Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована DQS по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

1.5. Осевое (центральное) растяжение-сжатие

1.5.1. Основные понятия

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором к стержню приложены только силы, линии действия которых совпадают с осью стержня, тогда в сечениях возникает одна продольная сила N (см. схемы из табл. 1).

Мерой интенсивности силы N является ***нормальное напряжение*** σ, численно равное внутренней силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня. Доказано, что при растяжении-сжатии во всех точках i – го сечения нормальные напряжения σ_i одинаковы и вычисляются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}, \tag{1}$$

где N_i – продольная (нормальная) сила в i-ом сечении,

A_i – площадь i-го поперечного сечения.

Из (1) следует, что при растяжении (сжатии) напряжения зависят от величины площади поперечного сечения, но не зависят от формы сечения.

При растяжении (сжатии) происходит изменение длины стержня ΔL, которое можно вычислить по формуле

$$\Delta L_i = \int_{L_i} \frac{N_i}{EA_i} dz, \tag{2}$$

где L_i – длина i-го участка, в пределах которого N_i, A_i – функции монотонные и непрерывные;

E – модуль продольной упругости материала.

Если в пределах длины участка $\frac{N_i}{EA_i} = const$, то

$$\Delta L_i = \frac{N_i L_i}{EA_i}, \tag{3}$$

где EA – жесткость поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).

По принципу независимости действия сил полное изменение длины стержня определяется как алгебраическая сумма изменения длин отдельных участков

$$\Delta L_{общ} = \sum_{i=1}^{k} \Delta L_i, \tag{4}$$

где k – число участков, где применимы формулы (2) или (3).

1.5.2. Расчет на прочность при растяжении (сжатии)

Прочность стержня будет обеспечена, если максимальные нормальные напряжения в стержне не превышают допускаемого напряжения для материала стержня.

Условие прочности при растяжении (сжатии)

$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \tag{5}$$

где σ_{max} – фактическое максимальное напряжение в стержне;

$[\sigma] = \dfrac{\sigma_{пред}}{n}$ - допускаемое напряжение для материала стержня. (5*)

Здесь $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение для материала стержня.

Для пластичных материалов предельное напряжение – предел текучести σ_T, для хрупких – предел прочности σ_B, которые принимаются по таблицам физико-механических свойств материалов; n – нормативный или необходимый коэффициент запаса прочности, который задается или принимается по справочным рекомендациям.

Учитывая (1) или (5*), условие прочности принимает вид

$$\frac{N}{A}\Big|_{\max} \le \frac{\sigma_{пред}}{n}. \tag{6}$$

Можно решать различные задачи из условия (6):

– если заданы размеры сечения и материал, то определяется допускаемая внешняя нагрузка, т.к. продольная сила зависит от внешней нагрузки;

– если задана внешняя нагрузка и материал, то определяются прочные размеры сечения;

– если заданы нагрузки, размеры сечения, то можно подобрать материал, определив из (6) $\sigma_{пред}$.

Если требуется проверить прочность стержня, когда известны все его параметры, то вычисляется *фактический (действительный)* коэффициент запаса прочности

$$n_ф = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{\max}} \tag{7}$$

и сравнивается с нормативным для оценки прочности.

1.5.3. Расчет на жесткость при растяжении (сжатии)

Если работоспособность стержня определяется ограничением его деформации, то параметры стержня определяются из условия жесткости.

Условие жесткости:

$$\Delta L \le [\Delta L], \tag{8}$$

где ΔL – общее изменение длины стержня или определенной части ее длины под действием внешней нагрузки;

$[\Delta L]$ – допускаемое изменение длины, которое задается в зависимости от условий работы стержня.

С учетом (3) и (4) условие жесткости можно записать так

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i L_i}{EA_i} \le [\Delta L]. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что из расчета на жесткость можно определять те же параметры для стержня, как и из расчета на прочность: размеры сечения, допускаемую нагрузку и даже длину стержня.

Если требуется найти перемещение δ какого-либо сечения стержня после приложения внешней нагрузки, то оно численно равно изменению длины той части стержня, которая находится между этим сечением и неподвижным (закрепленным) сечением стержня, т.е.

$$\delta = \Delta L. \qquad (10)$$

2.2. Примеры решения задач

Задача № 1.

1) Из расчета на прочность и жесткость определить *размер d поперечных сечений стержня* (рис. 2.1, а).

2) При найденном размере d определить перемещение сечения 1-1($\delta_{1\text{-}1}$).

Исходные данные: $q_1 = 2q$; $F_1 = qL$; $F_2 = 1{,}5\,qL$; $F_3 = 1{,}2\,qL$; $L_1 = 2L$; $L_2 = L$; $L_3 = 1{,}5\,L$; $q = 200$ кН/м; $L = 0{,}2$м; материал – сталь 3; $[\Delta L] = 2\cdot10^{-3}$м.

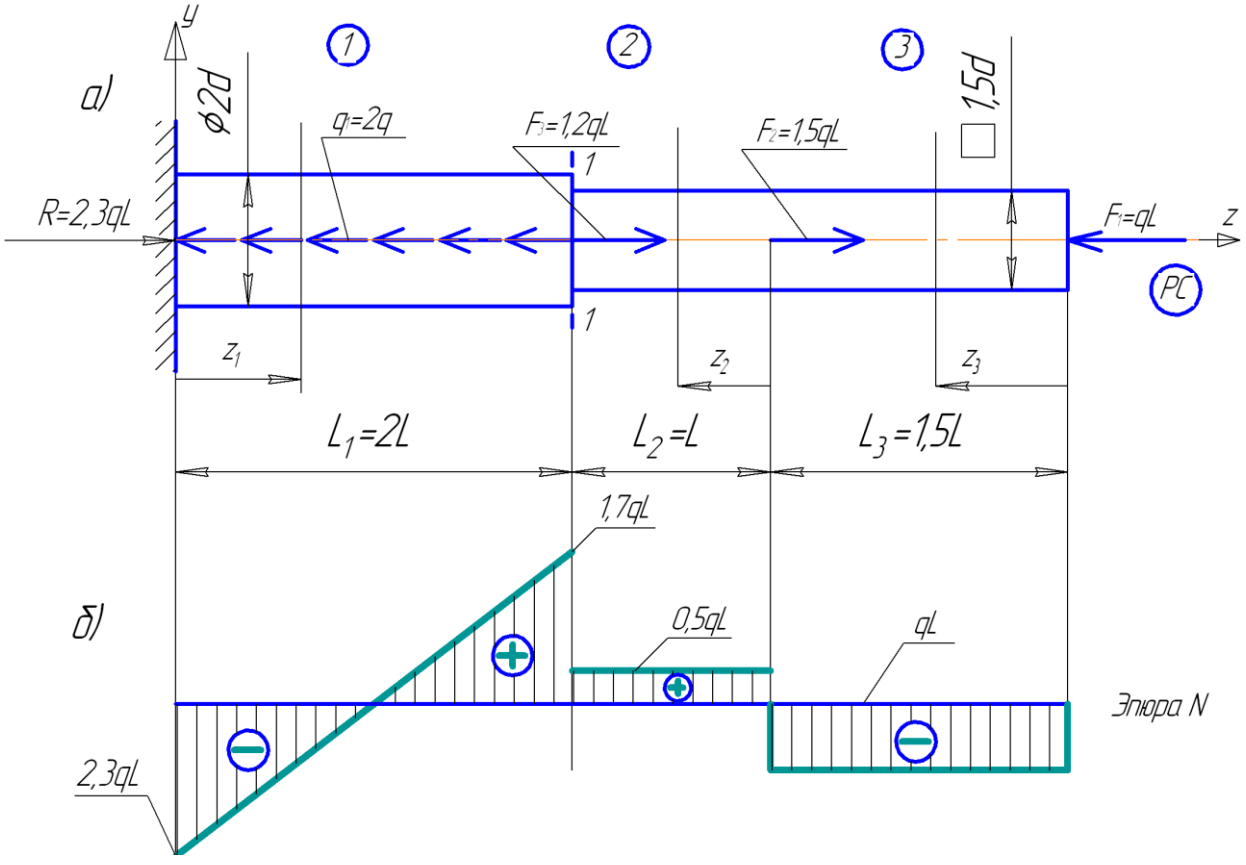


Рис.2.1. Расчетная схема (РС) (а) и эпюра продольной силы N (б) задачи № 1

Решение.

I. Расчет на прочность.

Стержень (рис. 2.1,а) нагружен силами вдоль оси стержня, следовательно, он испытывает деформацию растяжения-сжатия. Тогда условие прочности имеет вид (5):

$$\sigma_{max} \le [\sigma]$$

Чтобы определить допускаемое напряжение $[\sigma]$, проведем анализ материала стержня: для стали 3 относительное остаточное удлинение после разрыва $\varepsilon_{ост}$ = 21% ([7], с. 644), что больше 5%, следовательно, материал пластичный. Поэтому $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$, где для ст.3 предел текучести σ_T = 240 МПа ([7], с. 644), а необходимый коэффициент запаса прочности принимаем из рекомендуемого интервала для пластичного материала n = 1,5 ([7], с. 144).

Найдем максимальное фактическое напряжение в стержне (1):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A}\Big|_{max} \qquad (1^*)$$

Построим эпюру продольных сил N:

- определим реакцию опоры R_B, составив уравнение статического равновесия (сумма проекций всех сил на ось z стержня):

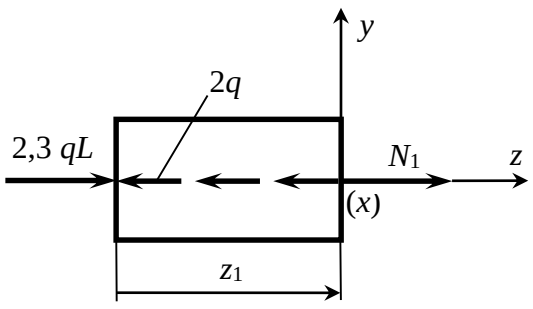
$\sum F_z = 0$; $R_B - 2q \cdot 2L + 1{,}2qL + 1{,}5qL - qL = 0$;

Откуда $R_B = 4qL - 1{,}2qL - 1{,}5qL + qL = 2{,}3\ qL$;

- разбиваем стержень на силовые участки **1-3**;

- методом сечений на каждом силовом участке определяем законы для N:

Участок 1. $0 \le z_1 \le 2L$



В пределах участка **1** проводим плоскость перпендикулярную оси z стержня в произвольном сечении (рис. 2.1, а); отбрасываем ту часть, где больше внешних нагрузок; изображаем оставшуюся часть (в данном случае – левую); выбираем силовую систему координат yz с полюсом (x) в центре тяжести сечения, где рассекаем стержень; заменяем действие отброшенной части на оставшуюся

положительно направленной продольной силой N_1; составляем уравнение статического равновесия для оставшейся части

$\sum F_z = 0;\ N_1 - 2q \cdot z_1 + 2{,}3\ qL = 0$; откуда

$N_1 = 2q \cdot z_1 - 2{,}3\ qL$ (линейная зависимость).

Чтобы построить эпюру (график) N, вычислим два значения N_1: в начале участка при $z_1 = 0$ и в конце участка при $z_1 = 2L$.

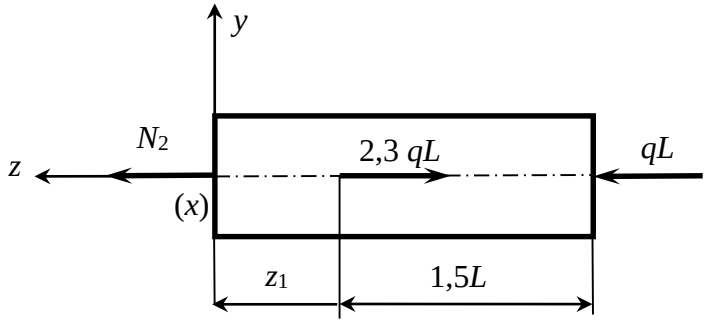
$z_1 = 0;\quad N_1 = -2{,}3\ qL$

$z_1 = 2L;\quad N_1 = 2q \cdot 2L - 2{,}3\ qL = 1{,}7\ qL$.

Строим эпюру N на участке **1** (рис. 2.1, б) в произвольном масштабе.

Аналогично рассматриваем участки **2** и **3** .

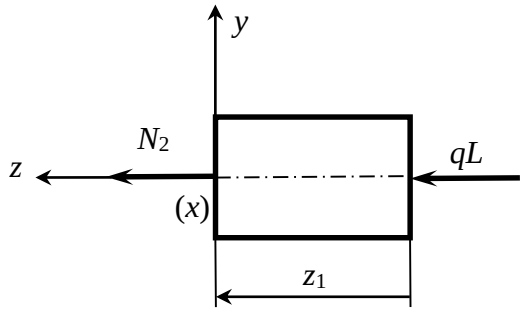
Участок 2. $0 \le z_1 \le L$



$\sum F_z = 0;\ N_2 - 1{,}5\ qL + qL = 0;$

$N_2 = 1{,}5\ qL - qL = 0{,}5\ qL (const);$

Участок 3. $0 \le z_3 \le 1{,}5L$



$\sum F_z = 0;\ N_3 + qL = 0;$

$N_3 = -qL$ (const).

По полученным данным строим эпюру N на **2** и **3** участках.

Проверяем правильность построения эпюры N:

- по «скачкам» (разрыв в значениях ординат): в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные продольные силы, на эпюре N есть разрывы в значениях ординат слева и справа от сечения,

- по дифференциальной зависимости

$\frac{dN}{dz} = q$: на участке **1** $\frac{dN_1}{dz_1} = 2q = const,$

поэтому N_1 изменяется по линейной зависимости, а на участках **2** и **3** $\frac{dN}{dz} = 0,$ поэтому N_2 и N_3 постоянны. Следовательно, эпюра N построена верно.

Выразим площади поперечных сечений на участках через искомый размер *d*:

$$A_1 = \frac{\pi(2d)^2}{4} = 3{,}14d^2;$$

$$A_2 = A_3 = (1{,}5d)^2 = 2{,}25d^2.$$

Поскольку пластичный материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо найти *максимальное по абсолютной величине напряжение.* Из формулы (1*) следует, что максимальные напряжения могут быть в сечениях, где $|N_{\max}|$ или A_{min}.

Из анализа эпюры *N* и сравнения площадей сечений следует, что это может быть в сечении *B* или сечениях **3** участка.

$$\sigma_1\big|_{z_1=0} = \frac{|-2{,}3qL|}{A_1} = \frac{2{,}3qL}{3{,}14d^2} = 0{,}732\frac{qL}{d^2};$$

$$\sigma_3 = \frac{qL}{2{,}25d^2} = 0{,}444\frac{qL}{d^2};$$

следовательно, $\sigma_{\max} = 0{,}732\frac{qL}{d^2}$.

Тогда условие прочности принимает вид:

$$0{,}732\frac{qL}{d^2} \le \frac{\sigma_T}{n}, \text{ откуда}$$

$$d \ge \sqrt{\frac{0{,}732qLn}{\sigma_T}} = \sqrt{\frac{0{,}732 \cdot 200\frac{кН}{м} \cdot 0{,}2м \cdot 1{,}5}{240 \cdot 10^3 \frac{кН}{м^2}}} = 13{,}5 \cdot 10^{-3} м.$$

II. Расчет на жесткость.

Условие жесткости при растяжении-сжатии (8): $\Delta L \le [\Delta L]$.

Вычислим общее изменение длины, используя формулы (4), (2), (3):

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = -\frac{0{,}191qL^2}{Ed^2} + \frac{0{,}222qL^2}{Ed^2} - \frac{0{,}667qL^2}{Ed^2} = -\frac{0{,}636qL^2}{Ed^2}, \text{ где}$$

$$\Delta L_1 = \int_0^{2L} \frac{N_1}{EA_1}dz_1 = \int_0^{2L} \frac{(-2{,}3qL + 2qz_1)}{E \cdot 3{,}14d^2}dz_1 = \frac{q}{3{,}14Ed^2}\left(-2{,}3Lz_1 + 2\frac{z_1}{2}\right)\Big|_0^{2L} =$$

$$= \frac{q}{3{,}14Ed^2}\left(-2{,}3 \cdot 2L^2 + 4L^2\right) = -\frac{0{,}191qL^2}{Ed^2};$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2L_2}{EA_2} = \frac{0{,}5qL \cdot L}{E2{,}25d^2} = \frac{0{,}222qL^2}{Ed^2};$$

$$\Delta L_3 = -\frac{N_3 L_3}{E A_3} = -\frac{qL \cdot 1{,}5L}{E 2{,}25 d^2} = -\frac{0{,}667 qL^2}{E d^2};$$

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль продольной упругости стали 3.

Условие жесткости принимает вид:

$$\left| -\frac{0{,}636 qL^2}{E d^2} \right| \le [\Delta L], \text{ откуда}$$

$$d \ge \sqrt{\frac{0{,}698 qL^2}{E \cdot [\Delta L]}} = \sqrt{\frac{0{,}636 \cdot 200 \frac{кН}{м} \cdot (0{,}2 м)^2}{2 \cdot 10^8 \frac{кН}{м^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} м}} = 3{,}57 \cdot 10^{-3} м.$$

Поскольку нужно обеспечить и прочность, и жесткость стержня, то принимаем размер $d = 14 \cdot 10^{-3}$ м = 14 мм.

III. Определение перемещения сечения 1–1.

Сечение 1–1 (рис. 1.7, а) переместится на величину изменения длины участка **1** , т.е.

$$\delta_{1-1} = \Delta L_1 = -\frac{0{,}191 qL^2}{E d^2} = -\frac{0{,}191 \cdot 200 \frac{кН}{м} \cdot (0{,}2 м)^2}{2 \cdot 10^8 \frac{кН}{м^2} \cdot (0{,}014)^2 м} = -0{,}039 \cdot 10^{-3} м = -0{,}039 мм.$$

Знак «-» означает, что сечение перемещается влево, т.е. к заделке.