



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций
сертифицирована DQS по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт»

Метод сечений, порядок построения эпюр ВСФ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**

для студентов направлений

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

15.03.02 Технологические машины и оборудование

18.03.02. Энерго- и ресурсосберегающие процессы химической технологии, нефтехимии и биотехнологии

23.03.01 Технология транспортных процессов

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов

26.03.01 Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства

26.03.02 Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры

УДК 539.417
ББК 30.121Т

Славин Р.Б.

Метод сечений, порядок построения эпюр ВСФ. Методические указания по курсу «Сопротивление материалов». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 37с.

В пособии представлены общие понятия о внутренних силовых факторах, правилах знаков для внутренних силовых факторов и методики построения эпюр внутренних силовых факторов с проверкой правильности решения. Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсу «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет» Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Славин Р.Б., 2024

© Астраханский государственный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Внутренние силы. Метод сечений.....	4
2. Эпюры ВСФ. Общие правила построения эпюр.....	6
3. Эпюры продольных усилий.....	7
4. Эпюры крутящих моментов.....	9
5. Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределённой нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом. Особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	10
6. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	13
Пример 6.1.....	13
Пример 6.2.....	15
Пример 6.3.....	17
7. Построение эпюр ВСФ для плоских рам.....	18
8. Построение эпюр ВСФ для пространственного ломаного бруса.....	20
9. Задания и варианты к расчётно-проектировочной работе.....	22
10. Общие методические указания к оформлению работ.....	36
11. Рекомендуемая литература.....	36

1. Внутренние силы. Метод сечений

Прочность твердого тела обусловлена силами сцепления между отдельными его частицами. При деформации тела, вызванной действием приложенных к телу внешних сил, внутренние силы изменяются. В дальнейшем под внутренними силами будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те приращения, которые вызваны действующими на тело нагрузками. При возрастании внешних сил увеличиваются и внутренние силы, но лишь до определенного предела, при превышении которого наступает разрушение. Это предельное значение внутренних сил зависит от физико-механических свойств материала данного тела.

Для расчета на прочность необходимо уметь *определять внутренние силы по заданным внешним силам*. Это делается *методом сечений*.

Для лучшего запоминания 4-х этапов метода сечений можно использовать мнемонический прием, называя его методом *РОЗУ* - это аббревиатура, составленная из начальных букв четырех этапов – *разрезаем, отбрасываем, заменяем, уравниваем*.

Рассматриваем произвольное тело, находящееся в равновесии под действием заданной системы внешних сил (рис. 1, а). Реакции связей также относятся к числу внешних сил, поэтому среди изображенных сил могут быть как активные, так и реактивные.

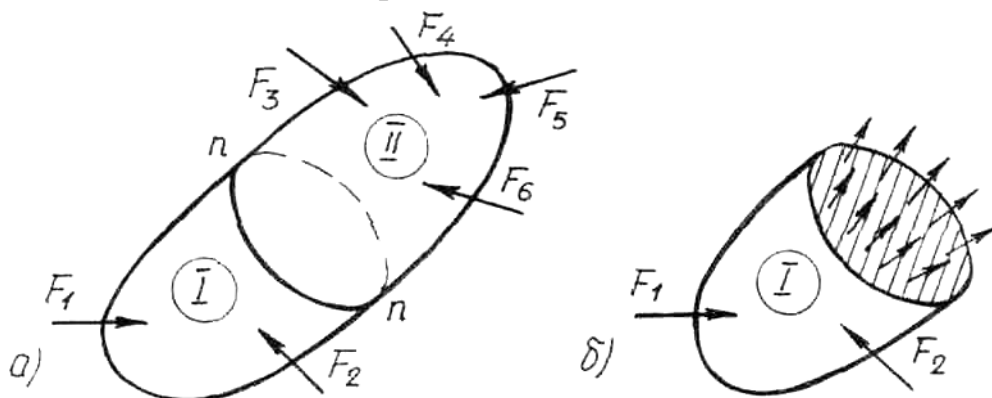


Рис. 1

1) **РАЗРЕЗАЕМ** мысленно тело сечением в том месте, где хотим определить внутренние силы, произвольной плоскостью $n - n$ (в общем случае сечение может быть не обязательно плоским).

2) **ОТБРАСЫВАЕМ** одну из частей, например II (рис. 1, б) *принципиально* безразлично, какую из частей отбросить I или II, т. к. из 3-го закона Ньютона следует, что силы, действующие от части II на часть I, равны по модулю и противоположны по направлению силам действия части I на II. *Практически* удобно оставлять ту часть, к которой приложено меньше внешних сил, т.к. уравнения равновесия для нее будут иметь более простой вид.

3) ЗАМЕНЯЕМ действие отброшенной части силами взаимодействия между частями I и II тела, которые являются внутренними силами для целого тела и обеспечивают равновесие оставленной части (см. рис. 1, б).

Таким образом, применяя метод сечений, переводят силы, являющиеся внутренними для тела в целом, во внешние для одной из его частей, полученной в результате мысленно проведенного сечения.

Исходя из *гипотезы сплошности*, внутренние силы действуют во всех точках сечения и представляют собой распределенную нагрузку, но закон распределения внутренних сил по сечению не известен. Однако из теоретической механики известно, что любая система сил может быть приведена к ее *главному вектору* и *главному моменту*, которые статически эквивалентны заданной системе сил.

Главный вектор и главный момент могут быть разложены на шесть составляющих по осям координат.

Прямой брус, в частности, рассекают обычно плоскостью перпендикулярной к оси, т. е. поперечным сечением. Систему координат выбирают следующим образом: начало координат помещают в центре тяжести рассматриваемого поперечного сечения (рис. 2), ось Ox направляют по внешней нормали к сечению, т.е. вдоль оси бруса, оси Oy и Oz – главные центральные оси поперечного сечения.

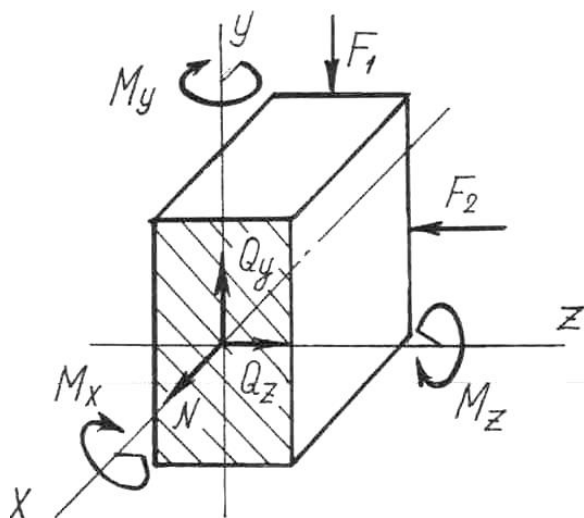


Рис. 2

Составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил, возникающих в поперечном сечении бруса, называют **внутренними силовыми факторами** (ВСФ) в этом сечении.

Составляющие главного момента по осям принятой системы координат, как известно, векторы, но на рис. 2 они показаны в виде дугообразных линий со стрелками на концах, вращением вокруг соответствующей оси.

В общем случае нагружения в поперечном сечении возникают шесть внутренних силовых факторов, для них приняты следующие названия:

- N - продольная или нормальная сила;
- Q_y, Q_z - поперечные (перерезывающие) силы;
- M_x - крутящий момент;
- M_y, M_z - изгибающие моменты.

Разложение на составляющие имеет не формальный, а ясно выраженный физический смысл: каждый из ВСФ связан с определенным видом

деформации бруса. Если не равна нулю только продольная сила N , брус работает на *растяжение* или на *сжатие*. Если не равна нулю поперечная сила Q_y (или Q_z , или обе одновременно), брус работает на *срез* (*сдвиг*).

При наличии в поперечных сечениях бруса только крутящего момента имеет место деформация кручения. В случае, если не равен нулю изгибающий момент M_y или M_z брус работает на чистый изгиб либо в плоскости XOZ , либо в плоскости XOY .

4) **УРАВНОВЕШИВАЕМ** оставленную часть. Величину каждого ВСФ определяем из соответствующего уравнения равновесия для всех сил, действующих на оставленную часть (см. рис. 2). Как известно, для пространственной системы произвольно расположенных сил таких уравнений может быть составлено шесть и в каждое из них войдет лишь один ВСФ.

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma M_x = 0; \Sigma M_y = 0; \Sigma M_z = 0.$$

На основании этих уравнений можно сформулировать правила для определения ВСФ:

продольная сила N в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме на продольную ось Ox всех внешних сил, включая и реакции опор, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

поперечные силы Q_y и Q_z - то же, но на оси y и z , соответственно;

крутящий момент $M_{кр}$ численно равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси бруса всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

изгибающие моменты M_y и M_z - то же, относительно осей y и z , соответственно.

Таким образом, метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении бруса при действии любой нагрузки.

2. Эпюры ВСФ. Общие правила построения эпюр

Внутренние силовые факторы по длине бруса обычно изменяются по величине.

Графики (диаграммы), показывающие как изменяются внутренние усилия по длине бруса, называются эпюрами. Эпюры ВСФ строят в первую очередь для того, чтобы использовать их при расчете бруса на прочность; они дают возможность наглядно определить *опасные сечения* бруса, в которых ВСФ имеют наибольшие значения.

При построении эпюр используют следующие общие правила:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, проводят параллельно оси бруса.

2. Ординаты эпюры, равные величине ВСФ с учетом масштаба, откладывают перпендикулярно оси. Масштаб выбирается из соображений наглядности эпюры и удобства работы с ней.

3. Величины характерных ординат отмечают численно, а знак ВСФ проставляют в поле эпюры в кружочке или рядом с осью с одной из сторон эпюры.

4. Эпюры штрихуют перпендикулярно оси.

5. Ось эпюры, штриховку изображают тонкой линией, а саму эпюру - толстой.

3. Эпюры продольных усилий

Брус, работающий преимущественно на растяжение-сжатие называется **стержнем**.

Правило знаков. Продольная сила N считается положительной, если вызывает растяжение, и отрицательной, если вызывает сжатие.

Особенности построения эпюр рассмотрим на конкретном примере. Построим эпюру продольных усилий для стержня, расчетная схема которого изображена на рис. 3, а.

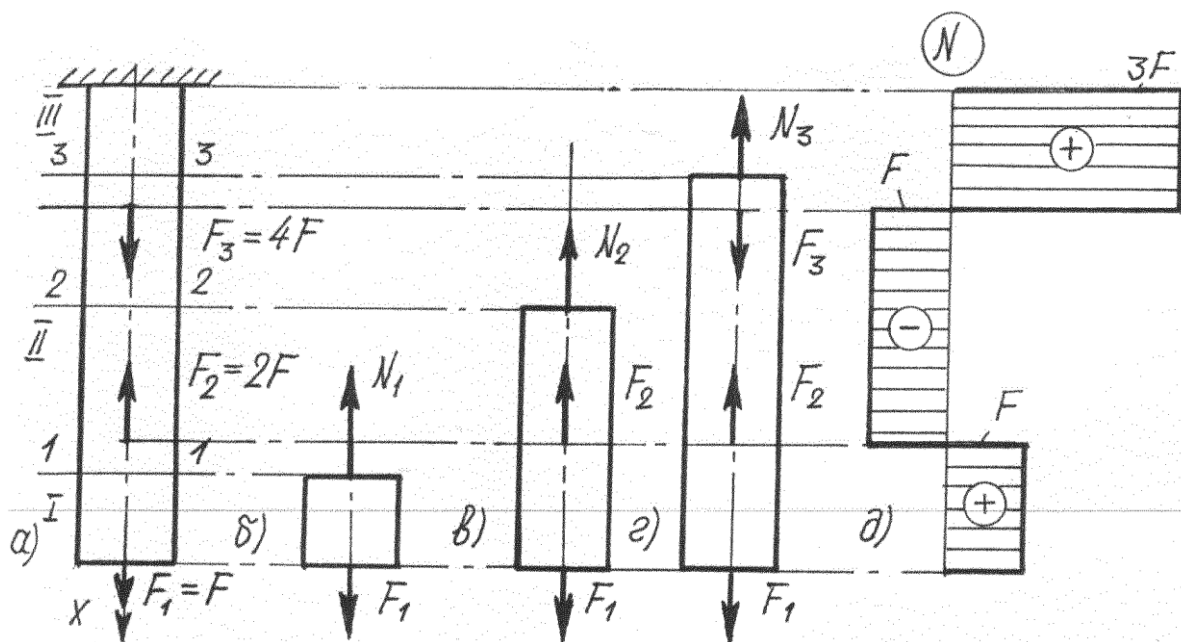


Рис. 3

Разбиваем стержень на участки, используя правила:

- 1) движемся со свободного конца;
- 2) границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы.

Рациональнее отбрасывать верхнюю часть, тогда нет необходимости определять реакцию опоры.

Проводим произвольное сечение 1-1 на 1-м участке (рис.3, б) и рассматриваем равновесие нижней отсеченной части;

$$\Sigma X=0: F_1 - N_1=0, \text{ отсюда следует } N_1 = F_1 = F.$$

Искомые продольные усилия N_i всегда направляем на растяжение, т.е. в положительную сторону. Для определения продольных усилий нет необходимости каждый раз изображать отсеченную часть и записывать уравнение равновесия. Можно сразу записывать выражение для продольного усилия, как алгебраическую сумму проекций на ось бруса внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

2-й участок (рис. 3, в): $N_2 = F_1 - F_2 = F - F_2 = -F.$

Знак минус указывает, что фактическое направление силы N_2 противоположно первоначально выбранному, т.е. 2-й участок испытывает сжатие.

3-й участок (рис. 3, г): $N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = F - 2F + 4F = 3F$, По полученным значениям строим эпюру, показанную на рис. 3, д. Положительные значения откладываем вправо, а отрицательные – влево от оси.

Правило: В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получаются "скачки". Размер "скачка" равен приложенной в этом сечении силе. Направление "скачка" связано с направлением действия силы.

Замечание. Скачкообразные изменения координат N носят условный характер, так как условно и само понятие "сосредоточенная сила". Фактическая внешняя сила распределена по некоторой небольшой части длины бруса; в пределах этой части значения N изменяется по некоторому закону, установить который не предоставляется возможным. Не известный криволинейный переходный участок эпюры заменяют условным "скачком". На вопрос: чему равна продольная сила в точке приложения F_2 , ответить прямо нельзя. Можно лишь сказать, что бесконечно близко к точке справа $N = +F$, а бесконечно близко к точке сверху $N = -F$.

Рассмотрим следующий пример. Построим эпюру продольных усилий бруса, изображенного на рис. 4. Отличие от предыдущего примера - наличие равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = F/a$.

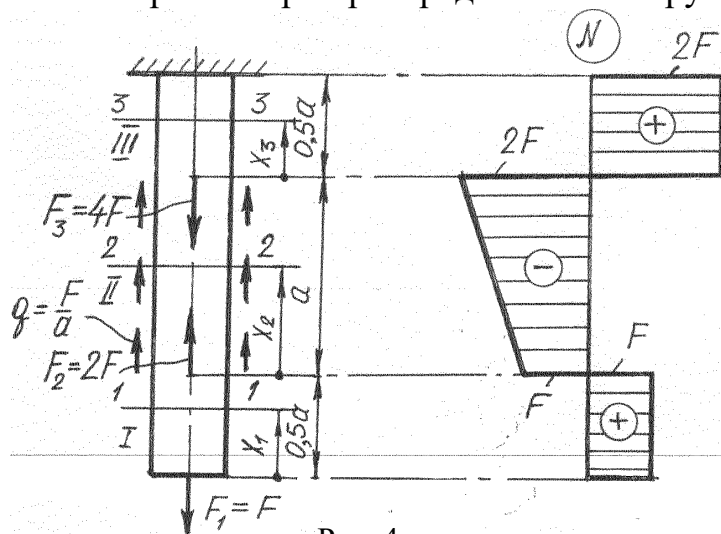


Рис. 4

Участки остаются те же, но должна быть задана, длина участков. 1 участок: $0 \leq x_1 \leq 0,5a$:

$$N_1 = F.$$

2 участок $0 \leq x_2 \leq a$:

$$N_2 = F - 2F - qx_2.$$

Это уравнение прямой линии, поэтому для построения эпюры достаточно определить значение N в начале и в конце участка:

При $x_2 = 0$ получим $N_2 = -F$; при $x_2 = a$ получим $N_2 = F - 2F - F = -2F$.

Правило: На участке, где действует распределенная нагрузка, на эпюре – наклонная прямая.

3 участок: $0 \leq x_2 \leq 0,5a$:

$$N_3 = F - 2F + 4F - qa = 2F$$

4. Эпюры крутящих моментов

Брус, работающий преимущественно на кручение, называется *валом*.

Правило знаков. Знак крутящего момента не имеет физического смысла, но для определенности при построении эпюр условимся о следующем правиле знаков.

Будем считать крутящий момент положительным, если при взгляде со стороны сечения, он представляется направленным по часовой стрелке (рис. 5).

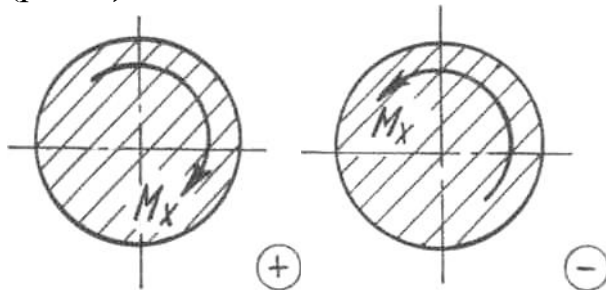


Рис. 5

В соответствии с международными рекомендациями крутящие моменты обозначаются: T_e – внешний крутящий момент (от *torsion external*); T_i – внутренний крутящий момент (от *torsion inside*). Построим эпюру крутящих моментов для вала, расчетная схема которой изображена на рис. 6, а.

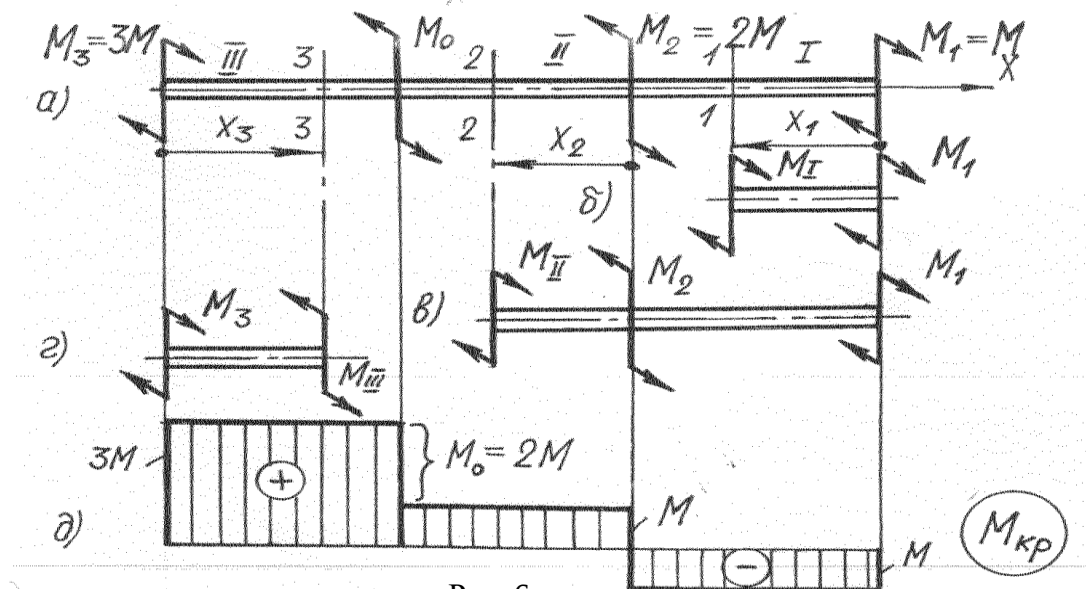


Рис. 6

Момент M_0 не задан, его можно определить из уравнения равновесия $\sum M_x = 0$, но рациональнее вести построение эпюры, двигаясь со свободных концов слева, а затем справа. Величину M_0 можно будет определить по построенной эпюре без вычислений. Разбиваем вал на 3 участка. Используем

метод сечений, рассматривая равновесие оставленной части (рис. 6, б, в, г), приходим к выводу, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении вала, должны дать крутящий момент, уравнивающий внешние моменты, приложенные к оставленной части.

Проводим произвольные сечения на каждом из 3-х участков и рассматривая равновесие отсеченных частей, получим:

1 участок: $M_I = -M_1 = -M$;

2 участок: $M_{II} = -M_1 + M_2 = -M + 2M = M$;

3 участок: $M_{III} = M_3 = 3M$.

По полученным значениям строим эпюру, представленную на рис. 6, д.

5. Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом. Особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Построение эпюр Q и $M_{изг}$ существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между q , Q , $M_{изг}$. Для вывода этих зависимостей выделим из балки двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми равно dx , бесконечно малый элемент (рис. 7).

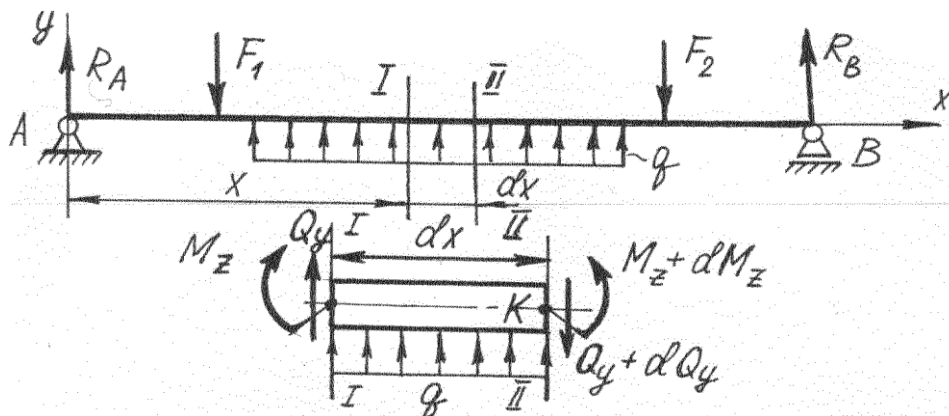


Рис. 7

Распределенную нагрузку q направляем вверх, так как это направление считаем положительным.

В общем случае q может быть не равномерной, но из-за малости dx неравномерность не учитывается.

Спроецируем действующие на элемент силы на ось Oy :

$$\sum Y = 0: Q_y + qdx - (Q_y + dQ_y) = 0; \text{ получим:}$$

$$dQ_y/dx = q.$$

Производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Определим сумму моментов относительно точки K ;

$\Sigma M_K = 0$: $M_z + Q_y dx + q dx dx/2 - (M_z + dM_z) = 0$, пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$dM_z/dx = Q_y.$$

Производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе.

Из этих зависимостей следует:

$$d^2 M_z/dx^2 = q.$$

Интенсивность распределенной нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по длине балки.

В сложных случаях нагружения балок эпюры Q и $M_{изг}$ целесообразнее строить без записи аналитических выражений $Q(x)$, $M_{изг}(x)$ по участкам, вычисляя значения Q , $M_{изг}$ только в *характерных точках* - это границы участков и лишь в отдельных случаях - промежуточные сечения. При таком построении используется ряд правил, которые являются следствием из полученных дифференциальных зависимостей:

1. На участках, где нет распределенной нагрузки q :

- эпюра Q - прямая, параллельная базе, т.е. $Q = const$,
- эпюра $M_{изг}$ - наклонная прямая (рис. 8).

2. На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка q :

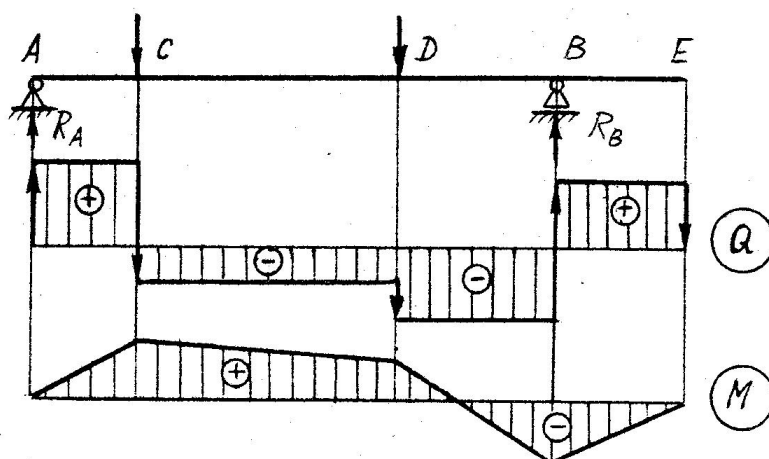


Рис.8

- эпюра Q - наклонная прямая,
- эпюра $M_{изг}$ - парабола (кривая второго порядка) с выпуклостью, направленной против направления q (рис. 9).

3. Если на участке:

- а) $Q > 0$, то $M_{изг}$ возрастает (рис. 8, участки AC и BE);
- б) $Q < 0$, то $M_{изг}$ убывает (рис. 8, участки CD и DC);
- в) $Q = 0$, то $M_{изг} = const$ (чистый изгиб).

4. Если на эпюре Q наклонная прямая проходит через нулевое значение, то $M_{изг}$ - в этом сечении имеет экстремальное значение (*min* или *max*) (рис. 9, сечение C).

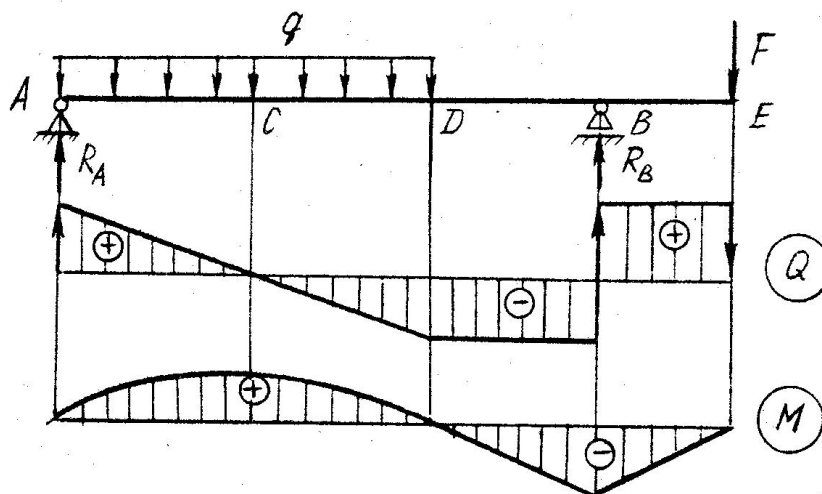


Рис. 9

$dM/dx = 0$ - признак экстремума - касательная к эпюре параллельна оси.

5. Под сосредоточенной силой:

- на эпюре Q - скачок в направлении действия силы, равный по величине этой силе (на рис. 8, 9 эти скачки отмечены толстыми линиями со стрелками);

- на эпюре $M_{изг}$ - излом, острие излома направленно против направления силы (на рис. 8 – сечения C , D и B ; на рис. 9 – сечение B).

6. В точках, соответствующих началу и концу участка действия распределенной нагрузки, парабола и прямая линия эпюры $M_{изг}$ сопрягаются плавно, если в указанных точках не приложено сосредоточенных сил (рис. 9 – сечение D).

7. В сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, на эпюре $M_{изг}$ будут скачки на величину этих моментов и в направлении, соответствующем знаку момента. На эпюре Q - никаких изменений.

8. На свободном или шарнирно-опертом конце балки $M_{изг} = 0$, если там не приложен сосредоточенный момент, а Q равна внешней сосредоточенной силе (активной или реактивной).

9. В заделках Q и $M_{изг}$ численно равны опорной реакции и реактивному моменту.

10. Q равна тангенсу угла наклона касательной к оси на эпюре $M_{изг}$ в данном сечении.

11. Изменение величины $M_{изг}$ на каком-либо участке балки равно площади эпюры Q на этом участке плюс сосредоточенные моменты, действующие на этом участке.

12. Изменение величины Q на каком-либо участке балки равно площади эпюры q на этом участке.

Проиллюстрируем использование этих правил на примерах, представленных ниже.

6. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Брус, работающий преимущественно на изгиб называется *балкой*.
Правило знаков. На рис. 10, а показан бесконечно малый элемент, вырезанный из балки, и возможные направления поперечных сил в его торцевых (поперечных) сечениях. Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент по часовой стрелке.

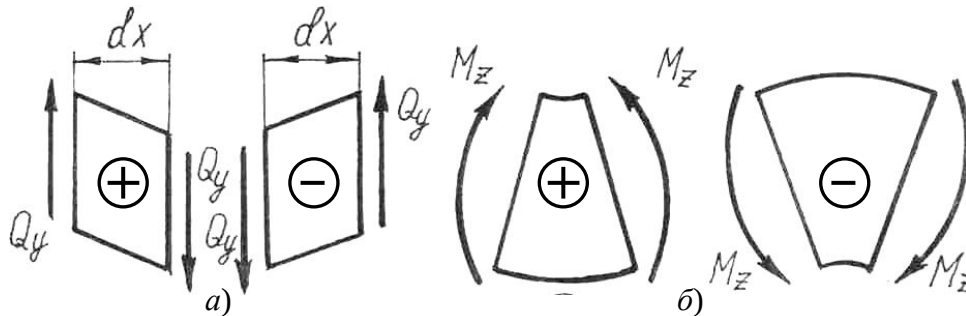


Рис. 10

Изгибающий момент считается положительным, если элемент балки изгибается выпуклостью вниз или говорят - "ковшом" (рис. 10, б), т. е. таким образом, что его сжатые волокна находятся в верхней части. Положительные ординаты эпюры изгибающих моментов откладывают вверх от оси абсцисс, т. е. в сторону сжатых волокон балки, поэтому это правило знаков часто называют *правилом сжатого волокна*.

Практически удобнее устанавливать знаки Q_y и M_z по внешним силам при этом отсеченную часть балки мысленно заземляют в проведенном сечении.

Внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки во по часовой стрелке, вызывает положительную поперечную силу.

Внешняя сила (момент), изгибающая отсеченную часть балки выпуклостью вниз ("ковшом"), т. е. таким, образом, что сжатые волокна находятся сверху, дает положительный изгибающий момент.

Следует иметь в виду, что при принятом правиле знаков внешние силы направленные вверх, всегда, т. е. независимо от того, приложены ли они к левой или к правой отсеченной части балки, дают положительный изгибающий момент.

Рассмотрим примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Пример 6.1

Построить эпюры Q_y и M_z для балки, изображенной на рис. 11.

Решение. Проводим сечение на расстоянии x от свободного конца балки и рассматриваем левую отсеченную часть (рис. 11). К этой части приложена равномерно распределенная нагрузка с результирующей силой q_x , приложенной всегда в середине рассматриваемого участка действия.

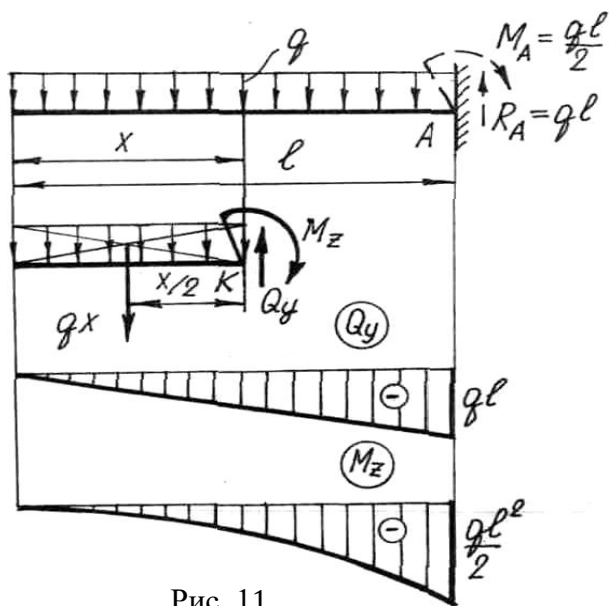


Рис. 11

Нагрузка стремится повернуть отсеченную часть против часовой стрелки, следовательно $Q_y = -q x$. Мысленно защемляя оставленную часть балки в сечении K , заключаем, что нагрузка q изгибает ее выпуклостью вверх, т.е. изгибающий момент отрицателен

$$M_z = -qx \times x/2 = -qx^2/2.$$

Таким образом, поперечная сила изменяется вдоль балки по линейному закону, а изгибающий момент - по квадратичному. Это подтверждает правило 2 из п. 5.

Для построения эпюры Q_y достаточно найти ее ординаты в двух сечениях:

в начале балки при $x = 0$: $Q_y = 0$,

в заделке при $x = l$: $Q_y = -ql$ (рис. 11).

Для построения эпюры M_z следует определить три-четыре ее ординаты.

При $x = 0$: $M_z = 0$; При $x = l/2$: $M_z = -q(l/2)^2/2 = -ql^2/8$;

При $x = l$: $M_z = -ql^2/2$ (рис. 11).

В дальнейшем при построении эпюры M_z на участках, где она изменяется по квадратичному закону, можно использовать правило 2 без вычисления промежуточных значений.

При построении эпюр для балок, зажатых одним концом, рекомендуется двигаться со свободного конца балок, т.е. оставлять часть балки, примыкающую к свободному концу; если оставить часть балки с заделкой, то предварительно (до применения метода сечений) следует определить реакции заделки. В этом нет необходимости, так как при движении со свободного конца значение реакций получается «автоматически»: Q_y и M_z в сечении заделки равны соответственно реактивной силе и реактивному моменту; в нашем случае:

$$M_A = ql^2/2; \quad R_A = ql \quad (\text{см. рис. 11}).$$

Построение эпюр по характерным точкам с использованием правил, изложенных в п. 5, производится без записи аналитических выражений для Q_y и M_z . Вычислим значения Q_y и M_z в характерных точках, а в данном примере это начало и конец балки, и соединим полученные - ординаты соответствующей линией.

На свободном конце $Q_y = 0$, $M_z = 0$, так как здесь к балке не приложено сосредоточенных сил и моментов (правило 8 из п. 5). На правом конце (в заделке) поперечная сила должна быть равна сумме сил, при-

ложенных к балке слева от этого сечения: $Q_y = -ql$. Соединяем полученные ординаты прямой наклонной линией (правило 2 из п. 5). Скачок на эпюре Q_y - в заделке, он направлен вверх и равен $|Q_y| = ql$ следовательно здесь действует направленная вверх реакция заделки $R_A = ql$.

Изгибающий момент в заделке $M_A = ql^2/2$.

Момент изменяется по квадратичному закону с выпуклостью параболы вверх (правило 2 из п. 5). Касательная к параболе на свободном конце горизонтальна, так как в этом сечении $Q_y = dM_z/dx = 0$. Соединяя эти ординаты параболой, получаем эпюру M_z . На этой эпюре скачок в заделке, он равен по величине моменту в заделке $M_A = ql^2/2$ и направление скачка соответствует направлению момента (см. рис. 11).

Пример 6.2

Построить эпюры Q_y и M_z для балки на двух опорах, изображенной на рис. 12, а.

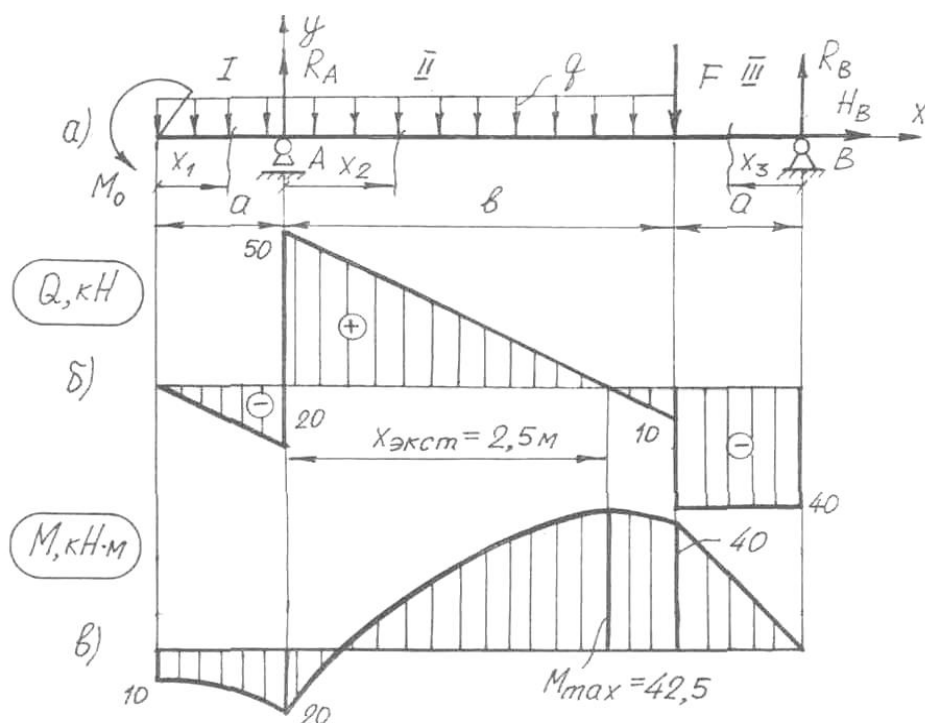


Рис. 12

Исходные данные: $M_0 = 10$ кНм; $F = 30$ кН; $q = 20$ кН/м; $a = 1$ м; $b = 3$ м.

Решение. До построения эпюр необходимо из уравнений равновесия определить реакции опор:

$$\sum X = 0; H_B = 0.$$

$$\sum M_B = 0; M_0 + q(a+b)[a + (a+b)/2] + F \times a - R_A(a+b) = 0.$$

$$R_A = M_0 / (a+b) + q[a + (a+b)/2] + F \times a / (a+b) = 10/(1+3) + 20[1 + (1+3)/2] + 30 \times 1/(1+3) = 70 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; M_0 + qa^2/2 - qb^2/2 - Fb + R_B(a+b) = 0.$$

$$R_B = - M_o / (a+b) - q a^2 [(a+b)^2] + qb^2 / [2(a+b)] + F \times b / (a+b) = - 10 / (1+3) - 20 \times 1^2 / [2(1+3)] + 20 \times 3^2 / [2(1+3)] + 20 \times 3 / (1+3) = 40 \text{ кН.}$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\Sigma Y = 0: R_A + R_B - F - q(a+b) = 70 + 40 - 30 - 20(1+3) = 0.$$

Реакции определены верно.

Для построения эпюр балку разбиваем на три участка (см. рис. 12, а)

Первый участок: $0 \leq x_1 \leq a$:

Из уравнений равновесия левой отсеченной части получаем:

$$Q_1 = - qx_1 - \text{уравнение наклонной прямой};$$

$$M_1 = - M_o - q x_1^2 / 2 - \text{уравнение параболы.}$$

$$\text{В начале участка при } x_1 = 0: Q_1 = 0; M_1 = - M_o = -10 \text{ кНм.}$$

$$\text{В конце участка при } x_1 = a: Q_1 = - qa = - 20 \times 1 = - 20 \text{ кН};$$

$$M_1 = - M_o - qa^2 / 2 = - 10 - 20 \times 1^2 / 2 = - 20 \text{ кНм.}$$

Промежуточные точки параболы можно не вычислять, а используя правило 2 п. 5 провести ее приближенно, направляя выпуклость вверх, против стрелок распределенной нагрузки q .

Второй участок: $0 \leq x_2 \leq b$:

Рассматривая равновесие левой отсеченной части, получим:

$$Q_2 = - q(a + x_2) + R_A - \text{уравнение наклонной прямой};$$

$$M_2 = - M_o - q(a + x_2)^2 / 2 + R_A x_2 - \text{уравнение параболы.}$$

Определяем характерные ординаты:

$$\text{при } x_2 = 0: Q_2 = - qa + R_A = -20 + 70 = 50 \text{ кН};$$

$$M_2 = - M_o - qa^2 / 2 = - 10 - 20 \times 1^2 / 2 = - 20 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = b: Q_2 = - q(a+b) + R_A = - 20(1+3) + 70 = -10 \text{ кН};$$

$$M_2 = - M_o - q(a+b)^2 / 2 + R_A b = - 10 - 20(1+3)^2 / 2 + 70 \times 3 = 40 \text{ кНм.}$$

По полученным значениям строим эпюру Q_y (рис. 12, б), а для построения эпюры M_z требуется еще дополнительно определить координату сечения, в котором возникает $M_{\text{экстр}}$ и его величину, так как эпюра Q_y на этом участке плавно переходит через нуль (см. правило 4 п. 5).

Методика определения $M_{\text{экстр}}$.

Определяем координату сечения, в котором возникает $M_{\text{экстр}}$, из условия, что поперечная сила в этом сечении равна нулю:

$$Q_2 = 0: - q(a + x_{2\text{экстр}}) + R_A = 0,$$

$$x_{2\text{экстр}} = R_A / q - a = 70/20 - 1 = 2,5 \text{ м.}$$

Величину $M_{2\text{экстр}}$ получаем, подставляя в уравнение M_2 координату $x_{2\text{экстр}}$:

$$M_{2\text{экстр}} = - M_o - q(a + x_{2\text{экстр}})^2 / 2 + R_A x_{2\text{экстр}} = - 10 - 20(1 + 2,5)^2 / 2 + 70 \times 2,5 = 42,5 \text{ кНм.}$$

Третий участок: $0 \leq x_3 \leq a$:

На этом участке рациональнее рассматривать равновесие правой отсеченной части, так как на нее действует меньше нагрузок и уравнения будут проще:

$$Q_3 = - R_B - \text{уравнение прямой, параллельной оси,}$$

$M_3 = R_B x_3$ - уравнение наклонной прямой.

Характерные ординаты:

при $x_3 = 0$; $M_3 = 0$;

при $x_3 = a$: $M_3 = R_B a = 40 \times 1 = 40$ кНм.

$Q_3 = -40$ кН в любом сечении третьего участка, так как не зависит от текущей координаты x_3 .

По полученным значениям построены эпюры Q_y (рис. 12, б) и M_z (рис. 12, в).

Пример 6.3

Построить эпюры Q_y и M_z для балки с промежуточным ("висячим") шарниром, изображенной на рис. 13, а.

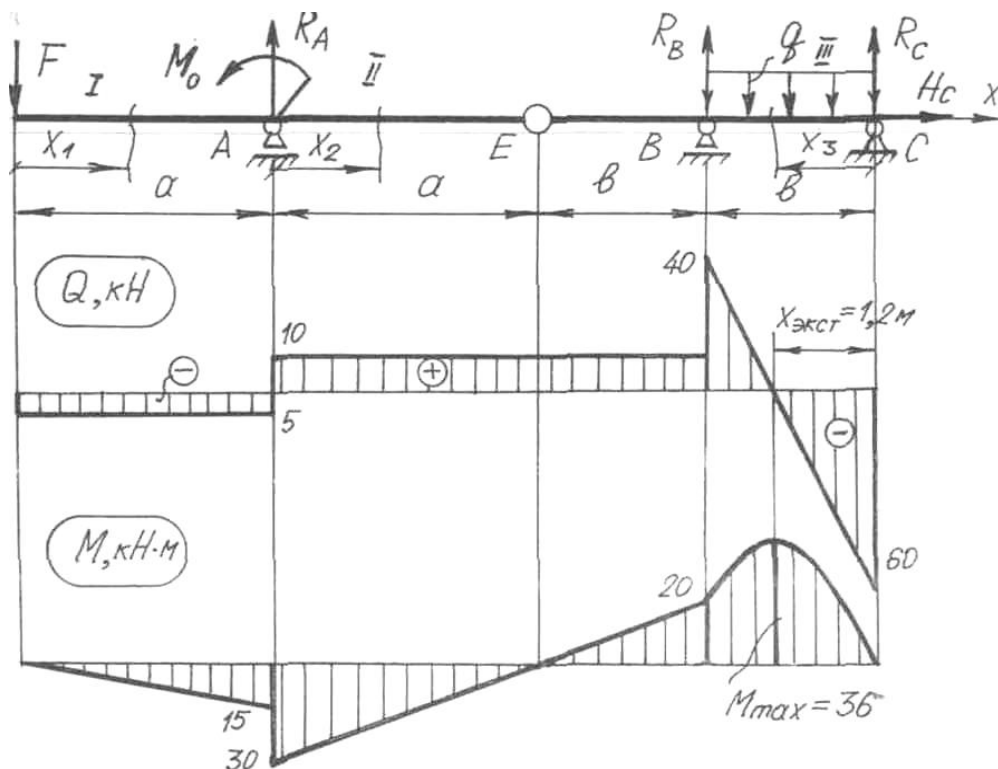


Рис. 13

Исходные данные: $F = 5$ кН; $M_o = 15$ кНм; $q = 50$ кН/м; $a = 3$ м; $b = 2$ м.

Решение. Особенность балок с промежуточным шарниром заключается в том, что они имеют четыре неизвестные реакции опоры, но их можно определить из уравнений статики, используя дополнительное уравнение равновесия - равенство нулю момента в промежуточном шарнире.

$$\sum X = 0; H_C = 0.$$

Из суммы моментов относительно шарнира E для сил, приложенных только к левой части:

$$(\Sigma M_A)_{лев} = 0: F \times 2a + M_o - R_A a = 0;$$

$$\Sigma M_B = 0: F(2a + b) + M_o - R_A(a + b) + R_C b - qb^2/2 = 0;$$

$$R_C = [R_A(a + b) + qb^2/2 - F(2a + b) - M_o]/b = [15(3 + 2) + 50 \times 2^2/2 - 5(2 \times 3 + 2) - 15]/2 = 60 \text{ кН};$$

$$(\Sigma M_A)_{np} = 0: R_C 2b + R_B b - qb(b + b/2) = 0;$$

$$R_B = [qb(b + b/2) - R_C 2b]/b = [50 \times 2(2 + 2/2) - 60 \times 2 \times 2]/2 = 30 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\Sigma Y = 0: R_A + R_B + R_C - F - qb = 15 + 70 + 60 - 5 - 50 \times 2 = 0.$$

Реакции вычислены верно.

Для построения эпюр Q_y и M_z балку разбиваем на три участка (см. рис. 13, а).

Первый участок: $0 \leq x_1 \leq a$:

Из условия равновесия левой отсеченной части:

при $x_1 = a$: $Q_1 = -5 \text{ кН}$; $M_1 = -Fa = -5 \times 3 = -15 \text{ кНм}$.

Второй участок: $0 \leq x_2 \leq (a + b)$:

Из условия равновесия левой отсеченной части:

$$Q_2 = -F + R_A = -5 + 15 = 10 \text{ кН};$$

$$M_2 = -F(a + x_2) - M_o + R_A x_2.$$

На участке, где расположен шарнир, рекомендуется вычислять момент в шарнире для проверки правильности вычислений. Момент в шарнире должен быть равен нулю:

при $x_2 = 0$: $Q_2 = 10 \text{ кН}$; $M_2 = -Fa - M_o = -30 \text{ кНм}$;

при $x_2 = a$ (в шарнире): $Q_2 = 10 \text{ кН}$;

$$M_2 = -F \times 2a - M_o + R_A a = -5 \times 2 \times 3 - 15 + 15 \times 3 = 0.$$

при $x_2 = a + b$: $Q_2 = 10 \text{ кН}$;

$$M_2 = -F(2a + b) - M_o + R_A(a + b) = -5(2 \times 3 + 2) - 15 + 15(3 + 2) = 20 \text{ кНм}.$$

Третий участок: $0 \leq x_3 \leq b$:

Рассматриваем равновесие правой отсеченной части:

$$Q_3 = -R_C + qx_3; \quad M_3 = R_C x_3 - q x_3^2/2;$$

при $x_3 = 0$: $Q_3 = -R_C = -60 \text{ кН}$; $M_3 = 0$;

при $x_3 = b$: $Q_3 = -R_C + qb = -60 + 50 \times 2 = 40 \text{ кН}$;

$$M_3 = R_C b - qb^2/2 = 60 \times 2 - 50 \times 2^2/2 = 20 \text{ кНм}.$$

На этом участке эпюра Q_y пересекает ось, поэтому необходимо определить $M_{эстр}$, как и в примере 6.2. Из условия $Q_3 = 0$ находим координату $x_{эстр}$:

$$-R_C + qx_{эстр} = 0; \quad x_{эстр} = R_C/q = 60/50 = 1,2 \text{ м};$$

$$M_{эстр} = R_C x_{эстр} - qx_{эстр}^2/2 = 60 \times 1,2 - 50 \times 1,2^2/2 = 36 \text{ кНм}.$$

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_z (рис. 13, б).

7. Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоских рам

Рамами называются системы, состоящие из стержней, соединенных

жесткими узлами.

Вертикальные стержни рамы принято называть *стойками* горизонтальные - *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных в узле стержней, т.е. в узловой точке углы между их осями при деформации остаются неизменными.

Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому построение эпюры для рамы сводится к построению эпюр для каждого входящего в него стержня как для балки. Отличие в том, что в общем случае возникают еще и продольные усилия N .

Для N и Q сохраняются ранее принятые правила знаков: $N > 0$, если вызывает растяжение; $Q > 0$, если вектор силы вращает части рассеченной рамы по часовой стрелке.

Для изгибающих моментов специальных правил знаков не устанавливают, а при составлении выражений для M принимают по собственному усмотрению какой-либо момент положительным.

При построении эпюр N и Q положительные ординаты откладывают с внешней стороны контура, а отрицательные - внутри контура рамы.

Эпюры M для рам строят на сжатых волокнах. Если рама имеет две опоры, а не одну заделку, то прежде чем приступать к построению эпюр, нужно обычными методами статики найти опорные реакции.

Построим эпюры ВСФ для плоской рамы, изображенной на рис. 14, а.

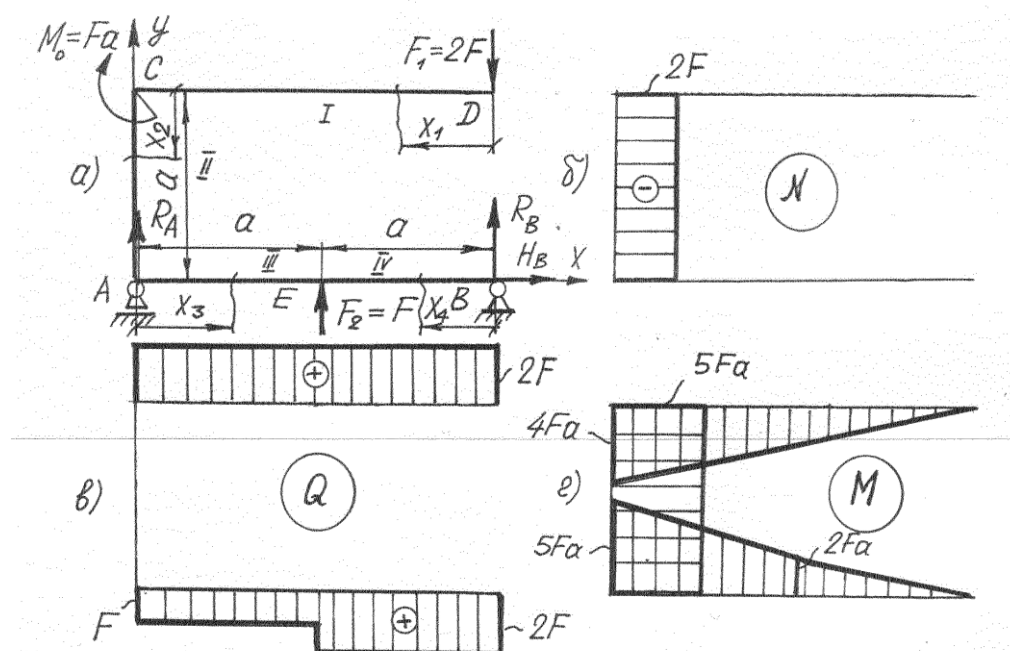


Рис. 14

Поскольку рама не консольная, то прежде всего определим опорные

реакции из уравнений равновесия:

$$\Sigma X = 0: H_B = 0; \quad \Sigma M_A = 0: R_B 2a - 2F 2a - Fa + Fa = 0;$$

$$R_B = 2F;$$

$$\Sigma M_B = 0: -R_A 2a - Fa - Fa = 0;$$

$$R_A = -F.$$

$$\text{Проверка. } \Sigma Y = 0: R_A + R_B + F - 2F = -F + 2F + F - 2F = 0.$$

Реакции вычислены верно.

Для построения эпюр N , Q , M разбиваем раму на 4 участка. Построение рациональней вести, двигаясь со свободного конца. Для построения эпюры N нужно спроецировать силы, приложенные к части рамы, лежащей по одну сторону от сечения, на ось стержня.

$$\text{1-й участок (DC): } N = 0; \quad \text{2-й участок (CA): } N = -2F;$$

$$\text{3-й участок (AE): } N = 0; \quad \text{4-й участок (EB): } N = 0.$$

По этим значениям строим эпюру N (рис. 14, б). При определении Q проецируем силы на ось перпендикулярную оси стержня.

$$\text{1-й участок: } Q = 2F; \quad \text{2-й участок: } Q = 0;$$

$$\text{3-й участок: } Q = 2F + R_A = 2F - F = F; \quad \text{4-й участок: } Q = 2F - F + F = 2F.$$

По этим значениям строим эпюру Q (рис. 14, в).

Для построения эпюры $M_{изг}$ вычислим значения моментов в характерных точках:

$$\text{в т. C (участок DC): } M = F_1 2a = 4Fa;$$

$$\text{в т. C (участок CA): } M = 4Fa + M = 5Fa;$$

$$\text{в т. A: } M = 5Fa;$$

$$\text{в т. E ((двигаемся слева): } M = 2Fa + Fa + R_A a = 2Fa.$$

Характерные ординаты соединяем прямыми линиями, так как ни на одном из участков не приложена распределенная нагрузка, получим эпюру $M_{изг}$ (рис. 14, г). В узлах рамы при переходе от участка к участку момент не изменяется по величине, если здесь не приложен сосредоточенный момент (см. узел A и C). В узле A моменты со стороны участков EA и CA равны между собой, а в узле C - различаются на величину приложенного здесь сосредоточенного момента $M_o = Fa$.

8. Построение эпюр ВСФ для ломаного пространственного бруса

В пространственном ломаном брус в общем случае нагружения возникают все шесть ВСФ: N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z . Особенностью является выбор системы координат для каждого участка так, чтобы ось x всегда была направлена вдоль продольной оси бруса, соответственно располагая оси y и z .

При разбиении на участки за их границы выбираются не только сечения, где изменяется характер нагружения, но и сечения перелома осей (узлы).

Правила знаков для N и $M_{кр}$ остаются теми же и располагать эпюры N и $M_{кр}$ можно в любой плоскости, указывая в поле эпюры знак.

Поперечные силы Q_y и Q_z считаются положительными, если вызываются внешними силами направленными вдоль положительных направлений соответствующих осей. Эпюры строятся на одних и тех же осях в направлении действия сил. Знак не указывается.

При записи выражений для изгибающих моментов M_y и M_z правило знаков может быть выбрано произвольным, но эпюры располагаются только на сжатых волокнах в соответствующих плоскостях. Знак не указывается.

Рассмотрим пример построения эпюр для расчетной схемы, показанной на рис. 15, а. Длины всех участков одинаковы и равны a .

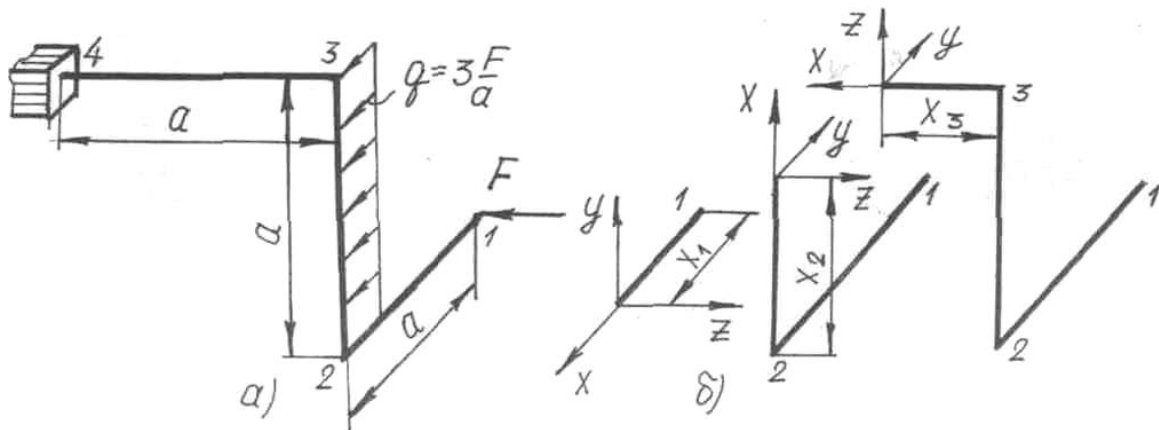


Рис. 15

Брус разбиваем на три участка 1-2, 2-3, 3-4. Системы координат для каждого участка показаны на рис. 15, б. Записываем выражения для ВСФ в текущем сечении каждого участка из условия равновесия отсеченной части, двигаясь со свободного конца.

Участок 1-2: $0 \leq x_1 \leq a$:

$$N_1 = 0; Q_{y1} = 0; Q_{z1} = -F; M_{кр1} = 0; M_{y1} = F x_1; M_{z1} = 0.$$

При $x_1 = 0$: $M_{y1} = 0$; при $x_1 = a$: $M_{y1} = Fa$.

Участок 2-3: $0 \leq x_2 \leq a$:

$$N_2 = 0; Q_{y2} = -qx_2; Q_{z2} = -F; M_{кр2} = Fa; M_{y2} = F x_2; M_{z2} = qx_2^2/2.$$

При $x_2 = 0$: $Q_{y2} = 0$; $M_{y2} = 0$; $M_{z2} = 0$; при $x_2 = a$: $M_{y2} = Fa$; $M_{z2} = qa^2/2 = 3Fa/2$; $Q_{y2} = -qa = -3F$.

Участок 3-4: $0 \leq x_3 \leq a$:

$$N_3 = -F; Q_{y3} = -qa = -3F; Q_{z3} = 0; M_{кр3} = qa^2/2 = 3Fa/2; M_{y3} = Fa; M_{z3} = Fa - qax_3.$$

При $x_3 = 0$: $M_{z3} = Fa$; при $x_3 = a$: $M_{z3} = Fa - qa^2 = Fa - 3Fa = -2Fa$.

По полученным значениям строим эпюры (рис. 16).

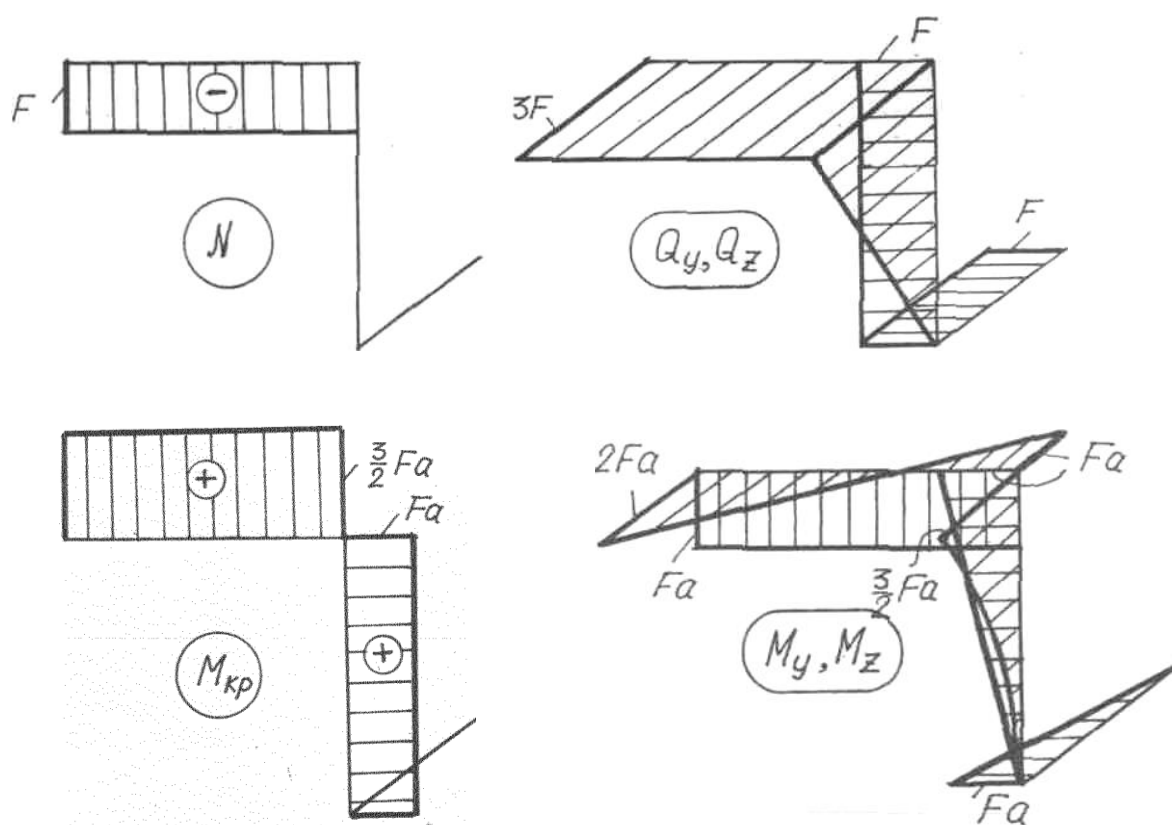


Рис. 16

9. Задания и варианты к расчётно-проектировочной работе

Задание включает 8 задач. Конкретное количество задач определяется преподавателем в зависимости от направления бакалавриата и формы обучения студентов.

Номер рисунка расчётной схемы выбирается по последней цифре зачётной книжки студента, численные данные выбираются из таблиц, номер строки в таблице по номеру предпоследней цифры зачётной книжки.

Задача 1

Для стержня, нагруженного продольной нагрузкой (рис. 17), построить эпюру продольных усилий (N). Числовые данные приведены в табл. 1, расчётная схема - на рис 17. Размер $a = 1\text{ м}$.

Задача 2

Для вала, нагруженного крутящими моментами (рис. 18), построить эпюру крутящих моментов ($M_{кр}$). Числовые данные приведены в табл. 2, расчетная схема - на рис. 18.

Задачи 3, 4, 5, 6

Для балок (рис. 19 а, б, в, е) построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов ($M_{изг}$). Числовые данные приведены в табл. 3, расчётные схемы - на рис. 19.

Задача 7

Для плоской рамы (рис. 19, г) построить эпюры N , Q , $M_{изг}$. Выбор исходных данных производится так же, как и в задачах 3, 4, 5, 6.

Задача 8

Для пространственного ломаного бруса (рис. 19, д) построить эпюры всех шести ВСФ. Длины всех участков принять равными, $a = 1$. Выбор исходных данных - так же, как и в задачах 3, 4, 5, 6, 7.

Таблица 1

Числовые данные к рис. 17

Номер варианта	Силы, кН						Интенсивность распределённой нагрузки, кН/м		
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	q_1	q_2	q_3
1	60	-	180	-	160	-	100	-	-
2	-	120	-	60	-	120	-	100	-
3	80	-	120	-	140	-	-	-	100
4	100	-	-	80	120	-	80	-	-
5	-	100	-	60	160	-	-	80	-
6	120	-	60	-	100	-	-	-	80
7	100	-	60	-	-	80	60	-	-
8	-	80	60	-	-	100	-	60	-
9	-	120	80	-	120	-	-	-	60
0	140	-	60	-	-	80	120	-	-

Таблица 2

Числовые данные к рис. 18

Номер варианта	Момент, кНм				Длина участка, м		
	Te_1	Te_2	Te_3	Te_4	a	b	c
1	28	14	23	6	1,0	0,8	1,7
2	5	22	10	26	1,3	1,0	1,4
3	10	20	10	20	1,1	1,8	1,0
4	7	24	11	12	1,2	1,3	1,1
5	10	10	6	16	0,9	0,8	1,5
6	12	13	6	10	1,5	1,3	0,8
7	10	15	6	8	1,6	1,0	0,9
8	16	8	6	10	1,1	0,6	1,7
9	14	12	8	12	1,0	1,8	0,6
0	9	16	6	18	1,2	1,8	0,5

Числовые данные к рис. 19

Номер варианта	Размеры, м			Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	b	c	q , кН/м	F , кН	M , кНм	q	F	M
1	2	2	1,8	12	10	24	3	1	1
2	2	1,6	2	6	20	12	1	1	3
3	2	1,6	2,4	14	12	30	1	4	2
4	2,4	2,0	2,0	12	16	24	2	4	1
5	1,6	2,0	2,0	8	18	16	2	1	1
6	2	2,4	2	12	16	24	1	4	4
7	2	2	1,6	14	10	8	3	1	3
8	2	1,5	1,5	8	16	10	3	1	4
9	2,5	1,2	2	12	12	20	4	3	1
0	1,4	2	1,6	10	24	10	2	1	3

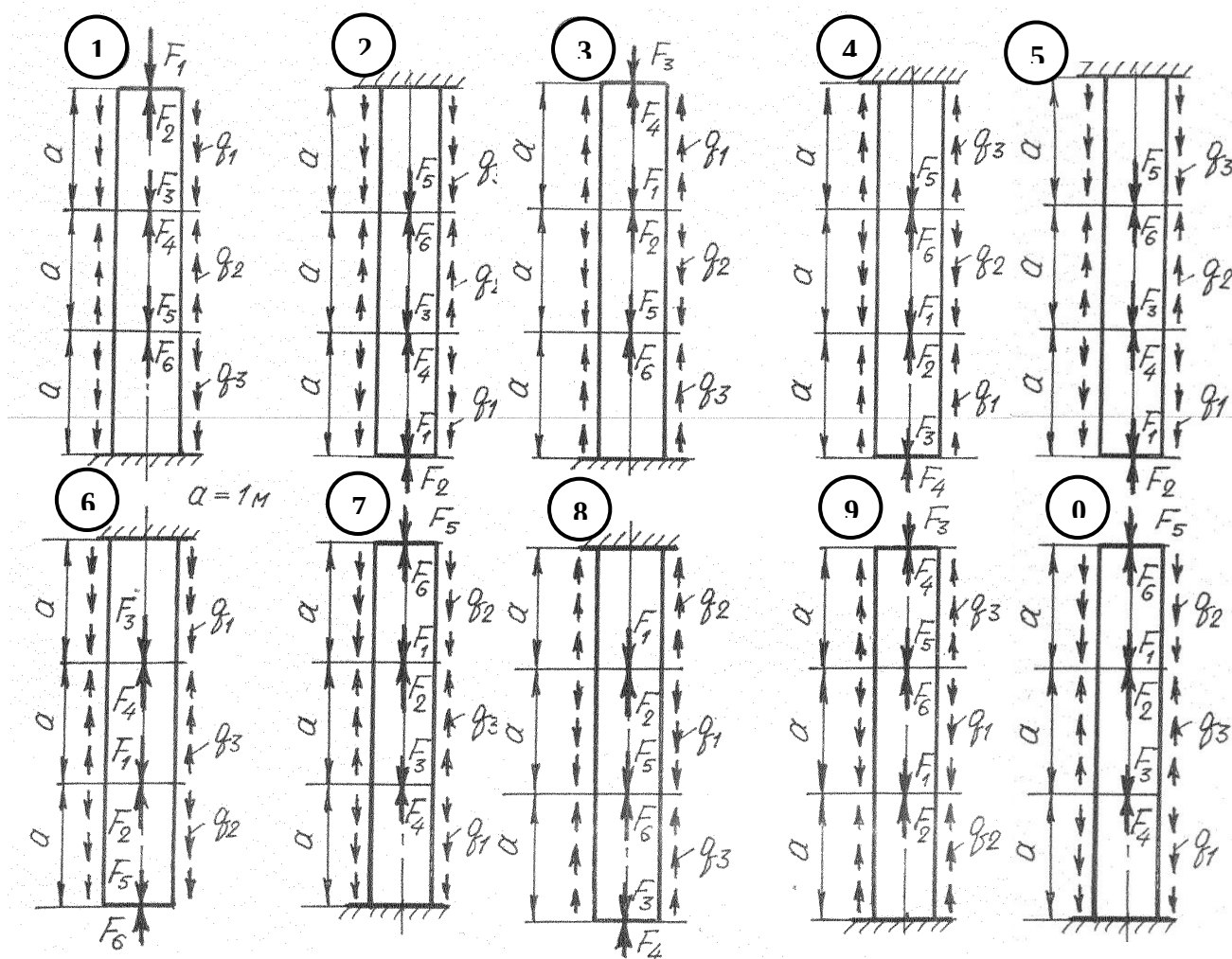


Рис. 17

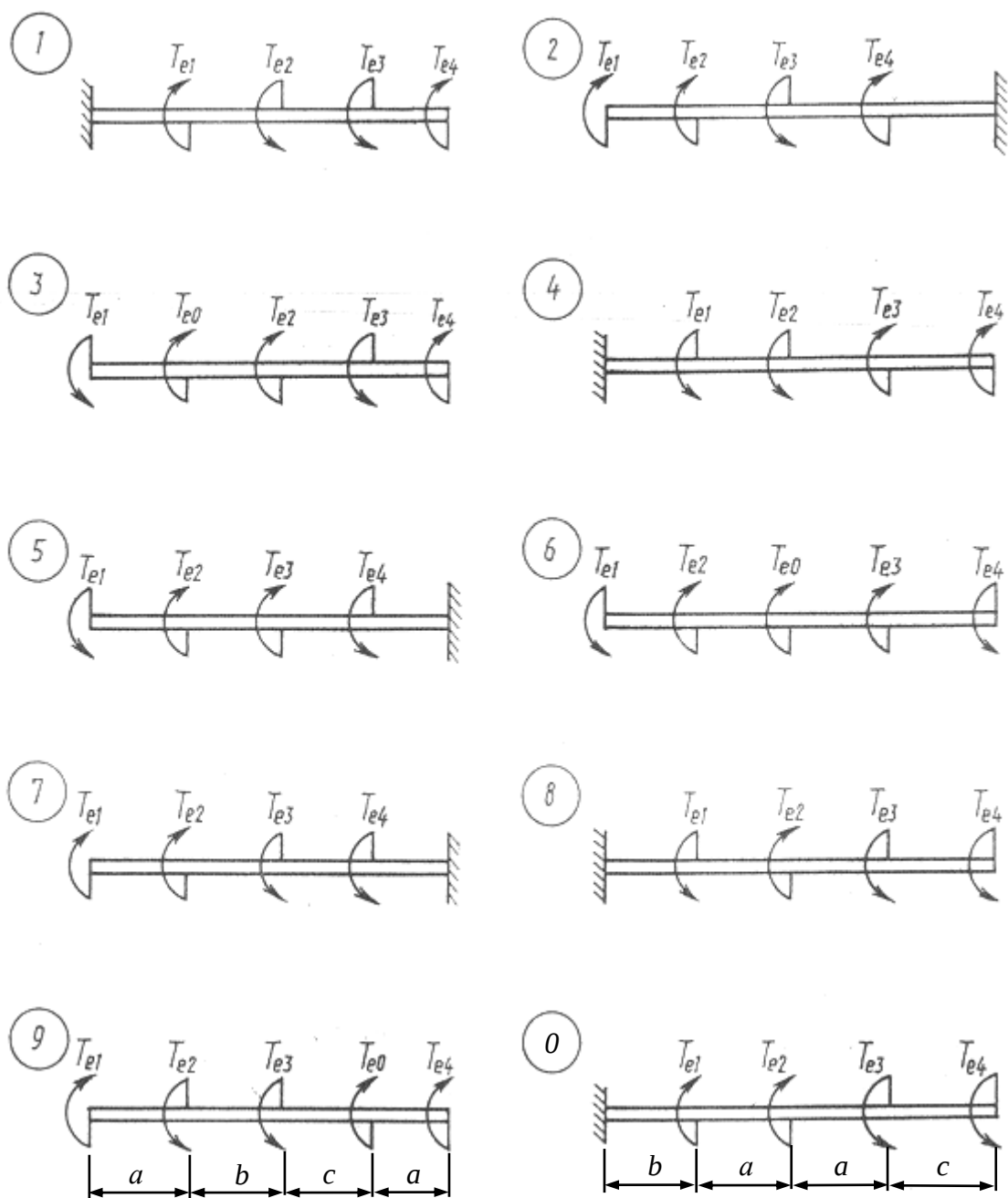
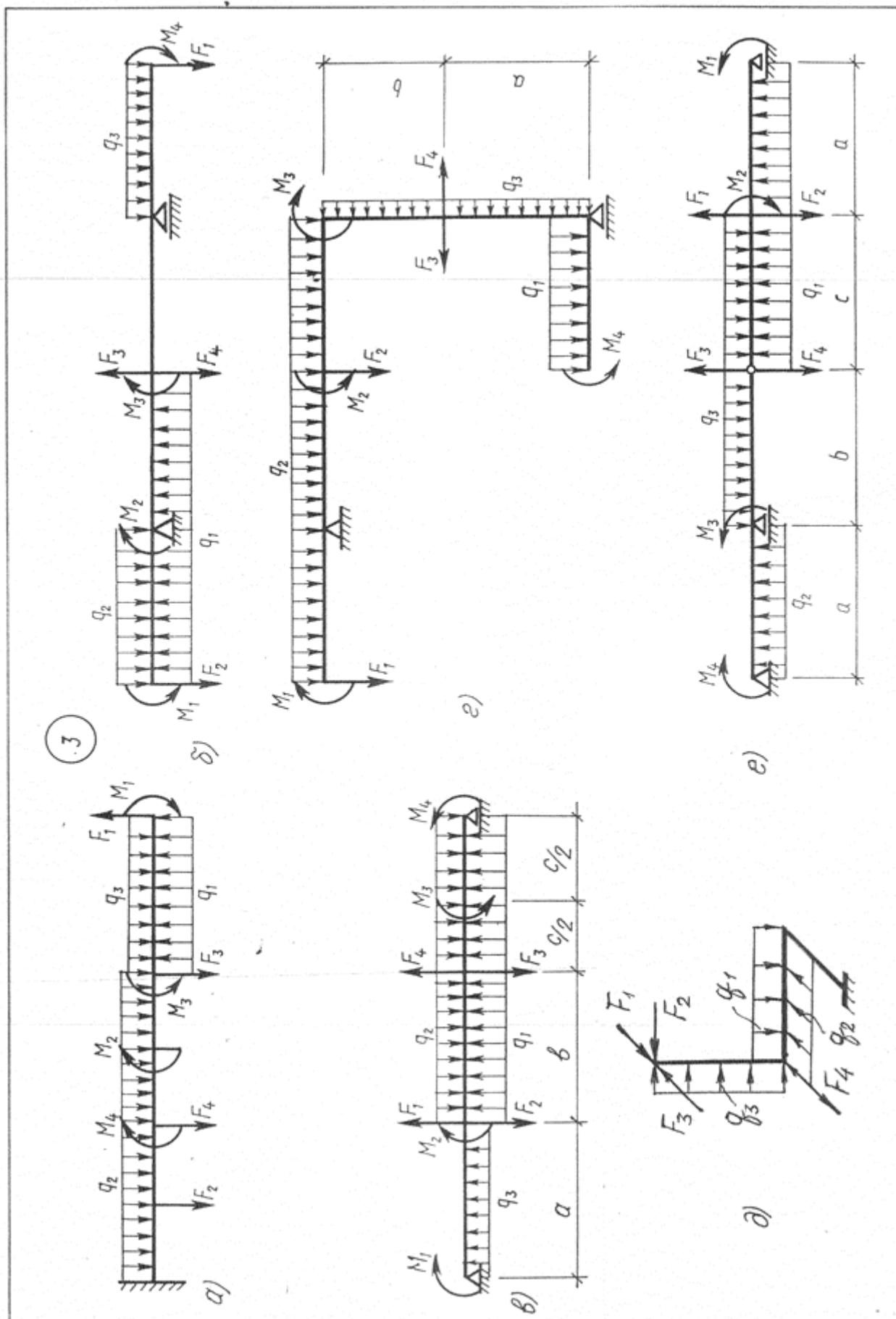
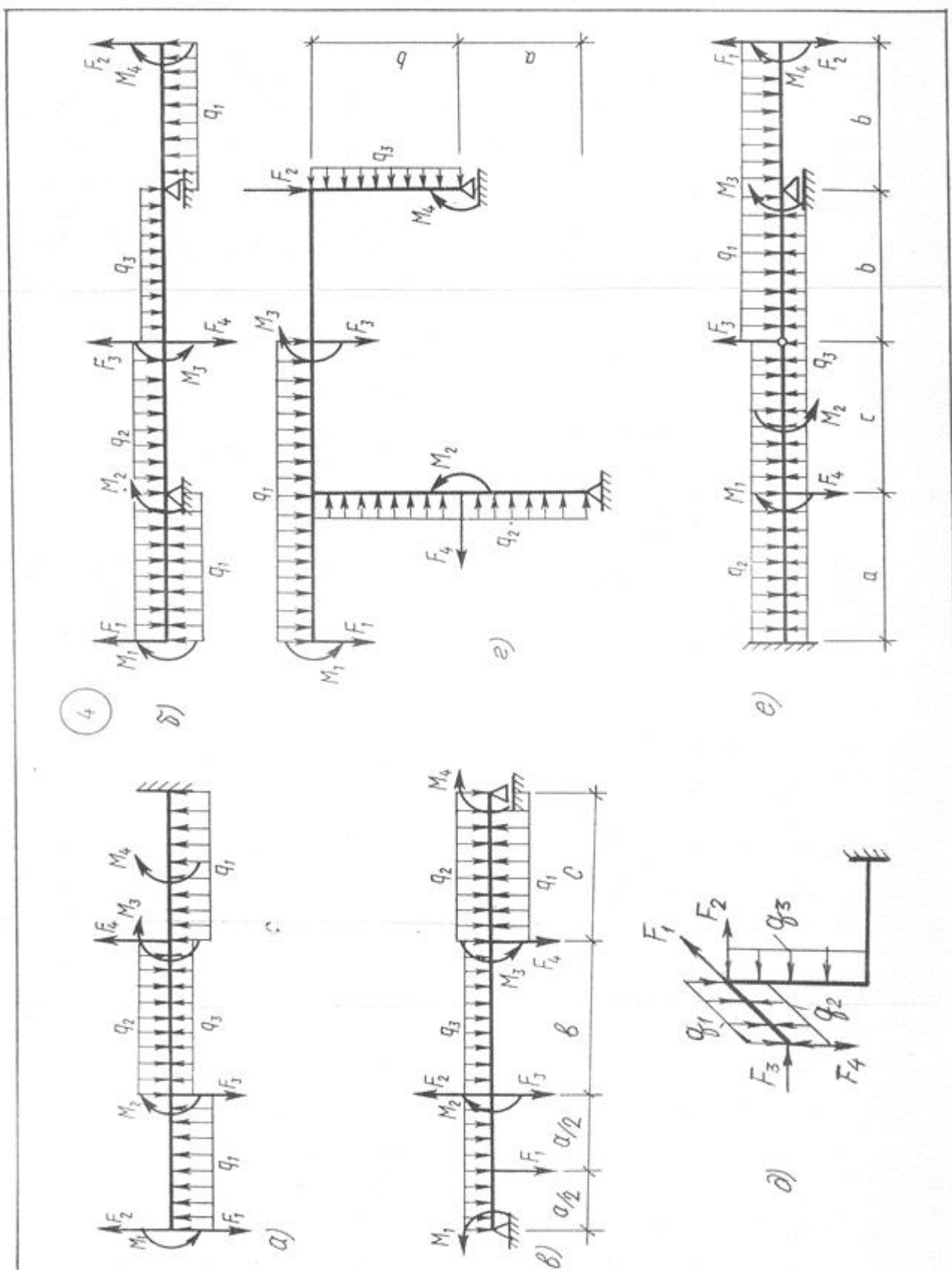


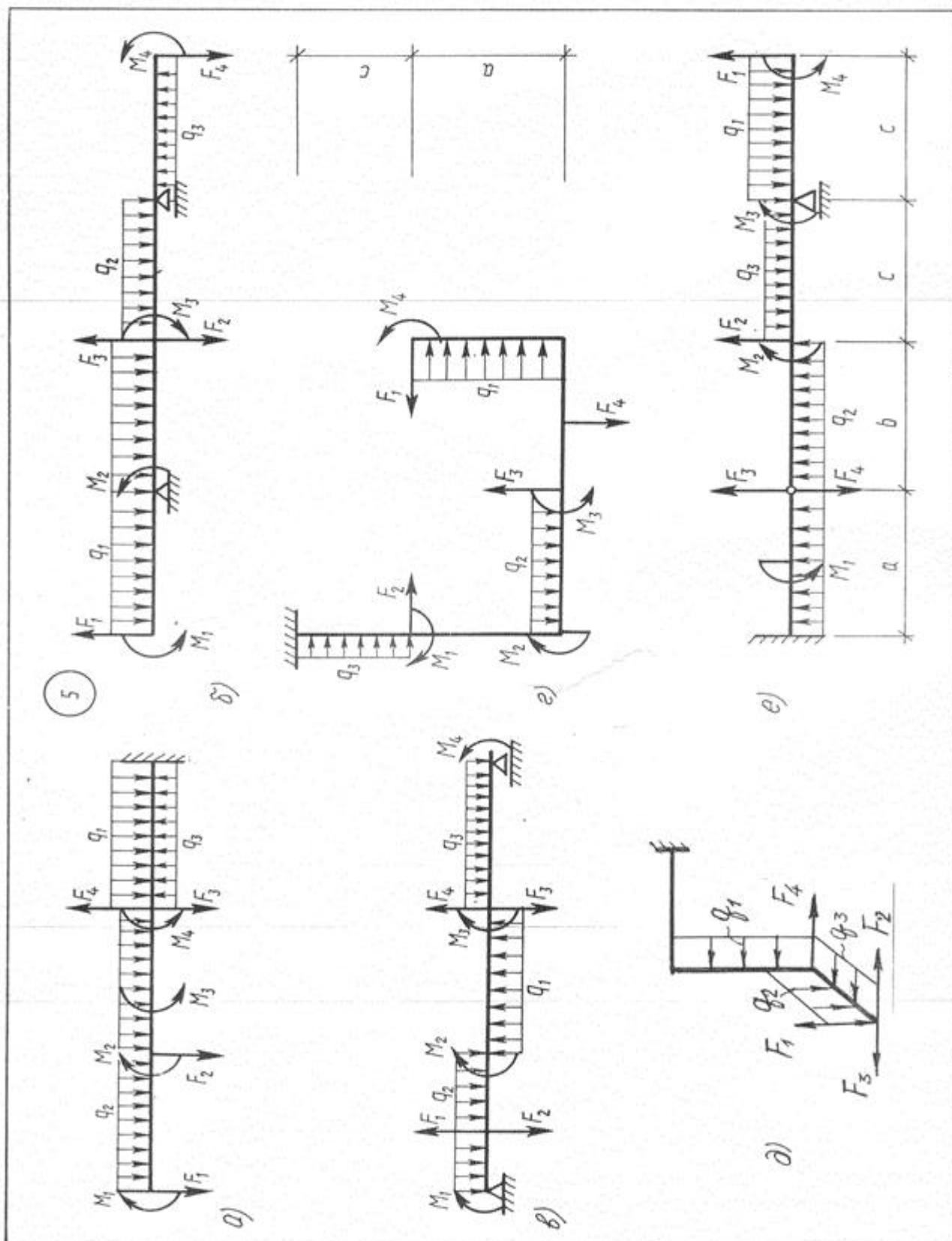
Рис. 18



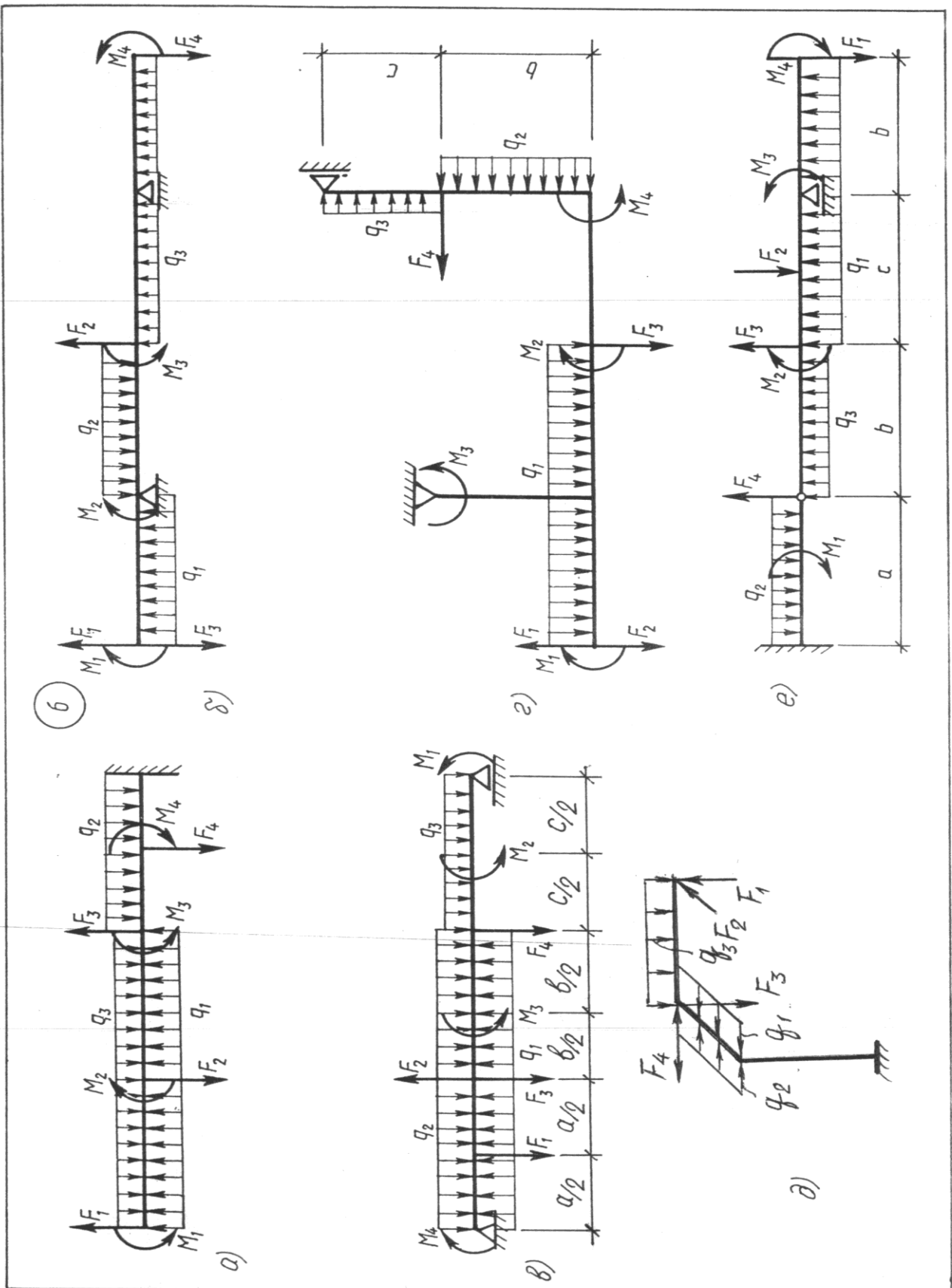
Продолжение рис. 19



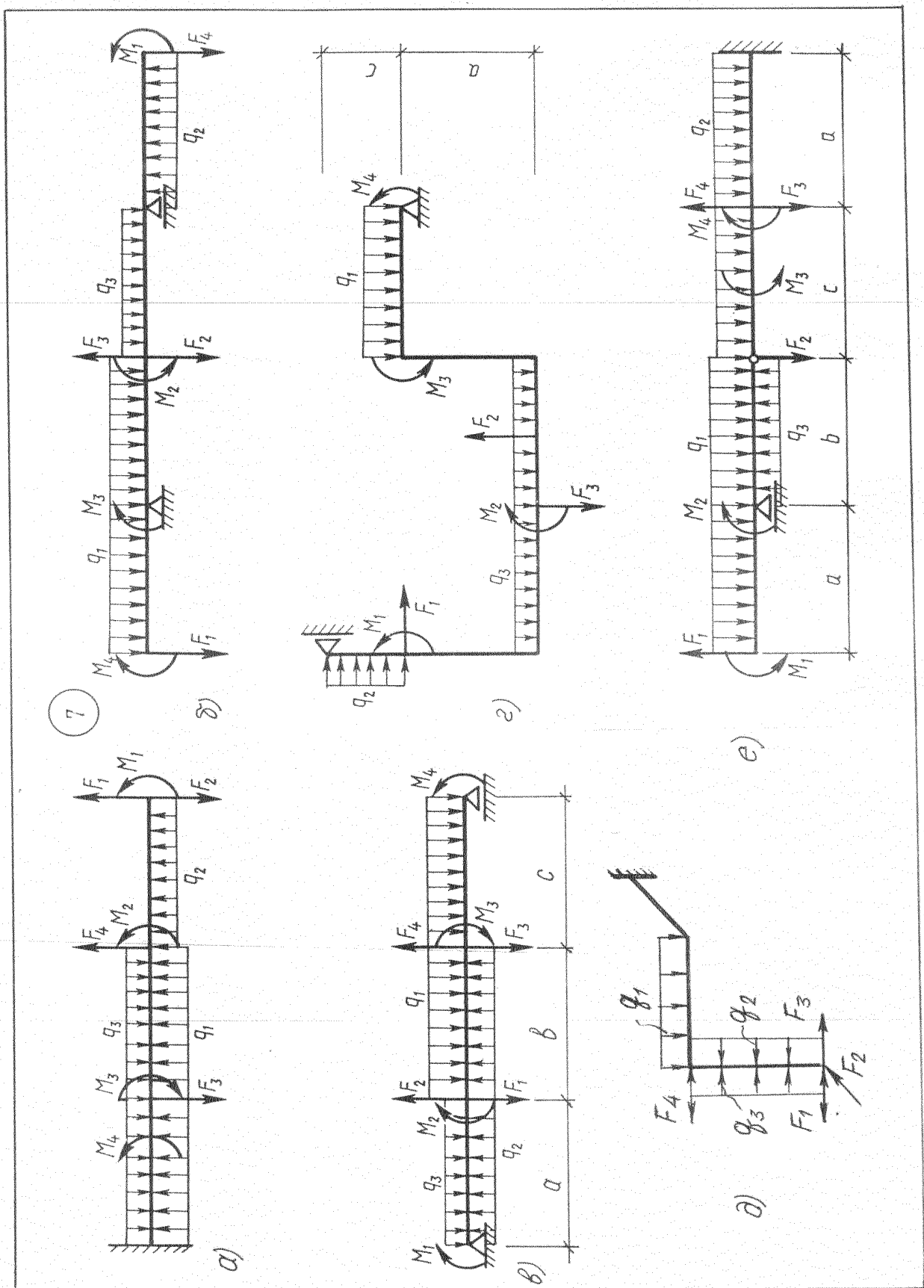
Продолжение рис. 19



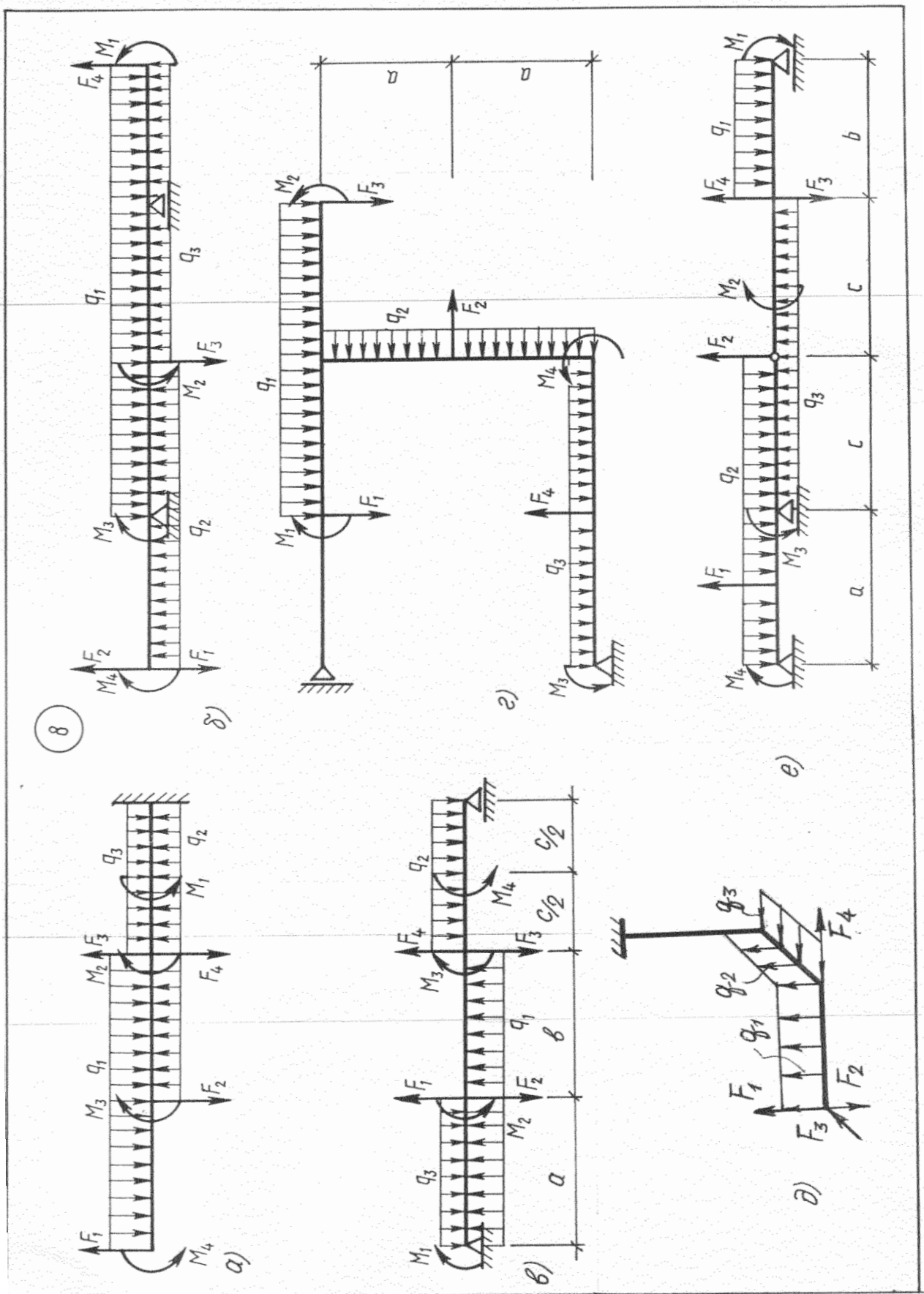
Продолжение рис. 19



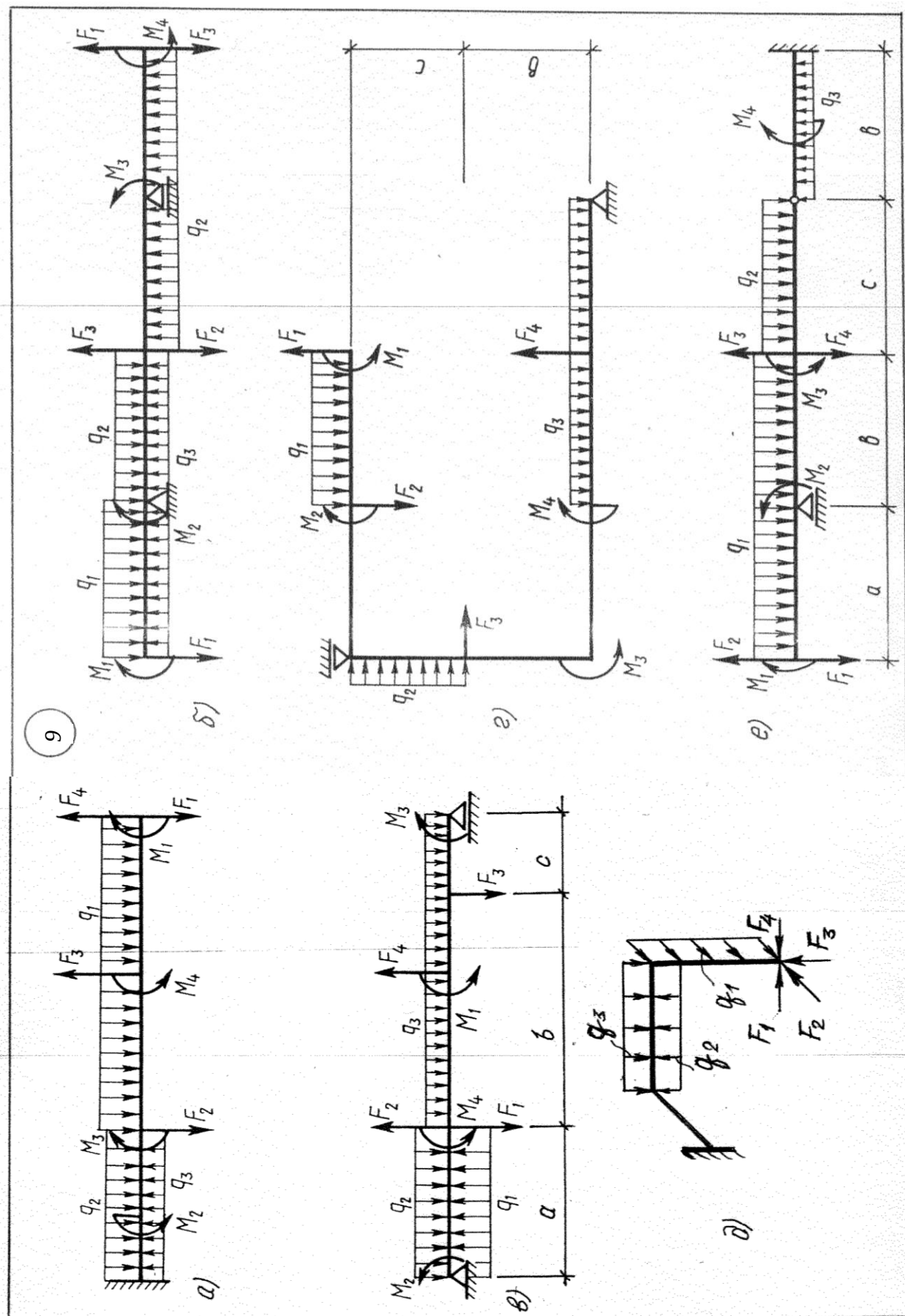
Продолжение рис. 19



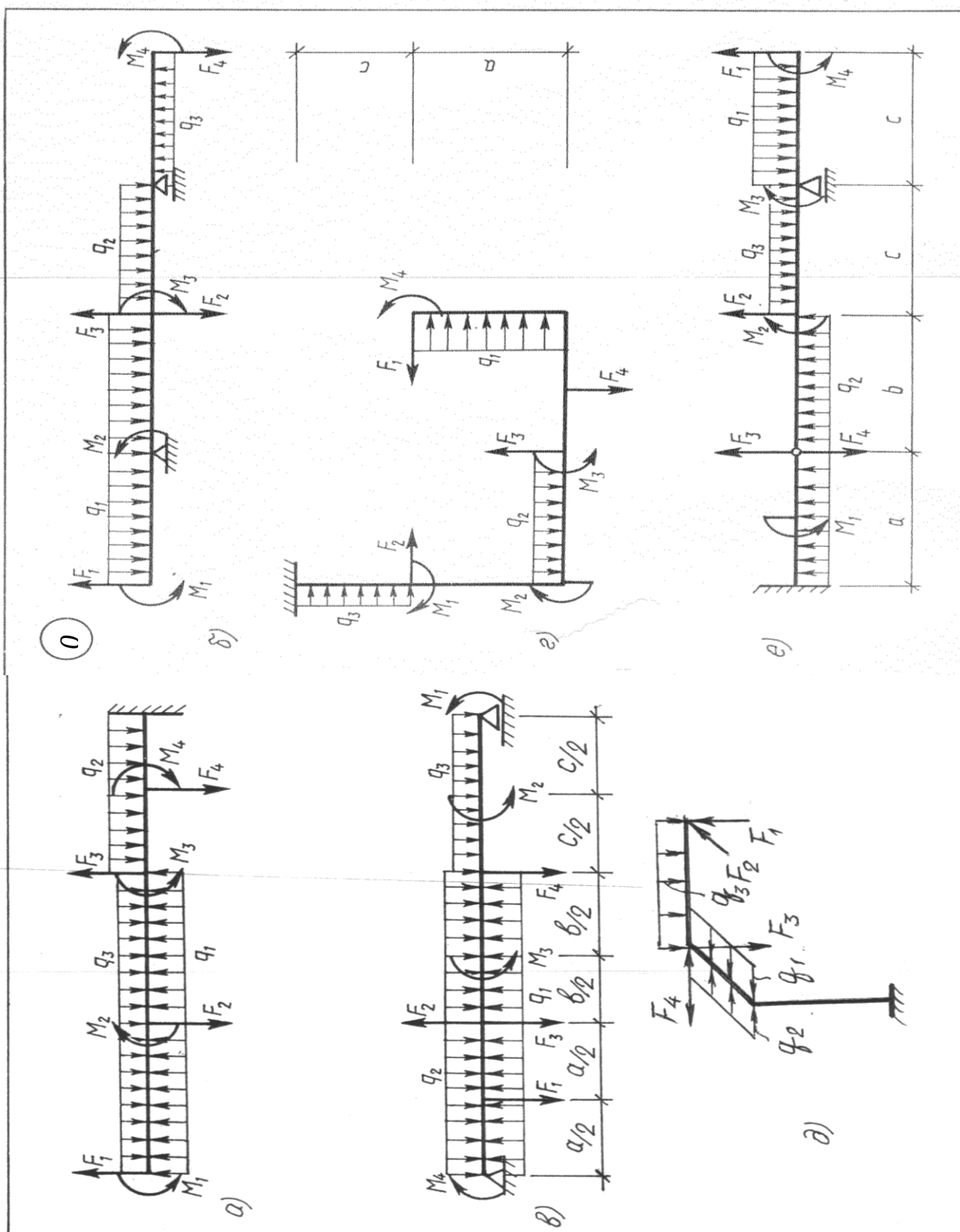
Продолжение рис. 19



Продолжение рис. 19



Продолжение рис. 19



Продолжение рис. 19

10. Общие методические указания к оформлению работ

Перед выполнением работы следует подробно изучить теоретический материал, приведённый в разделе 1, примеры расчётов, теоретический материал и примеры в рекомендуемой литературе [1 – 11]. Если вы хорошо владеете теоретическим материалом и легко справляетесь с решением задач, приступайте к выполнению расчетно-проектировочной работы.

Расчётно-проектировочная работа выполняется на одной стороне листов белой бумаги формата А4 (210х297) по ГОСТ 2.301. Основная надпись на листах выполняется по форме 2а (кроме титульного листа – форма 2) ГОСТ 2.104. Для студентов заочной формы обучения допускается выполнение задач контрольных работ в тетрадях.

Оформление может быть рукописным или с применением печатающих и графических устройств вывода ЭВМ.

Выполняемая расчётно-проектировочная работа проверяется преподавателем, после чего проводится его защита. На защите студент должен показать знания теории и практические навыки решения задач по рассматриваемой теме. Расчётно-проектировочная работа оценивается в баллах в соответствии с утвержденной методикой рейтингового контроля знаний студентов по дисциплине.

11. Рекомендуемая литература

1. Кочетов, В.Т. Сопротивление материалов 3-е изд., перераб. и доп. / В.Т. Кочетов, М.В. Кочетов, А.Д. Павленко. - Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. - 544 с.
2. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов 3-е изд., перераб. и доп. под ред. Минина Л.С. - Москва: Высшая школа, 2001. - 592 с.
3. Костенко Н.А., Балясникова С.В., Волошановская Ю.Э. и др. Сопротивление материалов Учебное пособие. 3-е изд., перераб. и доп. под ред. Костенко Н.А. - Москва: Высшая школа, 2007. - 488 с.: ил.
4. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н., Слепов А.А. Сопротивление материалов. под ред. Межецкого Г.Д., Загребина Г.Г. - Москва: "Дашков и Ко", 2008. - 416 с.
5. Алмаметов Ф.З, Арсеньев С.И., Курицын Н.А., Мишин А.М. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов. Учебное пособие 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2005. - 368 с.
6. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: Учебное пособие 2-е изд., испр. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 544 с.

7. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. 2-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 2005. - 351 с.
8. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач/Миролюбов И.Н., Алмаметов Ф.З., Курицин Н.А., Изотов И.Н. 8-е изд.- Москва: Лань, 2009. - 512 с. (ЭБС издательства "Лань" контракт №28/16-07)
9. Сопротивление материалов/Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. 2-е изд.- Москва: Лань, 2007. - 560 с. (ЭБС издательства "Лань" контракт №28/16-07)
10. Сопротивление материалов : учеб.пособие Ч. 1 / В. П. Багмутов [и др.] ; ВолгГТУ. - Волгоград : РПК "Политехник", 2007. - 128 с.
11. Костин В.Е. Курс лекций по прикладной механике (часть 2, сопротивление материалов). Учебное пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2005 г.- 65 с.