

АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика»

**ПРОГРАММА И КОНТРОЛЬНЫЕ
ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ**

для студентов – заочников
механических специальностей

Астрахань 2013 г

Составители: *Комаров М.П., к.ф.м.н, доцент кафедры «Математика», Бурмистрова О.В. старший преподаватель кафедры «Математика».*

Рецензент: *Жуков В.М., к.т.н, доцент. кафедры «Математика»*

Контрольные задания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры протокол заседания № 6 от 12. 02 .2013г.

Методические указания

Контрольные работы составлены в соответствии с программой обучения. Работы выполняются в тетрадях с полями. На обложке указывается Ф.И.О., шифр, адрес студента, номер работы (работ) и дата ее (их) выполнения. Тексты задач записывать обязательно.

Количество контрольных работ на первом и втором курсах зависит от специальности, оно указывается в графике учебного процесса студента. Номера заданий по каждой работе находятся на кафедре «Математика», 1 корпус, аудитория 320.

Программа курса высшей математики

I Линейная, векторная алгебры.

1. Определители, их свойства.
2. Матрицы, операции над ними.
3. Системы линейных алгебраических уравнений, методы Крамера, матричный и Гаусса.
4. Векторы, линейные операции над ними. Проекция вектора на ось. Базис, координаты вектора в базисе.
5. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их свойства и приложения.
6. Комплексные числа, их формы и операции над ними.

II Аналитическая геометрия.

1. Уравнения прямой на плоскости, основные задачи..
2. Уравнения плоскости в пространстве, основные задачи.
3. Уравнения прямой в пространстве, основные задачи. Взаимное расположение прямой и плоскости.
4. Кривые II-го порядка, их канонические уравнения.
5. Поверхности II-го порядка, их канонические уравнения..

III Введение в математический анализ.

1. Функция одной переменной, способы ее задания, простейшие свойства. Основные элементарные функции, их графики.
2. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.
3. Непрерывные функции в точке и на отрезке. Точки разрыва функции, их классификация. Свойства непрерывных функций.

IV Дифференциальное исчисление.

1. Производная, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику

- функций.
2. Основные правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций.
 3. Дифференциал функции, его геометрический смысл, свойства, применение.
 4. Производные и дифференциалы высших порядков. Производные от функций, заданных неявно и параметрически.
 5. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.
 6. Монотонность функции, ее необходимое и достаточное условия.
 7. Экстремум функции, его необходимое и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
 8. Выпуклость, вогнутость графика функции, достаточное условие. Точка перегиба графика, необходимое и достаточное условия.
 9. Асимптоты графика, их определение. Полное исследование функции.
 10. Функция нескольких переменных. Предел и непрерывность функций 2-х и 3-х переменных, частные производные, их геометрический смысл.
 11. Частные производные высших порядков.
 12. Частные производные сложных и неявно заданных функций.
 13. Производная по направлению, градиент функции, их свойства.
 14. Полный дифференциал, его применение.
 15. Экстремум функции 2-х переменных, необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.

V Интегрально исчисление.

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов.
2. Основные методы интегрирования: замена переменной,

интегрирование по частям.

3. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций.
4. Определенный интеграл, его свойства, геометрический смысл.
5. Производная от интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенных интегралах.
7. Геометрические и механические приложения определенных интегралов.
8. Несобственные интегралы первого и второго рода.
9. Двойные интегралы, их свойства, вычисление, геометрический смысл, приложения. Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат.
10. Тройные интегралы, их приложения, свойства, вычисление в прямоугольной декартовой и цилиндрической системах координат.
11. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства, вычисление, приложения.

VI Ряды.

1. Числовые ряды, их сходимость, сумма. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости.
2. Знакоположительные ряды, достаточные признаки сходимости.
3. Знакопеременные ряды, их достаточный признак сходимости. Абсолютная и условная сходимость.
4. Знакопеременные ряды, признак Лейбница.
5. Функциональные ряды, их область сходимости и сумма. Степенной ряд, его интеграл и радиус сходимости. Теоремы об интегрировании и дифференцировании степенных рядов.
6. Разложения функций в степенные ряды. Таблица основных разложений. Приложения степенных рядов.
7. Тригонометрический ряд Фурье.

VII Дифференциальные уравнения.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1 и 2 порядков, задача Коши, общее и частное решения.
2. Уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли.
3. Уравнения II порядка, допускающие понижение порядка.
4. Линейные однородные и неоднородные уравнения II порядка, структура их общих решений.
5. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Метод подбора частного решения неоднородного уравнения по виду правой части.
6. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами, их решение методом исключения неизвестных.

VIII Математическая физика. Комплексные функции. Операционное исчисление.

1. Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные типы уравнений математической физики. Краевые условия.
2. Решение уравнения колебаний струны методами Даламбера и Фурье.
3. Комплексная функция действительного переменного, ее предел, непрерывность, производная.
4. Функция комплексного переменного, ее предел, непрерывность, производная и дифференцирование. Условия Коши-Римана.
5. Оригиналы и изображения. Свойства преобразования Лапласа.
6. Таблица основных оригиналов и изображений. Элементарные методы их нахождения.
7. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

IX Теория вероятностей и математическая статистика.

1. Основные понятия комбинаторики.
2. Классификация событий, операции над ними. Относительная частота. Вероятность, ее свойства.
3. Теоремы умножения и сложения вероятностей.
4. Формулы полной вероятности, Бейеса, Бернулли, Лапласа, Пуассона.
5. Случайная величина, ее виды и их законы распределения вероятностей.
6. Основные числовые характеристики случайных величин: математического ожидания и дисперсия, их свойства.
7. Законы распределения Бернулли и Гаусса.
8. Законы больших чисел.
9. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение выборки. Выборочные средняя и дисперсия. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
10. Доверительные вероятность и интервал. Интервальные оценки неизвестного математического ожидания нормального распределения.
11. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий Пирсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 404с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 816 с.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 1.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 304 с.
4. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 2.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 396 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 367 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 4.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2006. – 336 с.
7. Методические рекомендации к выполнению типовых расчетов / А.В. Имангазиева, О.В. Бурмистрова, М.П. Комаров [и др.] – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2006. – 184 с.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

I. Линейная алгебра.

1.1.–1.10. Даны матрицы A и B . Найти: 1) определитель матрицы A по правилу треугольников; разложением по элементам первой строки; предварительно получив в ней два нуля; 2) матрицы $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, AB , A^{-1} .

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \alpha = 2; \beta = -3.$$

1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = -3; \beta = 2.$$

1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = -2; \beta = 3.$$

1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \alpha = 3; \beta = -2.$$

1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 4; \beta = -2.$$

1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 3; \beta = -2.$$

1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \alpha = -3; \beta = 2.$$

1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha = -1; \beta = 2.$$

1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = -2; \beta = 5.$$

1.10.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha = -2; \beta = 4.$$

1.11 – 1.20. Дана система линейных алгебраических уравнений.

Показать, что она имеет единственное решение и найти его:

1) методом Крамера;

2) методом Гаусса.

$$\mathbf{1.11.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.12.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.13.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_2 + x_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.14.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.15.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.16.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_3 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.17.} \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.18.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.19.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{1.20.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_2 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

1.21. – 1.30. Выполнить действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической и показательной формах.

$$1.21. \frac{1+i}{1-2i} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \right)^9;$$

$$1.22. \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}};$$

$$1.23. \frac{(-2+i)^2}{1+3i} - (1+i);$$

$$1.24. \frac{2(1-i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-i) \cdot i^{13}};$$

$$1.25. \frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} \cdot i^{12};$$

$$1.26. \frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3});$$

$$1.27. \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{20} + i^{17};$$

$$1.28. \frac{(1-3i)(1+3i)}{-3+i} - 2i^{10}$$

$$1.29. \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^{11}};$$

$$1.20. \frac{(4-i)^2}{i^8} - 8(2-i^9).$$

1.31.–1.40. Решить уравнения:

$$1.31. x^3 - i = 0; \quad 1.32. x^3 - 8 = 0; \quad 1.33. x^3 + 8 = 0;$$

$$1.34. x^3 + 27 = 0; \quad 1.35. x^3 + 16 = 0; \quad 1.36. x^3 - 27 = 0;$$

$$1.37. x^3 + 8i = 0; \quad 1.38. x^3 - 16 = 0; \quad 1.39. x^3 + 27i = 0;$$

$$1.40. x^3 + 64 = 0.$$

II. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

2.1. – 2.10. Даны координаты четырех точек A, B, C, D . Требуется средствами векторной алгебры найти: 1) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; 2) площадь треугольника ABC ; 3) объем пирамиды $ABCD$; 4) сделать схематический чертеж.

$$2.1. A(3,1,4), B(-1,6,1), C(-1,1,6), D(0,4,-1).$$

$$2.2. A(3,3,9), B(6,9,1), C(1,7,3), D(8,5,8).$$

$$2.3. A(3,5,4), B(5,8,3), C(1,9,9), D(6,4,8).$$

- 2.4. $A(2,4,3), B(7,6,3), C(4,9,3), D(3,6,7)$.
 2.5. $A(9,5,5), B(-3,7,1), C(5,7,8), D(6,9,2)$.
 2.6. $A(6,6,2), B(5,4,7), C(2,4,7), D(7,3,0)$.
 2.7. $A(7,5,3), B(9,4,4), C(4,5,7), D(7,9,6)$.
 2.8. $A(6,1,1), B(4,6,6), C(4,2,0), D(1,2,6)$.
 2.9. $A(5,8,2), B(3,5,10), C(3,8,4), D(5,5,4)$.
 2.10. $A(0,7,1), B(4,1,5), C(4,6,3), D(3,9,8)$.

2.11. – 2.20. Даны уравнения плоскости (α) и координаты точки P . Требуется найти: 1) канонические уравнения прямой l , проходящей через точку P перпендикулярно плоскости (α) ; 2) точку пересечения прямой l с плоскостью (α) ; 3) уравнение плоскости, проходящей через прямую l и начало координат. Сделать схематический чертеж.

- 2.11. $(\alpha): 7x - y + 6z - 8 = 0$, $P(2, -5, 6)$.
 2.12. $(\alpha): 4x + y - 3z + 8 = 0$, $P(1, 2, -4)$.
 2.13. $(\alpha): 5x - 2y + 2z - 18 = 0$, $P(-3, 1, 1)$.
 2.14. $(\alpha): x + y + z + 9 = 0$, $P(2, -5, 6)$.
 2.15. $(\alpha): 3x + 2y - z - 6 = 0$, $P(1, -1, 9)$.
 2.16. $(\alpha): 5x - 6y + z + 11 = 0$, $P(1, 0, 4)$.
 2.17. $(\alpha): 2x - 2y + 5z - 18 = 0$, $P(1, 1, -3)$.
 2.18. $(\alpha): 4x - 3y + z + 8 = 0$, $P(1, -4, 2)$.
 2.19. $(\alpha): x + y + z + 15 = 0$, $P(2, 6, -5)$.
 2.20. $(\alpha): 3x - y + 2z + 1 = 0$, $P(1, 9, -1)$.

2.21. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. Сделать чертеж.

2.22. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. Сделать чертеж.

2.23. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей. Сделать чертеж.

2.24. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$. Сделать чертеж.

2.25. Найти координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон, треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$. Сделать чертеж.

2.26. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины A треугольника ABC , если уравнения его сторон: $(AB): 2x-y-3=0$, $(AC): x+5y-7=0$, $(BC): 3x-2y+13=0$. Сделать чертеж.

2.27. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$, провести прямую, параллельную оси абсцисс. Сделать чертеж.

2.28. Найти точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$. Сделать чертеж.

2.29. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$. Сделать чертеж.

2.30. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x-y-5=0$ и $x+y=1$. Сделать чертеж.

III. Введение в математический анализ.

3. 1. – 3.10. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

$$\begin{array}{ll}
\text{3.1. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x - 2x^2 + 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 6x}{\sqrt{1 + 4x} - \sqrt{2x + 13}}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \operatorname{tg} x}{\cos x - \cos^3 x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} (9 - 2x)^{\frac{5x}{x-4}}. \\
\text{3.2. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 3}{5x^2 - 2x^3 + 7}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x + 4} - 2\sqrt{6}}{x - 4}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cdot \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5)(\ln(2x + 5) - \ln(3 + 2x)). \\
\text{3.3. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x^4 + 6}{2x^4 + x^3 - 5x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}}{5x}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 2x}{1 - \cos 4x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 4} \right)^{2x^2 - 5}. \\
\text{3.4. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 8}{3x^2 + x - 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x + 2} - 4}{14 - 2x}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^2 2x}{3x \cdot \sin 5x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}}. \\
\text{3.5. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 8x + 11}{6x - 2x^2 + 3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \sqrt{x}}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 3x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 5}{6x} \right)^{3x - 4}. \\
\text{3.6. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 7}{5x^2 + 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{6 + 2x} - \sqrt{6}}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{\operatorname{arctg} x \cdot \sin 5x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 3)(\ln x - \ln(x - 2)). \\
\text{3.7. a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 + 3x^3 - 4}{4x^5 - 2x^2 + 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 3}}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 6x}{1 - \cos x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} (5 + 2x)^{\frac{7x}{x+2}}.
\end{array}$$

$$3.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x - x^4}{3x^4 - 2x^2 + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-2x^2} - \sqrt{5}}{x^2 + x^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\sin 3x + \sin x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{5x-3} \right)^{6x-5}.$$

$$3.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x + 6}{6x^2 + x^3 - 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{7+3x} - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} x}{x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1)(\ln(x+4) - \ln x).$$

$$3.10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x + 1}{7x + 3x^2 - 5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^3}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} (2x-9)^{\frac{3}{x-5}}.$$

3.11. – 3.20. Задана функция $y = f(x)$. Требуется: 1) исследовать на непрерывность; 2) классифицировать точки разрыва функции, если они существуют; 3) исследовать поведение функции на бесконечности; 4) сделать схематический чертеж по результатам исследования.

$$3.11. \text{ а) } f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{при } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1. \\ 3 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

$$3.12. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{при } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{при } 0 < x \leq 2. \\ \frac{1}{x-2} & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$3.13. \text{ а) } f(x) = 5^{\frac{1}{4-x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 2. \\ 2x & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$3.14. \text{ а) } f(x) = 6^{\frac{1}{x-2}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{при } x < 0 \\ x+1 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x > 4 \end{cases}.$$

$$3.15. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{3^x}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{при } x < -\pi \\ \sin x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ \log_3 x & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

$$3.16. \text{ а) } f(x) = (0,1)^{\frac{1}{2x+1}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0 \\ 2-x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 1 \end{cases}.$$

$$3.17. \text{ а) } f(x) = (0,2)^{\frac{1}{3x-2}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{при } x < -2 \\ 3x+2 & \text{при } -2 \leq x \leq 2 \\ 12-x^2 & \text{при } x > 2 \end{cases}.$$

$$3.18. \text{ а) } f(x) = 7^{\frac{1}{4x-2}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

$$3.19. \text{ а) } f(x) = (0,1)^{\frac{1}{3-2x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{при } x \leq 0 \\ \lg x & \text{при } 0 < x \leq 10 \\ 11-x & \text{при } x > 10 \end{cases}.$$

$$3.20. \text{ а) } f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{2+x}}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x < 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

IV. Производная и дифференциал функции.

4.1. – 4.10. Найти производные y' данных функций.

$$4.1. \text{ а) } y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-7)^3}; \quad \text{б) } y = \frac{1+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{в) } y = (\cos x)^x;$$

$$\text{г) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

4.2. а) $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+7x}} - 10\sqrt[3]{2+7x}$; б) $y = \cos^5 4x$; в) $y = x^{e^x}$;

г) $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

4.3. а) $y = x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x}$; в) $y = 5^{\cos^3 x}$; г) $y = (x^2 - 1)^{\operatorname{tg} x}$.

4.4. а) $y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$; б) $y = \sin \sqrt{1+x^2}$; в) $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[5]{x}$;

г) $y = (\arccos x)^{5x}$.

4.5. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = \cos \ln^3 x$; в) $y = (e^{\sin x} - 1)^6$;

г) $y = (5x-1)^{\sqrt{x}}$.

4.6. а) $y = x \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{1+x}}$; б) $y = \frac{1+\sin 7x}{1-\sin 7x}$; в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y = (\ln x)^x$.

4.7. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; в) $y = e^{\frac{4}{x^2}}$;

г) $y = (x+1)^{\arcsin x}$.

4.8. а) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = e^{1+\ln^2 x}$; в) $y = \operatorname{arccctg} \frac{5}{x}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

4.9. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y = \arcsin \frac{2x+1}{3}$; в) $y = e^{-5\operatorname{tg}^2 3x}$;

г) $y = (\cos 4x)^{x+5}$.

4.10. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{-x^2} \cdot \cos^4(2x+3)$; в) $y = (e^{\operatorname{tg} x} - 4)^5$;

г) $y = (1+\operatorname{tg} x)^{x^3}$.

4.11. а) Записать уравнение нормали к кривой $y = x^2 - 16x + 7$ в точке с абсциссой $x=1$.

б) Закон движения материальной точки $S(t) = 2t^5 - 6t^3 - 58$ (м).
Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с.

4.12. а) В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$.

б) Закон движения материальной точки $S(t) = \frac{3}{4}t^4 - 3t^3 + 7$ (м).
В какие моменты времени скорость ее движения равна 0 м/с?

4.13. а) Записать уравнение касательной к кривой $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$.

б) По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x(t) = 4t^2 - 7$ (м) и $x(t) = 3t^2 - 4t + 38$ (м). С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи?

4.14. а) В каких точках кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$?

б) Закон движения материальной точки $S(t) = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$ (м).
Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с.

4.15. а) Записать уравнение нормали к кривой $y = 3\lg 2x + 1$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$.

б) Материальная точка движется по гиперболе $xy = 12$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6; 2)?

4.16. а) В какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$?

б) Закон движения материальной точки $S(t) = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$ (м).

Найти ее скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с.

4.17. а) Найти точку на кривой $y = \frac{x^4}{4} - 7$, касательная в которой параллельна прямой $y = 8x - 4$.

б) Закон движения материальной точки

$S(t) = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$ (м). Найти скорость ее движения в момент времени $t = 4$ с.

4.18. а) Записать уравнение нормали к кривой $y = 6\lg 5x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{20}$.

б) В какой точке параболы $y^2 = 16x$ ордината возрастает в четыре раза быстрее, чем абсцисса?

4.19. а) Найти точки на кривой $y = \frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 20x - 7$, в которых касательные параллельны оси Ox .

б) По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x(t) = 2t^3 - 2t^2 + 6t - 7$ (м) и $x(t) = \frac{5t^3}{3} - t^2 + 14t + 4$ (м). В какой момент времени их скорости будут равными?

4.20. а) Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x - 20y + 5 = 0$.

б) Закон движения материальной точки $S(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$ (м). В какой момент времени ее скорость будет равна 42 м/с?

V. Приложения дифференциального исчисления.

5.1. – 5.10. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

5.1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5 \cdot e^{-3x}}$.

5.2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$.

$$5.3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}.$$

$$5.4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 - \sin^2 x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}.$$

$$5.5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-0,01x}.$$

$$5.6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 8x}.$$

$$5.7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}.$$

$$5.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$5.9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{3}{x}\right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}.$$

$$5.10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \cdot e^{-x} \right)$$

5.11. – 5.20. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$5.11. \quad f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}, [-5; 5].$$

$$5.12. \quad f(x) = \frac{x-3}{x^2+16}, [-5; 5].$$

$$5.13. \quad f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}, [-4; 6].$$

$$5.14. \quad f(x) = \frac{10x}{1+x^2}, [0; 3].$$

$$5.15. \quad f(x) = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}, [-3; 3].$$

$$5.16. \quad f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1; 4].$$

$$5.17. \quad f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4].$$

$$5.18. \quad f(x) = \frac{x-5}{x^2+11}, [-3; 7].$$

$$5.19. f(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, [2; 4]. \quad 5.20. f(x) = \frac{4x}{4+x^2}, [-4; 2].$$

5.21. – 5.30. Провести полное исследование указанной функции методами дифференциального исчисления и построить ее график.

$$5.21. y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}.$$

$$5.22. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$5.23. y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

$$5.24. y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$5.25. y = \frac{(x-2)^2}{x+1}.$$

$$5.26. y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}.$$

$$5.27. y = \frac{(x-5)^2}{(x+1)^2}.$$

$$5.28. y = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$5.29. y = \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^2.$$

$$5.30. y = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

VI. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

6.1. – 6.10. Для данной функции $z = f(x, y)$ найти частные производные z'_x и z'_y .

$$6.1. z = e^{xy};$$

$$6.2. z = e^{-\cos(2x+y)};$$

$$6.3. z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1);$$

$$6.4. z = \sin^2(y - 3x);$$

$$6.5. z = \frac{y}{x};$$

$$6.6. z = y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$6.7. z = \frac{\sin(x-y)}{x};$$

$$6.8. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$6.9. z = y \cdot \sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$6.10. z = e^{\frac{y}{x}}.$$

6.11. – 6.20. Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на экстремум.

6.11. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$;

6.12. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$;

6.13. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$;

6.14. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$;

6.15. $z = xy - 2x - y$;

6.16. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$;

6.17. $z = 2x + y - xy$;

6.18. $z = x^2 + xy$;

6.19. $z = x^2 + xy - 2$;

6.20. $z = 10 + 2xy - x^2$.

6.21. – 6.30. Дана функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$, вектор $\vec{a}$.
Найти:

- 1) направление и скорость наибольшего возрастания функции в точке A .
- 2) Производную функции в точке A , в направлении вектора $\vec{a}$.
- 3) Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке A .

6.21. $z = 2x^2 + xy$, $A(-1; 2)$, $\vec{a} = 3i + 4j$.

6.22. $z = x^3 + xy^2$, $A(1; 3)$, $\vec{a} = -5i + 12j$.

6.23. $z = 5x^2y + 3xy^3$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = 6i - 8j$.

6.24. $z = \frac{3x}{y^2}$, $A(3; 4)$, $\vec{a} = -3i - 4j$.

6.25. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $A(1; -2)$, $\vec{a} = i + 2j$.

6.26. $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1; 2)$, $\vec{a} = 2i + j$.

6.27. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = -i + j$.

6.28. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, $A(1; -2)$, $\vec{a} = 4i - 3j$.

6.29. $z = 5x^2 + 6xy$, $A(2; 1)$, $\vec{a} = i + 2j$.

$$6.30. z = 5x^2 - 2xy + y^2, \quad A(1;1), \quad \bar{a} = 2i + j.$$

VII. Неопределенный и определенный интегралы.

7.1. – 7.10. Найти неопределенные интегралы.

$$7.1. \text{ а) } \int \frac{4-5\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int (3x+2) \cdot e^{2x} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2-6x-3}{(x-1)^2(x+3)} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{5+\sqrt{x+3}};$$

$$7.2. \text{ а) } \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}; \quad \text{б) } \int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(6x+8)dx}{(x+3)(x^2+1)}; \quad \text{г) } \int \cos^3 x \cdot \sin^{10} x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$$

$$7.3. \text{ а) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16+x^6}}; \quad \text{б) } \int (6-5x) \cdot \cos 3x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(10x+1)dx}{(x-2)^2(x+5)}; \quad \text{г) } \int \cos 7x \cdot \sin 5x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{2-\sqrt{x-4}};$$

$$7.4. \text{ а) } \int \frac{3^{\operatorname{ctg} x} + 1}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б) } \int x \arcsin x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(3x+7)dx}{(x+1)(x^2+5)}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{5+2\cos x};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}};$$

$$7.5. \text{ a) } \int \frac{\sin(3x)dx}{\sqrt{\cos^2(3x)-4}};$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2+2x+2}{x^2(x+6)} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+5};$$

$$7.6. \text{ a) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^8}};$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2+27x+32}{(x+4)^2 \cdot (x-3)} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-3}};$$

$$7.7. \text{ a) } \int \frac{3-2\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{b) } \int \frac{(11x+30)dx}{(x-2)(x^2+10)};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})};$$

$$7.8. \text{ a) } \int \frac{6\operatorname{tg} x+5}{\cos^2 x} dx;$$

$$\text{b) } \int \frac{2x^2+23x-16}{(x+5)^2(x+2)};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}+2};$$

$$7.9. \text{ a) } \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}};$$

$$\text{b) } \int \frac{11x^2-24x-16}{(x-4) \cdot x^2} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{x+4}};$$

$$\text{б) } \int (4-3x) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx;$$

$$\text{г) } \int \sin^2(5x) dx;$$

$$\text{б) } \int (x^2-2x+5) \cdot \ln x dx;$$

$$\text{г) } \int \operatorname{tg}^3 x dx;$$

$$\text{б) } \int (8x+5) \cdot \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin^2 x};$$

$$\text{б) } \int \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\cos x - \sin x - 1};$$

$$\text{б) } \int \frac{\ln x}{x^7} dx;$$

$$\text{г) } \int \sin 8x \cdot \sin 3x dx;$$

$$7.10. \text{ а) } \int \frac{x^4 dx}{25-x^{10}}; \quad \text{б) } \int \frac{x}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(14x-1)}{(x-8)(x^2+5)}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{3\cos x - 2};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-5} \cdot (4+\sqrt[3]{x-5})}.$$

7.11. – 7.20. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$7.11. \int_2^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^4-5}; \quad 7.12. \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-x)^3}}; \quad 7.13. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+3)^2};$$

$$7.14. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}; \quad 7.15. \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}; \quad 7.16. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$7.17. \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{8+x^3}}; \quad 7.18. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \quad 7.19. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

$$7.20. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2(2x)}.$$

7.21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=3$, $x+y=4$. Сделать чертеж.

7.22. Вычислить длину дуги $y^2=(x-1)^3$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;1)$. Сделать чертеж.

7.23. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=6x$; $y=2x$. Сделать чертеж.

7.24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r=2(1+\cos\varphi)$. Сделать чертеж.

7.25. Вычислить длину дуги линии, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

7.26. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - \frac{x^2}{3}$ и $x + y = 3$. Сделать чертеж.

7.27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией, заданной параметрически: $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ Сделать чертеж.

7.28. Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением: $r = 4\sin \varphi$. Сделать чертеж.

7.29. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $y = 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Сделать чертеж.

7.30. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 5$. Сделать чертеж.

VIII. Дифференциальные уравнения.

8.1. – 8.10. Найти общие решения дифференциальных уравнений первого порядка.

8.1. а) $xy' = y - \sqrt{xy}$; б) $xy' - y = (x+1)^3 x^2$.

8.2. а) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$; б) $xy' = y + x^2 \sin x$.

8.3. а) $x^2 y' = y^2 + x^2$; б) $(x+3)y' + y = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

8.4. а) $x^2 y' = y^2 + xy$; б) $x^2 y' + y = e^{\frac{1}{x}}$.

8.5. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 4$; б) $(x+1)y' - xy = e^x$.

$$8.6. \text{ а) } 2xy y' = x^2 + y^2; \quad \text{б) } (4+x^2)y' + 2xy = 4+x^2.$$

$$8.7. \text{ а) } (y^2 + 3x^2)y' = 3xy; \quad \text{б) } xy' = y + x\sqrt{x}.$$

$$8.8. \text{ а) } y' = \frac{y^2 + xy}{x^2 - xy}; \quad \text{б) } y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}.$$

$$8.9. \text{ а) } y' = \frac{5xy + y^2}{3x^2 + xy}; \quad \text{б) } xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$8.10. \text{ а) } (x^2 - y^2)y' = xy; \quad \text{б) } y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1+x}.$$

8.11. – 8.20. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям.

$$8.11. y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.12. y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.13. y'' + 4y = e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.14. y'' - 2y' + 5y = x \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.15. y'' + 5y' + 6y = 3\cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.16. y'' - 5y' + 6y = (2x-1)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.17. y'' - 4y' + 13y = 7x + 5, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.18. y'' - 4y' = 6x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.19. y'' - 3y' + 2y = 4e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$8.20. y'' + 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

IX. Кратные и криволинейные интегралы.

9.1. – 9.10. Дан двукратный интеграл. Изобразить на чертеже область интегрирования. С помощью этого интеграла найти ее площадь.

$$9.1. \int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x^2} dy ;$$

$$9.2. \int_0^1 dy \int_y^{2-y^2} dx ;$$

$$9.3. \int_0^1 dx \int_x^{4-x^2} dy ;$$

$$9.4. \int_0^1 dx \int_{2x}^{1+x^2} dy ;$$

$$9.5. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{5-4y} dx ;$$

$$9.6. \int_1^{1.5} dx \int_{2x-1}^{\frac{3}{x}} dy$$

$$9.7. \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{4}}^{4-y^2} dx ;$$

$$9.8. \int_{-5}^0 dx \int_{4x}^{5-x^2} dy ;$$

$$9.9. \int_{-7}^0 dy \int_{6y}^{7-y^2} dx$$

$$9.10. \int_0^1 dx \int_{2+x^2}^{4-x^2} dy .$$

9.11. – 9.20. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (1+x+2y+2xy) dx dy$,

где область интегрирования D ограничена линиями $x=N$, $y=x$, $y=2x$, где N - номер варианта. Сделать чертеж.

9.21. – 9.30. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (2xyz+x) dx dy dz$,

где область интегрирования V задана плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=N$, $y=2$, $z-x=0$ где N - номер варианта. Сделать чертеж.

9.31. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y+1)dx - (2-x)dy$

вдоль дуги L окружности $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$, обходя ее против часовой стрелки.

9.32. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (3y + x^2)dx - x dy$

вдоль дуги L параболы $y = 3x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;3)$.

9.33. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x^2 + 3y)dx + (y - 2x)dy$

вдоль дуги L параболы $y = 1 - x^2$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;0)$.

9.34. вычислить криволинейный интеграл $\int_L (3x - 2y)dx + 2y dy$

вдоль L — эллипса $x = 4\cos t, y = 2\sin t$, обходя его против часовой стрелки.

9.35. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y - x)dx + \frac{3x}{y} dy$

вдоль дуги L кривой $y = e^x$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.

9.36. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y + 2)dx - (x + y)dy$

вдоль прямой L $y = 2 - 3x$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(1;-1)$.

9.37. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L (x - 2y^2)dx + (xy - \sqrt{x})dy$ вдоль дуги L параболы $y = 3\sqrt{x}$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;3)$.

9.38. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{3-y}{x} dx + (2x+1)dy$

вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

9.39. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L (3y + 2x)dx - (x - 2y)dy$ вдоль прямой $L: y = 2x - 1$ от точки $A(0;-1)$ до точки $B(1;1)$.

9.40. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_L (2x^2 - xy)dx + (4 + x^2)dy$ вдоль дуги L гиперболы $xy=1$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2; \frac{1}{2})$.

Х. Числовые и степенные ряды.

10.1. – 10.10. Исследовать на сходимость числовые ряды.

- | | |
|--|--|
| 10.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2 - 1}{10^n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$ |
| 10.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^2 n + 1)};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n;$ |
| 10.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+7}{2n+19} \right)^n;$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(4n+1)};$ |
| 10.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}};$ |
| 10.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+7} \right)^n;$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{3^{2n+1}};$ |
| 10.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! + n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n^2 + 10};$ |
| 10.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 3^n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(4n+1)};$ |
| 10.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(3n-1)^{2n}};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5};$ |
| 10.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (2n-1)}{n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{4n+3}};$ |
| 10.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-5} e^{-3n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n}{7n+1} \right)^n.$ |

10.11. – 10.20. Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$10.11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - n \right) x^n;$$

$$10.12. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n+1} (n-3) x^n;$$

$$10.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{3n+2} (n-2)};$$

$$10.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{3^{n+2}} x^n;$$

$$10.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - n) x^n}{(5n+3)^5};$$

$$10.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n-1} x^n}{5n!};$$

$$10.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 x^n}{(3n+4)};$$

$$10.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n \cdot 4^{2n+1}} \cdot x^n;$$

$$10.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{5^{2n+2}};$$

$$10.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2) x^n}{2^{3n+2}}.$$

10.21. – 10.31. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,01, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

$$10.21. \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx;$$

$$10.22. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx;$$

$$10.23. \int_0^1 \sin x^3 dx;$$

$$10.24. \int_0^1 \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx;$$

$$10.25. \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx;$$

$$10.26. \int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx;$$

$$10.27. \int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx;$$

$$10.28. \int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx;$$

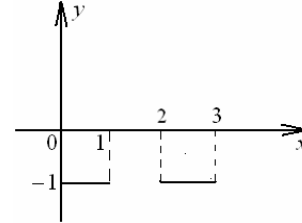
$$10.29. \int_0^1 \ln(1+x^3) dx;$$

$$10.30. \int_0^1 x^2 \sin x^2 dx.$$

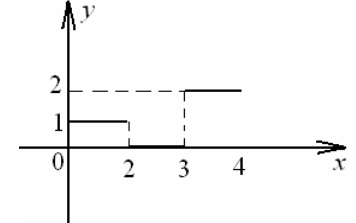
XI. Ряды Фурье. Математическая физика. Функция комплексной переменной. Операционное исчисление.

11.1. –11.10. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию, заданную графически.

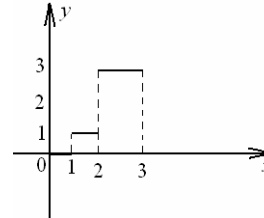
11.1.



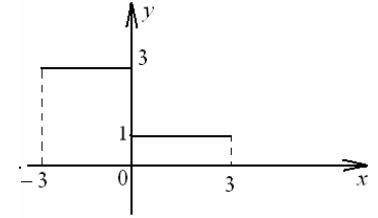
11.2.



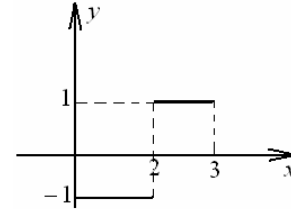
11.3.



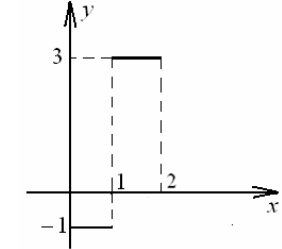
11.4.



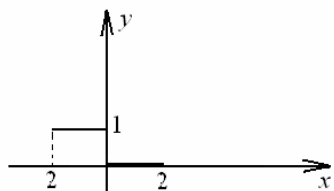
11.5.



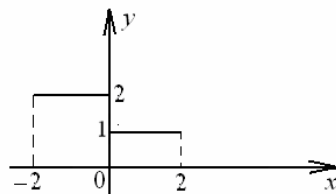
11.6.



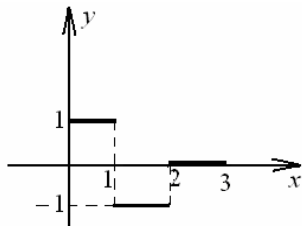
11.7.



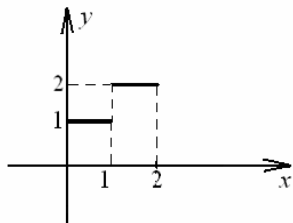
11.8.



11.9.



11.10.



11.11. – 11.20. Методом Даламбера найти закон $u = u(x, t)$ колебаний бесконечной струны, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и начальными условиями:} \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \psi(x), \quad \text{если}$$

$$11.11. \quad a = 1, \quad \varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$11.12. \quad a = 2, \quad \varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = x.$$

$$11.13. \quad a = 3, \quad \varphi(x) = x(x-3), \quad \psi(x) = e^{2x}.$$

$$11.14. \quad a = 2, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad \psi(x) = \cos x.$$

$$11.15. \quad a = 3, \quad \varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \cos^2 x$$

$$11.16. \quad a = 2, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \sin x.$$

$$11.17. \quad a = 3, \quad \varphi(x) = x+1, \quad \psi(x) = x.$$

$$11.18. \quad a = 2, \quad \varphi(x) = 5, \quad \psi(x) = 2x.$$

$$\begin{array}{lll}
 11.19. & a = 4, & \varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = 8 \sin x \\
 11.20. & a = \frac{3}{2}, & \varphi(x) = 1 - x, \quad \psi(x) = \cos x.
 \end{array}$$

11.21. – 11.30. Дана действительная $u(x, y)$ (мнимая $v(x, y)$) часть аналитической функции $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ комплексной переменной $z = x + i y$. Требуется: а) найти $f(z)$; б) $f'(z)$ в точке z_0 .

$$\begin{array}{ll}
 11.21. & u = x^2 - y^2 + x, \quad z_0 = -1 + i. \\
 11.22. & v = e^x \cos y, \quad z_0 = \frac{\pi}{3} i. \\
 11.23. & v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad z_0 = -1 + 2i. \\
 11.24. & u = 1 - \sin y \cdot e^x, \quad z_0 = \frac{\pi}{6} i. \\
 11.25. & u = -2xy - 2y, \quad z_0 = 3 - i. \\
 11.26. & v = e^{-y} \cos x + x, \quad z_0 = 0. \\
 11.27. & v = 2xy + 2x, \quad z_0 = -1 + i. \\
 11.28. & u = e^{-y} \cos x + x, \quad z_0 = 0. \\
 11.29. & u = e^{-y} \sin x + y, \quad z_0 = 0. \\
 11.30. & u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad z_0 = 1 + 2i.
 \end{array}$$

11.31. – 11.40. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения.

$$\begin{array}{ll}
 11.31. & x''(t) + x'(t) = e^{2t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0. \\
 11.32. & x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0. \\
 11.33. & x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^t \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0. \\
 11.34. & x''(t) - 4x(t) = 2e^t \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0. \\
 11.35. & x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 3 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.
 \end{array}$$

$$11.36. \quad x''(t) + x(t) = 4 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.$$

$$11.37. \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-2t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.$$

$$11.38. \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^{-t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.$$

$$11.39. \quad x''(t) + 4x(t) = 4e^{2t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.$$

$$11.40. \quad x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^{4t} \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0.$$

XII. Теория вероятностей и математическая статистика.

12.1. Имеется 10 одинаковых урн, в девяти из которых находится по два белых и два черных шара, а в одной пять белых и один черный. Из урны, взятой наудачу, был извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

12.2. Для сигнализации об аварии установлены 3 независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии не работает первое устройство – 0,1; второе – 0,3; третье – 0,5. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) хотя бы одно устройство; б) только два устройства.

12.3. В ящике лежат 6 новых и 4 старых теннисных мячей. Из ящика для первой игры наудачу вынимается один мяч, а после игры возвращается в ящик. После этого вынимается один мяч для следующей игры. Определить вероятность того, что этот мяч окажется новым.

12.4. Студент озабочен предстоящими экзаменами по физике и математике. По его мнению, вероятность того, что он сдаст хотя бы физику, равна 0,4, вероятность того, что он сдаст хотя бы один предмет 0,6, а вероятность того, что он сдаст оба предмета равна, 0,1. Какова предполагаемая студентом вероятность того, что он сдаст хотя бы экзамен по математике?

12.5. В одной урне 1 белый и 4 черных шара, а в другой – 2 белых и 3 черных, в третьей – 3 белых и 2 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 1 белый и 2 черных шара.

12.6. Из колоды (36 карт) берутся три карты. Какова вероятность того, что среди взятых карт будет хотя бы два туза?

12.7. На 2-х автоматах производятся одинаковые детали. Производительность первого автомата в три раза больше производительности второго. Первый автомат производит 80% деталей первого сорта, а второй 90% первого сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь будет первого сорта.

12.8. На инструментальный склад поступили восемь новых инструментов. Каждой из трех смен выдается случайным образом один инструмент, который после окончания работы возвращается обратно на склад. Определить вероятность того, что третья смена получит новый инструмент.

12.9. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Какова вероятность того, что в мишень попало не менее двух пуль.

12.10. Числа 1,2,3,4,5 написаны на 5 карточках. Наугад, последовательно, выбирают 3 карточки и располагают слева направо. Найти вероятность того, что оставленное при этом трехзначное число будет четным.

12.11. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение минуты позвонят 3 абонента или 4 абонента.

12.12. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит не более 3 бракованных книг?

12.13. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит: а) 75 раз; б) не более 85 раз и не менее 75 раз?

12.14. Вероятность того, что каждый из 8 спортсменов выполнит норму мастера спорта 0,6. Какова вероятность того, что норму мастера спорта выполняют не более 2-х человек. Найти наиверо-

ятнейшее число спортсменов, получивших мастера спорта и обеспечить это число вероятностью.

12.15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность 4-х попаданий при пяти выстрелах.

12.16. К электросети подключено 36 приборов, каждый мощностью 5 киловатт и потребляет энергию с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность:

а) составляет ровно 50 киловатт;

б) превзойдет 50 киловатт.

12.17. В некотором водоеме карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: а) ровно 4 карпа; б) не менее 4 карпов.

12.18. Вероятность того, что саженец елки приживется и будет успешно расти, равна 0,8. Посажено 400 саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастет не менее 250 деревьев? Ровно 300 саженцев?

12.19. Для повышения надежности контроля за ходом технологического процесса установлены 5 однотипных датчиков. Каждый из этих датчиков независимо от остальных может выйти из строя с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что количество датчиков не вышедших из строя, больше одного.

12.20. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости равна 0,02. Сверла упаковываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в данной коробке число сверл повышенной хрупкости окажется не более двух?

12.21. – 12.30. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)$. Требуется: а) найти дифференциальную функцию $f(x)$; б) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; в) построить графики $F(x)$, $f(x)$.

$$12.21. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\pi} \left(x + \frac{\pi}{4} \right), & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

$$12.22. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{100}, & \text{при } 0 < x \leq 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}.$$

$$12.23. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{49}, & \text{при } 0 < x \leq 7 \\ 1, & \text{при } x > 7 \end{cases}.$$

$$12.24. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{81}, & \text{при } 0 < x \leq 9 \\ 1, & \text{при } x > 9 \end{cases}.$$

$$12.25. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}.$$

$$12.26. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{3}, & \text{при } 2 < x \leq 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

$$12.27. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{64}, & \text{при } 0 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

$$12.28. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{\pi}, & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

$$12.29. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{2x}{\pi}, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$12.30. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{при } -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

12.31. – 12.40. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, где N - номер варианта:

x	$-N$	N	$2N$
p	p_1	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{2N}$

Найти: 1) вероятность p_1 ; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

12.41. Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Считая, что диаметр ствола – случайная величина, распределенная нормально, определить размер, который не превзойдет средний диаметр ствола с вероятностью 0,96.

12.42. Известно, что некоторый размер детали имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 0,5 мм и математическим ожиданием 240 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 239,5 мм и 240,5 мм. Определить вероятность изготовления годной детали.

12.43. Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 1,6 мм. Определить, сколько процентов стандартных валиков изготавливает автомат.

12.44. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 см, и дисперсией – 49 см^2 . Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 2 см.

12.45. Диаметр деталей, изготовленных цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна $0,0001 \text{ см}^2$, а математическое ожидание 2,5 см. в каких границах можно практически гарантировать диаметр деталей (за достоверное принимается событие, вероятность которого 0,9973)?

12.46. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 20г. Найти вероятность того, что

взвешивание будет произведено с погрешностью, не превышающей по абсолютной величине 10г.

12.47. Изделие считается стандартным, если отклонение некоторого его размера от номинала находится в интервале $(-1,8\text{мм}; 2\text{мм})$. Случайные отклонения размера от номинала распределены нормально со среднеквадратическим отклонением 0,7 мм. Найти число стандартных деталей в партии из 100 штук.

12.48. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 5 см, среднеквадратическое отклонение 0,9 см. Найти, в каких границах следует ожидать размер детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

12.49. Случайная величина X распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 5 мм и математическим ожиданием 0 мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

12.50. По статистическим данным 80% улова рыбы отклонялось от промыслового (стандартного) размера менее, чем на 3 см. Какой процент выловленной рыбы отклоняется от промыслового размера не более, чем на 5 см, если предположить, что размер рыбы имеет нормальный закон распределения.

12.51. – 12.60. Заданы среднеквадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X , выборочная средняя $\bar{x}$, объем выборки n . Требуется найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания (с надежностью $\gamma = 0,95$).

12.51. $\sigma = 2$ $\bar{x} = 12,45$ $n = 64$.

12.52. $\sigma = 3$ $\bar{x} = 12,47$ $n = 36$.

12.53. $\sigma = 7$ $\bar{x} = 12,49$ $n = 49$.

12.54. $\sigma = 5$ $\bar{x} = 12,51$ $n = 16$.

12.55. $\sigma = 2$ $\bar{x} = 12,53$ $n = 25$.

12.56. $\sigma=9$ $\bar{x}=12,55$ $n=81$.

12.57. $\sigma=5$ $\bar{x}=12,57$ $n=100$.

12.58. $\sigma=9$ $\bar{x}=12,59$ $n=36$.

12.59. $\sigma=10$ $\bar{x}=12,61$ $n=49$.

12.60. $\sigma=6$ $\bar{x}=12,63$ $n=16$.

АГТУ. Заказ _____ тираж _____ _____ 2013г.