Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована DQS по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»

Построение эпюр ВСФ при растяжении – сжатии, кручении; построение эпюр ВСФ в балках

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Построение эпюр внутренних силовых факторов

Построение эпюр внутренних силовых факторов 1
1.1 Внутренние силы упругости. Метод сечений 1
1.2 Виды сопротивлений 3
1.3 Виды опорных закреплений 3
1.4 Построение эпюр крутящих моментов $M_{кр}$ 5
1.6 Правила контроля эпюр N_z и $M_{кр}$ 6
1.7 Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в балках 6
1.8 Консольные балки 7
1.9 Дифференциальные зависимости между q, Q_y, M_x 8
1.10 Балки на двух опорах 9
1.11 Правила контроля эпюр Q_y и M_x 12
1.12 Другие подходы к построению эпюр внутренних силовых факторов 12
1.13 Построение эпюр для плоских рам 13
1.14 Рамы с жесткой заделкой 14
1.15 Рамы на двух шарнирных опорах 17
1.16 Рамы на двух опорах с промежуточным шарниром 21
1.17 Построение эпюр в плоско-пространственных системах 23
1.18 Построение эпюр в ломаных стержнях 29

1.1 Внутренние силы упругости. Метод сечений

Рассмотрим тело произвольной формы в “спокойном”, ненагруженном состоянии. Между его частицами всегда существуют силы взаимодействия, которые стремятся сохранить его как единое целое, то есть препятствуют изменению взаимного расположения частиц. При нагружении тела произвольной внешней нагрузкой силы взаимодействия между частицами изменяются, появляются дополнительные силы взаимодействия, которые приводят к изменению взаимного расположения частиц тела, то есть к его деформации.

Эти дополнительные силы взаимодействия называются *внутренними силами упругости (ВСУ)* и являются предметом изучения сопротивления материалов.

Анализ характера распределения внутренних сил упругости осуществляется при помощи *метода сечений*. Рассмотрим тело произвольной формы, нагруженное самоуравновешенной системой сил (рис.1,а). В интересующем нас сечении мысленно рассечем его плоскостью на две части (рис.1,б)

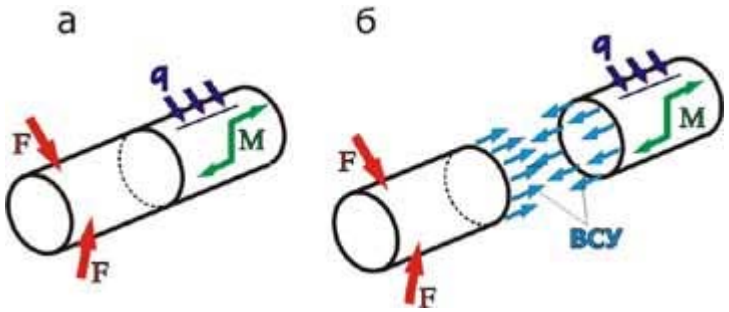


Рис. 1

Внутренние силы упругости определяют взаимодействие между частицами тела, расположенными по разные стороны от мысленно проведенного сечения. В разных сечениях тела возникают разные внутренние силы упругости, но по принципу действия и противодействия они всегда взаимны. Правая отсеченная часть тела действует на левую точно так же, как и левая на правую, а это означает, что равнодействующая внутренних сил может определяться из условий равновесия как левой отсеченной части тела, так и правой.

Из курса теоретической механики известно, что любую произвольную систему сил можно привести к центру тяжести сечения. В результате внутренние силы упругости, действующие в рассматриваемом сечении, приводятся к *главному вектору* **R** и *главному моменту* **M**. Выберем прямоугольную систему координат **OXYZ** так, что ось **Z** будет направлена по нормали к поперечному сечению, а оси **X** и **Y** лежат в плоскости сечения. Проектируя главный вектор **R** на каждую из осей, а главный момент **M** на каждую из координатных плоскостей, получим шесть величин - 3 силы и 3 момента, - которые называются *внутренними силовыми факторами* (рис.2).

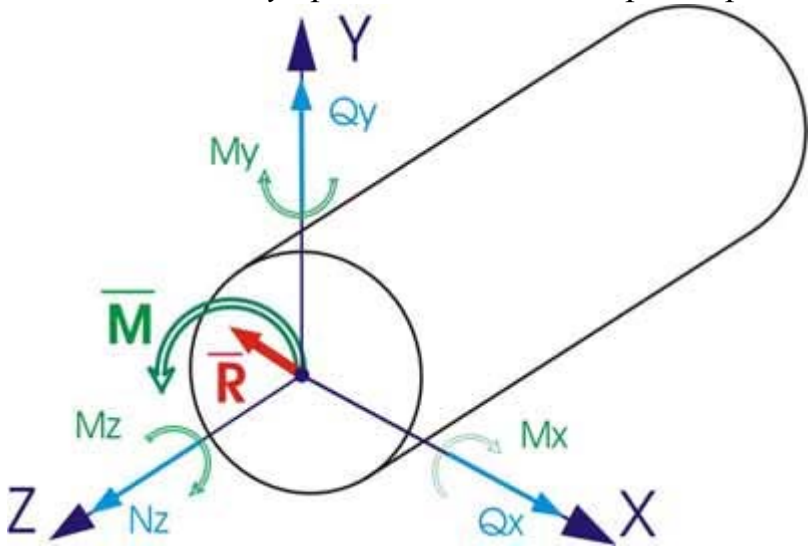


Рис. 2

Полученные таким образом 6 внутренних силовых факторов (ВСФ) имеют строго определенные названия:

$\mathbf{N_z}$ - продольная (нормальная) сила;

$\mathbf{Q_x}$, $\mathbf{Q_y}$ - поперечная (перерезывающая) сила;

$\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$ - изгибающий момент;

$\mathbf{M_z}$ - крутящий момент.

Иногда обозначение $\mathbf{M_z}$ заменяют на $\mathbf{M_{кр}}$ или $\mathbf{M_к}$, более точно отвечающие физическому смыслу этой величины.

График, показывающий как меняется внутренний силовой фактор по длине рассматриваемого тела, называется *эпюрой.*

Правильность построения эпюры обеспечивается, в первую очередь, надлежащим выбором *характерных сечений*, то есть тех сечений, в которых величина внутреннего силового фактора обязательно должна быть определена.

К характерным сечениям относятся:

1) сечения, расположенные бесконечно близко по обе стороны от точек приложения сосредоточенных сил и моментов;

2) сечения, расположенные в начале и в конце каждого участка с распределенной нагрузкой;

3) сечения, расположенные бесконечно близко к опорам, а также на свободных концах.

1.2 Виды сопротивлений

В зависимости от характера внешней нагрузки и от особенностей нагружаемого тела, в поперечных сечениях могут возникать не все шесть внутренних силовых факторов, а какой-либо один или некоторая их комбинация. В соответствии с этим различают следующие *виды сопротивлений.*

Растяжение (или сжатие) - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только продольная сила $\mathbf{N_z}$.

Кручение - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только крутящий момент $\mathbf{M_{кр}}$.

Чистый изгиб - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент $\mathbf{M_x}$(или $\mathbf{M_y}$). Чаще всего изгибающий момент $\mathbf{M_x}$ сопровождается наличием поперечной силы $\mathbf{Q_y}$(или момент $\mathbf{M_y}$ сопровождается наличием поперечной силы $\mathbf{Q_x}$). В этом случае имеет место *поперечный изгиб.*

Возможны случаи, когда в поперечных сечениях возникают два и более внутренних силовых фактора одновременно (исключая их комбинации, рассмотренные выше), тогда говорят о *сложном сопротивлении*..

Все перечисленные виды сопротивлений будут подробно рассмотрены в дальнейших разделах курса.

1.3 Виды опорных закреплений

С технической точки зрения опорные закрепления конструкций весьма разнообразны. При формировании расчетной схемы все многообразие существующих опорных устройств схематизируется в виде ряда основных типов опор, из которых наиболее часто встречаются: *шарнирно-подвижная опора* (возможные обозначения для нее представлены на рис.3,а), *шарнирно-неподвижная опора* (рис.3,б) и *жесткое защемление*, или *заделка* (рис.3,в).

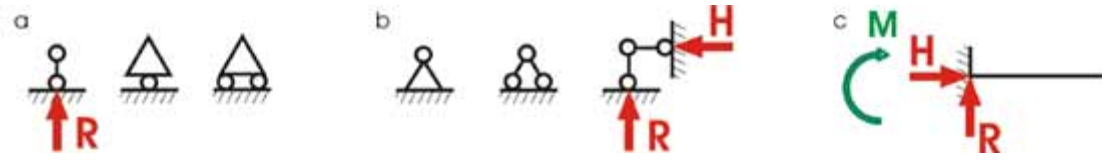


Рис. 3

В шарнирно-подвижной опоре возникает одна опорная реакция, перпендикулярная опорной плоскости. Такая опора лишает опорное сечение одной степени свободы, то есть препятствует смещению в направлении опорной плоскости, но допускает перемещение в перпендикулярном направлении и поворот опорного сечения.

В шарнирно-неподвижной опоре возникают вертикальная и горизонтальная реакции. Здесь невозможны перемещения по направлениям опорных стержней, но допускается поворот опорного сечения.

В жесткой заделке возникают вертикальная и горизонтальная реакции и опорный (реактивный) момент. При этом опорное сечение не может смещаться и поворачиваться.

При расчете систем, содержащих жесткую заделку, возникающие опорные реакции можно не определять, выбирая при этом отсеченную часть так, чтобы заделка с неизвестными реакциями в нее не попадала. При расчете систем на шарнирных опорах реакции опор должны быть определены обязательно. Уравнения статики, используемые для этого, зависят от вида системы (балка, рама и др.) и будут приведены в соответствующих разделах курса.

1.4 Построение эпюр продольных сил N_z

Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня.

Правило знаков для $\mathbf{N_z}$**:** условимся считать продольную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части стержня, вызывает растяжение и отрицательной - в противном случае.

Пример 1. Построить эпюру продольных сил для жестко защемленной балки (рис.4).

Порядок расчета:

1. Намечаем характерные сечения, нумеруя их от свободного конца стержня к заделке.

2. Определяем продольную силу $\mathbf{N_z}$ в каждом характерном сечении. При этом рассматриваем всегда ту отсеченную часть, в которую не попадает жесткая заделка.

$N_{z,1} = 0$,

$N_{z,2} = N_{z,3} = q_1 \cdot 2 = 20$ kH,

$N_{z,4} = N_{z,5} = q_1 \cdot 2 - F_1 = 20 - 40 = -20$ kH,

$N_{z,6} = q_1 \cdot 2 - F_1 + q_2 \cdot 1 = 20 - 40 + 20 = 0$,

$N_{z,7} = N_{z,8} = N_{z,6} - F_2 = -30$ kH.

3. По найденным значениям строим эпюру $\mathbf{N_z}$.

Положительные значения откладываются (в выбранном масштабе) над осью эпюры, отрицательные - под осью.

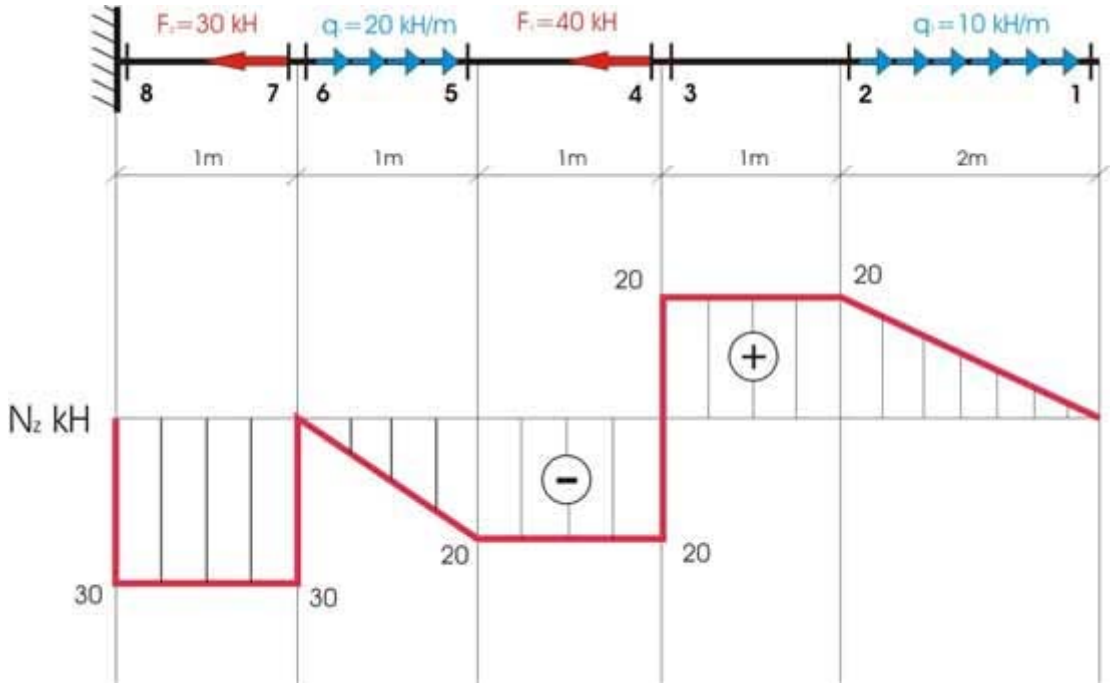


Рис. 4

1.4 Построение эпюр крутящих моментов $M_{кр}$

Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно продольной оси *Z*.

Правило знаков для $\mathbf{M_{кр}}$: условимся считать крутящий момент в сечении положительным, если при взгляде на сечение со стороны рассматриваемой отсеченной части внешний момент виден направленным против движения часовой стрелки и отрицательным - в противном случае.

Пример 2. Построить эпюру крутящих моментов для жестко защемленного стержня (рис.5,а).

Порядок расчета.

Следует отметить, что алгоритм и принципы построения эпюры крутящих моментов полностью совпадают с алгоритмом и принципами построения эпюры продольных сил.

1.Намечаем характерные сечения.

2.Определяем крутящий момент в каждом характерном сечении.

$$M_{кр.1} = M_{кр.2} = M_1 = 30 \text{ кН·м},$$

$$M_{кр.3} = M_{кр.4} = M_1 - m_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН·м},$$

$$M_{кр.5} = M_1 - m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2 = 30 - 40 + 20 = 10 \text{ кН·м},$$

$$M_{кр.6} = M_{кр.7} = M_{кр.5} - M_2 = 10 - 40 = -30 \text{ кН·м}.$$

3.По найденным значениям строим эпюру $\mathbf{M_{кр}}$(рис.5,б).

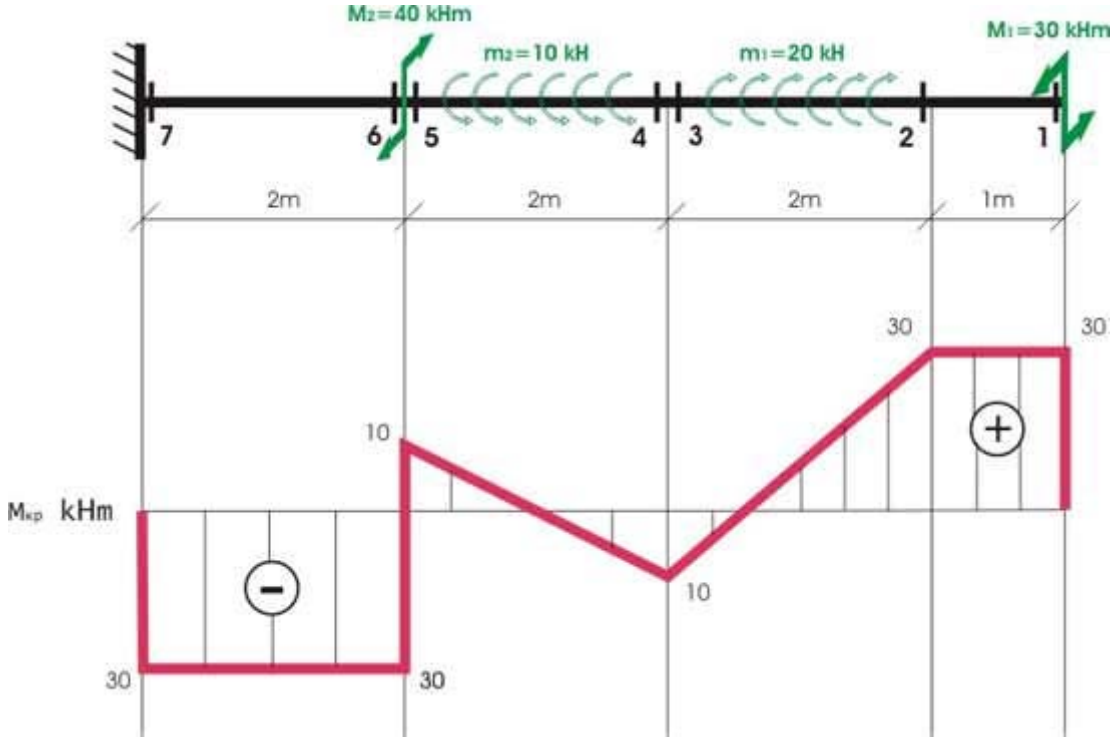


Рис. 5

1.6 Правила контроля эпюр N_z и $M_{кр}$

Для эпюр продольных сил и крутящих моментов характерны определенные закономерности, знание которых позволяет оценить правильность выполненных построений.

1. Эпюры $\mathbf{N_z}$ и $\mathbf{M_{кр}}$ всегда прямолинейные.

2. На участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра $\mathbf{N_z}$ ($\mathbf{M_{кр}}$) - прямая, параллельная оси; а на участке под распределенной нагрузкой - наклонная прямая.

Под точкой приложения сосредоточенной силы на эпюре $\mathbf{N_z}$ обязательно должен быть скачок на величину этой силы, аналогично под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре $\mathbf{M_{кр}}$ будет скачок на величину этого момента.

1.7 Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в балках

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*. В сечениях балок, загруженных вертикальными нагрузками, возникают, как правило, два внутренних силовых фактора - поперечная сила $\mathbf{Q_y}$ и изгибающий момент $\mathbf{M_x}$.

Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную (вертикальную) ось.

Правило знаков для $\mathbf{Q_y}$*:* условимся считать поперечную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и отрицательной - в противном случае.

Схематически это правило знаков можно представить в виде



Изгибающий момент $\mathbf{M_x}$ в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси x , проходящей через данное сечение.

Правило знаков для $\mathbf{M_x}$: условимся считать изгибающий момент в сечении положительным, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, приводит к растяжению в данном сечении нижних волокон балки и отрицательной - в противном случае.

Схематически это правило знаков можно представить в виде:



Следует отметить, что при использовании правила знаков для $\mathbf{M_x}$ в указанном виде, эпюра $\mathbf{M_x}$ всегда оказывается построенной со стороны сжатых волокон балки.

1.8 Консольные балки

При построении эпюр $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$ в консольных, или жестко защемленных, балках нет необходимости (как и в рассмотренных ранее примерах) вычислять опорные реакции, возникающие в жесткой заделке, но выбирать отсеченную часть нужно так, чтобы заделка в нее не попадала.

Пример 3. Построить эпюры $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$(рис.6).

Порядок расчета.

Намечаем характерные сечения.

Определяем поперечную силу $\mathbf{Q_y}$ в каждом характерном сечении.

$Q_{y,1} = 0$,

$Q_{y,2} = Q_{y,3} = q \cdot 2 = 20$ кН,

$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = q \cdot 2 - F = 20 - 30 = -10$ кН.

По вычисленным значениям строим эпюру $\mathbf{Q_y}$.

3. Определяем изгибающий момент $\mathbf{M_x}$ в каждом характерном сечении.

$M_{x,1} = 0$,

$M_{x,2} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20$ кН·м,

$M_{x,3} = M_{x,4} = -q \cdot 2 \cdot 2 = -40$ кН·м,

$M_{x,5} = -q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1 = -30$ кН·м,

$M_{x,6} = M_{x,5} + M = 20$ кН·м,

$M_{x,7} = -q \cdot 2 \cdot 5 + F \cdot 3 + M = 40$ кН·м.

По вычисленным значениям строим эпюру $\mathbf{M_x}$, причем, на участке под распределенной нагрузкой эпюра будет криволинейной (квадратная парабола). Выпуклость кривой на этом участке всегда обращена навстречу распределенной нагрузке.

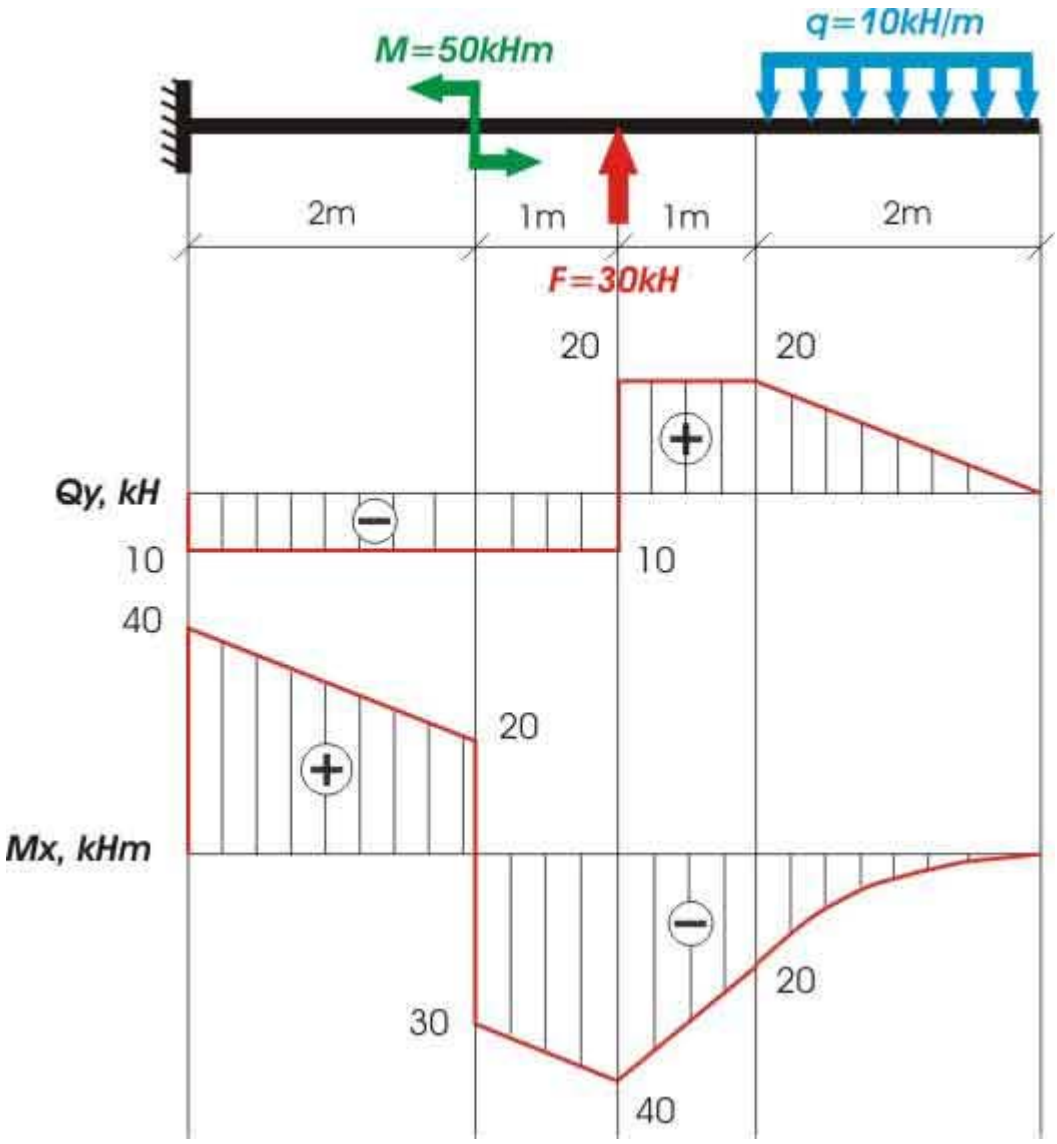


Рис. 6

1.9 Дифференциальные зависимости между q, Q_y, M_x

Указанные зависимости используются при построении эпюр $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$, поэтому приведем их здесь без соответствующего вывода, который дается в лекционном курсе.

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz};\\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q = \frac{d^2M_x}{dz^2}.$$

Пример 4. Построить эпюры $\mathbf{Q_y}$, $\mathbf{M_x}$ (рис.7).

В данном случае для правильного построения эпюры $\mathbf{M_x}$ необходимо использовать приведенные выше дифференциальные зависимости.

Порядок расчета.

Намечаем характерные сечения.q

Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$Q_{y,1} = F = 30$ кН,

$Q_{y,2} = Q_{y,1} = F - q\cdot 2 = 30 - 40 = -10$ кН.

Строим эпюру $\mathbf{Q_y}$.

Характер эпюры, то есть тот факт, что эпюра $\mathbf{Q_y}$ пересекает ось, говорит о том, что в этом сечении момент $\mathbf{M_x}$ будет иметь экстремальное значение. Действительно, пересечение эпюры с осью z означает, что в этом сечении $Q_y = dM_x/dz = 0$, а из курса математики известно, что если производная функции равна нулю, то сама функция в данной точке имеет экстремальное значение.

Для определения положения "нулевого" сечения необходимо величину расположенной слева от него ординаты эпюры $\mathbf{Q_y}$ разделить на интенсивность распределенной нагрузки q:

$z_0 = Q_{y,\text{ лев}}/q = 30/20 = 1{,}5$ м.

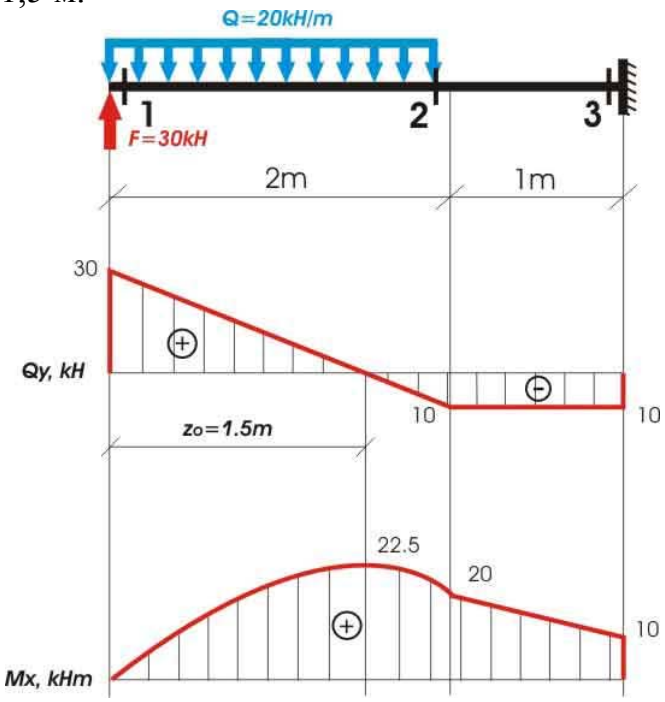


Рис. 7

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$M_{x,1} = 0,$

$M_{x,2} = F\cdot 2 - q\cdot 2\cdot 1 = 60 - 40 = 20$ кН·м,

$M_{x,3} = F\cdot 3 - q\cdot 2\cdot 2 = 90 - 80 = 10$ кН·м.

Вычисляем экстремальное значение изгибающего момента в сечении, где $Q_y = 0$: $M_{x,\text{экстр.}} = F\cdot 1{,}5 - q\cdot 1{,}5\cdot 0{,}75 = 22{,}5$ кН·м.

Строим эпюру $\mathbf{M_x}$

1.10 Балки на двух опорах

В отличие от консольных балок, при расчете балок на двух шарнирных опорах необходимо сначала определить опорные реакции из уравнений статики, так как и в левую, и в правую отсеченные части для любого сечения, расположенного между опорами, попадает соответствующая реакция.

Для плоской системы число уравнений статики в общем случае равно трем. Если балка загружена только вертикальными нагрузками, то горизонтальная реакция шарнирно-неподвижной опоры равна нулю, и одно из уравнений равновесия ($\Sigma F_{ix} = 0$) обращается в тождество. Таким образом, для определения реакций в опорах шарнирной балки используются два уравнения статики:

$\Sigma M_A = 0,$

$\Sigma M_B = 0.$

Условие $\Sigma F_{iy} = 0$ используется для проверки вычисленных значений опорных реакций.

Пример 5. Построить эпюры $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$ для балки с шарнирным опиранием (рис.8).

Порядок расчета.

Вычисляем реакции опор.

$\sum M_A = 0: \; R_B \cdot 5 - M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \;\; R_B = 30$ кН;

$\sum M_B = 0: \; R_A \cdot 5 + M - F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 4 = 0; \;\; R_A = 40$ кН.

Проверка:

$\sum F_{iy} = 0: \; R_A - q \cdot 2 - F + R_B = 40 - 20 \cdot 2 - 30 + 30 = 0$

Намечаем характерные сечения.

В отличие от консольных балок здесь известны обе опорные реакции, поэтому для любого сечения можно рассматривать как левую, так и правую отсеченную часть.

Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$Q_{y,1} = R_A = 40$ кН;

$Q_{y,2} = Q_{y,3} = R_A - q \cdot 2 = 40 - 40 = 0;$

$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = -R_B = -30$ кН.

Строим эпюру $\mathbf{Q_y}$.

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$M_{x,1} = 0;$

$M_{x,2} = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 80 - 40 = 40$ кН·м;

$M_{x,3} = M_{x,4} = R_A \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 120 - 80 = 40$ кН·м;

$M_{x,5} = R_B \cdot 1 - M = 30 - 20 = 10$ кН·м;

$M_{x,6} = R_B \cdot 1 = 30$ кН·м;

$M_{x,7} = 0.$

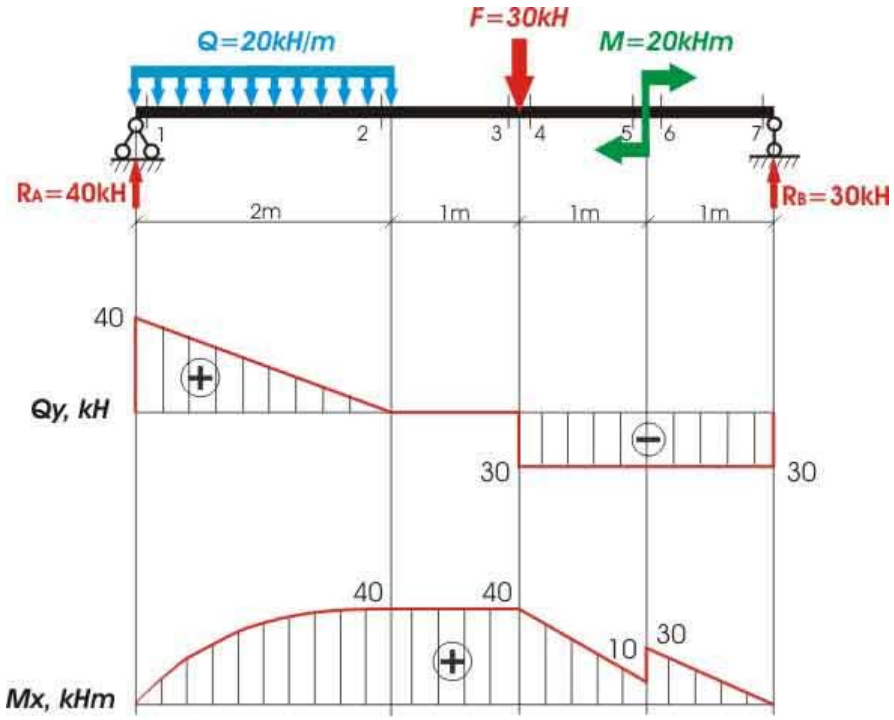


Рис. 8

Строим эпюру $\mathbf{M_x}$

Пример 6. Построить эпюры $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$ для балки на двух опорах с консолью (рис.9,а)

Порядок расчета.

Вычисляем опорные реакции.

$$\sum M_{Ai} = 0: \quad M + F \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 3{,}5 - R_B \cdot 4 = 0; \quad R_B = 40 \text{ кН}$$

$$\sum M_{Bi} = 0: \quad M - F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 0{,}5 + R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = 30 \text{ кН}$$

Во втором уравнении равновесия (впрочем, как и в первом) момент от распределенной нагрузки **q** вычислен без разбиения ее на две части - слева и справа от опоры В, то есть определена равнодействующая нагрузки **q** – **q**·3, ее положение (в середине участка с распределенной нагрузкой), что позволяет определить плечо равнодействующей относительно опоры В и направление создаваемого ею момента. В то же время можно было в уравнении равновесия учитывать отдельно части нагрузки **q**, приложенные слева и справа от опоры В; при этом второе уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum M_{Bi} = 0: \quad M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0{,}5 + R_A \cdot 4 = 0$$

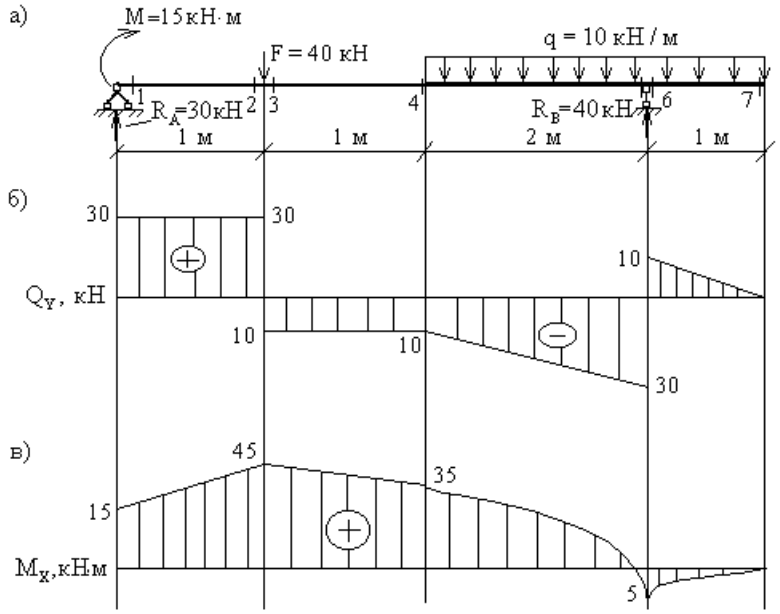


Рис.9

Вычисленное из этого уравнения значение реакции R_A, разумеется, совпадает с полученным ранее.

Проверка:

$$\sum F_{yi} = 0: \quad R_A - F - q \cdot 3 + R_B = 30 - 40 - 30 + 40 = 0$$

Намечаем характерные сечения.

Вычисляем поперечную силу и изгибающий момент в характерных сечениях.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$Q_{y,1} = Q_{y,2} = R_A = 30$кН;

$Q_{y,3} = Q_{y,4} = R_A - F = 30 - 40 = -10$кН;

$M_{x1} = M = 15$ кН·м;

$M_{x2} = M_{x3} = M + R_A \cdot 1 = 15 + 30 = 45$ кН·м;

$M_{x4} = M + R_A \cdot 2 - F \cdot 1 = 15 + 60 - 40 = 35$ кН·м.

Для сечений 5-7 удобнее рассматривать правую отсеченную часть:

$Q_{y,5} = q \cdot 1 - R_B = 10 - 40 = -30$кН;

$Q_{y,6} = q \cdot 1 = 10$кН;

$Q_{y,7} = 0$;

$M_{x5} = M_{x6} = -q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -5$ кН·м;

$M_{x7} = 0$.

По вычисленным значениям строим эпюры $\mathbf{Q_y}$ и $\mathbf{M_x}$ (рис.9,б,в).

1.11 Правила контроля эпюр Q_y и M_x

Дифференциальные зависимости между Q_y определяют ряд закономерностей, которым подчиняются эпюры Q_y и M_x.

Эпюра Q_y является прямолинейной на всех участках; эпюра M_x - криволинейная (квадратная парабола) на участке под равномерно распределенной нагрузкой, причем, выпуклость кривой всегда обращена навстречу нагрузке q, и прямолинейная на всех остальных участках.

Под точкой приложения сосредоточенной силы (реакции) на эпюре Q_y обязательно должен быть скачок на величину этой силы (реакции). Аналогично, под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре M_x обязателен скачок на величину момента.

Если на участке под распределенной нагрузкой эпюра Q_y пересекает ось ($Q_y = 0$), то эпюра M_x в этом сечении имеет экстремум.

На участках с поперечной силой одного знака эпюра M_x имеет одинаковую монотонность. Так, при $Q_y > 0$ эпюра M_x возрастает слева направо; при $Q_y < 0$ - убывает.

Порядок линии на эпюре Q_y всегда на единицу меньше, чем на эпюре M_x. Например, если эпюра M_x - квадратная парабола, то эпюра Q_y на этом участке - наклонная прямая; если эпюра M_x - наклонная прямая, то эпюра Q_y на этом участке - прямая, параллельная оси; если $M_x = \text{const}$ (прямая, параллельная оси), то на этом участке $Q_y = 0$.

1.12 Другие подходы к построению эпюр внутренних силовых факторов

Помимо описанного выше, можно выделить еще два подхода к построению эпюр. В первом случае намечают не *характерные сечения*, а *характерные точки*, в качестве которых выделяют точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а также точки начала и конца участков с распределенными нагрузками. Затем определяют величину внутреннего силового фактора слева и справа (бесконечно близко) от характерной точки.

Другой возможный подход состоит в том, что балка разбивается на участки (с распределенными нагрузками и между точками приложения сил и моментов). Для

каждого участка записывается выражение внутреннего силового фактора в общем виде как функции координаты z . Затем вычисляются значения на концах каждого участка.

Очевидно, что при обоих подходах в конечном счете все сводится к вычислению внутренних силовых факторов *в характерных сечениях,* то есть соответствует описанному выше способу, но требует дополнительной, как правило неоправданной, работы.

Правда, следует отметить, что запись общих выражений как функций от z удобна при программировании построения эпюр при помощи вычислительной техники.

1.13 Построение эпюр для плоских рам

Плоской рамой называется стержневая система, элементы которой жестко или шарнирно соединены между собой, нагруженная в своей плоскости.

Вертикально (или под наклоном) расположенные стержни рамы называются *стойками*, а горизонтальные - *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Как и многие другие системы, рамы делятся на статически определимые и статически неопределимые (рис.10, б,в,д,е).

Промежуточный шарнир снижает степень статической неопределимости рамы на величину m - 1, где m - число стержней, сходящихся в шарнире. Если m >2, то шарнир называется *кратным* (рис.10,д).

Для определения *степени статической неопределимости* плоской рамы можно воспользоваться формулой:

n = 3К-Ш,

где n - степень статической неопределимости; К - число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров; Ш- число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень.

Для рамы (рис.10,б) имеем:

К=1; Ш=0;

$n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$.

Для рамы (рис.10,д):

К=3; Ш=3

$n = 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

В более простых случаях, когда отсутствуют замкнутые контуры и промежуточные шарниры, то есть когда используются комбинации тех же опор, что и в балках (жесткая заделка, шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры), для определения степени статической неопределимости используется “балочная” формула:

$$n = r - s,$$

где r - число неизвестных реакций; s - число уравнений статики (для плоской рамы s=3).

В данной разделе ограничимся рассмотрением простейших статически определимых рам трех видов:

С жесткой заделкой;

на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной);

на двух шарнирно неподвижных опорах с простым промежуточным шарниром.

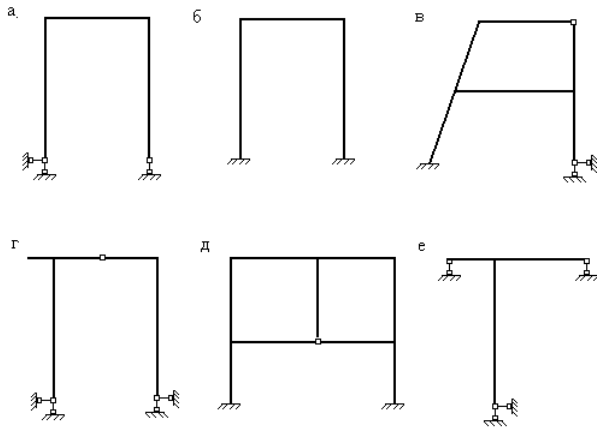


Рис. 10

Из шести внутренних силовых факторов в сечениях плоской рамы в общем случае возникают три: продольная сила N_z, поперечная сила Q_y, изгибающий момент M_x.

Правила знаков. Для N_z и Q_y сохраняются ранее принятые правила знаков.

$N_z > 0$, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, вызывает в данном сечении растяжение и $N_z < 0$ - в противном случае.

$Q_y > 0$, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и $Q_y < 0$ - в противном случае.

Ординаты эпюр N_z и Q_y (как, впрочем и M_x) откладывают, как и обычно, перпендикулярно к оси элементов рамы. Иногда положительные ординаты N_z и Q_y откладывают с внешней стороны рамы, а отрицательные – с внутренней, но рама часто имеет такую конфигурацию, при которой невозможно выделить внутреннюю и внешнюю стороны, поэтому *в дальнейшем условимся:* ординаты эпюр N_z и Q_y откладываются в произвольную сторону, но обязательно указывается знак.

Для изгибающих моментов специального правила знаков нет, а при вычислении момента в любом сечении знак принимается произвольно. Но результат вычислений *всегда откладывается со стороны сжатого волокна* элемента рамы. При этом знак на эпюре M_x никогда не указывается. Такое условие полностью соответствует характеру построения эпюр M_x в балках, где в соответствии с принятым для изгибающих моментов правилом знаков (см. 1.7) ординаты эпюр M_x всегда оказывались расположенными со стороны сжатых волокон балки.

1.14 Рамы с жесткой заделкой

Пример 7.

Рассмотрим жесткозащемленную плоскую раму (рис.11,а). В жесткой заделке рамы в общем случае нагружения возникают три опорные реакции: две силы (H_A и R_A) и опорный момент (M_A). Для построения эпюр определение этих реакций не является безусловной необходимостью: расчет, как и в случае жесткозащемленной балки, можно вести от свободного конца, то есть всякий раз так выбирать отсеченную часть для рассматриваемого сечения, чтобы в нее не попадала опора с неизвестными опорными реакциями. Тем не менее, иногда целесообразно вычислить опорные реакции. Это позволяет проверить построение эпюр или облегчить их построение. Для вычисления реакций в жесткозащемленной раме используются три условия равновесия:

$\Sigma F_{xi} = 0,$

$\Sigma F_{yi} = 0,$

$\Sigma M_{Ai} = 0.$

Построим эпюры N_z, Q_y, M_x для рассматриваемой рамы, не вычисляя опорные реакции.

Методика построения эпюр аналогична ранее рассмотренной для балок , т.е. сначала необходимо наметить характерные сечения. В дополнение к ранее указанным (см.1.2), *в рамах характерными являются также сечения,* расположенные бесконечно близко к жесткому узлу на всех элементах, сходящихся в этом узле.

Построение эпюры N_z. Следуя установленным правилам, в рассматриваемой раме можно выделить 8 характерных сечений. Продольная сила в любом из них численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня. При этом следует учитывать, что положение продольной оси будет изменяться в зависимости от того, чему принадлежит рассматриваемое сечение - стойкам или ригелю.

$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = 0,$

$N_{z,5} = N_{z,6} = - F = - 20$ кН,

$N_{z,7} = N_{z,8} = -q \cdot 4 = - 40$ кН.

Построение эпюры Q_y. Поперечная сила в любом сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную ось рамы. Положение поперечной оси также будет изменяться в зависимости от принадлежности данного сечения стойкам или ригелю. С учетом правила знаков, двигаясь от свободного конца к жесткой заделке, получим для Q_y:

$Q_{y,1} = Q_{y,2} = 0$ (проекция пары М на любую ось равна нулю);

$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20$ кН,

$Q_{y,5} = 0,$

$Q_{y,6} = q \cdot 4 = 40$ кН,

$Q_{y,7} = Q_{y,8} = - F = - 20$ кН.

Необходимо обратить внимание на тот факт, что $Q_{y,7} = - Q_{y,4}$, т.е. что поперечная сила в верхних сечениях противоположных стоек от действия силы, приложенной к правой стойке (при заделке, расположенной слева, и наоборот) имеет противоположные знаки. Отчасти это можно объяснить противоположными направлениями оси у для сечений 4 и 7, но более строгое обоснование указанного равенства будет дано ниже.

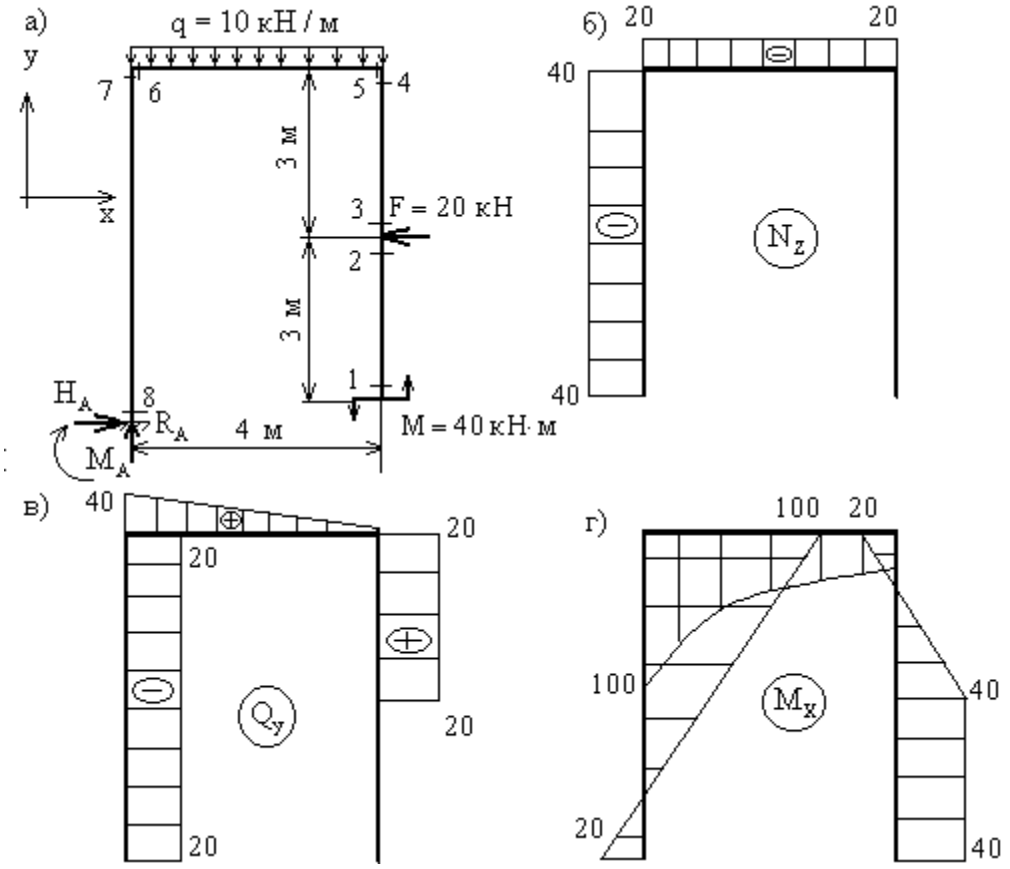


Рис. 11

Построение эпюры M_x. Изгибающий момент в любом сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно этого сечения (более строго: относительно оси x этого сечения). Обратим внимание на два важных замечания:

составляющая момента M_x от действия сосредоточенного момента M всегда одинакова и равна M;

под плечом силы всегда понимается длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения *на линию действия силы*. Это означает, что, например, плечо силы F для сечений 4-7 одинаково и равно 3 м.

Таким образом, для сечений 1-8 получим:

$M_{x,1} = M_{x,2} = M_{x,3} = M = 40$ кН·м (сжатым является правое волокно в сечениях 1-3, поэтому ордината отложена вправо от оси стойки);

$M_{x,4} = M_{x,5} = M - F \cdot 3 = -20$ кН·м (знаки "+" и "-" здесь имеют относительный характер; результирующий момент сжимает левые волокна в сечении 4 и нижние волокна в сечении 5, поэтому ордината "20" откладывается соответственно влево и вниз);

$M_{x,6} = M - F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = -100$ кН·м (сжаты нижние волокна);

$M_{x,7} = M_{x,6} = -100$ кН·м (сжаты правые волокна);

$M_{x,8} = M + F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = 20$ кН·м (сжаты левые волокна).

Между q, Q_y, M_x в плоских рамах сохраняются те же зависимости, что и в балках, а именно:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q = \frac{d^2M_x}{dz^2}.$$

Из этого следует, что правила контроля эпюр Q_y и M_x остаются теми же, что и для балок ,(см. 1.11).

Эпюры N_z в плоских рамах строятся наиболее просто и при отсутствии нагрузок, распределенных вдоль стержней, представляют собой графически отрезки прямых, параллельные осям стержней (или совпадают с ними при $N_z = 0$).

Если проанализировать процесс построения эпюр (рис.11,б-г), то очевидно, что наиболее сложно вычислять ординаты в сечениях стержня, примыкающего к заделке (на рис.11,б-г это сечения 7 и 8). Как уже отмечалось, с этой целью иногда вычисляют реакции H_A, R_A и момент M_A.

При принятом для всей рамы направлении осей x, y (рис.11,а) уравнения равновесия имеют вид:

1) $\sum F_{xi} = 0$: $H_A - F = 0$; $H_A = F = 20$ кН

2) $\sum F_{yi} = 0$: $R_A - q \cdot 4 = 0$; $R_A = q \cdot 4 = 40$ кН

3) $\sum M_{Ai} = 0$: $M_A + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0$; $M_A = 20$ кН

Полученный для каждой из величин H_A, R_A, M_A знак "+" говорит, что направления их были выбраны правильно.

После вычисления опорных реакций значения величин N_z, Q_y, M_x в сечениях 7 и 8 (как, впрочем, и в любом другом) можно вычислять, двигаясь от жесткой заделки к свободному концу.

Например, для сечений 7 и 8:

$N_{z,7} = N_{z,8} = - R_A = - 40$ кН (знак "-" указывает на сжатие в этих сечениях с силой R_A);

$Q_{y,7} = Q_{y,8} = - H_A = - 20$ кН. (т.к. реакция H_A стремится повернуть каждое из этих сечений против часовой стрелки.)

При сравнении величины $Q_{y,7}$ с ранее полученной величиной $Q_{y,4}$ видно, что

$Q_{y,7} = - Q_{y,4}$, о чем уже говорилось выше.

$M_{x,8} = M_A = 20$ кН·м (сжаты левые волокна стойки);

$M_{x,7} = M_{x,8} - H_A \cdot 6 = - 100$ кН·м (сжаты правые волокна стойки).

Разумеется, результаты получаемые для любого сечения при движении от свободного конца к жесткой заделке и при движении в обратном направлении одинаковы.

1.15 Рамы на двух шарнирных опорах

В дальнейшем для краткости будем говорить "шарнирная рама", имея в виду ее статическую определимость и отсутствие промежуточных шарниров (см. 1.13).

Пример 8.

Рассмотрим раму той же конфигурации, размеров и с теми же нагрузками, что и в предыдущем примере, но с шарнирным опиранием (рис.12,а).

Здесь также имеем 8 характерных сечений, но для построения эпюр необходимо вычислить сначала опорные реакции, т.к. ни для одного из сечений нельзя выбрать отсеченную часть так, чтобы избежать попадания в нее опоры с неизвестной реакцией.

Для определения опорных реакций в плоских шарнирных рамах используются следующие уравнения равновесия:

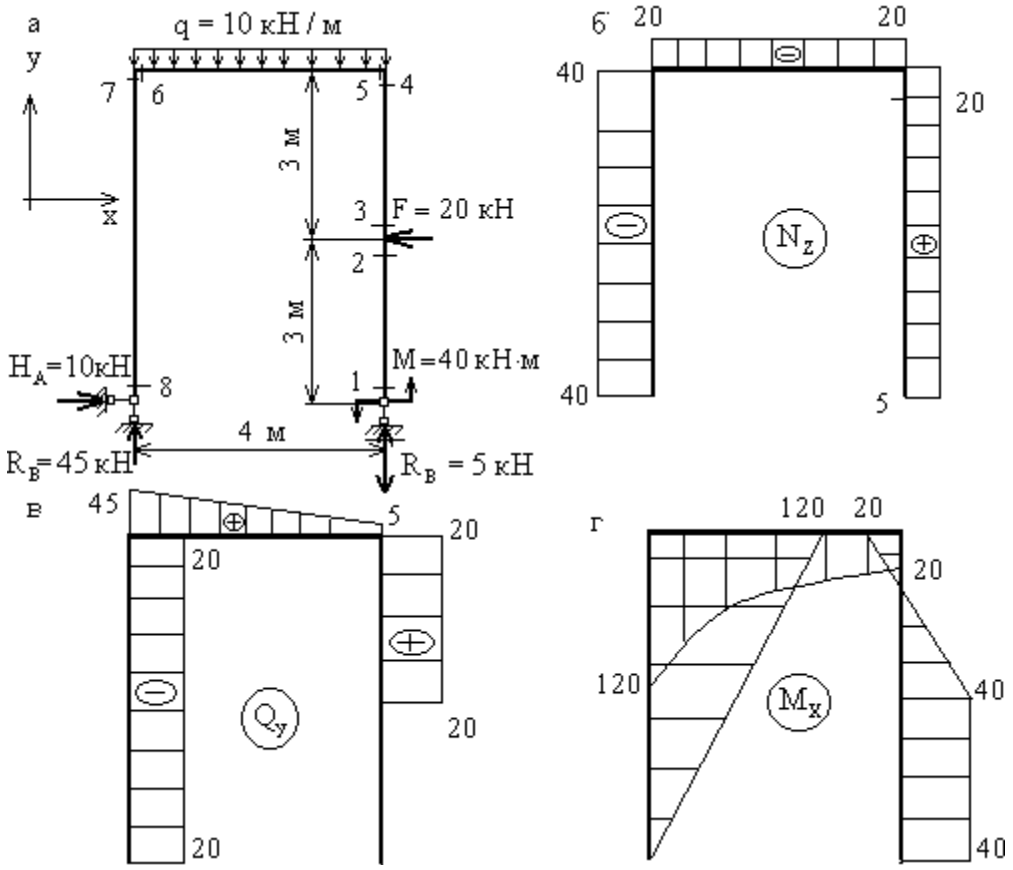


рис.12

1) $\sum F_{xi} = 0$ (или $\sum F_{yi} = 0$);

2) $\sum M_{Ai} = 0$;

3) $\sum M_{Bi} = 0$.

Первое уравнение равновесия используется в том из двух приведенных вариантов, который будет содержать одну неизвестную опорную реакцию.

Так, в рассматриваемом примере этим условием будет $\Sigma F_{xi} = 0$, которое будет содержать неизвестную реакцию H_A (в то время как условие $\Sigma F_{yi} = 0$ содержало бы две неизвестных реакции). Если бы опоры располагались так, что вертикальным является один стержень, то в качестве первого шага использовалось условие $\Sigma F_{yi} = 0$.

Второе и третье уравнения равновесия ($\Sigma F_{Ai} = 0$, $\Sigma F_{Bi} = 0$) - такие же, как и для балок, но в одно из них обязательно войдет реакция, вычисленная из первого уравнения (иногда - с нулевым плечом).

В качестве проверки вычисленных реакций используется условие, противоположное первому, то есть $\Sigma F_{yi} = 0$ или $\Sigma F_{xi} = 0$.

Построение эпюр N_z, Q_y и M_x в шарнирных рамах выполняется так же, как и в защемленных, но " с меньшими затратами", так как после вычисления реакций опор направление обхода рамы не играет роли, и выбор отсеченной части в каждом случае определяется ее простотой.

Вычислим реакции опор рамы (рис.12,а)

Уравнения статики:

1) $\sum F_{yi} = 0$: $H_A - F = 0$; $H_A = F = 20$ кН

2) $\sum M_A = 0$: $q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M - R_B \cdot 4 = 0$; $R_B = -5$ кН

3) $\sum M_B = 0$: $R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0$; $R_A = 45$ кН

Знак "-", полученный при вычислении реакции R_A, говорит, что принятое для нее направление нужно изменить на противоположное. Выполним проверку:

$\sum F_{yi} = 0$: $R_A - q \cdot 4 - R_B = 45 - 40 - 5 = 0$,

то есть реакции опор вычислены правильно.

Построение эпюры N_z.

Двигаясь по оси рамы от сечения 1 к сечению 6, получим:

$$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = R_B = 5 \text{ кН},$$

$$N_{z,5} = N_{z,6} = - F = - 45 \text{ кН}.$$

Для сечений 7 и 8 проще рассматривать отсеченную часть, продвигаясь от опоры А к сечению 7:

$$N_{z,8} = N_{z,7} = - R_A = - 45 \text{ кН}.$$

Этот же результат получим из рассмотрения отсеченной части 1-6:

$$N_{z,7} = N_{z,8} = - R_B - q \cdot 4 = - 45 \text{ кН}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру N_z (рис.12,б)

Построение эпюры Q_y.

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = 0,$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20 \text{ кН},$$

$$Q_{y,1} = R_A = 5 \text{ кН}.$$

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$Q_{y,8} = Q_{y,7} = - H_A = - 20 \text{ кН},$$

$$Q_{y,1} = R_A = 45 \text{ кН}.$$

Эпюра Q_y, построенная по вычисленным значениям, показана на рис.12,в.

Построение эпюры M_x.

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$M_{x,1} = M_{x,2} = M = 40$ кН·м (сжаты правые волокна стойки);

$M_{x,3} = M_{x,2} = 40$ кН·м (плечо силы F равно нулю);

$M_{x,4} = M_{x,5} = M - F \cdot 3 = - 20$ кН·м (сжаты левые волокна стойки в сечении 4 и нижние волокна ригеля в сечении 5);

Из рассмотрения отсеченной части 8 -6:

$M_{x,8} = 0$,

$M_{x,7} = M_{x,6} = H_A \cdot 6 = 120$ кН·м

(сжаты правые волокна стойки и нижние волокна ригеля в сечениях 7 и 6 соответственно).

Эпюра M_x показана на рис12,г.

Пример 9. Рассмотрим шарнирную раму более сложной конфигурации (рис.13,а).

Здесь необходимо рассматривать 10 характерных сечений для построения эпюр N_z, Q_y и M_x . Сечения 1-6 расположены на ригеле слева направо, а сечения 7-10 - на стойке сверху

вниз. Как и в предыдущем примере, указанное расположение характерных сечений является безусловно необходимым, а их нумерация - произвольной.

Уравнения статики для вычисления опорных реакций имеют вид:

1) $\sum F_{yi} = 0$:

$$R_B + F_1 - q_1 \cdot 2 - F_2 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН}$$

2) $\sum M_{Ai} = 0$:

$$q_1 \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 2 - q_3 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - F_2 \cdot 4 - M_1 + M_2 + H_B \cdot 6 = 0; \quad H_B = 20 \text{ кН}$$

3) $\sum M_{Bi} = 0$:

$$H_A \cdot 6 + F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 - q_2 \cdot 3 \cdot 4{,}5 + F_2 \cdot 4 + M_1 - M_2 = 0; \quad H_A = 10 \text{ кН}$$

Проверка вычисления опорных реакций:

$\sum F_{xi} = 0$:

$$H_A + H_B - q_2 \cdot 3 = 10 + 20 - 30 = 0$$

При построении эпюр N_z, Q_y и M_x целесообразно выбирать отсеченную часть, продвигаясь к центральному узлу рамы с четырех сторон, т.к. в этом случае определение внутренних силовых факторов в каждом из характерных сечений осуществляется наиболее просто.

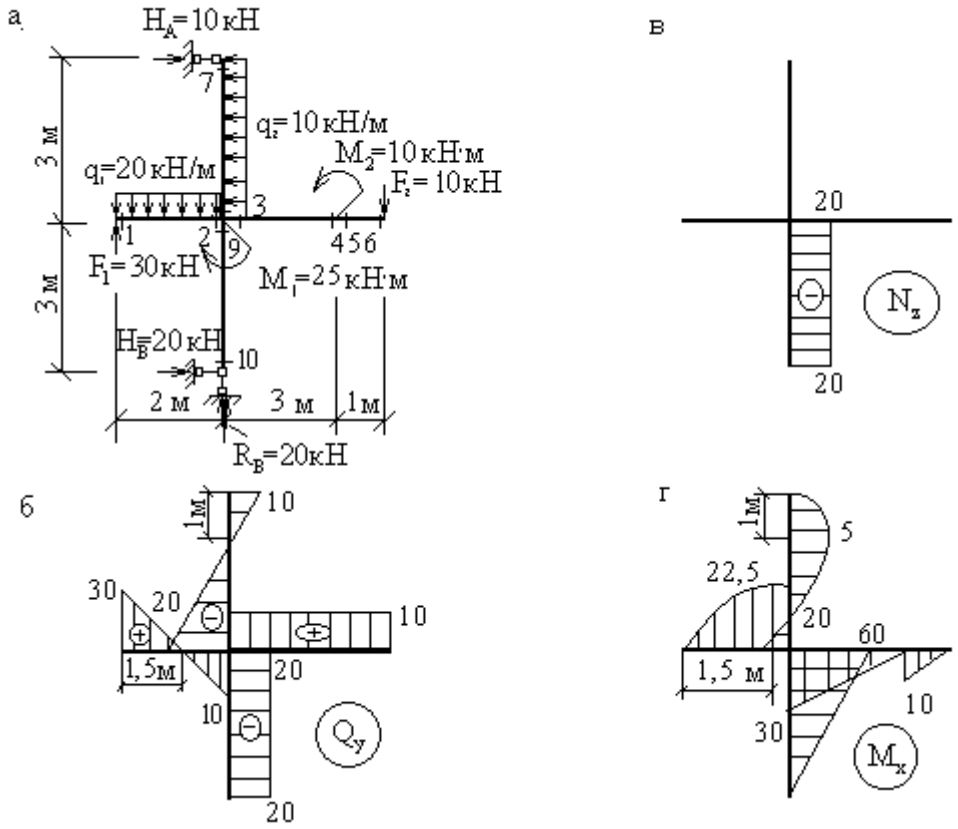


Рис. 13

Построение эпюр N_z, Q_y и M_x .

Из рассмотрения левой относительно центрального узла отсеченной части (сечения 1-2):

$N_{z1} = N_{z,2} = 0;$

$Q_{y,1} = F_1 = 30$ кН;

$Q_{y,2} = F_1 - q_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10$ кН;

$M_{x1} = 0;$

$M_{x,2} = F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20$ кН·м (сжаты верхние волокна).

Из рассмотрения правой отсеченной части (сечения 3-6):

$N_{z,3} = N_{z,4} = N_{z,5} = N_{z,6} = 0;$

$Q_{y,3} = Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = F_2 = 10$ Кн;

$M_{x3} = M_2 - F_2 \cdot 4 = 10 - 40 = -30$ Кн·м (сжатынижниеволокна)

$M_{x,4} = M_2 - F_2 \cdot 1 = 10 - 10 = 0;$

$M_{x,5} = -F_2 \cdot 1 = -10$ Кн·м (сжатынижниеволокна)

$M_{x,6} = 0$

Из рассмотрения верхней относительно центрального узла отсеченной части (сечения 7-8):

$N_{z,7} = N_{z,8} = 0;$

$Q_{y,7} = H_A = 10$ Кн;

$Q_{y,8} = H_A - q_2 \cdot 3 = 10 - 30 = -20$ Кн;

$M_{x7} = 0;$

$M_{x,8} = H_A \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 30 - 45 = -15$ Кн·м; (сжатыпевыеволокна)

Из рассмотрения нижней отсеченной части (сечения 9-10):

$N_{z,9} = N_{x10} = -R_B = -20$ Кн;

$Q_{y,9} = Q_{y,10} = -H_B = -20$ Кн;

$M_{x,9} = H_B \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$ Кн·м; (сжатыправыеволокна)

$M_{x10} = 0.$

Характер эпюры Q_y на участках рамы с распределенными нагрузками q_1 и q_2, а именно, наличие пересечений эпюры с осью рамы, говорит о том, что в этих точках момент M_x принимает экстремальные значения. Определение положений точек пересечения (т.е. тех точек, где $Q_y = 0$) выполняется так же, как и в балках (см. 1.9).

Вычислим экстремальные значения момента M_x.

На участках под распределенной нагрузкой q_1:

$$M_{x,max}\Big|_{Q_y=0} = F_1 \cdot 1{,}5 - q_1 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} = 45 - 22{,}5 = 22{,}5 \text{ кН·м}$$ (сжаты верхние волокна).

На участке с распределенной нагрузкой q_2:

$$M_{x,max}\Big|_{Q_y=0} = H_A \cdot 1 - q_1 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 10 - 5 = 5 \text{ кН·м}$$ (сжаты правые волокна).

Эпюры N_z, Q_y и M_x показаны на рис.13,б,в,г.

1.16 Рамы на двух опорах с промежуточным шарниром

Как отмечалось выше, рамы на двух шарнирно-неподвижных опорах с одним промежуточным шарниром также являются статически определимыми.

Пример 10. Рассмотрим построение эпюр N_z, Q_y, M_x для рамы с промежуточным шарниром (рис.14,а)

В дополнение к условиям равновесия, рассмотренным в примерах 8 и 9, здесь для определения неизвестных реакций H_A, R_A, H_B, R_B используются еще два условия: $\Sigma M_{c,\ лев} = 0$ и $\Sigma M_{c,\ прав} = 0$, каждое из которых по своей сути выражает факт равенства нулю изгибающего момента M_x в промежуточном шарнире C (рис.14,а).

Для определения четырех неизвестных реакций возможно использование различных комбинаций уравнений равновесия, но чаще всего используются следующие уравнения:

1) $\sum M_{Ai} = 0;$

2) $\sum M_{Bi} = 0;$

3) $\sum M_C^{лев} = 0;$

4) $\sum M_C^{прав} = 0;$

При этом для проверки вычисленных реакций служат уравнения:

$\sum F_{xi} = 0;$

$\sum F_{yi} = 0;$

При заданных нагрузках (рис.14,а) уравнения равновесия принимают вид:

1) $\sum M_{Ai} = 0;\quad F_2 \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M + F_1 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0;\quad R_B = -15$ кН;

2) $\sum M_{Bi} = 0;\quad R_A \cdot 4 - F_2 \cdot 6 - M - q \cdot 4 \cdot 2 - F_1 \cdot 2 = 0;\quad R_A = 75$ кН

3) $\sum M_C^{лев} = 0;\quad R_A \cdot 2 - H_A \cdot 6 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 = 0;\quad H_A = 1{,}67$ кН

4) $\sum M_C^{прав} = 0;\quad H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 4 = 0;\qquad H_B = 28{,}33$ кН;

Знак "-", полученный при вычислении реакции R_B, говорит о необходимости изменить принятое для нее направление на противоположное (перечеркнутая стрелка на рис.15,а).

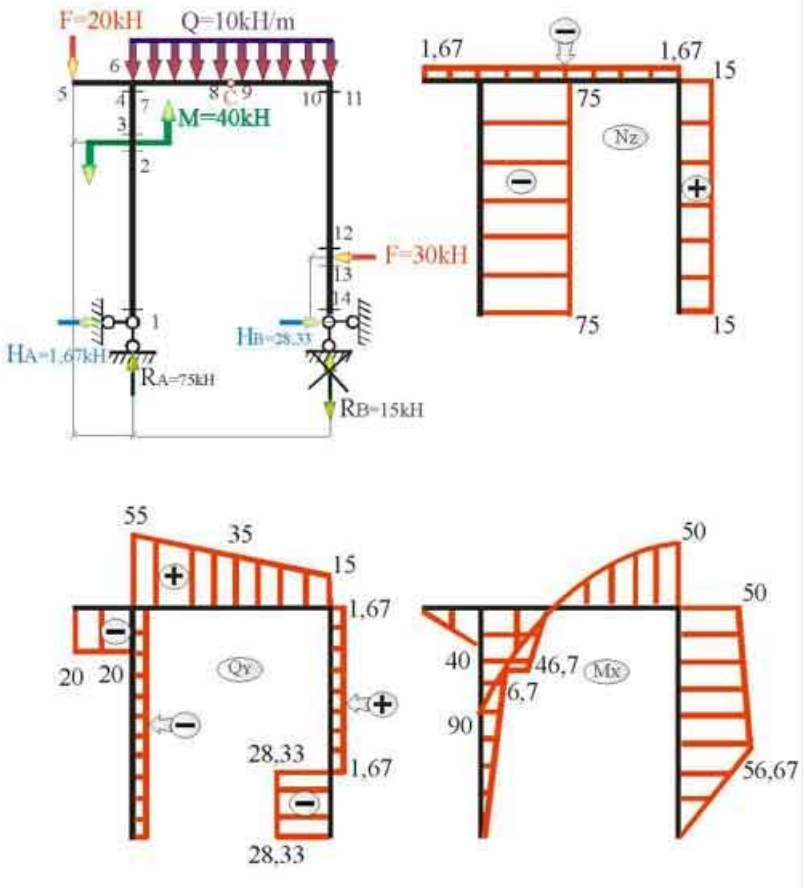


Рис 14.

Проверяем правильность вычисления опорных реакций.

$\sum F_{xi} = 0$: $H_A + H_B - F_1 = 1{,}67 + 28{,}33 - 30 = 0$;

$\sum F_{yi} = 0$: $R_A - F_2 - q \cdot 4 - R_B = 75 - 20 - 40 - 15 = 0$.

Теперь вычисляем значения N_z, Q_y, M_x в характерных сечениях, выбирая для сечений 1-8 левую отсеченную часть, а для сечений 9-14 - правую.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = - R_A = - 75$ кН,

$N_{z,5} = N_{z,6} = N_{z,7} = N_{z,8} = - H_A = - 1{,}67$ кН,

$Q_{y,1} = Q_{y,2} = Q_{y,3} = Q_{y,4} = - H_A = - 1{,}67$ кН,

$Q_{y,5} = Q_{y,6} = - F_2 = - 20$ кН,

$Q_{y,7} = - F_2 + R_A = - 20 + 75 = 55$ кН,

$M_{x,1} = 0$,

$M_{x,2} = H_A \cdot 4 = 1{,}67 \cdot 4 = 6{,}7$ кН·м, (сжаты правые волокна стойки);

$M_{x,3} = M_{x,2} + M = 6{,}7 + 40 = 46{,}7$ кН·м,

$M_{x,4} = H_A \cdot 6 + M = 10 + 40 = 50$ кН·м,

$M_{x,5} = 0$,

$M_{x,6} = F_2 \cdot 2 = 40$ кН·м, (сжаты нижние волокна ригеля);

$M_{x,7} = F_2 \cdot 2 + M + H_A \cdot 6 = 40 + 40 + 10 = 90$ кН·м,

$M_{x,8} = F_2 \cdot 4 + M + H_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 80 + 40 + 10 + 20 - 150 = 0$.

Вновь подчеркнем, что знаки "+" и "-" для изгибающих моментов M_x принимаются относительно, то есть для разграничения противоположно направленных моментов, а эпюра M_x строится со стороны сжатых волокон.

Из рассмотрения правой отсеченной части:

$N_{z,9} = N_{z,10} = H_B - F_1 = 28{,}33 - 30 = -1{,}67$ кН;

$N_{z,11} = N_{z,12} = N_{z,13} = N_{z,14} = R_B = 15$ кН;

$Q_{y,9} = q \cdot 2 + R_B = 20 + 15 = 35$ кН;

$Q_{y,10} = R_B = 15$ кН;

$Q_{y,11} = Q_{y,12} = -H_B + F_1 = -28{,}33 + 30 = 1{,}67$ кН;

$Q_{y,13} = Q_{y,14} = -H_B = -28{,}33$ кН;

$M_{x,9} = H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - F_1 \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 = 170 - 30 - 120 - 20 = 0$

$M_{x,10} = H_B \cdot 6 - F_1 \cdot 4 = 170 - 120 = 50$ кН·м;

(сжаты верхние волокна ригеля)

$M_{x,11} = M_{x,10} = 50$ кН·м

(сжаты правые волокна стойки)

$M_{x,12} = M_{x,13} = H_B \cdot 2 = 56{,}66$ кН·м

$M_{x,14} = 0$

Эпюры N_z, Q_y, M_x , построенные по вычисленным значениям, приведены на рис.14,б,в,г.

1.17 Построение эпюр в плоско-пространственных системах

Систему, состоящую из прямолинейных стержней, жестко соединенных между собой, расположенных в одной плоскости и нагруженных перпендикулярно к этой плоскости, будем называть плоско-пространственной.

В настоящем пособии будем рассматривать только жесткозащемленые плоско-пространственные системы (далее сокращенно: ППС). При этом возможны два основных варианта:

Система располагается горизонтально, нагрузки приложены в вертикальных плоскостях (рис.15,а.,б).

Система располагается в вертикальной плоскости, нагрузки приложены горизонтально (рис.15,в,г).

В первом случае (рис.15,а,б) в поперечных сечениях стержней системы могут возникать поперечная сила Q_y, изгибающий момент M_x и крутящий момент $M_{кр}$; во втором случае – Q_x, M_y, $M_{кр}$. Очевидно, что поворотом на 90 градусов системы второго вида (рис.15,в,г) приводятся к системам первого вида, при этом Q_x переходит в Q_y, M_y - в M_x, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением систем первого вида.

Известно, что при одновременном наличии в сечениях изгибаемой стержневой системы внутренних моментов и внутренних сил влияние последних на напряженно-деформированное состояние системы незначительно (исключение составляет "короткие" стержни), поэтому исключим из рассмотрения поперечную силу Q_y.

Итак, остановимся на правилах построения эпюр M_x и $M_{кр}$ для плоско-пространственных систем.

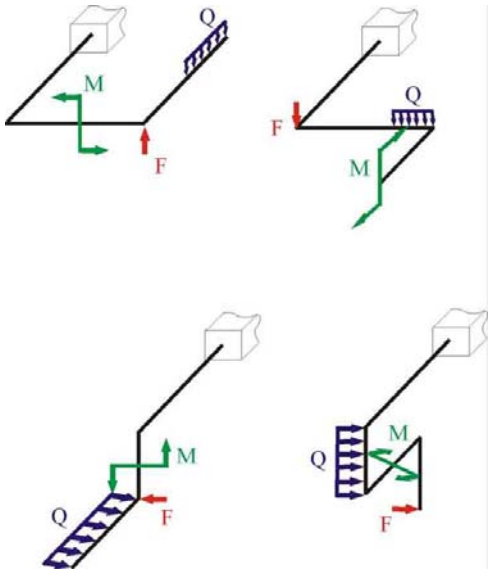


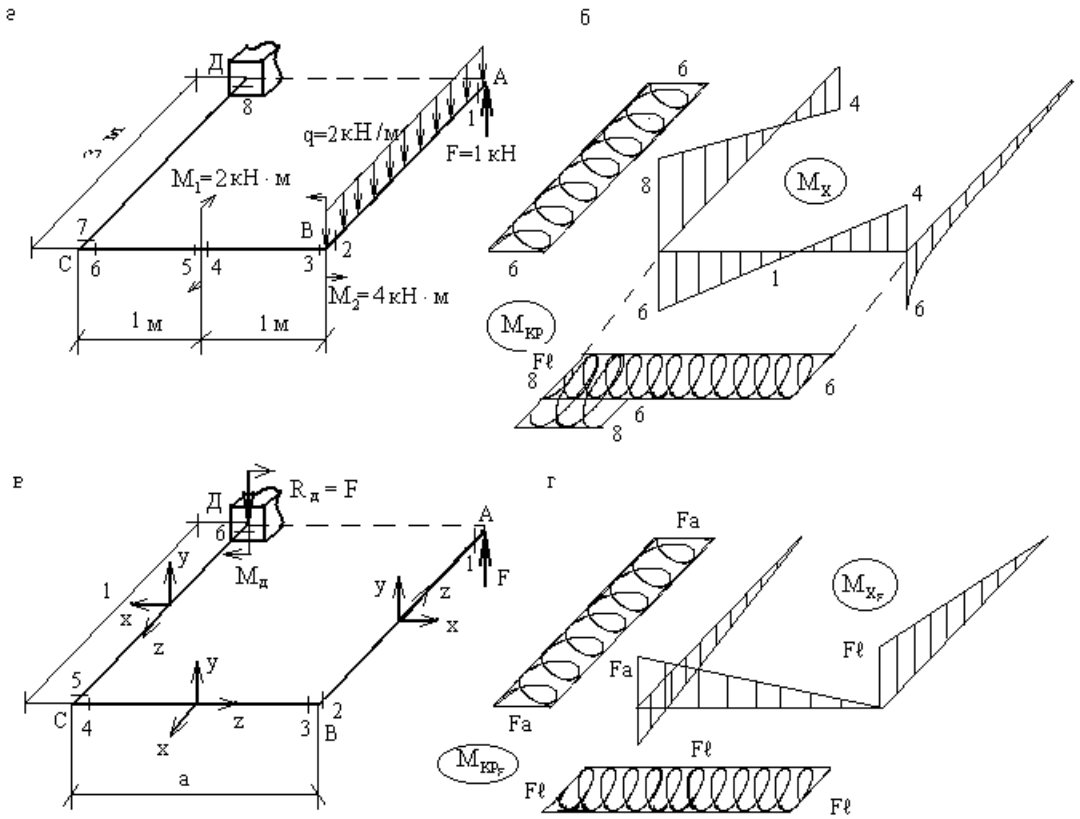
Рис.15

Пример 11. Рассмотрим ППС (рис.16,а). Прежде чем строить для этой системы эпюры M_x и $M_{кр}$, построим эпюры M_x и $M_{кр}$ для каждой из четырех возможных нагрузок (они представлены на схеме), так как вообще говоря, любые эпюры M_x и $M_{кр}$ в силу принципа независимости действия сил будут представлять собой алгебраическую сумму этих простейших эпюр, построенных от каждой нагрузки в отдельности, но, разумеется, с учетом места приложения нагрузок, их направлений и геометрической конфигурации системы.

Для достижения максимальной общности будем считать, что сила F, момент типа M_1 и момент типа M_2(имеется в виду плоскость действия каждого из них) приложены к концевому сечению (т.А на рис.16,а), а распределенная нагрузка приложена к первому от свободного конца участку стержня (стержень АВ на рис.16,а). Причем, все построения будем выполнять в общем виде, полагая, для наглядности, что $a < l$.

Пусть к плоско-пространственной системе (рис.16,в) приложена только сила F. Построим эпюры $M_{x,F}$ и $M_{кр,F}$ для заданной системы. Здесь, как и при любой другой

внешней нагрузке, более сложным является построение эпюры изгибающих моментов M_x. В соответствии с ранее оговоренными принципами, для построения эпюры M_x в заданной ППС выделим 6 характерных сечений. Так как имеется жесткая заделка, то расчет ведем от свободного конца. При вычислении изгибающего момента очень важно правильно определить плоскость изгиба стержня, которому принадлежит рассматриваемое характерное сечение, т.к. плечо действующей нагрузки необходимо определить именно в плоскости изгиба.



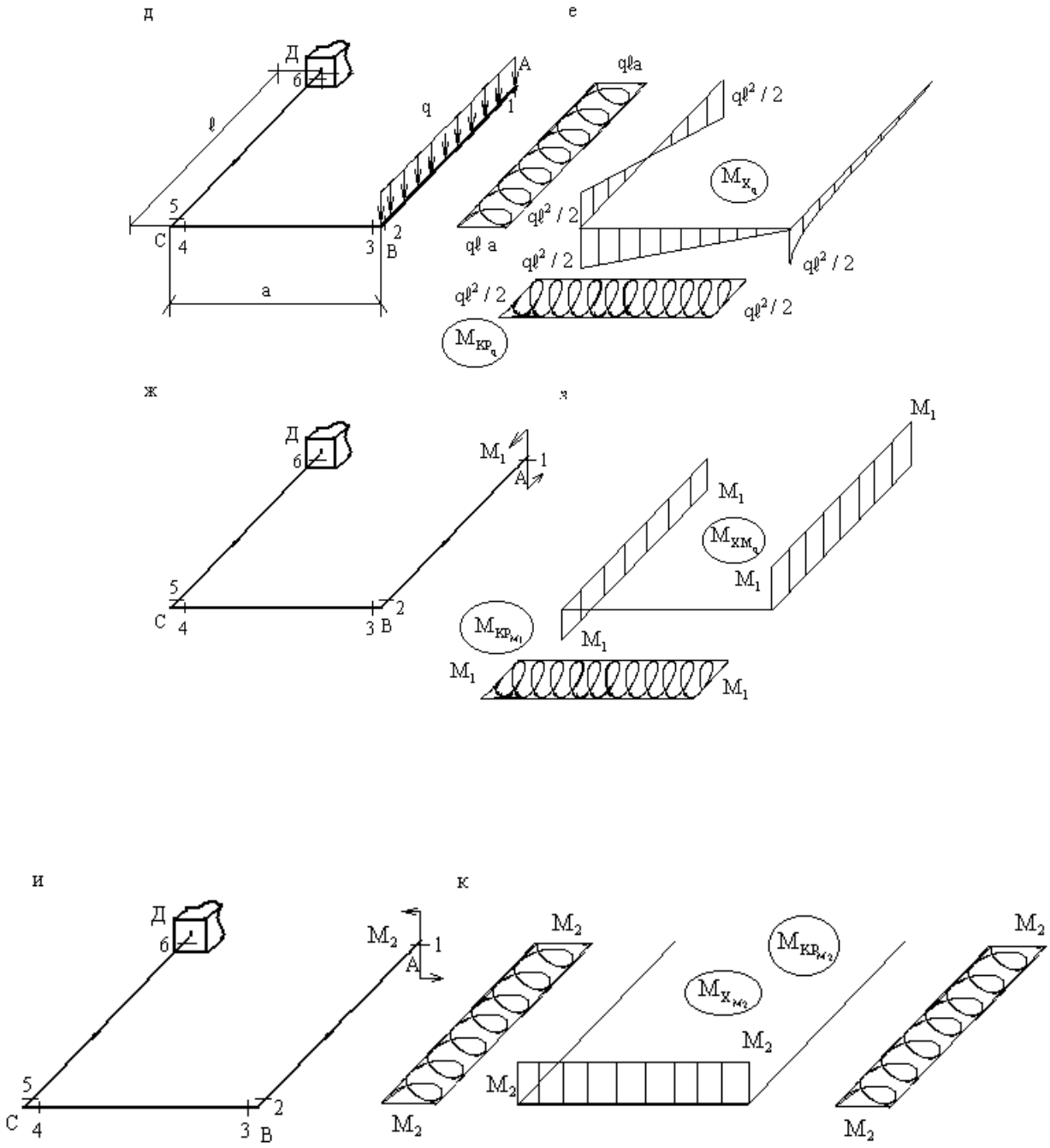


Рис.16

Стержень АВ изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа;

$M_{x,1} = 0$,

$M_{x,2} = F \cdot l$ (сжаты верхние волокна).

Стержень ВС изгибается в вертикальной плоскости, параллельной плоскости чертежа:

$M_{x,3} = 0$, (сила F не имеет плеча в плоскости изгиба!);

$M_{x,4} = F \cdot a$, (сжаты верхние волокна).

Стержень СД, как и стержень АВ, изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа.

$M_{x,5} = F \cdot l$, (сжаты нижние волокна).

$M_{x,6} = 0$ (сила F не имеет плеча в плоскости изгиба).

Остановимся подробнее на определении изгибающего момента $M_{x,5}$. Как видно из приведенных выше значений: $M_{x,5} = - M_{x,2}$, то есть моменты в сечениях 2 и 5 (обратим внимание на их расположение, а не на нумерацию, которая, естественно, может быть совершенно произвольной) одинаковы по величине, но противоположны по направлению. Это утверждение можно доказать.

Причем, возможно как строгое доказательство, так и некоторые "нестрогие" рассуждения, приводящие к тому же факту. Начнем с последних. Под действием приложенной силы F (рис.16,в) происходит "перекос" системы: точка B смещается вверх, а точка C - вниз; при этом обе точки располагаются на одинаковом расстоянии (в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа) от линии действия силы F, следовательно, моменты в сечениях 2 и 5 одинаковы, но противоположны по знаку.

Для иллюстрации другого подхода к "нестрогому" доказательству утверждения о том, что $M_{x,5} = - M_{x,2}$, введем в рассмотрение так называемую скользящую систему координат (рис.16,в). Такое название связано с тем, что координатные оси как бы скользят вдоль ломаной продольной оси системы, не поворачиваясь вокруг нее. При этом на каждом участке плоско-пространственной системы ось z направлена вдоль продольной оси соответствующего стержня, ось y- вверх (или вниз) при расположении системы в горизонтальной плоскости, а ось x остается перпендикулярной к плоскости yoz. Как следует из чертежа, на участках AB и CД ось x имеет противоположное направление, следовательно, моменты M_x имеют на этих участках разные знаки, а так как сечения 2 и 5 равноудалены от линии действия силы F, то очевидно равенство моментов в этих сечениях по абсолютной величине.

И, наконец, рассмотрим более строгое доказательство. Двигаясь от свободного конца при выборе отсеченной части, мы получили: $M_{x,2} = F \cdot l$ (сжаты верхние волокна). Определим момент M_x в сечении 5, двигаясь при выборе отсеченной части со стороны жесткой заделки. Для определения момента таким способом необходимо знать реакции заделки. При действии на систему силы F из всех возможных в общем случае нагружения реакций в жесткой заделке возникают реакция R_D и опорный момент M_D, определяемые из условий равновесия:

1) $\sum F_{yi} = 0$: $F - R_D = 0$; $R_D = F$;

2) $\sum M_{Di} = 0$: $M_D - F \cdot a = 0$; $M_D = Fa$;

Теперь, двигаясь со стороны жесткой заделки, для сечения 5 получим:

$M_{x,5} = R_D \cdot l = F \cdot l$ (сжаты нижние волокна), то есть $M_{x,5} = - M_{x,2}$ (момент M_D не влияет на величину $M_{x,5}$, так как его плоскость действия перпендикулярна плоскости изгиба).

Очевидно, что подобные рассуждения можно провести при любой внешней нагрузке, поэтому в дальнейшем при построении эпюры M_x всегда будем руководствоваться правилом: изгибающий момент в сечении 5 равен изгибающему моменту в сечении 2 (опять-таки, имеется в виду положение сечений, а не их порядковые номера) и противоположен ему по знаку, при условии, что на участке 2-5 не приложен сосредоточенный момент, который для сечения 5 является изгибающим, то есть момент типа M_1(рис.16,а). При наличии на участке 2-5 такого момента равенство ординат по модулю в сечениях 2 и 5 "искажается" на величину M_1 в соответствующую направлению M_1 сторону.

Теперь построим эпюру $M_{кр,F}$.

Участок АВ не подвержен кручению, так как сила F приложена к продольной оси стержня АВ. Участок ВС закручивается силой F с плечом l, следовательно:

$$M_{кр,3} = M_{кр,4} = F \cdot l .$$

Участок СД также закручивается силой F, но с плечом **а**, то есть:

$$M_{кр,5} = M_{кр,6} = F \cdot a.$$

Эпюры $M_{x,F}$ и $M_{кр,F}$ представлены на рис.16,г.

Аналогичным образом строятся эпюры изгибающих и крутящих моментов от распределенной нагрузки q (рис.16,д), сосредоточенного момента типа M_1(рис.16,ж) и сосредоточенного момента типа M_2(рис.16,и).

Не останавливаясь детально на построении этих эпюр, отметим некоторые особенности. Эпюра M_x на участке под распределенной нагрузкой (и только на этом участке!)- квадратная парабола, направленная выпуклостью навстречу нагрузке. На участке СД - противоположном тому, где приложена нагрузка q - эпюра M_x пересекает ось в точке, расположенной напротив равнодействующей распределенной нагрузки (рис.16,д).

Анализ эпюр от сосредоточенных моментов M_1(рис.16,з) и M_2 (рис.16,к) позволяет сделать очевидный вывод о том, что если момент приводит к изгибу какого-либо стержня, то кручение на этом участке отсутствует и наоборот.

Теперь, учитывая накопленный опыт при построении эпюр от раздельного действия каждой из четырех нагрузок, рассмотрим более сложное нагружение (рис.16,а).

При указанных на этом рисунке нагрузках для построения эпюры M_x необходимо выделить 8 характерных сечений. Двигаясь от свободного конца, получим по участкам:

Участок АВ изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа:

$M_{x,1} = 0;$

$M_{x,2} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 3 - 9 = -6\ кН \cdot м$

(сжаты нижние волокна).

Кручение на участке АВ отсутствует, так как сила F и нагрузка q имеют нулевые плечи относительно продольной оси участка АВ.

Участок ВС изгибается в вертикальной плоскости, параллельной плоскости чертежа.

$M_{x,3} = M_2 = 4\ кН \cdot м$ (сжаты верхние волокна);

$M_{x,4} = M_2 + F \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1 = 4 + 1 - 6 = -1\ кН \cdot м$ (сжаты нижние волокна);

$M_{x,5} = M_{x,4}$, так как момент M_1, приложенный к отсеченной части для сечения 5, действует в плоскости, перпендикулярной ВС и на изгиб участка ВС не влияет;

$M_{x,6} = M_2 + F \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 2 = 4 + 2 - 12 = -6\ кН \cdot м$ (сжаты нижние волокна).

Для построения эпюры крутящих моментов на участке ВС рассмотрим отдельно участки 3-4 и 5-6, так как между сечениями 4 и 5 приложен момент M_1. Участок 3-4 закручивается силой F с плечом 3м и в противоположную сторону - нагрузкой q с плечом 1,5м:

$M_{КР,3} = M_{КР,4} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 3 - 9 = -6\ кН \cdot м$ (здесь знак "-" носит сугубо условный характер и может служить только для обозначения направления кручения). Участок 5-6 помимо силы F и нагрузки q закручивается еще и моментом M_1, причем, в том же направлении, что и нагрузкой q, поэтому:

$M_{КР,5} = M_{КР,6} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1{,}5 - M_1 = 3 - 9 - 2 = -8\ кН \cdot м$

Участок 7-8 закручивается нагрузкой q с плечом 2м и в противоположную сторону - силой F с плечом 2м и моментом M_2, следовательно:

$M_{кр,7} = M_{кр,8} = q \cdot 3 \cdot 2 - F \cdot 2 - M_2 = 12 - 2 - 4 = 6$ кН·м

По вычисленным значениям строим эпюры M_x и $M_{кр}$(рис.16,б).

1.18 Построение эпюр в ломаных стержнях

Систему, состоящую из жестко соединенных между собой стержней, оси которых не лежат в одной плоскости, будем называть ломаным стержнем. При этом ограничимся рассмотрением только таких ломаных стержней, отдельные элементы которых стыкуются друг с другом под прямыми углами, а внешние нагрузки приложены перпендикулярно к осям стержней (рис.17,а,б).

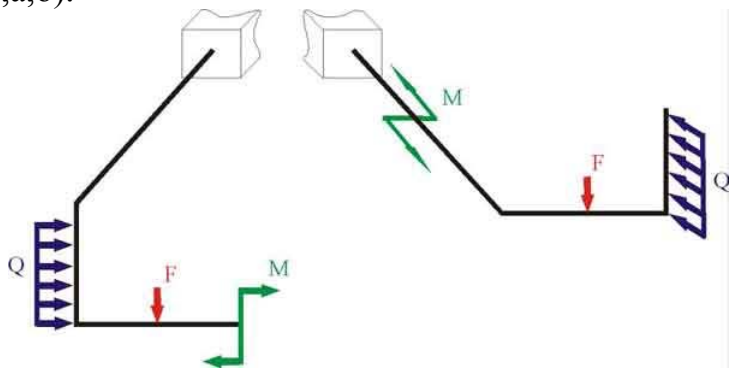


Рис.17

В общем случае нагружения в поперечных сечениях ломаных стержней могут возникать все 6 известных внутренних силовых факторов: продольная сила N_z, поперечные силы Q_x, Q_y, изгибающие моменты M_x, M_y, крутящий момент $M_{кр}(M_z)$. Очень часто, особенно в машиностроительных конструкциях, отдельные элементы ломаного стержня имеют незначительную длину, иногда соизмеримую с размерами поперечного сечения, то есть являются "короткими" стержнями. В этом случае не только внутренние моменты M_x, M_y, $M_{кр}(M_z)$, но и внутренние силы (N_z, Q_x, Q_y) существенно влияют на напряженно-деформированное состояние конструкции, поэтому для ломаных стержней будем строить эпюры всех шести внутренних силовых факторов.

Для правильного построения эпюр здесь обязательным является использование скользящей системы координат, о которой уже говорилось при рассмотрении плоско-пространственных систем (см.1.17).

Пример 12. Рассмотрим простейший случай нагружения ломанного стержня - двумя взаимноперпендикулярными сосредоточенными силами, приложенными на свободном конце (рис.18,а).

Выбираем скользящую систему координат (рис.18,б). Ось z всегда направлена вдоль продольной оси того или иного участка ломаного стержня, а при переходе с одного участка на другой координатные оси поворачиваются на 90 градусов, но никогда не вращаются вокруг оси z. Удобнее всего начинать выбор скользящей системы координат с горизонтального участка ломаного стержня, который параллелен плоскости чертежа или лежит в этой плоскости (участок BC на рис.18,б).

На этом участке (а он аналогичен обычной балке) ось y направляется вертикально (вверх или вниз), ось z - вдоль продольной оси участка, а ось x - перпендикулярно плоскости yoz, после чего система координат передвигается на остальные участки ломаного стержня.

Построение эпюры N_z.

Построение этой и всех последующих эпюр ведем от свободного конца. Правило знаков для N_z остается таким же, как и для других систем, а именно: растяжению соответствует знак "+", сжатию - "-".

Участок АВ имеет нулевую продольную силу, так как F_1, F_2 перпендикулярны продольной оси этого участка:

$N_{z,1} = N_{z,2} = 0$.

Участок ВС растягивается силой F_2:

$N_{z,3} = N_{z,4} = F_2$.

Участок СД сжимается силой F_1:

$N_{z,5} = N_{z,6} = - F_1$.

Построение эпюр Q_x *и* Q_y.

Поперечную силу Q_x формируют только те силы, которые параллельны оси x на данном участке, а поперечную силу Q_y - силы, параллельные оси y. Здесь также сохраняется обычное для Q правило знаков: $Q_x > 0$ ($Q_y > 0$), если внешняя сила, приложенная к отсеченной части, стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и $Q_x < 0$ ($Q_y < 0$) - в противоположном случае. С учетом сказанного в характерных сечениях имеем:

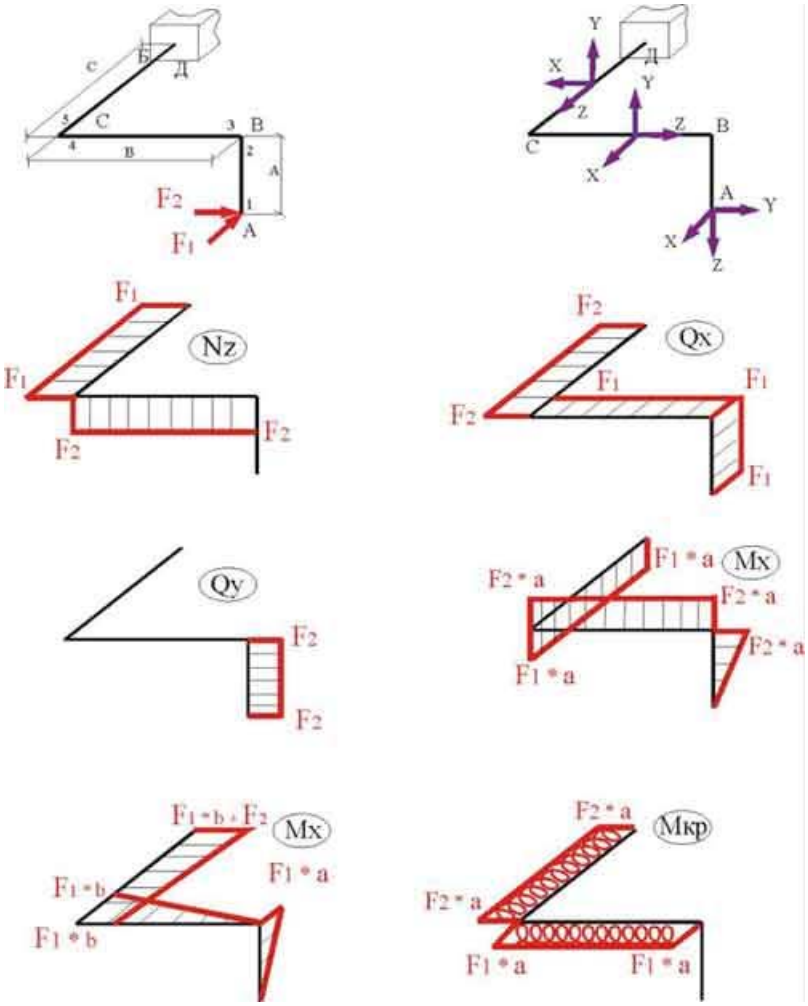


Рис.18

$Q_{x,1} = Q_{x,2} = -F_1;$

$Q_{x,3} = Q_{x,4} = -F_1;$

$Q_{x,5} = Q_{x,6} = -F_2;$

$Q_{y,1} = Q_{y,2} = -F_2;$

$Q_{y,3} = Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = 0$

Построение эпюр M_x, M_y.

Ординаты эпюр изгибающих моментов будем, как обычно, откладывать со стороны сжатых волокон, не указывая знаков, причем ориентировать эпюры нужно так, чтобы плоскость эпюры совпадала с плоскостью действия пары того изгибающего момента, для которого она построена. Иначе говоря, эпюра M_x на всех участках ломаного стержня располагается в плоскости yoz, а эпюра M_y - в плоскости xoz.

Начнем с построения эпюры M_x. Здесь нас будет интересовать изгиб каждого участка в плоскости yoz (см. скользящую систему координат на

рис.18,б) и, соответственно, плечо каждой действующей на отсеченную часть нагрузки нужно измерять в этой плоскости.

На участке AB плоскость yoz - вертикальная плоскость, параллельная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень AB изгибается только силой F_2, так как F_1 перпендикулярна плоскости yoz :

$M_{x,1} = 0;$

$M_{x,2} = F_2 \cdot a$ (сжаты правые волокна).

На участке BC плоскость yoz ориентирована так же, как и на участке AB, причем, все точки BC равноудалены от линии действия силы F_2, поэтому:

$M_{x,3} = M_{x,4} = F_2 \cdot a$ (сжаты верхние волокна).

На участке CД плоскость yoz - вертикальная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень CД изгибается только силой F_1, так как F_2 перпендикулярна yoz; все точки участка CД равноудалены (в рассматриваемой плоскости) от линии действия силы F_1, следовательно:

$M_{x,5} = M_{x,6} = F_1 \cdot a$ (сжаты нижние волокна).

Рассуждая аналогичным образом, будем строить эпюру M_y, но теперь нужно рассматривать изгиб каждого участка ломаного стержня в плоскости xoz.

На участке AB плоскость xoz - вертикальная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень AB изгибается только силой F_1, так как F_2 перпендикулярна плоскости xoz:

$M_{y,1} = 0;$

$M_{y,2} = F_1 \cdot a$ (сжаты дальние от наблюдателя волокна).

На участке BC плоскость xoz - горизонтальная плоскость. В этой плоскости сила F_2 приложена вдоль продольной оси стержня BC и к изгибу привести не может, поэтому:

$M_{y,3} = 0;$

$M_{y,4} = F_1 \cdot b$ (сжаты дальние от наблюдателя волокна).

На участке CД плоскость xoz - это так же горизонтальная плоскость. Здесь к изгибу стержня CД приводят обе силы: плечо силы F_1 постоянно и равно b, а плечо силы F_2 равно нулю в сечении 5 и равно **c** в сечении 6:

$M_{y,5} = F_1 \cdot b,$

$M_{y,6} = F_1 \cdot b + F_2 \cdot c$ (сжаты правые волокна).

Иногда при построении эпюр изгибающих моментов в ломанных стержнях возникают затруднения в определении участия той или иной нагрузки в изгибе стержня или в определении плеча той или иной нагрузки. В этих случаях всегда можно использовать

простой, но эффективный прием: спроектировать конструкцию и действующие нагрузки на ту плоскость в которой изгибается стержень, переходя тем самым от пространственной конструкции к ее проекции, что позволяет легко определить плечи каждой из нагрузок и их "вклад" в изгиб рассматриваемого участка. Проследим использование этого приема например, при построении эпюры M_y на участке СД (рис.18,а,б). На этом участке плоскость xoz, в которой нужно рассматривать изгиб стержня при построении M_y - горизонтальная плоскость, следовательно, для реализации описываемого приема необходимо спроектировать конструкцию на горизонтальную плоскость, то есть изобразить вид сверху (рис.19).

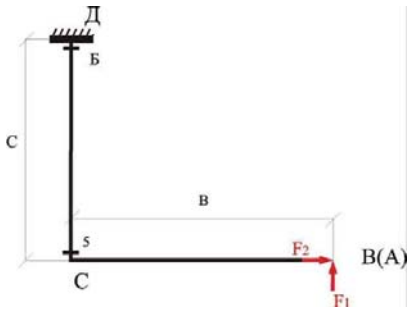


Рис.19

При этом сила F_2 будет видна направленной вдоль стержня ВС, сила F_1 - перпендикулярно ВС, а стержень ВА проектируется в точку. Теперь совершенно очевидно, что все точки стержня СД равноудалены от линии действия силы F_1, что приводит к постоянному моменту $F_1 \cdot b$, а сила F_2 имеет нулевое плечо в сечении 5 и плечо, равное **с**, - в сечении 6:

$M_{y,5} = F_1 \cdot b$,

$M_{y,6} = F_1 \cdot b + F_2 \cdot c$.

В обоих сечениях сжаты правые волокна, то есть получен тот же результат, что и ранее, но в более наглядном виде.