в единичном объеме, определяется по зависимости:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N_z \Delta l}{2Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon.$$

5. РАСЧЁТ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Простейшим примером задачи о растяжении стержня с переменными по длине параметрами является задача о растяжении стержня под действием собственного веса (рис.5.1, а). Продольная сила N_z в поперечном сечении этого бруса (на расстоянии z от его нижнего конца) равна силе тяжести нижележащей части бруса (рис.5.1, б), т.е.

$$N_z = \gamma A z,$$

где γ – удельный вес материала стержня.

$$\sigma = \frac{N_z}{A} = \gamma z.$$

Продольная сила и напряжения меняются по линейному закону, достигая максимума в заделке. Осевое перемещение произвольного сечения равно удлинению вышерасположенной части бруса. Поэтому определить его нужно по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}$$

а интегрирование вести от текущего значения z до $z = l$:

$$u_z = \int_z^l \frac{N_z dz}{EA} = \int_z^l \frac{\gamma A z}{EA} dz = \frac{\gamma}{E} \int_z^l z dz = \frac{\gamma}{E} \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_z^l = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

Получили выражение для произвольного сечения стержня

$$u_z = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

При $z = 0$ перемещение наибольшее и равно удлинению стержня

$$u_{\max} = \Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

На рис.5.1, в, з, д приведены эпюры N_z , σ и u_z

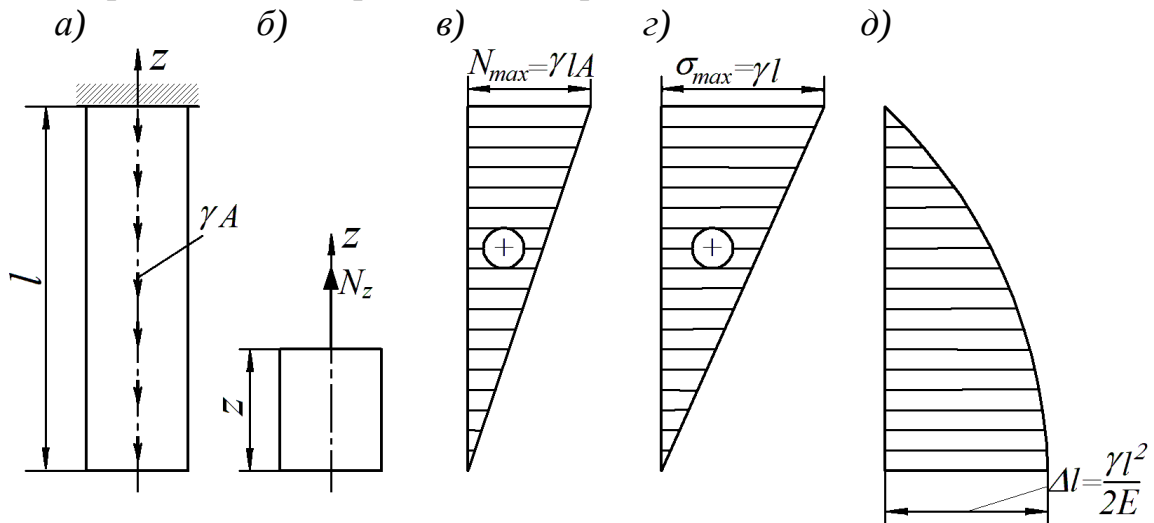


Рис. 5.1. Растяжение стержня под действием собственного веса

Если стержни, кроме собственного веса, нагружены ещё сосредоточенными продольными силами, то напряжения и деформации определяют на основе принципа независимости действия сил отдельно от сосредоточенных сил и от собственного веса, после чего результаты складывают.

Принцип независимости действия сил вытекает из линейной деформируемости упругих тел. Суть его заключается в том, что любая величина (напряжение, перемещение, деформация) от действия группы сил может быть получена как сумма величин, найденных от каждой силы в отдельности.

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Необходимые сведения о различных механических свойствах материала получают экспериментальным путем. Самым распространенным является испытание на растяжение стандартного образца.

Стандартные образцы чаще всего изготавливают цилиндрическими (рис.6.1). В цилиндрических образцах должно быть выдержано соотношение между расчётной длиной образца l_0 и диаметром d_0 : у длинных образцов $l_0=10d_0$ (рис. 6.1, а), у коротких $l_0=5d_0$ (рис. 6.1, б).

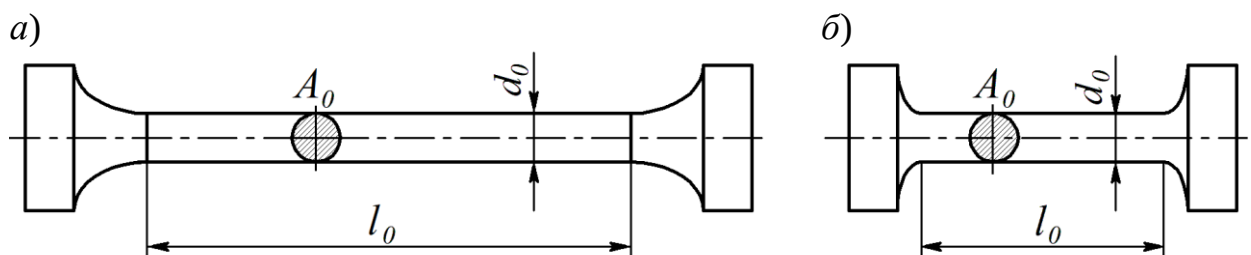


Рис. 6.1. Стандартные образцы круглого сечения

Для испытаний на растяжение применяют разрывные машины, позволяющие в процессе испытания записать диаграмму в координатах «нагрузка - абсолютное удлинение». Характер диаграммы растяжения зависит от свойств испытуемого материала и от скорости деформирования. Характерный вид такой диаграммы для малоуглеродистой стали при статическом приложении нагрузки изображен на рис. 6.2.

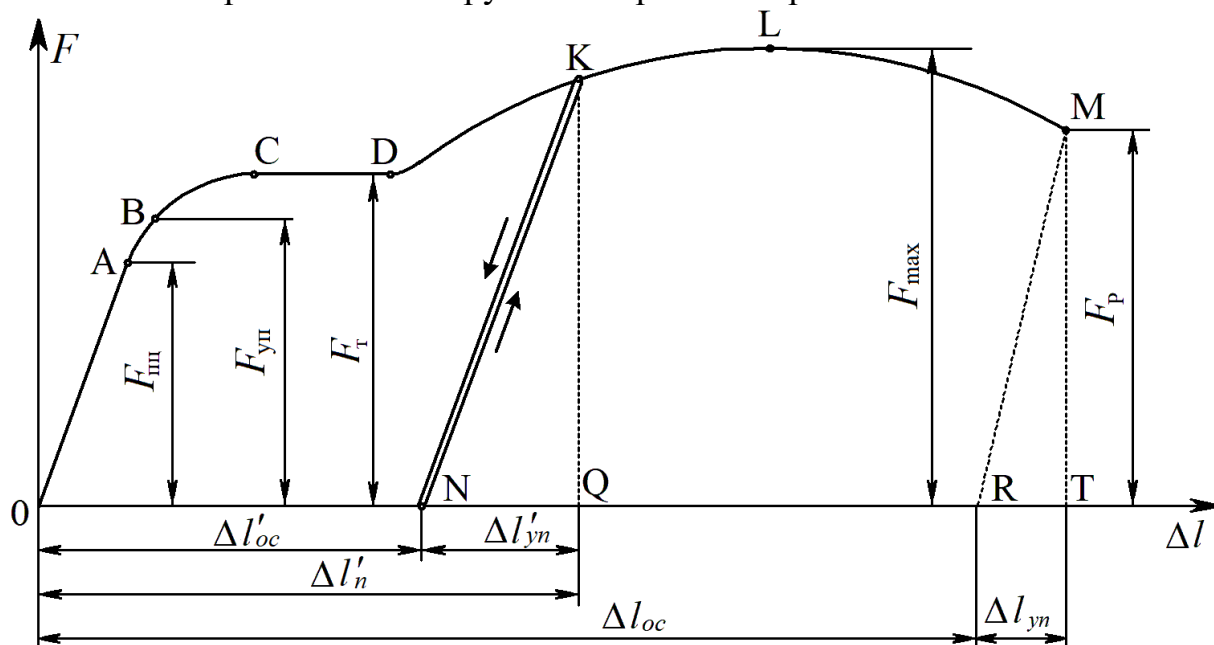


Рис. 6.2. Диаграмма растяжения стального образца в координатах «нагрузка-абсолютное удлинение»

Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы, а также соответствующие им стадии деформирования образца:

участок ОА – справедлив закон Гука;

участок АВ – появились остаточные (пластические) деформации;

участок ВС – пластические деформации растут;

участок CD – площадка текучести (рост деформации происходит при постоянной нагрузке);

участок DK – участок упрочнения (материал вновь приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации и воспринимает возрастающее до некоторого предела усилие);

точка К – испытание остановили и произвели разгрузку образца;

участок KN – линия разгрузки;

участок NKL – линия повторного нагружения образца (KL – участок упрочнения);

участок LM – участок падения нагрузки, в этот момент на образце появляется так называемая шейка - местное сужение;

точка М – разрыв образца.

После разрыва образец имеет вид, примерно показанный на рис. 6.3. Обломки можно сложить и измерить длину после испытания l_1 , а также диаметр шейки d_1 .

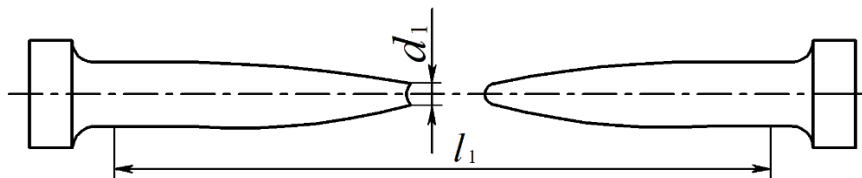


Рис. 6.3. Образец после разрыва

В результате обработки диаграммы растяжения и измерений образца получаем ряд механических характеристик, которые можно разделить на две группы – характеристики прочности и характеристики пластичности.

К характеристикам прочности относят:

1) *предел пропорциональности* - наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0};$$

2) *предел упругости* – наибольшее напряжение, до которого остаточная деформация при разгрузке не обнаруживается:

$$\sigma_{ун} = \frac{F_{ун}}{A_0};$$

3) *предел текучести* - напряжение, при котором деформация образца происходит при постоянном растягивающем усилии:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0};$$

4) *предел прочности (временное сопротивление)* – напряжение, соответствующее наибольшей силе:

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Напряжение в момент разрыва:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_0}.$$

Определяемое таким образом напряжение при разрыве весьма условно и не может быть использовано в качестве характеристики механических свойств стали. Условность состоит в том, что получено оно делением силы в момент разрыва на первоначальную площадь поперечного сечения образца, а не на действительную его площадь при разрыве, которая значительно меньше начальной вследствие образования шейки.

Характеристики пластичности – деформационные, поэтому определяются по данным измерения образца после разрушения. К ним относятся следующие величины.

1) *Остаточное удлинение*

$$\Delta l_{oc} = l_1 - l_0;$$

2) *Площадь шейки*

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4};$$

3) *Относительное удлинение после разрыва:*

$$\delta = \frac{\Delta l_{oc}}{l_0} \cdot 100\%.$$

Эта характеристика зависит не только от материала, но и от соотношения размеров образца. Именно поэтому стандартные образцы имеют фиксированное отношение $l_0 = 5d_0$ или $l_0 = 10d_0$ и величина δ приводится с индексом – δ_5 или δ_{10} , причём $\delta_5 > \delta_{10}$.

4) *Относительное сужение после разрыва:*

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%.$$

5) *Удельная работа деформации:*

$$a = \frac{W}{A_0 l_0},$$

где W – работа, затраченная на разрушение образца; находится как площадь, ограниченная диаграммой растяжения и осью абсцисс (площадь фигуры OABCDKLMR). Удельная работа деформации характеризует способность материала сопротивляться ударному действию нагрузки.

Из всех полученных при испытании механических характеристик основными характеристиками прочности являются предел текучести σ_T и предел прочности σ_B , а основными характеристиками пластичности – относительное удлинение δ и относительное сужение ψ после разрыва.

Чтобы получить диаграмму, характеризующую механические свойства материала, первичную диаграмму растяжения в координатах $F-\Delta l$ перестраивают в координатах $\sigma-\epsilon$. Так как ординаты $\sigma = F/A$ и абсциссы $\epsilon = \Delta l/l$ получают делением на постоянные, диаграмма имеет такой же вид, как и первоначальная (рис. 6.4, а).

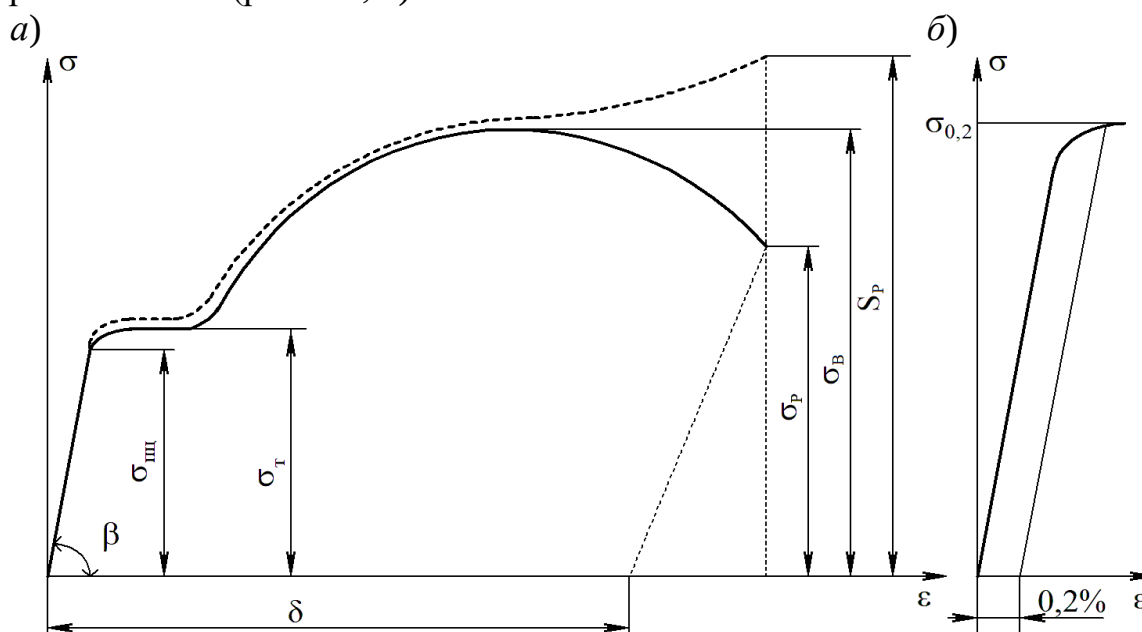


Рис. 6.4. Диаграммы растяжения образцов

Из диаграммы σ – ε видно, что на наклонном прямолинейном участке

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E.$$

Для некоторых конструкционных материалов, не имеющих площадки текучести, определяют условный предел текучести $\sigma_{0,2}$. За величину условного предела текучести принимают напряжение, при котором относительное остаточное удлинение равно 0,2% (рис. 6.4, б). Предел текучести σ_T , определяемый при наличии площадки текучести, часто называют физическим.

Нисходящий участок диаграммы носит условный характер, поскольку действительная площадь поперечного сечения образца после образования шейки значительно меньше первоначальной площади, по которой определяются координаты диаграммы. Можно получить истинное напряжение, если величину силы F_t в каждый момент времени t делить на действительную площадь поперечного сечения A_t в этот же момент времени:

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t}.$$

На рис. 6.4, а этим напряжениям соответствует штриховая линия. До предела прочности σ_t и σ практически совпадают. В момент разрыва истинное напряжение значительно превышает и предел прочности σ_B и тем более напряжение в момент разрыва σ_p . Выразим площадь шейки A_1 через ψ и найдем S_p .

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{A_0 - A_1}{A_0}, \\ A_1 &= A_0(1 - \psi), \\ S_p &= \frac{F_p}{A_0(1 - \psi)} = \frac{\sigma_p}{1 - \psi}. \end{aligned}$$

Для пластичной стали $\psi = 50..65\%$. Если принять $\psi = 50\% = 0,5$, то получим $S_p = 2\sigma_p$, т.е. истинное напряжение наибольшее в момент разрыва.

7. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Для деталей, изготовленных из пластичных материалов, действующие напряжения не должны превышать предела текучести σ_T . С этой целью вводят понятия допускаемых напряжений, которые рассчитываются по зависимости:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[s]},$$

где $[s]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности, который зависит от назначения детали, точности расчетных формул и ряда других факторов.

Для пластичных материалов, не имеющих физического предела текучести

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[s]}.$$

Для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{[s]}$$

8. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Прочность конструкции будет обеспечена, если максимальное напряжение в ней не будет превышать допускаемого напряжения

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

Для стержня, испытывающего напряжения растяжения, условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \leq [\sigma_p].$$

В ряде случаев для обеспечения нормальной работы машин и сооружений размеры их деталей должны быть выбраны так, чтобы кроме условия прочности обеспечивалось условие жёсткости

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} l_i}{EA_i} \leq [\Delta l],$$

где Δl – абсолютная продольная деформация стержня;

$[\Delta l]$ – допускаемая величина деформации.

Расчет на жёсткость обычно дополняет расчёт на прочность.

9. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Стальной стержень ступенчатого сечения (рис. 9.1) находится под действием внешней силы $F=10\text{кН}$ и собственного веса.

Площадь меньшего поперечного сечения $A=10\text{см}^2$. Площадь большего поперечного сечения стержня в 2 раза превышает меньшую.

Длины участков стержня: $a=3\text{м}$, $b=5\text{м}$, $c=4\text{м}$.

Необходимо построить эпюры нормальных продольных сил, нормальных напряжений и перемещения сечений стержня относительно жесткой заделки.

Модуль продольной упругости для стали принять равным $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, удельный вес $\gamma=78 \text{ кН/м}^3$.

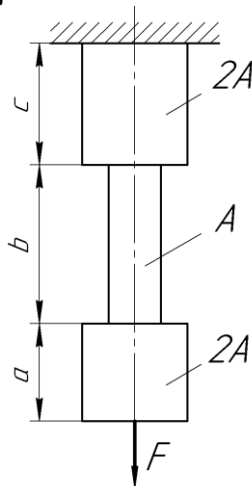


Рис. 9.1. Схема стержня

Решение

Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на отдельные участки, начиная от свободного конца.

Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и места изменения размеров поперечного сечения. Таким образом, заданный стержень имеет три участка (рис. 9.2, а):

- 1) 1 участок длиной a между сечениями, проходящими через точки 3 и 2;
- 2) 2 участок длиной b между сечениями, проходящими через точки 2 и 1;
- 3) 3 участок длиной c между сечениями, проходящими через точки 1 и 0.

Определяем интенсивности распределенной нагрузки от собственного веса на каждом участке:

$$q_1 = \gamma \cdot 2A = 78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 156 \frac{H}{м};$$

$$q_2 = \gamma \cdot A = 78 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 78 \frac{H}{м}.$$

Определяем реакцию связи R в жесткой заделке (рис. 9.2, б) из уравнения:

$$\sum F_z = 0;$$
$$F + q_1 a + q_2 b + q_1 c - R = 0.$$

Откуда

$$R = F + q_1 a + q_2 b + q_1 c = 10000 + 156 \cdot 3 + 78 \cdot 5 + 156 \cdot 4 = 11482 H.$$

Применяя метод сечений, будем оставлять нижнюю часть и отбрасывать верхнюю отсеченную часть стержня.

Определяем продольную силу N_z в сечениях стержня на каждом участке.

Рассмотрим 1 участок. На этом участке $0 \leq z \leq a$.

Проведем произвольное сечение $I-I$ на 1 участке и отбросим верхнюю отсеченную часть стержня (рис. 9.2, в).

Условие равновесия нижней части стержня

$$\sum F_z = 0;$$
$$F + q_1 z - N_{zI} = 0.$$

Откуда внутренняя продольная сила на 1 участке:

$$N_{zI} = F + q_1 z.$$

При $z = 0$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 3):

$$(N_{zI})_3 = 10000 + 156 \cdot 0 = 10000 H.$$

При $z = a$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 2):

$$(N_{zI})_2 = 10000 + 156 \cdot 3 = 10468 H.$$

Рассмотрим 2 участок. На этом участке $0 \leq z \leq b$.

Проведем произвольное сечение $II-II$ на 2 участке и отбросим верхнюю отсеченную часть стержня (рис. 9.2, г).

Условие равновесия нижней части стержня

$$\sum F_z = 0;$$

$$F + q_1 a + q_2 z - N_{zII} = 0.$$

Откуда внутренняя продольная сила на 2 участке:

$$N_{zII} = F + q_1 a + q_2 z.$$

При $z = 0$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 2):

$$(N_{zII})_2 = 10000 + 156 \cdot 3 + 78 \cdot 0 = 10468 \text{ Н}.$$

При $z = b$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 1):

$$(N_{zII})_1 = 10000 + 156 \cdot 3 + 78 \cdot 5 = 10858 \text{ Н}.$$

Рассмотрим 3 участок. На этом участке $0 \leq z \leq c$.

Проведем произвольное сечение III-III на 3 участке и отбросим верхнюю отсеченную часть стержня (рис. 9.2, д).

Условие равновесия нижней части стержня

$$\sum F_z = 0;$$

$$F + q_1 a + q_2 b + q_1 z - N_{zIII} = 0.$$

Откуда внутренняя продольная сила на 3 участке:

$$N_{zIII} = F + q_1 a + q_2 b + q_1 z.$$

При $z = 0$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 1):

$$(N_{zIII})_1 = 10000 + 156 \cdot 3 + 78 \cdot 5 + 156 \cdot 0 = 10858 \text{ Н}.$$

При $z = c$ (в поперечном сечении, проходящем через точку 0):

$$(N_{zIII})_0 = 10000 + 156 \cdot 3 + 78 \cdot 5 + 156 \cdot 4 = 11482 \text{ Н}.$$

Построим эпюру, показывающую как меняется N_z по длине стержня.

Для этого, проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольном масштабе значения продольных сил по оси ординат. Полученный график принято штриховать, при этом штриховка должна быть перпендикулярна оси стержня (рис. 9.2, е).

Определяем нормальные напряжения σ в сечениях стержня:

1) на 1 участке

в поперечном сечении, проходящем через точку 3:

$$(\sigma_I)_3 = \frac{(N_{zI})_3}{2A} = \frac{10000}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5 \text{ МПа};$$

в поперечном сечении, проходящем через точку 2:

$$(\sigma_I)_2 = \frac{(N_{zI})_2}{2A} = \frac{10468}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5,234 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,234 \text{ МПа}.$$

2) на 2 участке

в поперечном сечении, проходящем через точку 2:

$$(\sigma_{II})_2 = \frac{(N_{zII})_2}{A} = \frac{10468}{10 \cdot 10^{-4}} = 10,468 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,468 \text{ МПа};$$

в поперечном сечении, проходящем через точку 1:

$$(\sigma_{II})_1 = \frac{(N_{zII})_1}{A} = \frac{10858}{10 \cdot 10^{-4}} = 10,858 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,858 \text{ МПа}.$$

2) на 3 участке

в поперечном сечении, проходящем через точку 1:

$$(\sigma_{III})_1 = \frac{(N_{zIII})_1}{2A} = \frac{10858}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5,429 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,429 \text{ МПа};$$

в поперечном сечении, проходящем через точку 0:

$$(\sigma_{III})_0 = \frac{(N_{zIII})_0}{2A} = \frac{11482}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5,741 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,741 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 9.2, ж).

Определяем перемещения Δl сечений относительно жесткой заделки после деформации:

перемещение сечения 0:

$$\Delta l_0 = 0;$$

перемещение сечения 1 относительно жесткой заделки:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \Delta l_{1-0} = \int_0^c \frac{(N_{zIII}) dz}{E \cdot 2A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{((N_{zIII})_0 + (N_{zIII})_1) c}{E \cdot 2A} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(11482 + 10858) \cdot 4}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,0001064 \text{ м} = 0,1064 \text{ мм}; \end{aligned}$$

перемещение сечения 2 относительно сечения 1:

$$\begin{aligned} \Delta l_{2-1} &= \int_0^b \frac{(N_{zII}) dz}{E \cdot A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{((N_{zII})_1 + (N_{zII})_2) b}{E \cdot A} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(10858 + 10468) \cdot 5}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,0002539 \text{ м} = 0,2539 \text{ мм}; \end{aligned}$$

перемещение сечения 2 относительно жесткой заделки:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{2-1} = 0,1064 + 0,2539 = 0,3603 \text{ мм};$$

перемещение сечения 3 относительно сечения 2:

$$\begin{aligned} \Delta l_{3-2} &= \int_0^a \frac{(N_{zI}) dz}{E \cdot 2A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{((N_{zI})_2 + (N_{zI})_3) a}{E \cdot 2A} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(10468 + 10000) \cdot 3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,0000731 \text{ м} = 0,0731 \text{ мм}; \end{aligned}$$

перемещение сечения 3 относительно жесткой заделки:

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_{3-2} = 0,3603 + 0,0731 = 0,4334 \text{ мм};$$

По найденным значениям Δl строим эпюру перемещений (рис. 9.2, з).

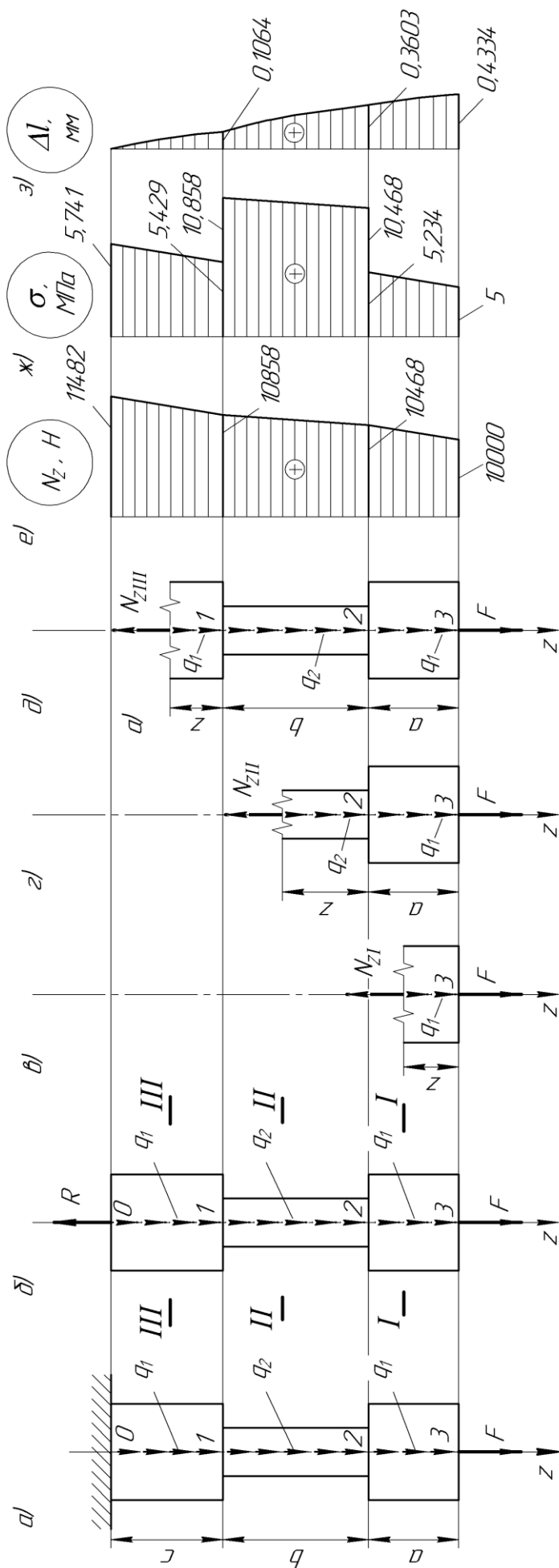


Рис. 9.2. Расчетная схема стержня и эпюры внутренних продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

10. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Стальной стержень ступенчатого сечения (рис. 10.1) находится под действием внешней силы F и собственного веса. Необходимо построить эпюры нормальных продольных сил, нормальных напряжений, перемещений сечений стержня относительно жесткой заделки. Площадь большего поперечного сечения стержня в 2 раза превышает меньшую.

Модуль продольной упругости для стали принять равным $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, удельный вес $\gamma=78$ кН/м³.

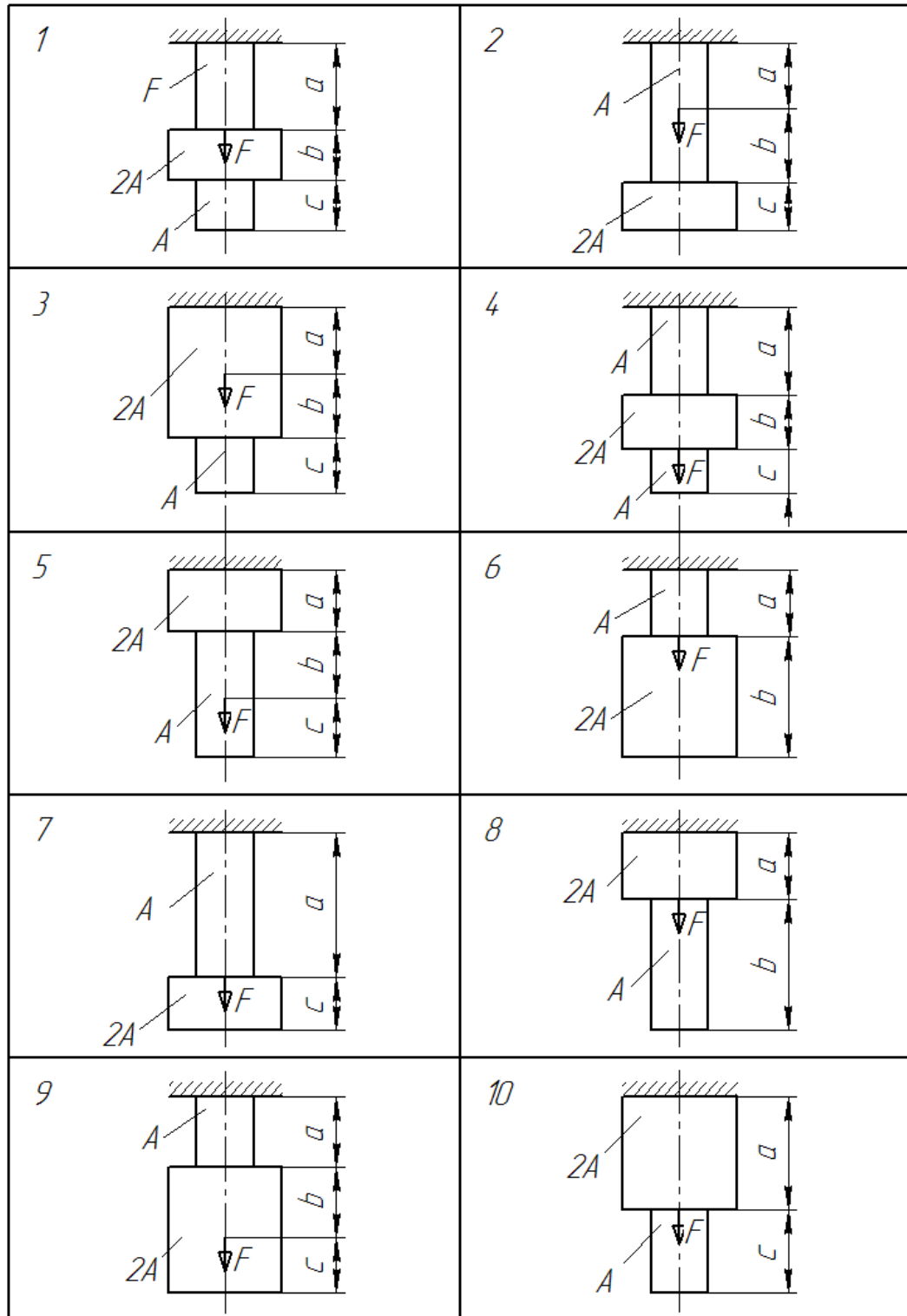


Рис. 10.1. Схемы стержней

Таблица 10.1.

Варианты числовых значений

Вариант	Нагрузка F , кН	Площадь сечения A , см ²	Длины участков, м		
			a	b	c
1	1,1	1,5	12	10	8
2	1,2	1,6	14	11	9
3	1,3	1,7	16	12	10
4	1,4	1,8	18	13	11
5	1,5	1,9	20	14	12
6	1,6	2,0	21	15	13
7	1,7	2,1	22	16	14
8	1,8	2,2	23	17	15
9	1,9	2,3	24	18	16
10	2,0	2,4	25	19	17

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробот В. А., Брусенцов А. С. Прикладная механика. – СПб.: Лань, 2022. - 180 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book>.
2. Затипякин А. М., Друзь И.Б., Гаманов В.Ф. Сопротивление материалов. - Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2019. - 196 с. - URL: <https://viewer.rsl.ru/ru/rsl07000487048?page=1&rotate=0&theme=white/>.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: учебник. - СПб.: Лань, 2022. - 556 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206420>.
4. Джамай В.В., Самойлов Е.А., Станкевич А.И., Чуркина Т.Ю. Прикладная механика: учебник для академического бакалавриата. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 360 с.
5. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 279 с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 432 с.

