Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания по выполнению самостоятельной работы

Направление подготовки
07.03.01 Архитектура

Профиль подготовки
Реконструкция зданий и сооружений

Квалификация (степень)
Бакалавр

Форма обучения
Очная

АСТРАХАНЬ – 2024

Автор: доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»
Хахов А.А.

Рецензент: ст. преподаватель кафедры «Архитектура», Баталова Е.Е.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по дисциплине «Теоретическая механика» утверждены на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»
28 июня 2024 г. протокол № 6

© Астраханский государственный технический университет, 2024

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по дисциплине «Теоретическая механика» предназначены для обучающихся по направлению подготовки 07.03.01 Архитектура профиль «Реконструкция зданий и сооружений» (профиль «Реконструкция зданий и сооружений»).

Цель методических указаний: оказание помощи обучающимся в выполнении самостоятельной работы по дисциплине «*Теоретическая механика*».

Настоящие методические указания содержат работы, которые позволят обучающимся самостоятельно овладеть теоретическими знаниями, практическими умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой деятельности и направлены на формирование следующих компетенций:

- ОПК-4: Способен применять методики определения технических параметров проектируемых объектов.

В результате выполнения самостоятельной работы по дисциплине «*Теоретическая механика»* обучающиеся должны по компетенции ОПК-4:

Знать:
- основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; - постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций
Уметь:
- выполнять сводный анализ исходных данных
Владеть:
- основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; - практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.

Описание самостоятельной работы содержит тему, задания, требования к выполнению конкретного задания по данной теме, порядок выполнения задания, формы контроля, требования к оформлению заданий. Для получения дополнительной, более подробной информации по изучаемым вопросам приведены рекомендуемые источники.

1. Перечень видов самостоятельной работы по дисциплине

Тема	Вид практической работы	Форма контроля	СРС		Требования к выполнению заданий (знание и/или умение и/или владение навыками)
			Аудиторная СРС	Внеаудиторная СРС	
Тема 1. Основные понятия и аксиомы статики. Сила, классификация сил. Сосредоточенные и распределённые силы. Проекция силы на ось и на плоскость. Классификация систем сил. Система сходящихся сил. Исследование условий равновесия системы сходящихся сил.	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 2. Произвольная плоская система сил: Момент	Конспектирование	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел;

силы. Условия равновесия плоской системы тел. Методы нахождения реакций связей в покоящейся системе сочленённых тел. Определение реакций связей балки с защемленным концом. Определение реакций связей двухопорной балки	Самостоятельное решение разноуровневых задач				постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 3. Пространственная система сходящихся сил. Произвольная пространственная система сил. Равновесие пространственных систем сил. Определение реакций опор плоской жесткой рамы. Определение усилия в стержнях, находящихся в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 4. Ферма. Статически определимые и неопределимые задачи. Определение реакций опор плит, находящихся в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил. Определение усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 5. Трение скольжения и трение качения. Центр тяжести. Координаты центра тяжести. Определение координат центра тяжести тел	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики;

					практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 6. Кинематика: кинематические характеристики движения точки при различных способах задания движения	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 7. Характеристики движения тела и его отдельных точек при поступательном, вращательном, плоскопараллельном движении	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 8. Динамика точки. Законы динамики материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки.	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.
Тема 9. Динамика механической системы. Теоремы о движении центра масс, об изменении количества движения, кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Принцип Д'Аламбера. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).	Конспектирование Самостоятельное решение разноуровневых задач	Устный опрос	+	+	**Знать:** основные подходы к формализации и моделированию равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о равновесии элементов строительных конструкций. **Уметь:** выполнять сводный анализ исходных данных. **Владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики; практическими навыками, необходимыми для выполнения и составления конструкторской документации и эскизов элементов конструкций.

Общее уравнение динамики (принцип Д'Аламбера-Лагранжа)					

2. Тематика и задания самостоятельной работы

Тема 1.
Основные понятия и аксиомы статики. Сила, классификация сил. Сосредоточенные и распределённые силы. Проекция силы на ось и на плоскость. Классификация систем сил. Система сходящихся сил. Исследование условий равновесия системы сходящихся сил.

Задачи данного типа могут решаться либо геометрическим (графическим) способом, либо аналитическим. При решении задач геометрическим (графическим) способом необходимо придерживаться следующего порядка:

1. Выделите тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразите все активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.
3. Освободите это тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.
4. Постройте замкнутый силовой многоугольник (или треугольник – если действуют три силы), сложив сначала все заданные силы, а затем достроив неизвестные силы.
5. Решите силовой многоугольник (по известным элементам определите неизвестные) или, если силовой многоугольник построен в масштабе, определите искомые силы по масштабу.

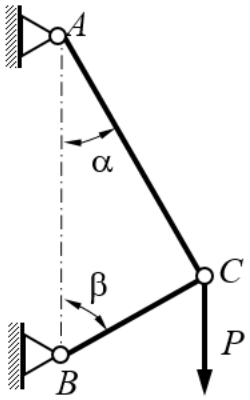
При решении задач аналитическим способом рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделите точку, равновесие которой надо рассмотреть.
2. Изобразите активные (заданные) силы.
3. Освободите точку от связей, приложив соответствующие реакции. При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой – число неизвестных величин должно быть не более двух или трёх (в случаях плоской и пространственной систем сходящихся сил соответственно).
4. Направьте оси координат.
5. Составить уравнения равновесия системы сходящихся сил, из которых определите неизвестные величины.

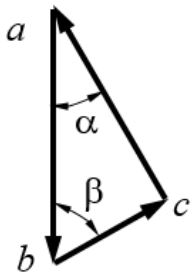
Типовое задание 1

Стержни *AC* и *BC* соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт *C* действует вертикальная сила $P = 1000$ Н.

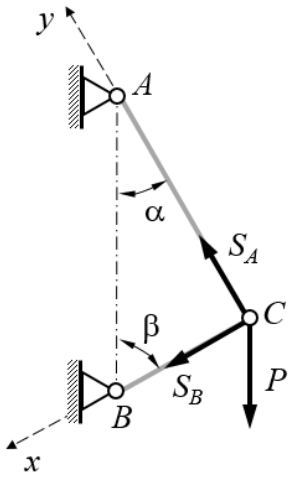
Определите реакции этих стержней на шарнирный болт *C*, если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.



Исходная схема



Замкнутый треугольник сил



Расчётная схема

Решение.

Рассмотрим два способа решения задачи – геометрический и аналитический.

I. *Геометрический способ*. Объектом исследования в данной задаче является болт *C*, нагруженный заданной силой $\overline{P}$ и соединяющий между собой стержни *AC* и *BC*, реакции которых нужно определить. Отбросим связи (стержни *AC* и *CB*), заменив их действие реакциями $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$.

Построим замкнутый треугольник *abc* для сил $\overline{P}$, $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ (так как болт *C* находится в равновесии), начав построение с известной силы $\overline{P}$, которую изобразим вектором $\overline{ab}$, тогда вектор $\overline{bc}$ определит силу $\overline{S}_B$, а вектор $\overline{ca}$ – силу $\overline{S}_A$. При этом следует учесть, что известны только направления реакций связей. Измерив отрезки $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$, найдём величины неизвестных сил $\overline{S}_B$ и $\overline{S}_A$, и задача будет графически решена.

Величины неизвестных сил $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ можно найти тригонометрически, решив силовой треугольник abc, поскольку в этом треугольнике известны сторона ab и два угла α и β. Итак, построим в масштабе вектор $\overline{ab}$ (который, как и $\overline{P}$, направлен вертикально вниз), из точки a под углом α проведём одну линию, из точки b под углом β проведём вторую линию до пересечения их в точке c, треугольники ΔABC и Δabc подобны.

По условию задачи $\alpha+\beta=90^\circ$, следовательно, Δabc – прямоугольный. Из этого треугольника находим:

$$S_B = P\ \sin\alpha = P\ \sin 30^\circ = 1000\cdot 0{,}5 = 500\ \text{Н},$$

$$S_A = P\ \cos\alpha = P\ \cos 30^\circ = 1000\cdot 0{,}866 = 866\ \text{Н}.$$

II. *Аналитический способ*. Выполним пункты 1-3 аналогично, как и при решении задачи геометрическим (графическим) способом. Продолжим решение данной задачи с пункта 4 – выберем систему координат. Так как угол между неизвестными силами $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ равен 90°, то удобнее всего направить оси координат по линиям действия этих сил – направим *Ox* по линии действия $\overline{S}_B$, а ось *Oy* – по линии действия $\overline{S}_A$.

Для данной плоской системы сходящихся сил составим 2 уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0:\ P\ \cos\beta + S_B = 0,$$

$$\text{откуда}\ S_B = -P\ \cos\beta = -1000\cdot 0{,}5 = -500\ \text{Н}.$$

$$\Sigma F_{ky} = 0:\ S_A - P\ \cos\alpha = 0;$$

$$\text{откуда}\ S_A = P\ \cos\alpha = 1000\cdot 0{,}866 = 866\ \text{Н}.$$

При аналитическом способе заранее неизвестно, в какую сторону направить реакции стрежней вдоль прямых *AC* и *BC*. Если в результате решения получим положительные значения, то реакции были направлены верно, если получим отрицательные, то выбранное направление реакции изменим на противоположное.

Ответ: $S_B = 500$ Н, $S_A = 866$ Н.

Требования к выполнению задания 1

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.

На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1

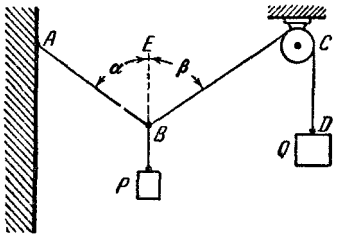
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.

Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1: Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Типовое задание 2:

Самостоятельное решение ситуационных задач (тренинг).



К веревке *AB*, один конец которой закреплен в точке *A*, привязаны в точке *B* груз *P* и веревка *BCD*, перекинутая через блок; к ее концу *D* привязана гиря *Q* весом 100 Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение *T* веревки *AB* и величину груза *P*, если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью *BE*, равны $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 60^\circ$.

Требования к выполнению задания 2 по теме: При подготовке к решению задач повторить соответствующие разделы учебника и учебных пособий по данной теме, конспектов лекций

Порядок выполнения задания 2: Изучить учебную информацию по теме, произвести её анализ, предложить вариант(ы) решения задач.

Требования к оформлению задания 2: Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы для проведения опроса по теме:

1. Предмет теоретической механики и ее связь с другими дисциплинами.
2. Определение статики

3. Понятия «равновесия» и «твердого тела» в статике
4. Определение силы и ее основные характеристики
5. Основные определения сил и их систем: «система сил», «уравновешенная система сил», (привести примеры).
6. Основные определения сил и их систем: «равнодействующая системы сил», «эквивалентная система сил» (привести примеры).
7. Подразделение сил на внешние и внутренние (привести примеры).
8. Подразделение сил на внешние и внутренние, сосредоточенные и распределенные силы (привести примеры)
9. Равнодействующая распределенной силы. Понятие о равнодействующей равномерно распределенной нагрузки, интенсивность распределенной нагрузки в частном и общем случаях, их вычисление, примеры
10. Проекции силы на оси координат, вычисление, основные тригонометрические тождества
11. Аксиомы статики: аксиома равновесия двух сил (понятие свободного тела)
12. Аксиомы статики: аксиома присоединения и исключения уравновешенной системы сил, ее следствие.
13. Аксиомы статики: аксиома параллелограмма сил. Сложение двух сил, приложенных в одной точке, векторным и аналитическим способами (привести примеры)
14. Аксиомы статики: аксиома равенства действия и противодействия. Образуют ли силы в рассматриваемой аксиоме уравновешенную систему сил?
15. Аксиомы статики: аксиома отвердевания (привести пример ее применения в статических расчетах)
16. Связи и их реакции (привести примеры). Классификация основных видов связей тел, лежащих в плоскости
17. Понятие «система сходящихся сил». Главный вектор системы сходящихся сил, его графическое и аналитическое вычисление. Когда равнодействующая системы сходящихся сил равна главному вектору (привести пример)?
18. Теорема о трех непараллельных силах (привести примеры)
19. Определение главного вектора системы сходящихся сил
20. Определение реакций связей системы сходящихся векторным способом
21. Определение реакций связей системы сходящихся аналитическим способом
22. Что называют масштабным коэффициентом при решении задач на определение условий равновесия системы сходящихся сил?
23. Общая методика решения задач статики (система сходящихся сил)

Рекомендуемые источники:

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016

2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301

3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093

5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570
7. Невенчанная, Т.О., Хохлова О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Курс теоретической механики. Статика: учеб. пособие/ Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова – М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2013. – 188 с.

Тема 2.
Произвольная плоская система сил: Момент силы. Условия равновесия плоской системы тел. Методы нахождения реакций связей в покоящейся системе сочленённых тел.
Определение реакций связей балки с защемленным концом.
Определение реакций связей двухопорной балки

При практическом решении задач можно пользоваться любой из трёх форм уравнений равновесия, однако, предпочтительнее выбрать первую (или основную) форму уравнений равновесия.

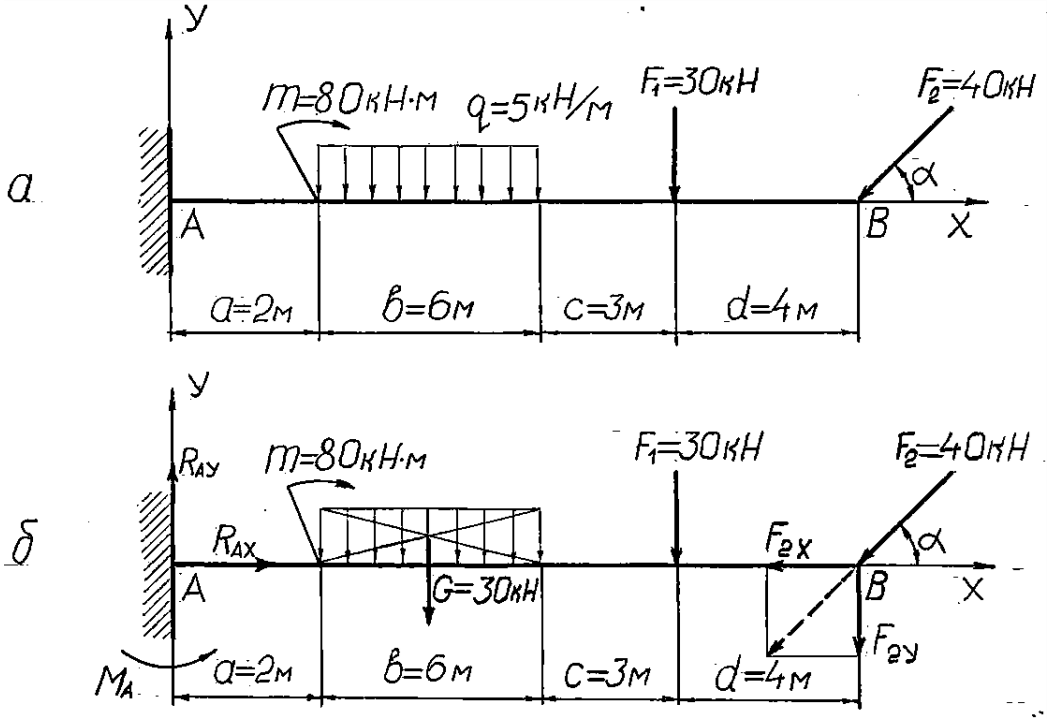
Оси координат и моментные точки можно выбирать произвольно. Для того, чтобы полученные уравнения равновесия содержали в своём составе только одну неизвестную величину, целесообразно выбирать направления координатных осей перпендикулярно к направлению искомых неизвестных реакций (сил). За счёт того, что искомые неизвестные реакции (силы) при подобном выборе окажутся по направлению перпендикулярными к осям координат, при составлении уравнений проекций эти неизвестные в уравнения проекций не войдут. В качестве моментных точек следует выбирать такие точки, в которых пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных реакций (сил), тогда в уравнении моментов будет содержаться только одна неизвестная искомая реакция (сила, момент).

Порядок решения задач:

1. Выделить объект исследования – твёрдое тело, равновесие которого надо рассмотреть.
2. Изобразить на расчётной схеме все активные (заданные) силы.
3. Проанализировать наложенные связи. Примените аксиому освобождаемости от связей, приложите соответствующие реакции. Проверьте условие статической определимости задачи: число неизвестных величин должно быть не более трёх.
4. Направить оси координат, выберите моментные точки.
5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.
6. Решить систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин. Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остается прежним).
7. Выполнить проверку правильности решения, составив не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций. При составлении уравнения проверки правильности решения учитывайте исправленные направления реакций. В случае равенства нулю алгебраической суммы проекций или моментов считается, что проверка сошлась, и задача решена правильно.

Типовое задание 1

Консольная одноопорная (защемлённая) балка нагружена сосредоточенным моментом m = 80 кН·м, вертикальной сосредоточенной силой F_1 = 30 кН, наклонной под углом α = 30º к оси балки сосредоточенной силой F_2 = 40кН и распределённой нагрузкой с интенсивностью q = 5кН/м. Длины участков балки: a = 2 м; b = 6 м; c = 3 м и d = 4 м. Определить реакции в заделке.



Решение

1. На плоской расчётной схеме обозначаем две оси плоской системы координат: горизонтальную ось – X и вертикальную – ось Y, точку пересечения осей обозначим буквой A.

2. Для удобства выполнения расчёта наклонную под углом α силу F_2 раскладываем на две составляющие: горизонтальную $F_2 \cdot \cos\alpha$ – она направлена влево по отрицательному направлению оси X и вертикальную $F_2 \cdot \sin\alpha$ – она направлена по отрицательному направлению оси F_Y.

3. Проводим замену распределённой нагрузки сосредоточенной, величина которой $G = qb = 5 \cdot 6 = 30$ кН. Её точка приложения в середине участка b.

4. Считаем, что в силу малой высоты балки все её точки находятся на одной прямой, и все три неизвестные реакции в заделке приложены в одной точке A. Реакции представлены двумя составляющими: вертикальной – R_{AY} и горизонтальной – R_{AX}, и реактивным моментом M_A. Наносим на расчётной схеме, см. рисунок 11*б*, возможные направления реакций. В заделке, в точке A вертикальную составляющую реакции R_{AY} предварительно направляем вверх по положительному направлению оси Y, а горизонтальную составляющую – R_{AX} направляем вправо, чтобы она компенсировала горизонтальную составляющую разложенной силы F_2; реактивный момент M_A относительно точки A направляем против часовой стрелки.

После приложения в заделке, в точке A трёх реакций имеем систему с двумя неизвестными реакциями R_{AY} и R_{AX} и неизвестным реактивным моментом M_A.

Статика теоретической механики для таких систем позволяет составить три уравнения равновесия, решая которые, определяют неизвестные реакции R_{AY}, R_{AX} и неизвестный реактивный момент M_A,:

$$\sum_0^n F_Y = 0;$$

$$\sum_0^n F_X = 0;$$

$$\sum_0^n m_A(F) = 0 \cdot$$

Составляем первое уравнение проекций всех сил на вертикальную ось *Y* и, решая это уравнение, определяем реакцию R_{AY}:

$$\sum_0^n F_Y = R_{AY} - G - F_1 - F_2 \sin\alpha = 0;$$

$R_{AY} = G + F_1 + F_2 \cdot \sin\alpha = 30 + 30 + 40 \cdot \sin 30^\circ = 80$ кН.

$R_{AY} = 80$ кН.

Реакция R_{AY} получилась со знаком «плюс», значит её направление было выбрано правильно.

Составляем второе уравнение проекций всех сил на горизонтальную ось *X* и, решая это уравнение, определяем реакцию R_{AX}:

$$\sum_0^n F_X = R_{AX} - F_2 \cos\alpha = 0;$$

$R_{AX} = F_2 \cdot \cos\alpha = 40 \cdot \cos 30^\circ = 34{,}64$ кН.

$R_{AX} = 34{,}64$ кН.

Реакция R_{AX} получилась со знаком «плюс», значит её направление было выбрано правильно.

Составляем третье уравнение моментов относительно точки *A* в заделке и, решая это уравнение, определяем реактивный момент M_A:

$$\sum_0^n m_A(F) = -M_A + m + G(a + b/2) + F_1(a + b + c) + F_2 \sin\alpha(a + b + c + d);$$

$M_A = + m + G\cdot(a + b/2) + F_1\cdot(a + b + c) + F_2\cdot\sin\alpha\cdot(a + b + c + d) =$
$= 80 + 30 \cdot (2 + 6/2) + 30 \cdot (2+6+3) + 40 \cdot \sin 30^\circ(2+6+3+4) = 860$ кН

$M_A = 860$ кН.

Реактивный момент M_A получился со знаком «плюс», значит его направление было выбрано правильно.

ПРОВЕРКА.

Проверку правильности решения проводим по уравнению моментов относительно точки *B*:

$$\sum_0^n m_B(F) = 0;$$

$$\sum_0^n m_B(F) = R_{AY}(a + b + c + d) - M_A + m - G(b/2 + c + d) - F_1 d = 0;$$

$80\cdot(2 + 6 + 3 + 4) - 860 + 80 - 30\cdot(6/2 + 3 + 4) - 30\cdot 4 = 0;$
$1200 - 860 + 80 - 300 - 120 = 0;$
$1280 - 1280 = 0.$

$1280 \equiv 1280.$

Решение выполнено верно

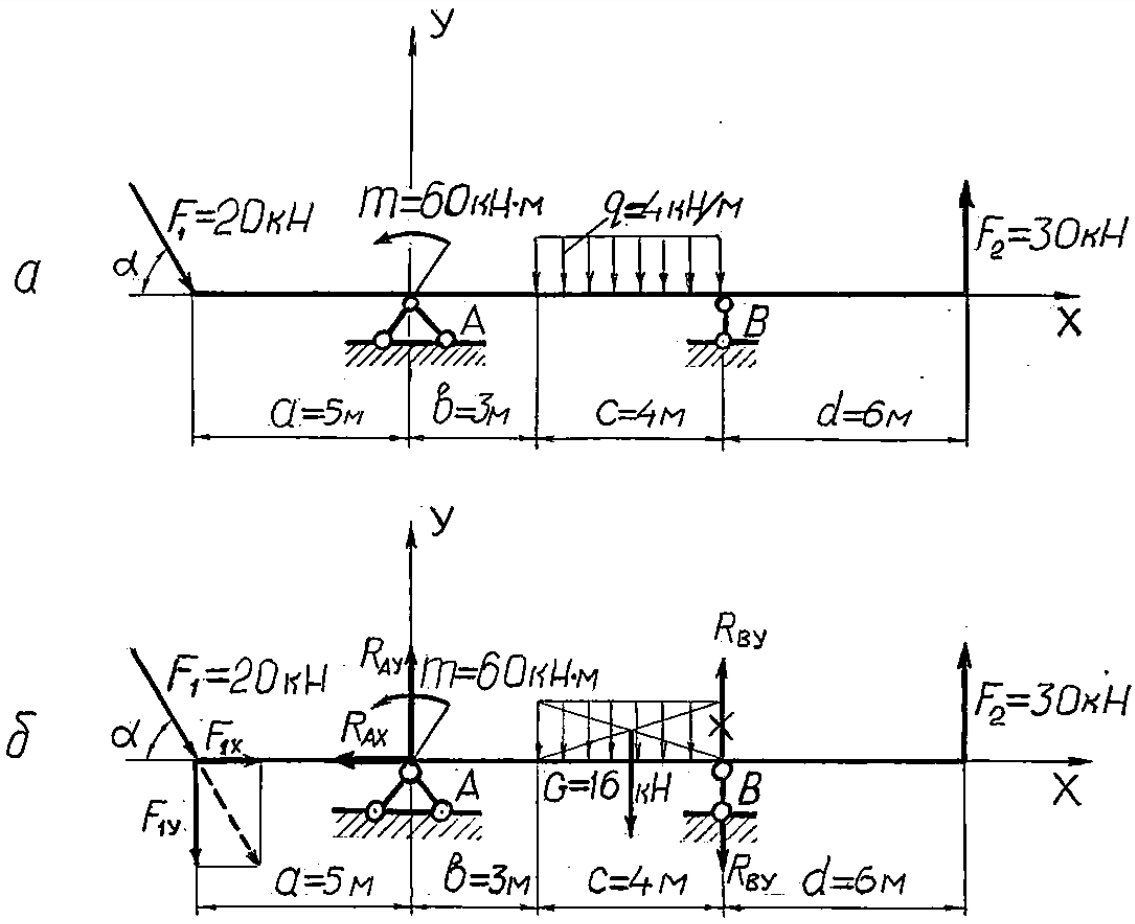
Требования к выполнению задания 1:
Сделать библиографическое описание документа.
Осмыслить основное содержание текста, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить план текста – основу конспекта, сформулируйте его пункты и определите, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1:
Составить план конспекта, распределите собранный материал в необходимой логической последовательности.
Композиционно оформите конспект.
Изучить учебную информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Типовое задание 2

Двухопорная балка с шарнирными опорами нагружена сосредоточенным моментом m = 60 кН·м, наклонной под углом α = 60º к оси балки сосредоточенной силой F_1 = 20 кН, вертикальной сосредоточенной силой F_2 = 30 кН и распределённой нагрузкой с интенсивностью q = 4 кН/м. Длины участков балки: a = 5 м, $в$ = 3 м, c = 4м и d = 6 м. Определить реакции опор.



Решение

1. На плоской расчётной схеме обозначаем левую опору буквой *A*, а правую – буквой *B*, а также проводим две оси плоской системы координат: горизонтальную ось – *X* и вертикальную ось – *Y* через опору *A*.

2. Для удобства выполнения расчёта наклонную под углом α силу F_1 раскладываем на две составляющие: горизонтальную $F_1 \cdot \cos\alpha$ – она направлена вправо по положительному направлению оси *X* и вертикальную $F_1 \cdot \sin\alpha$ – она направлена по отрицательному направлению оси *Y*.

3. Проводим замену распределённой нагрузки сосредоточенной, величина которой $G = q \cdot c = 4 \cdot 4 = 16$ кН. Её точка приложения в середине участка *c*.

4. На расчётной схеме прикладываем и обозначаем реакции в опорах. Левая опора *A* шарнирно-неподвижная, она имеет две составляющие реакции: вертикальную R_{AY} и горизонтальную R_{AX}. Вертикальную R_{AY} предварительно направляем вверх по положительному направлению оси *Y*. Если в процессе расчёта она получится со знаком «минус», то тогда её направление необходимо будет сменить на противоположное. А горизонтальную составляющую R_{AX} направим влево, чтобы она компенсировала горизонтальную составляющую, разложенной силы F_1.

Правая опора *B* – шарнирно-подвижная, она имеет одну составляющую реакции – вертикальную, перпендикулярную оси балки – R_{BY}. Предварительно направляем её вверх по положительному направлению оси *Y*.

После приложения реакций в опорах *A* и *B*, имеем систему с тремя неизвестными реакциями R_{AY}, R_{BY} и R_{AX}.

Статика теоретической механики для таких систем позволяет составить три уравнения равновесия, решая которые, определяют неизвестные реакции R_{AY}, R_{BY} и R_{AX} :

$$\sum_0^n m_A(F) = 0;$$

$$\sum_0^n m_B(F) = 0;$$

$$\sum_0^n F_X = 0.$$

5. Составляем первое уравнение моментов относительно опоры *A* и, решая это уравнение, определяем реакцию R_{BY}:

$$\sum_0^n m_A(F) = -F_1 \sin\alpha \cdot a - m + G\left(b + \frac{c}{2}\right) - R_{BY}(b+c) - F_2(b+c+d) = 0;$$

$$R_{BY} = \left[-F_1 \sin\alpha \cdot a - m + G\left(b + \frac{c}{2}\right) - F_2(b+c+d) \right] \Big/ (b+c) =$$

$$= [-20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 - 60 + 16 \cdot (3 + 4/2) - 30 \cdot (3 + 4 + 6)] / (3+4) = -65{,}3 \text{ кН}.$$

$$R_{BY} = -65{,}3 \text{ кН}.$$

Реакция R_{BY} получилась со знаком «минус». Это говорит о том, что её необходимо направить в противоположную сторону.

6. Составляем второе уравнение моментов относительно опоры *B* и, решая это уравнение, определяем реакцию R_{AY}.

$$\sum_0^n m_B(F) = -F_1 \sin\alpha \cdot (a+b+c) - m + R_{AY}(b+c) - G\frac{c}{2} - F_2 d = 0;$$

$$R_{AY} = \left[F_1 \sin\alpha \cdot (a+b+c) + m + G\frac{c}{2} + F_2 d \right] \Big/ (b+c) =$$

$$= [20 \cdot \sin 60^\circ \cdot (5+3+4) + 60 + 16 \cdot 4/2 + 30 \cdot 6] / (3+4) = 68{,}7 \text{кН}.$$

$$R_{AY} = 68{,}7 \text{кН}.$$

7. Проверка правильности выполненного решения по определению вертикальных составляющих реакций в опорах *A* и *B*.

Для проверки составляем уравнение:

$\sum_{0}^{n} F_Y = 0$ – сумма проекций всех сил (внешних и вертикальных составляющих реакций в опорах *A* и *B*) на вертикальную ось *Y*.

$$\sum_{0}^{n} F_Y = -F_1 \sin\alpha + R_{AY} - G - R_{BY} + F_2 = 0 \cdot$$

–20 ·sin60º + 68,7–16 – 65,3 + 30 = 0;

–98,7 + 98,7 = 0;

0 ≡ 0.

Решение выполнено верно.

Составляем третье уравнение проекций всех сил на горизонтальную ось *X* и, решая это уравнение, определяем реакцию R_{AX}:

$$\sum_{0}^{n} F_X = 0.$$

$$\sum_{0}^{n} F_X = F_1 \cos\alpha - RAX = 0$$

$R_{AX} = F1 \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 60^\circ = 10$ кН.

$R_{AX} = 10$ кН.

Требования к выполнению задания 2

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.

На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 2

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.

Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 2

Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Рекомендуемые источники:

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016

2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301

3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093
5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570
7. Невенчанная, Т.О., Хохлова О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Курс теоретической механики. Статика: учеб. пособие/ Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова – М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2013. – 188 с.

Тема 3
Пространственная система сходящихся сил. Произвольная пространственная система сил. Равновесие пространственных систем сил.
Определение реакций опор плоской жесткой рамы.
Определение усилия в стержнях, находящихся в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил

При практическом решении задач необходимо использовать уравнения равновесия.

Оси координат и моментные точки можно выбирать произвольно. Для того, чтобы полученные уравнения равновесия содержали в своём составе только одну неизвестную величину, целесообразно выбирать направления координатных осей перпендикулярно к направлению искомых неизвестных реакций (сил). За счёт того, что искомые неизвестные реакции (силы) при подобном выборе окажутся по направлению перпендикулярными к осям координат, при составлении уравнений проекций эти неизвестные в уравнения проекций не войдут. В качестве моментных точек следует выбирать такие точки, в которых пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных реакций (сил), тогда в уравнении моментов будет содержаться только одна неизвестная искомая реакция (сила, момент).

Порядок решения задач:

1. Выделить объект исследования – твёрдое тело, равновесие которого надо рассмотреть.
2. Изобразить на расчётной схеме все активные (заданные) силы.
3. Проанализировать наложенные связи. Примените аксиому осовбождаемости от связей, приложите соответствующие реакции. Проверьте условие статической определимости задачи: число неизвестных величин должно быть не более трёх.
4. Направить оси координат, выберите моментные точки.
5. Составить уравнения равновесия произвольной системы сил.
6. Решить систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин. Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остается прежним).

7. Выполнить проверку правильности решения, составив не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций. При составлении уравнения проверки правильности решения учитывайте исправленные направления реакций. В случае равенства нулю алгебраической суммы проекций или моментов считается, что проверка сошлась, и задача решена правильно.

Типовое задание 1.

Жёсткая рама *AB*, размеры которой указаны на рис. 1 (*a*=1м), закреплена шарнирно в неподвижной точке *A*, а правым концом опирается с помощью шарнирно-подвижной опоры на гладкую вертикальную плоскость. Левая часть рамы нагружена распределённой по линейному закону нагрузкой интенсивностью *q*=2кН/м. К раме приложены силы F_1 =20 кН и F_2=10кН, расположенные под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, а также пара сил с моментом *M*=4кН·м. *Определите* реакции опор заданной конструкции.

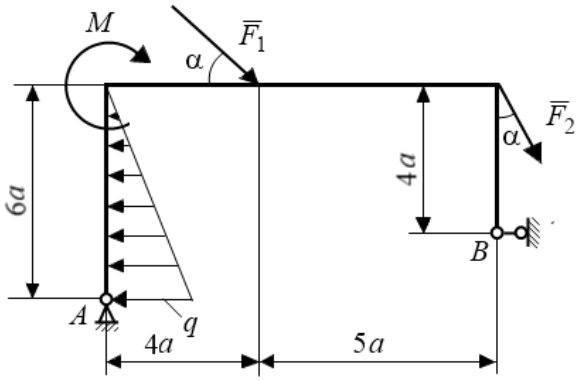


Рис. 1. Исходная схема

Решение.

1. Объектом исследования является жёсткая рама *AB*. Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на жёсткую раму *AB*.

2. Покажем на расчётной схеме (рис. 2) рамы действующие силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, пару сил с моментом *M*, распределённую по линейному закону нагрузку заменим равнодействующей $\overline{Q}$, по модулю равной:

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot 6a = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \ (\text{кН})$$

и прикладываемой на расстоянии $6a / 3$ от точки *A*.

3. Мысленно отбрасываем связи в точках *A* и *B* и заменям их реакциями $\overline{R}_B; \overline{X}_A; \overline{Y}_A$

.4. Проводим через точку *A* оси координат *Axy* и выбираем её в качестве моментной точки.

5. Составляем три уравнения равновесия для данной произвольной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \ -X_A - Q + F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \sin\alpha - R_B = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \ -Y_A - F_1 \cdot \sin\alpha - F_2 \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\Sigma m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0; \ Q \cdot 2a - M - F_1 \cdot 6a \cdot \cos\alpha - F_1 \cdot 4a \cdot \sin\alpha - F_2 \cdot 6a \cdot \sin\alpha -$$

$$-F_2 \cdot 9a \cdot \cos\alpha + R_B \cdot 2a = 0.$$

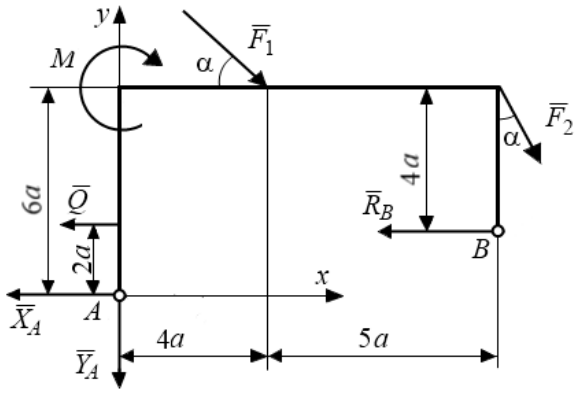


Рис. 2. Расчетная схема

6. Решаем полученную систему уравнений равновесия.

Из последнего уравнения находим R_B:

$$R_B = M/2 + F_1 \cdot \left(3\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ\right) + F_2 \cdot \left(3\sin 30^\circ - 4{,}5\cos 30^\circ\right) - Q =$$

$$= 4/2 + 20 \cdot \left(3\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ\right) + 10 \cdot \left(3\sin 30^\circ - 4{,}5\cos 30^\circ\right) - 6 \approx 122 \ (\text{кН}).$$

Из первого уравнения определяем X_A:

$$X_A = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ - Q - R_B = 20 \cdot \cos 30^\circ + 10 \cdot \cos 30^\circ - 6 - 122 =$$

$$= -105{,}68 \ (\text{кН}).$$

Из второго уравнения определяем Y_A:

$$Y_A = -F_1 \cdot \sin 30^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = -20 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \sin 30^\circ = -18{,}66 \ (\text{кН}).$$

7. Выполним проверку правильности решения. Составим сумму моментов относительно точки *B*:

$$\Sigma m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0; \ -M - F_1 \cdot 4a \cdot \cos\alpha + F_1 \cdot 5a \cdot \sin\alpha - F_2 \cdot 4a \cdot \sin\alpha - X_A \cdot 2a + Y_A \cdot 9a = 0;$$

$$-4 - 20 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 20 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ - \left(-105{,}68\right) \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+\left(-18{,}66\right) \cdot 9 \cdot 1 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Ответ: $X_A = -105{,}68 \ (\text{кН}); \ Y_A = -18{,}66 \ (\text{кН}); \ R_B = 122 \ (\text{кН}).$

Знак «минус» свидетельствует о том, что составляющая реакции связи должна быть направлена в другую сторону.

Требования к выполнению задания 1

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.

На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.

Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1

Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Типовое задание 2

Конструкция состоит из невесомых стержней *1, 2, ..., 6,* соединенных друг с другом (в узлах K и M) и с неподвижными опорами A, B, C, D шарнирами В узлах K и M приложены силы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, образующие с координатными осями углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно (на рисунке показаны только углы α_1, β_1, γ_1).

Д а н о: $P = 100$ Н, $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 45°$; $Q = 50$ Н, $\alpha_2 = 45°$, $\beta_2 = 60°$, $\gamma_2 = 60°$, $\psi = 30°$, $\varphi = 60°$, $\delta = 74°$.

О п р е д е л и т ь: усилия в стержнях *1—6.*

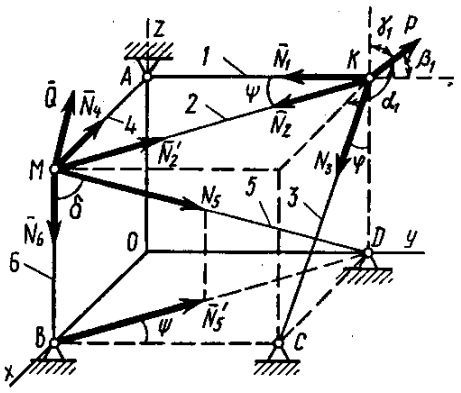
Решение

Рассмотрим равновесие узла K, в котором сходятся стержни *1, 2, 3.* На узел действуют сила $\bar{P}$ и реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$ стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ P\cos\alpha_1 + N_2\sin\psi + N_3\sin\varphi = 0\,; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ P\cos\beta_1 - N_1 - N_2\cos\psi = 0\,; \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ P\cos\gamma_1 - N_3\cos\varphi = 0\,. \qquad (3)$$



Решив уравнения (1), (2), (3) при заданных числовых значениях силы P и углов, получим $N_1 = 349$ Н, $N_2 = -345$ Н, $N_3 = 141$ Н.

2. Рассмотрим равновесие узла M. На узел действуют сила $\bar{Q}$ и реакции $\bar{N}_2'$, $\bar{N}_4$, $\bar{N}_5$, $\bar{N}_6$ стержней. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция $\bar{N}_2'$ направлена противоположно $\bar{N}_2$, численно же $N_2' = N_2$. Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ Q\cos\alpha_2 - N_2\sin\psi - N_4 - N_5\sin\delta\sin\psi = 0\,; \qquad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Q\cos\beta_2 + N_2\cos\psi + N_5\sin\delta\cos\psi = 0\,; \qquad (5)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Q\cos\gamma_2 - N_5\cos\delta - N_6 = 0\,. \qquad (6)$$

При определении проекций силы $\bar{N}_5$ на оси x и y в уравнениях (4) и (5) удобнее сначала найти проекцию $\bar{N}_5'$ этой силы на плоскость xOy (по числовой величине $N_5' = N_5\sin\delta$), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси x, y.

Решив систему уравнений (4), (5), (6) и учитывая, что $N_2' = N_2 = -345$ Н, найдем, чему равны N_4, N_5, N_6.

О т в е т: $N_1 = 349$ Н; $N_2 = -345$ Н; $N_3 = 141$ Н; $N_4 = 50$ Н; $N_5 = 329$ Н; $N_6 = -66$ Н. Знаки показывают, что стержни *2* и *6* сжаты, остальные — растянуты.

Требования к выполнению задания 2
Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 2
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 2
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы по теме:
1. Пространственная система сходящихся сил.
2. Реакция невесомого стержня.
3. Приведение пространственной произвольной системы сил к некоторому центру. Понятия «главный вектор» и «главный момент» произвольной системы сил. Равновесие произвольной системы сил в векторной и в аналитической формах

Рекомендуемые источники:
1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093
5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570
7. Невенчанная, Т.О., Хохлова О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Курс теоретической механики. Статика: учеб. пособие/ Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова – М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2013. – 188 с.

Тема 4:
Ферма. Статически определимые и неопределимые задачи. Определение реакций опор плит, находящихся в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил. Определение усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок

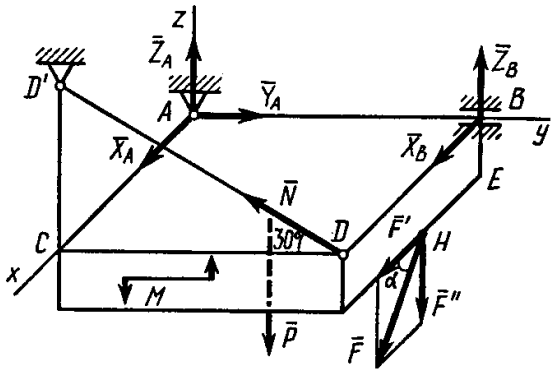
Типовое задание 1

Горизонтальная прямоугольная плита весом P закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной yz, — пара сил с моментом M.

Дано: $P = 3$ кН, $F = 8$ кН, $M = 4$ кН·м, $\alpha = 60°$, $AC = 0{,}8$ м, $AB = 1{,}2$ м, $BE = 0{,}4$ м, $EH = 0{,}4$ м. Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) — на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.



2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + X_B + F\cos 60° = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - N\cos 30° = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P + N\sin 30° - F\sin 60° = 0; \quad (3)$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ M - P\cdot AB/2 + Z_B\cdot AB - F\sin 60°\cdot AB + N\sin 30°\cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\cdot AC/2 - N\sin 30°\cdot AC + F\sin 60°\cdot AC/2 - F\cos 60°\cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ -F\cos 60°\cdot AB - N\cos 30°\cdot AC - X_B\cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 3{,}4$ кН; $Y_A = 5{,}1$ кН; $Z_A = 4{,}8$ кН; $X_B = -7{,}4$ кН; $Z_B = 2{,}1$ кН; $N = 5{,}9$ кН. Знак минус указывает, что реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно показанной на Рис.

Требования к выполнению задания 1
Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Типовое задание 2
К узлам плоской фермы приложены нагрузки P_1 = 5 кН; P_2 = 6 кН; P_3 = 2 кН; известны размеры фермы - a = 1 м; α = 60°.
Определить реакции опор фермы, а также усилия во всех ее стержнях способом вырезания узлов, методом Риттера определить стержни 3, 5, 6. Вес стержней не учитывать. Результаты расчета проверить для каждого узла путем построения силового многоугольника.



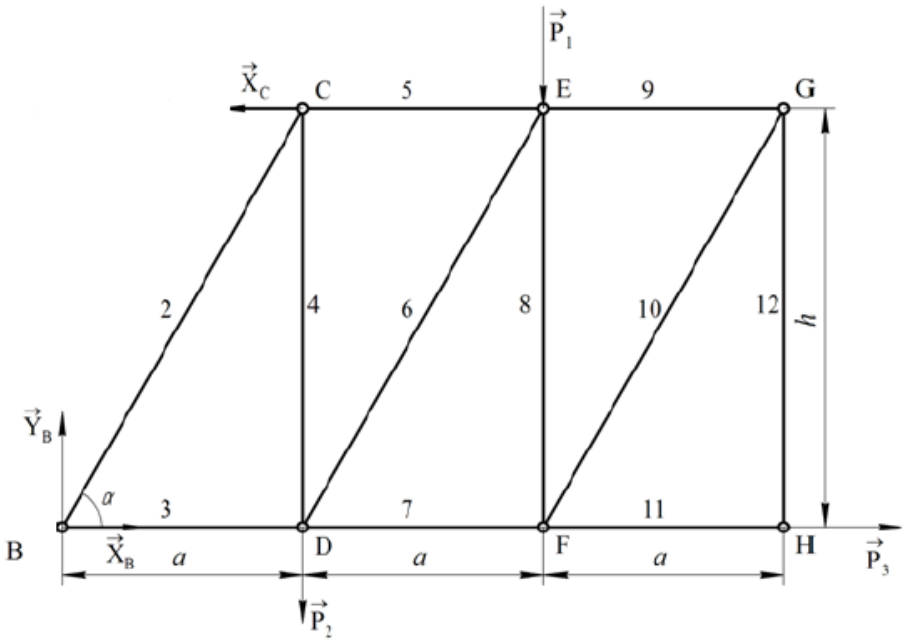
Решение

Установим сначала, является ли данная ферма статически определимой.

Число стержней фермы m = 11, число узлов n = 7, по формуле (1) получим тождество: 11 = 11. Следовательно, ферма статически определима.

1. Определение опорных реакций. Составляем расчетную схему (рисунок 23). Рассматриваем ферму как твердое тело, к которому приложена уравновешенная плоская система сил. Мысленно отбрасываем внешние связи (невесомый стержень АС и шарнирно-неподвижная опора В) и заменяем их

действие соответствующими реакциями. Поскольку направление реакции $\vec{R}_B$ шарнирно неподвижной опоры В заранее неизвестно, то эту реакцию раскладываем на составляющие и $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, ориентированные параллельно соответствующим координатным осям; реакцию $\vec{X}_C$ опорного стержня направляем вдоль стержня.



Определяем реакции опор: $\vec{X}_B; \vec{Y}_B; \vec{X}_C$. Для этого записываем уравнение равновесия плоской системы сил.

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad -X_C + X_B + P_3 = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \; Y_B - P_2 - P_1 = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_B(\vec{F}_\nu) = 0; \; -P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a + X_C \cdot h = 0 \tag{4}$$

Определим значение h:

$$\frac{h}{a} = tg\alpha; \quad h = a \cdot tg60^\circ; \quad h = 1 \cdot 1,732 = 1,732 \text{ м}.$$

Подставив значения, и, решая уравнения, получим из уравнений (2 - 4):

$$Y_B = P_2 + P_1 = 11 \text{ кН};$$

$$X_C = \frac{2a \cdot P_1 + a \cdot P_2}{a \cdot tg60^o} = \frac{2 \cdot 5 + 6}{1,732} = 9.238 \text{ кН};$$

$$X_B = X_C - P_3; \;\; X_B = 9.238 - 2 = 7.238 \text{ кН}.$$

Полная реакция шарнира В:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{7.238^2 + 11^2} = 13.178 \text{ кН}$$

Обязательна проверка правильности определения опорных реакций.

Если в составлении уравнений или в расчетах на этом этапе решения допущена ошибка, все дальнейшие расчеты будут неверными.

Для проверки записываем уравнения равновесия относительно моментной точки Н.

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_H(F_\nu) = 0; \;\; P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a + X_C \cdot h - Y_B \cdot 3a = 0 \qquad (5)$$

Подставив значения, получим тождество:

$$9.238 \cdot 1.732 - 11 \cdot 3 + 5 + 6 \cdot 2 = 0$$

$$33 - 33 = 0$$

2. Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Последовательно рассматриваем условия равновесия систем сил, приложенных к каждому отдельному узлу фермы. Для этого мысленно вырезаем узлы вместе со сходящимися в них стержнями, а действие отброшенных частей конструкции заменяем усилиями, направленными вдоль соответствующих стержней, предполагая, что все стержни работают на растяжение. Если в результате расчетов значение усилия в каком-либо стержне получится отрицательным, то это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Именно поэтому принято приписывать растягивающим усилиям знак «+», а сжимающим знак «-».Это правило в процессе решения задач статики при расчетах усилий в стержнях ферм, а

также различных кронштейнов используется для «автоматического» определения вида напряжения в стержнях.

Из равновесия системы сходящихся сил в каждом узле можно записать два уравнения равновесия:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0;$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \qquad (6)$$

Из уравнений (5) следует, что расчет необходимо начинать с узла, в котором сходятся только два неизвестных стержня, поскольку из уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия. Последовательность рассмотрения узлов для расчета данной фермы можно начинать либо с узла В, либо с узла Н. Последовательность рассмотрения остальных узлов должна быть такой, чтобы каждый раз в уравнения равновесия входило не более двух неизвестных.

а) Вырезаем узел *B*: (рисунок 24)

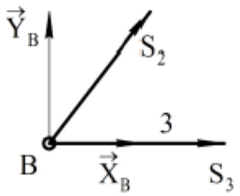


Рисунок 24

Записываем уравнения равновесия системы сходящихся сил:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad X_B + S_3 + S_2 \cdot \cos 60^o = 0$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad Y_B + S_2 \cdot \sin 60^o = 0 \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (7) получим:

$$S_2 = -\frac{Y_B}{\sin 60^o} = -\frac{11}{0,866} = -12,7 \text{ кН};$$

$$S_3 = -X_B - S_2 \cdot \cos 60^o = -7,24 - (-12,7) \cdot 0,5 = -0,89 \text{ кН}.$$

б) Вырезаем узел С (рисунок 25):

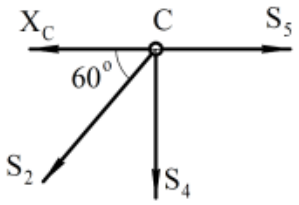


Рисунок 25

Записываем уравнения равновесия для узла C:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad S_5 - X_C - S_2 \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad -S_4 - S_2 \cdot \sin 60^o = 0 \qquad (8)$$

Решая систему уравнений (8) получим:

$$S_5 = X_C + S_2 \cdot \cos 60^o = 9,24 + (-12,7) \cdot 0,5 = 2,89 \text{ кН};$$

$$S_4 = -S_2 \cdot \sin 60^o = -(-12,7) \cdot 0,866 = 11 \text{ кН}.$$

в) Вырезаем узел D (рисунок 26):

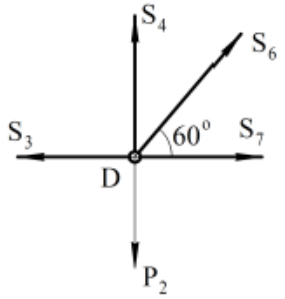


Рисунок 26

Записываем уравнения равновесия для узла D:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad S_7 - S_3 + S_6 \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad S_4 + S_6 \cdot \sin 60^o - P_2 = 0 \qquad (9)$$

Решая систему уравнений (9) получим:

$$S_6 = \frac{P_2 - S_4}{\sin 60^o} = \frac{6-11}{0,866} = -5,77 \text{ кН};$$

$$S_7 = S_3 - S_6 \cdot \cos 60^o = -0,89 - (-5,77) \cdot 0,5 = 1,995 \text{ кН}.$$

г) Вырезаем узел E (рисунок 27):

Записываем уравнения равновесия для узла E:

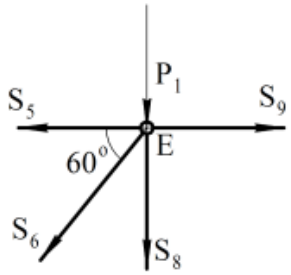


Рисунок 27

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad S_9 - S_5 - S_6 \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad -P_1 - S_8 - S_6 \cdot \sin 60^o = 0 \qquad (10)$$

Решая систему уравнений (10) получим:

$$S_9 = S_5 + S_6 \cdot \cos 60^o = 2,89 + (-5,77) \cdot 0,5 = 0 \text{ кН};$$

$$S_8 = -P_1 - S_6 \cdot \sin 60^o = -5 - (-5,77) \cdot 0,866 = 0 \text{ кН}.$$

д) Вырезаем узел H (рисунок 28):

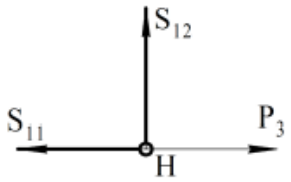


Рисунок 28

Записываем уравнения равновесия для узла E:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad P_3 - S_{11} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad S_{12} = 0; \qquad (11)$$

Решая систему уравнений (11) получим:

$$S_{12} = 0;$$

$$S_{11} = P_3 = 2\text{кН};$$

е) Вырезаем узел G (рисунок 29):

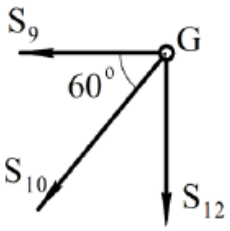


Рисунок 29

Записываем уравнения равновесия для узла G:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad -S_{10} \cdot \cos 60^{o} - S_{9} = 0;$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad -S_{10} \cdot \sin 60^{o} - S_{12} = 0; \qquad (12)$$

Решая систему уравнений (12) получим:

$$S_{10} = -\frac{S_9}{\cos 60^{o}} = 0 \text{ кН};$$

$$S_{10} = -\frac{S_{12}}{\sin 60^{o}} = 0 \text{ кН}$$

Таким образом, определены все усилия в стержнях фермы Узел F проверочный.

Вырезаем узел F (рисунок 30):

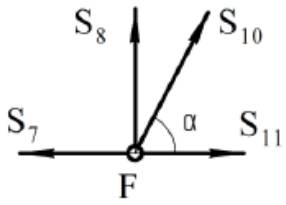


Рисунок 30

Записываем уравнение равновесия для узла F:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{X\nu} = 0; \quad -S_7 + S_{11} + S_{10} \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{Y\nu} = 0; \quad S_8 + S_{10} \cdot \sin\alpha = 0; \qquad (13)$$

Подставляя значения в уравнение (13) получим:

$- 2 + 2 + 0 \cdot \cos 60^{0} = 0$ – верно.

$0 + 0 \cdot \sin 60^{o} = 0$ – верно.

Требования к выполнению задания 2

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 2
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 2
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы по теме:
1. Пространственная система сходящихся сил.
2. Реакция невесомого стержня.
3. Приведение пространственной произвольной системы сил к некоторому центру. Понятия «главный вектор» и «главный момент» произвольной системы сил. Равновесие произвольной системы сил в векторной и в аналитической формах
4. Какая конструкция называется фермой?
5. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?
6. Как формулируются леммы о нулевых стержнях?
7. В чем заключается сущность метода Риттера?
8. На основании каких соображений, без проведения вычислений, можно определить стержни плоских ферм, в которых при заданной нагрузке усилия равны нулю?

Рекомендуемые источники:
1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093
5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570

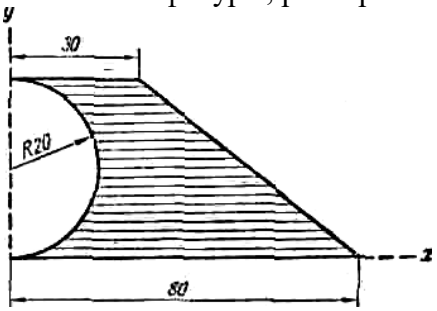
7. Невенчанная, Т.О., Хохлова О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Курс теоретической механики. Статика: учеб. пособие/ Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова – М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2013. – 188 с.

Тема 5

Трение скольжения и трение качения.
Центр тяжести. Координаты центра тяжести.
Определение координат центра тяжести тел

Типовая задача по теме

Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, размеры — в сантиметрах.



Решение

Координаты центра тяжести площади определяем по формулам:

$$x_C = \frac{\Sigma F_i x_i}{F}; \qquad y_C = \frac{\Sigma F_i y_i}{F}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, площадь фигуры делим на отдельные части, положения центров тяжести которых известны. В данном случае такими частями являются: прямоугольник, треугольник и половина круга (рис.2). Площадь половины круга, вырезанную из площади прямоугольника, считаем отрицательной.

Имеем:

площадь прямоугольника

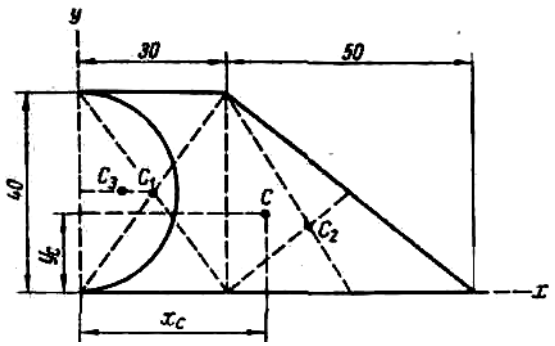
$$F_1 = 40 \bullet 30 = 1200\ см^2,$$

площадь треугольника

$$F_2 = \frac{40 \cdot 50}{2} = 1000\ см^2;$$

площадь половины круга

$$F_3 = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 200\ \pi = 628\ см^2$$



Центры тяжести рассматриваемых частей сечения имеют следующие координаты:

для прямоугольника

$$x_1 = 15\ см; \qquad y_1 = 20\ см;$$

для треугольника

$$x_2 = 30 + \frac{50}{3} = 46{,}7\ см; \qquad y_2 = \frac{40}{3} = 13{,}3\ см;$$

для половины круга

$$x_3 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3\pi} = 8{,}5\ см; \qquad y_3 = 20\ см.$$

Для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры составляем таблицу.

Номер элемента	F_i ,$см^2$	x_i ,$см$	y_i ,$см$	$S_{iy} = F_i x_i$, $см^3$	$S_{ix} = F_i y_i$, $см^3$
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	–628	8,5	20,0	–5338	–12560
Σ	1572	––	––	59362	24700

По формулам (1) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_C = \frac{59362}{1572} = 37{,}8\ см; \qquad y_C = \frac{24700}{1572} = 15{,}7\ см.$$

Требования к выполнению задания

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания

Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Рекомендуемые источники:

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093

5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570
7. Невенчанная, Т.О., Хохлова О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Курс теоретической механики. Статика: учеб. пособие/ Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова – М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2013. – 188 с.

Тема 6.
Кинематика: кинематические характеристики движения точки при различных способах задания движения

Методические указания

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Кинематика точки». При решении задачи на определение уравнения траектории точки и ее кинематических характеристик целесообразно придерживаться следующего порядка:

1) исключить из уравнений движения точки в координатной форме время и получить уравнение относительно координат точки;

2) построить траекторию точки, указав при этом, является ли траекторией движения точки вся линия или какая-то ее часть;

3) по уравнениям движения точки найти ее координаты, проекции скорости и ускорения на оси координат в данный момент времени, показать на чертеже положение точки и построить векторы скорости и ускорения;

4) определить касательное и нормальное ускорения точки в данный момент времени и показать на чертеже разложение вектора ускорения точки на указанные составляющие;

5) определить по направлениям векторов скорости и касательного ускорения точки, является ли ее движение в данный момент времени ускоренным или замедленным;

6) найти радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

В некоторых вариантах при расчетах следует использовать тригонометрические тождества:

$cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\,\alpha = 2\,cos^2\,\alpha - 1;\;\; sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha.$

Типовое задание 1.

Точка M движется в плоскости Oxy. По заданным уравнениям движения $x=x(t)$, $y=y(t)$ точки M **(**где x и y выражены в сантиметрах, t - в секундах) найдите траекторию точки, а также для заданного момента времени $t=t_1$ найдите положение точки на ее траектории, определите и постройте векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений, вычислите радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Исходные данные:

$x(t) = -4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) - 1,\; y(t) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$ [см] - уравнения движения точки,

t_1=1 [с] – заданный момент времени, t_0=0 [с] – начальный момент времени.

Решение.

1) Уравнения движения $x(t)$, $y(t)$ являются также *уравнениями траектории в параметрическом виде*. Для получения *уравнения траектории в координатной форме*, исключаем из уравнений движения параметр t. Пользуясь основным тригонометрическим тождеством ($\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$), получаем следующее уравнение

$$(x(t)+1)^2 + (y(t))^2 = 4 \qquad (1).$$

Из уравнения (1) следует, что траектория движения точки представляет собой окружность радиусом 2 [см] с центром в точке с координатами (-1;0).

В начальный момент времени t_0=0 [с] координаты точки M равны

x_0=-5 [см], y_0=0 [см].

В рассматриваемый момент времени t_1 = 1 [с] координаты точки M равны

x=-3 [см], y=-3,46 [см].

2) Модуль скорости точки определим по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где v_x, v_y – проекции скорости на оси x и y.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4\pi}{3}\sin(\frac{\pi t}{3}),\ v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{4\pi}{3}\cos(\frac{\pi t}{3}) \qquad (2).$$

При t_1=1[с] $v_{x(t1)}$=3,62 [см/с], $v_{y(t1)}$=-2,09 [см/с], v=4,18 [см/с].

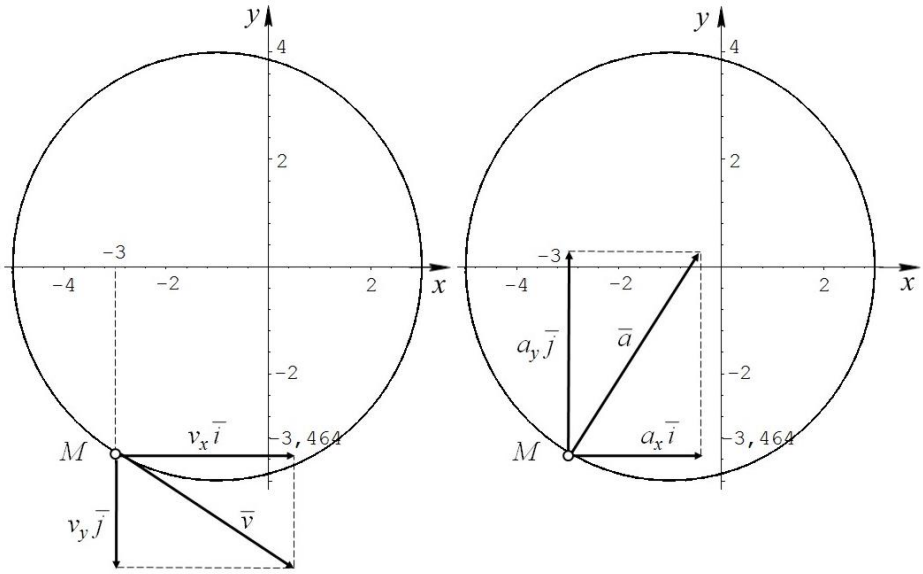
3) Модуль полного ускорения точки вычислим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где a_x, a_y – проекции ускорения на оси x и y.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{4\pi^2}{9}\cos(\frac{\pi t}{3}),\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{4\pi^2}{9}\sin(\frac{\pi t}{3}) \qquad (3).$$

При t_1=1[с] $a_{x(t1)}$=2,19 [см/с^2], $a_{y(t1)}$=3,80 [см/с^2], a=4,38 [см/с^2].



Построение скоростей и ускорений точки

4) Определение касательного ускорения точки

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v},$$

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{3{,}62 \cdot 2{,}19 + (-2{,}09 \cdot 3{,}80)}{4{,}18} = 0 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

5) Определение нормального ускорения точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

$$a_n = \sqrt{4{,}38^2 - 0^2} = 4{,}38 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

6) Определение радиуса кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n},\ \rho = \frac{4{,}18^2}{4{,}38} = 4 \text{ [см]}.$$

Требования к выполнению задания 1

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.

На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.

Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1

Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Типовое задание 2

Точка *M* движется в плоскости *Oxy*. По заданным уравнениям движения $x = x(t)$, $y = y(t)$ точки *M* (где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* - в секундах) найти траекторию точки, а также для заданного момента времени $t=t_1$ найти положение точки на её траектории, определить и построить векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений, вычислить радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице.

Таблица

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Требования к выполнению задания 2
Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 2
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 2
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы для проведения опроса по теме:
1. Определение кинематики. Основные понятия: движение, время, пространство. Какие задачи рассматриваются в кинематике?
2. Кинематика точки. Основные характеристики кинематики точки: траектория, скорость, ускорение точки.
3. Векторный способ задания движения точки: закон движения, скорость и ускорение точки
4. Координатный способ задания движения точки: закон движения, скорость и ускорение точки
5. Естественный способ задания движения точки: закон движения, скорость и ускорение точки
6. Естественные оси координат (оси естественного трехгранника)
7. Привести формулу связи векторного и координатного способов задания движения точки
8. Частные случаи движения точки: неравномерное прямолинейное и равномерное прямолинейное движение
9. Частные случаи движения точки: равномерное криволинейное движение
10. Частные случаи движения точки: равнопеременное криволинейное движение
11. Методика решения задач кинематики точки при координатном способе задания движения.

Рекомендуемые источники:
1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN

978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093
5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570
7. Хохлова, О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Теоретическая механика. Кинематика: учеб. пособие / Астрахан. гос. техн. ун-т /— Астрахань: Изд-во АГТУ, 2013. — 144с.

Тема 7:
Характеристики движения тела и его отдельных точек при поступательном, вращательном, плоскопараллельном движении

Методические указания

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Простейшие движения твердого тела». При решении задач двух типов рекомендуется придерживаться следующей последовательности.

Первый тип задач – задано уравнение вращения *i*-ого колеса:

1) Найдите угловую скорость и угловое ускорение *i*-ого колеса, дважды дифференцируя по времени заданный закон вращения;

2) Исходя из расчетной схемы, определите угловые скорости и угловые ускорения колес, находящихся в зацеплении с *i*-м колесом, либо соединенных с ним ременной передачей;

3) Последовательно обходя кинематическую схему, найдите угловые скорости и угловые ускорения всех ступенчатых колес исследуемого механизма;

4) Зная угловые скорости и угловые ускорения всех ступенчатых колес, найдите скорость и ускорения обозначенных на схеме точек, а также рейки *4* и груза *5*;

5) Изобразите на расчетной схеме все найденные кинематические характеристики с учетом положительного направления, заданного в исходных данных.

Второй тип задачи – задан закон поступательного движения рейки (груза):

1) Найдите скорость и ускорение рейки (груза), дважды дифференцируя по времени заданный закон движения тела;

2) Скорость и касательное ускорение точки ступенчатого колеса, находящегося в зацеплении с рейкой, закон движения которой задан, будут равны скорости и касательному ускорению этой рейки. Аналогично, если задан закон движения груза, то его скорость и ускорение будут равны по модулю скорости и касательному ускорению точки контакта нити и ступенчатого колеса.

3) Остальные вычисления кинематических характеристик произведите аналогично первому типу задач.

Типовое задание.

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес 1–3 равны соответственно: r_1=2 [см], R_1=4 [см], r_2=6 [см], R_2=8 [см], r_3=12 [см], R_3=16 [см]. На ободах колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

Зная закон вращения *3*-го колеса $\varphi_3 = 8t - 3t^2$ [рад] для момента времени $t_1 = 1{,}5$ [сек], *найдите* величины скоростей и ускорений точек *A, B, C*, рейки 4, груза 5, а также угловые скорости и угловые ускорения колес 1, 2, 3.

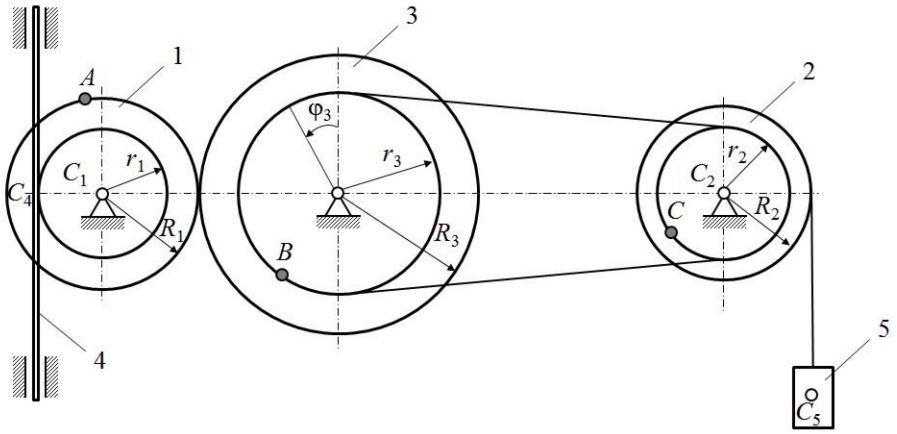


Схема механизма

Указания: Положительным для $\varphi_3 = f(t)$ считается вращение 3-го колеса против хода часовой стрелки. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считать, что ремень по ободу колеса не скользит.

Решение. Рассматриваемый механизм состоит из пяти подвижных тел (рис. 1): ступенчатые колеса 1-3 совершают вращательные движения вокруг осей, проходящих через точки C_1, C_2 и C_3 соответственно, зубчатая рейка 4 и груз 5 совершают поступательное движение.

Определяем угловую скорость и угловое ускорение ступенчатого колеса 3, дважды взяв производные по времени от закона движения $\varphi_3 = f(t)$:

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = (8t - 3t^2)' = 8 - 6 \cdot t\,,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = (8 - 6 \cdot t)' = -6 \text{ [рад/с}^2\text{]}.$$

В момент времени $t_1 = 1{,}5$ [с] получим

$$\omega_3(t_1) = 8 - 6 \cdot 1{,}5 = -1 \text{ [рад/с]}.$$

Модули линейных скоростей точек *E*, *B* и *D* ступенчатого колеса 3 определяются по формулам

$$v_E = \omega_3 r_3,\ v_B = \omega_3 r_3,\ v_D = \omega_3 R_3\,,$$

где ω_3 – угловая скорость ступенчатого колеса 3, r_3 – радиус малой ступени колеса 3, R_3 – радиус большой ступени колеса 3.

Откуда

$$v_E = v_B = 1 \cdot 12 = 12 \text{ [см/сек], при этом } \bar{v}_E \perp C_3E\,,\ \bar{v}_B \perp C_3B\,,$$

$$v_D = 1 \cdot 16 = 16 \text{ [см/сек], при этом } \bar{v}_D \perp C_3D\,).$$

Поскольку нить, соединяющая точки *E* и *F*, нерастяжима, скорости этих точек равны по модулю и по направлению, то есть $\bar{v}_E = \bar{v}_F$.

Отсюда угловая скорость ступенчатого колеса 2 равна

$$\omega_2 = \frac{v_F}{r_2} = \frac{12}{6} = 2 \text{ [рад/с]}.$$

Зная угловую скорость ω_2 ступенчатого колеса 2, найдем линейную скорость точки *C*

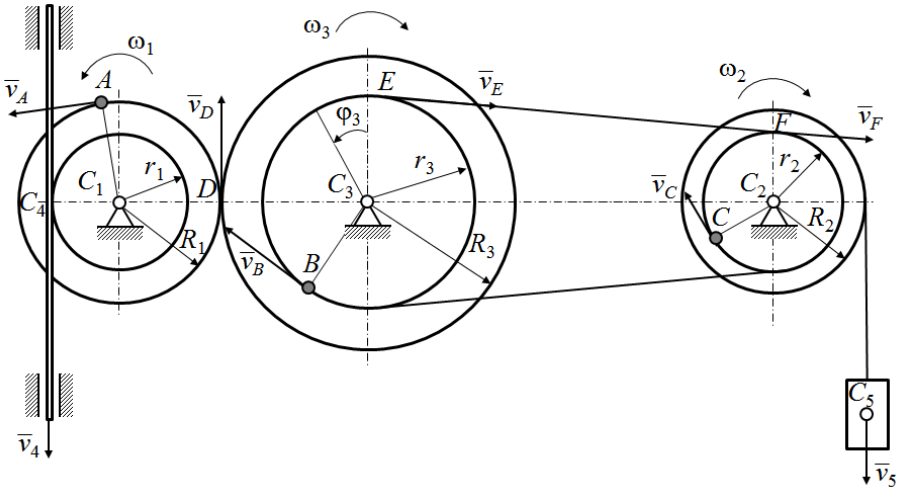
$v_C = \omega_2 r_2 = 2 \cdot 6 = 12$ [см/с], при этом $\bar{v}_C \perp C_2C$.

Скорость груза 5 определяется по формуле

$$v_5 = \omega_2 R_2 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ [см/с]}.$$

Точка *D* лежит на ободе ступенчатого колеса 1, угловую скорость которого рассчитаем по формуле

$$\omega_1 = \frac{v_D}{R_1} = \frac{16}{4} = 4 \text{ [рад/с]}.$$



К определению линейных скоростей точек и угловых скоростей колёс

Зная угловую скорость ω_1 ступенчатого колеса 1, найдем линейные скорости точки *A* и рейки 4

$$v_A = \omega_1 R_1 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ [см/с]}, \text{ при этом } \bar{v}_A \perp C_1A,$$

$$v_4 = \omega_1 r_1 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ [см/с]}.$$

Направления угловых скоростей ступенчатых колес 1, 2 и 3, а также линейных скоростей всех обозначенных на схеме точек показаны на рисунке.

Рассмотрим вращательное движение ступенчатого колеса 3 и найдем линейное ускорение точки *B*

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B{}^n + \bar{a}_B{}^\tau.$$

Модуль ускорения точки *B* рассчитывается по формуле

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2},$$

где a_B^n - модуль нормального ускорения точки *B*, a_B^τ - модуль касательного ускорения точки *B*.

$a_B^n = \omega_3^2 \cdot r_3 = 1^2 \cdot 12 = 12$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_B^n$ вдоль BC_3 в сторону C_3,

$a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 6 \cdot 12 = 72$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_B^\tau \perp \hat{A}\tilde{N}_3$ в сторону ε_3,

$$a_B = \sqrt{12^2 + 72^2} = 73 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Точки *B* и *E* равноудалены от оси вращения, следовательно, $\bar{a}_B^\tau = \bar{a}_E^\tau$. Из условия нерастяжимости нити, соединяющей точки *E* и *F*, следует, что $\bar{a}_E^\tau = \bar{a}_F^\tau$. Тогда угловое ускорение ступенчатого колеса 2 найдём по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{a_F{}^\tau}{r_2} = \frac{72}{6} = 12 \text{ [рад/с}^2\text{]}.$$

Модуль ускорения точки *C* рассчитывается по формуле

$$a_C = \sqrt{\left(a_C^n\right)^2 + \left(a_C^\tau\right)^2},$$

где a_C^n - модуль нормального ускорения точки *C*, a_C^τ - модуль касательного ускорения точки *C*.

$a_C^n = \omega_2^2 \cdot r_2 = 2^2 \cdot 6 = 24$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_C^n$ вдоль CC_2 в сторону C_2,

$a_C^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 12 \cdot 6 = 72$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_C^\tau \perp C\tilde{N}_2$ в сторону ε_2.

Тогда

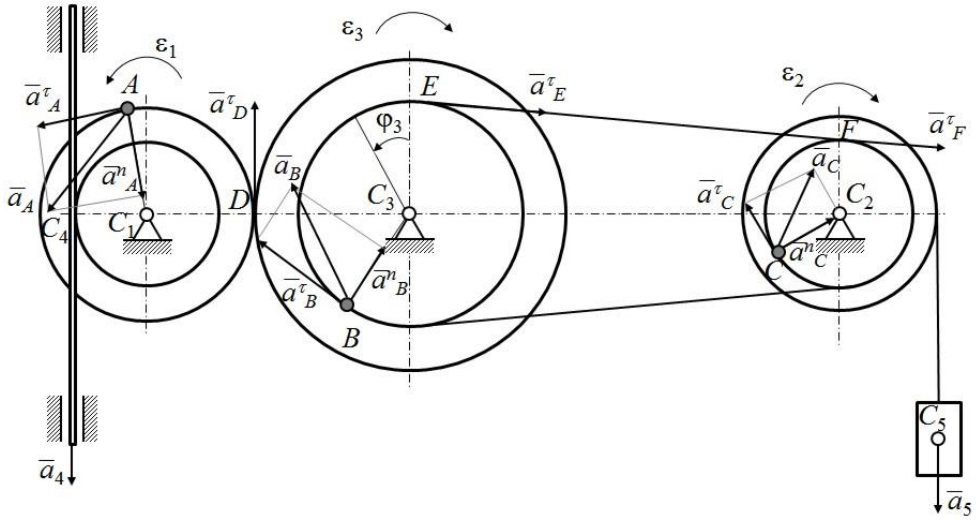
$$a_C = \sqrt{24^2 + 72^2} = 76 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Касательное ускорение точки *D* равно

$$a_D^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 6 \cdot 16 = 96 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Тогда угловое ускорение ступенчатого колеса 1 рассчитаем следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_D{}^\tau}{R_1} = \frac{96}{4} = 24 \text{ [рад/с}^2\text{]}.$$



К определению линейных ускорений точек и угловых скоростей колёс

Модуль ускорения точки *A* рассчитывается по формуле

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2},$$

где a_A^n - модуль нормального ускорения точки *C*, a_A^τ - модуль касательного ускорения точки *C*.

$a_A^n = \omega_1^2 \cdot R_1 = 1^2 \cdot 4 = 16$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_A^n$ вдоль AC_1 в сторону C_1,

$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot R_1 = 24 \cdot 4 = 96$ [см/сек^2], при этом $\bar{a}_A^\tau \perp A\tilde{N}_1$ в сторону ε_1.

Тогда

$$a_A = \sqrt{16^2 + 96^2} = 97 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Линейное ускорение зубчатой рейки 4 найдём следующим образом:

$$a_{C_4} = a_A^\tau = 96 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Линейное ускорение груза 5 равно:

$$a_5 = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ [см/сек}^2\text{]}.$$

Направления угловых ускорений ступенчатых колес 1, 2 и 3, а также линейные ускорения всех точек *A*, *B* и *C* показаны на рисунке.

а) линейные скорости: $v_A = 16$ [см/с], $v_B = 12$ [см/сек], $v_C = 12$ [см/с], $v_4 = 8$ [см/с], $v_5 = 16$ [см/с];

б) линейные ускорения: $a_A = 97$ [см/сек^2], $a_B = 73$ [см/сек^2], $a_C = 76$ [см/сек^2], $a_{C_4} = 96$ [см/сек^2], $a_5 = 96$ [см/сек^2];

в) угловые скорости ступенчатых колёс: $\omega_1 = 4$ [рад/с], $\omega_2 = 2$ [рад/с], $\omega_3 = 1$ [рад/с];

г) линейные ускорения ступенчатых колёс: $\varepsilon_1 = 24$ [рад/с^2], $\varepsilon_2 = 12$ [рад/с^2], $\varepsilon_3 = 6$ [рад/с^2].

Требования к выполнению задания

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания

Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы для проведения опроса по теме

1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение скоростей точек при вращательном движении твердого тела.
2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение ускорений точек при вращательном движении твердого тела.
3. Определение скорости и ускорения точки
4. Формула, связывающая векторный и координатный способы задания движения точки
5. Определение траектории точки
6. Ускорение точки при прямолинейном равномерном движении
7. Простейшие виды движения твердого тела
8. Определение поступательного движения твердого тела, его свойства
9. Определение вращательного движения твердого тела, его основные кинематические характеристики.
10. Уравнение вращательного движения твердого тела.
11. Уравнение равномерного вращения.
12. Определение угловой скорости и углового ускорения тела, их выражения, единицы измерения.
13. Определение скорости и ускорения точек при вращательном движении твердого тела.
14. Чему равна скорость точки тела, лежащей на оси вращения?
15. Плоскопараллельное движение твёрдого тела, его свойства. Примеры такого движения
16. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Теорема о сложении скоростей
17. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Теорема о равенстве проекций скоростей
18. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Мгновенный центр скоростей, методы

нахождения его местоположения

19. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Определение скоростей точек при помощи мгновенного центра скоростей

20. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Теорема о сложении ускорений

21. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Мгновенный центр ускорений, способы его местонахождения

22. Плоскопараллельное движение твёрдого тела. Определение ускорений точек тела при помощи мгновенного центра ускорений

Рекомендуемые источники:

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016

2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301

3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093

5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300

6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570

7. Хохлова, О.А., Пономарева Е.В., Хохлов А.В. Теоретическая механика. Кинематика: учеб. пособие / Астрахан. гос. техн. ун-т /— Астрахань: Изд-во АГТУ, 2013. — 144с.

Тема 8.
Динамика точки. Законы динамики материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки

Методические указания

Первая задача динамики материальной точки решается посредством *дифференцирования* заданных уравнений движения точки. Первую задачу динамики рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней силы;

2) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;

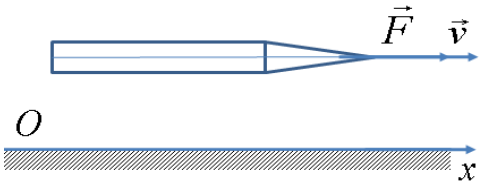
3) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;

4) составить основные уравнения динамики материальной точки в проекциях на оси координат;

5) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Типовое задание

Ракета начинает движение из состояния покоя под действием реактивной силы, зависящей от времени $F=F_o e^{-bt}$, где F_o – максимальное значение реактивной тяги, b – постоянная величина. Масса ракеты m; начальные условия: при $t=0$, $x=0$, $V=0$.



Решение

Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось x, направленную в сторону движения ракеты:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_o e^{-bt}.$$

Произведем понижение порядка дифференциального уравнения.

Так как $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dV}{dt}$, получим $m\frac{dV}{dt}=F_0e^{-bt}$, то есть вместо дифференциального уравнения второго порядка получим два дифференциальных уравнения первого порядка, поскольку $V=\frac{dx}{dt}$.

Разделяем переменные и выполним интегрирование полученного уравнения:

$$dV=\frac{F_0}{m}e^{-bt}dt$$

$$V=-\frac{F_0}{bm}e^{-bt}+C_1$$

При $t_0=0, V_0=0$: $0=-\frac{F_0}{bm}+C_1$, $C_1=\frac{F_0}{bm}$.

$V=\frac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})$ - зависимость скорости ракеты от времени.

Т.к. $V=\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})$, $dx=\frac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})dt$.

Проинтегрировав, получим: $x=\frac{F_0}{bm}(t+\frac{1}{b}e^{-bt})+C_2$.

При $t_0=0, x_0=0$: $0=\frac{F_0}{mb^2}+C_2$, $C_2=-\frac{F_0}{mb^2}$.

Окончательно, закон движения ракеты: $x=\frac{F_0}{bm}(t-\frac{1}{b}(1-e^{-bt}))$.

Исследуем результаты решения задачи. При $t>>0$, $e^{-bt}\approx 0$, скорость ракеты будет равна $V=\frac{F_0}{bm}$. Следовательно, по истечении некоторого промежутка времени ракета будет двигаться с постоянной скоростью. Тогда $x=\frac{F_0}{bm}(t-\frac{1}{b})$ - закон равномерного движения.

Требования к выполнению задания

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: Устный опрос.

Контрольные вопросы для проведения опроса по теме
1. Динамика.
2. Законы Ньютона
3. Принцип суперпозиции
4. Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки при векторном способе задания движения точки.
5. Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки при координатном способе задания движения точки.
6. Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки при естественном способе задания движения точки.
7. Задачи динамики точки
8. Общие теоремы динамики точки

Рекомендуемые источники:
1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093
5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570

Тема 9:
Динамика механической системы. Теоремы о движении центра масс, об изменении количества движения, кинетического момента.
Теорема об изменении кинетической энергии системы.
Принцип Д'Аламбера.
Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).
Общее уравнение динамики (принцип Д'Аламбера-Лагранжа)

Методические указания к решению

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) выберите направления $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ и определите скорости и перемещения всех тел системы в зависимости от S_1 и V_1;

2) вычислите кинетическую энергию системы в конечном и начальном положениях системы;

3) изобразите на рисунке все внешние и внутренние силы системы;

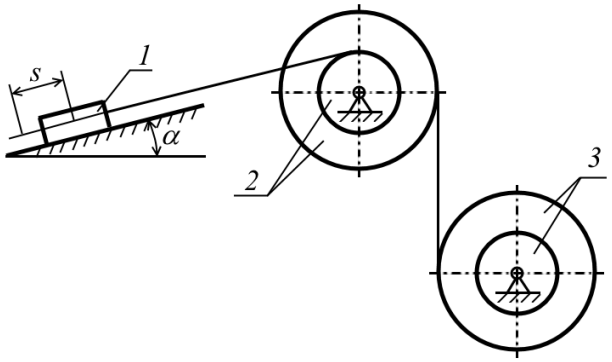
4) вычислите работу всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы – только сумму работ внешних сил). Если сумма работ отрицательна, смените направления $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ (и соответственно всех кинематических характеристик механической системы и пересчитайте сумму работ внешних сил). Если сумма работ опять получится отрицательной, то система под действием сил тяжести не приходит в движение из состояния покоя и $V_1 = 0$, $a_1 = 0$. При смене направлений $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ в силовой схеме необходимо изменить только направления силы трения скольжения;

5) воспользовавшись результатами пунктов 2) и 4), запишите теорему об изменении кинетической энергии системы и определите скорости и ускорение тела *1*.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 1, 2.

Типовое задание 1

На груз 1 действует сила трения скольжения, на барабан 3 – момент сопротивления *M*. Определить скорость груза 1 в момент времени, когда пройденный им путь станет *S=2м.*

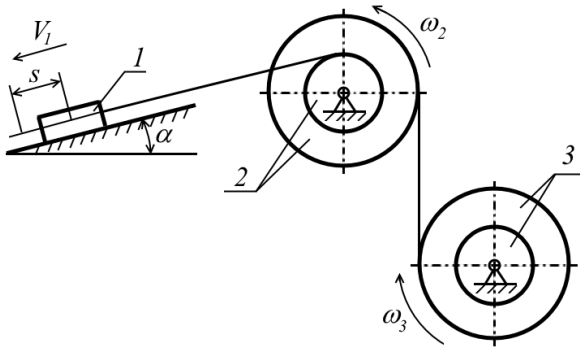


Дано: m_1=0,6 кг; m_2=1,8 кг; m_3=1,0 кг; $r_2 = 0.1$ м; $R_2 = 1.0$ м; $\rho_2 = 0{,}6$ м; $r_3 = 0{,}7$ м; $R_3 = 2{,}0$ м; $\rho_3 = 0{,}5$ м; $M = 20$ Н·м; $f = 0{,}20$; $\alpha = 30°$; $s = 2$ м. На рис. 16 показана механическая система в начальном положении.

Найти: скорость V_1 груза 1 в конечном положении.

Решение

Выберем направления $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ и соответственно всех кинематических характеристик механической системы и отобразим их на рисунке.



По теореме об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \tag{1}$$

гдеT – кинетическая энергия системы в конечный момент времени (когда путь, пройденный грузом 1, станет равным S);

T_0 – кинетическая энергия системы в начальный момент времени. Т.к. в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$;

$\sum A_k^e$ – сумма работ внешних сил системы.

Кинетическую энергию системы в конечный момент времени находим как сумму кинетических энергий каждого из тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2$– кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно;

$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$ – кинетическая энергия ступенчатого барабана 2, совершающего вращательное движение;

$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$ – кинетическая энергия ступенчатого барабана 3, совершающего вращательное движение.

Выразим угловые скорости барабанов 2 и 3 через искомую скорость груза 1:

$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ – угловая скорость барабана 2;

Угловые скорости барабанов 2 и 3, соединенных нитью, связаны соотношением: $\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3$, откуда

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}.$$

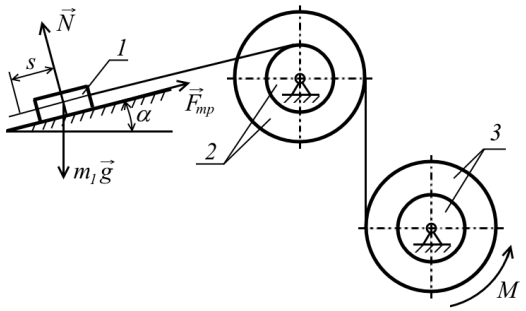
Учитывая также, что моменты инерции барабанов 2 и 3 равны соответственно: $J_2 = m_2 \cdot \rho_2^2$ и $J_3 = m_3 \cdot \rho_3^2$, выражение кинетической энергии системы приобретет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot \left(\frac{V_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \rho_3^2 \cdot \left(\frac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} V_1^2 \cdot \left[m_1 + m_2 \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{\rho_3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}\right)^2 \right] =$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 \cdot \left[0{,}6 + 1{,}8 \cdot \left(\frac{0{,}6}{0{,}1}\right)^2 + 1{,}0 \cdot \left(\frac{0{,}5 \cdot 1{,}0}{0{,}1 \cdot 2{,}0}\right)^2 \right] = 35{,}825 \cdot V_1^2$$

Найдем теперь сумму работ внешних сил системы.



Силы тяжести барабанов 2 и 3, не участвующих в работе внешних сил системы, на схеме не показываем.

$\sum A_k^e = A(m_1\vec{g}) + A(\overrightarrow{F_{\text{тр}}}) + A(M)$,

где $A(m_1\vec{g}) = m_1 \cdot g \cdot S \cdot sin\alpha$ – работа силы тяжести груза 1,

$A(\overrightarrow{F_{\text{тр}}}) = -f \cdot N \cdot S = -f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot cos\alpha$ – работа силы трения скольжения, действующей на груз 1,

$A(M) = -M \cdot \varphi_3$ – работа момента сил сопротивления, действующих на ступенчатый барабан 3.

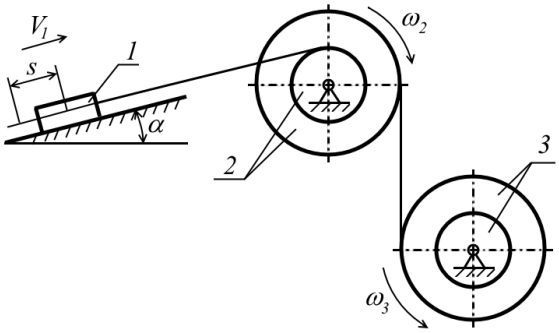
Выразим угол, на который повернется барабан 3 при перемещении груза, равном *S*: $\varphi_3 = \frac{S \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$.

Тогда сумма работ внешних сил системы будет равна:

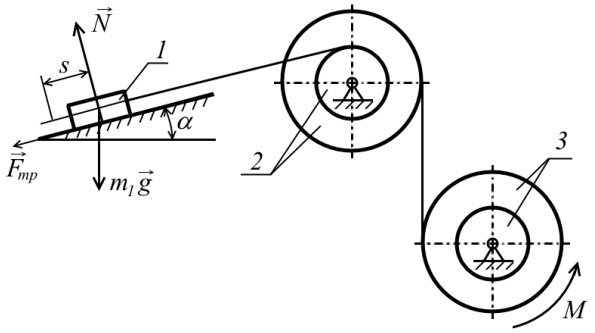
$$\sum A_k^e = m_1 \cdot g \cdot S \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot cos\alpha - M \cdot \frac{S \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} =$$

$$= 0{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}0}{0{,}1 \cdot 2{,}0} =$$

=-196,153 Дж < 0, следовательно, система движется в сторону, противоположную выбранной изначально. Уточняем направления движения тел системы, а также знаки работ внешних сил системы.



Изображаем действительные направления внешних сил системы.



Тогда работы внешних сил системы будут иметь следующие значения:

$A(m_1\vec{g}) = -m_1 \cdot g \cdot S \cdot sin\alpha$;

$A\left(\overrightarrow{F_{\text{тр}}}\right) = -f \cdot N \cdot S = -f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot cos\alpha;$

$A(M) = M \cdot \varphi_3.$

Сумма работ внешних сил системы равна:

$$\sum A_k^e = -m_1 \cdot g \cdot S \cdot sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot cos\alpha + M \cdot \frac{S \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} =$$

$$= -0{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}866 + 20 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}0}{0{,}1 \cdot 2{,}0} =$$

$$= 192{,}075 \text{ Дж}.$$

Подставляем полученные значения в исходное уравнение (1):

$$35{,}825 \cdot V_1^2 = 192{,}075, \text{ откуда}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{192{,}075}{35{,}825}} = 2{,}315 \text{м/с}.$$

Ответ: $V_1 = \sqrt{\frac{192{,}075}{35{,}825}} = 2{,}315$м/с.

Требования к выполнению задания 1

Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.

Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.

Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.

На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 1

Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.

Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 1

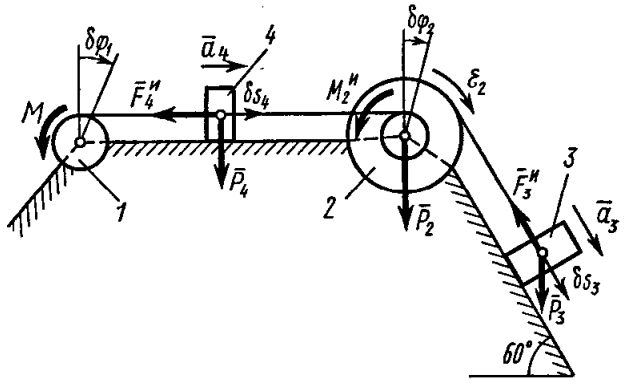
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Типовое задание 2

Механическая система состоит из обмотанных нитями блока *1* радиуса R_1 и ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов *3* и *4*, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку *1*.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30$ Н, $P_3 = 40$ Н, $P_4 = 20$ Н, $M = 16$ Н·м, $R_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м.

Определить: ускорение груза *3*, пренебрегая трением.



Решение. 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *1, 2, 3, 4,* соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, — идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\Sigma\delta A_k^a + \Sigma\delta A_k^u = 0, \qquad (1)$$

где $\Sigma\delta A_k^a$ — сумма элементарных работ активных сил; $\Sigma\delta A_k^u$ — сумма элементарных работ сил инерции.

2. Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ и пару сил с моментом M. Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\bar{F}_3^u$, $\bar{F}_4^u$ и пару сил инерции с моментом M_2^u, величины которых равны:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g}a_3;\ F_4^u = \frac{P_4}{g}a_4;$$

$$M_2^u = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2. \qquad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим

$$(P_3\sin 60° - F_3^u)\delta s_3 - M_2^u\delta\varphi_2 - F_4^u\delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2\delta\varphi_2;\ \delta s_4 = r_2\delta\varphi_2;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2. \qquad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду

$$\left[P_3\left(\sin 60° - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \frac{P_4}{g}a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}\right]\delta\varphi_2 = 0. \qquad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2};\ a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2}a_3.$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем

$$a_3 = \frac{P_3R_2\sin 60° - M(r_2/R_1)}{P_3R_2 + P_2\rho_2^2/R_2 + P_4(r_2^2/R_2)}g.$$

Вычисления дают следующий ответ: $a_3 = -0{,}9$ м/с^2. Знак указывает, что ускорение груза *3* и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис.

Требования к выполнению задания 2
Осмыслить основное содержание лекционного материала, дважды прочитав его.
Подразделять материал на основные смысловые части, выделять главные мысли, выводы.
Составить основу конспекта по теме, сформулировать его пункты и определить, что следует включить в конспект для их раскрытия.
На основе изучения соответствующих разделов учебников, учебных пособий и конспекта лекций сформулировать ответы на вопросы.

Порядок выполнения задания 2
Составить конспект лекции, распределить собранный материал в необходимой логической последовательности. Композиционно оформить конспект.
Изучить информацию по теме, произвести её анализ, дать ответы на поставленные вопросы.

Требования к оформлению задания 2
Решение задачи оформить в рабочей тетради с иллюстрациями, расчетными формулам и комментариями.

Форма контроля: устный опрос.

Контрольные вопросы для проведения опроса по теме:
1. Общие теоремы динамики системы
2. Кинетическая энергия твёрдого тела, системы
3. Работа (силы, момента)
4. Теорема об изменении кинетической энергии системы
5. Осевой момент инерции твёрдого тела (стержень, однородный диск и цилиндр, тонкостенный диск)
6. Теорема Штейнера
7. Количество движения точки и системы
8. Теорема об изменении количества движения точки и системы, закон сохранения
9. Связи, налагаемые на механическую систему
10. Возможные перемещения материальной точки и системы
11. Число степеней свободы системы
12. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

Рекомендуемые источники:
1. Диевский, В. А. Теоретическая механика / В. А. Диевский. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 348 с. — ISBN 978-5-507-48273-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/346016
2. Молотников, В. Я. Техническая механика / В. Я. Молотников. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-45522-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/271301
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. — ISBN 978-5-507-47033-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/322469
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 640 с. — ISBN 978-5-507-47893-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/332093

5. Максимов, А. Б. Теоретическая механика. Решение задач статики и кинематики : учебное пособие / А. Б. Максимов. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-2008-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212300
6. Доронин, Ф. А. Теоретическая механика : учебное пособие / Ф. А. Доронин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-2585-3. — Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212570