



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины
и наземный транспорт»

КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО КУРСУ «МЕХАНИКА»**

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело

13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника

20.03.02 Природообустройство и водопользование

Астрахань 2024

УДК 539.3

Хахов А.А.

Кручение вала круглого сечения. Методические указания и контрольные задания по курсу «Механика». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 12с.

В пособии представлены методики расчета вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость.

Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»

Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2024

© Астраханский государственный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие сведения.....	4
2. Пример расчета вала круглого сечения на кручение.....	7
3. Контрольные задания.....	10
4. Список литературы.....	12

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Кручением называют такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – крутящий момент. Брус, работающей на кручение называется валом. При кручении вала его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг оси бруса.

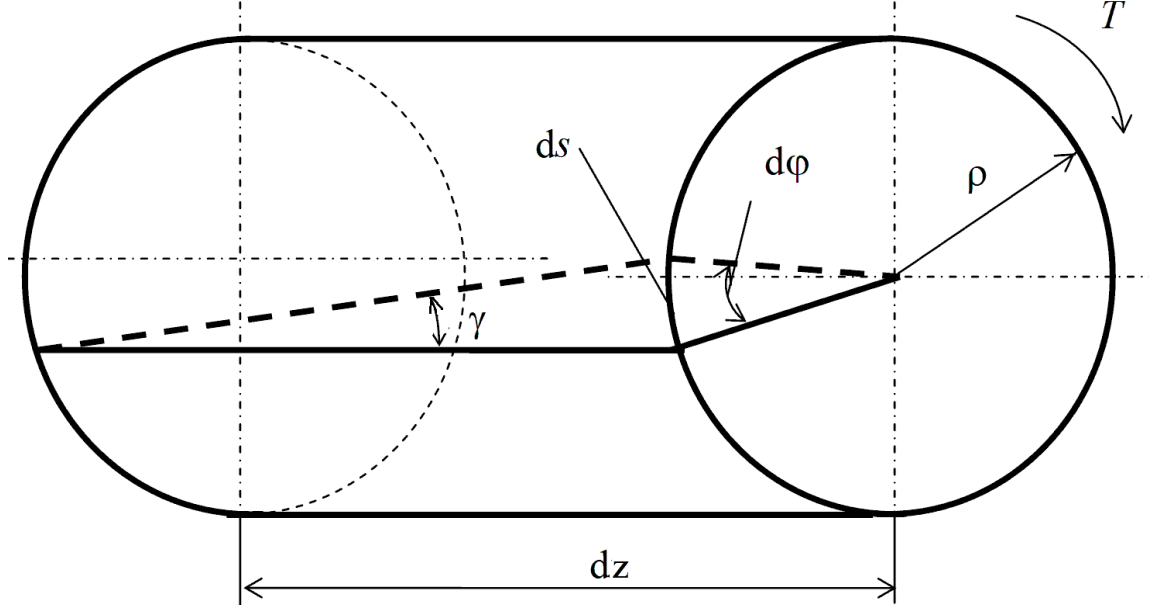


Рис. 1.1. Деформированное состояние вала длиной dz

Под действием внешнего скручивающего момента, приложенного на правом конце бруса, левый конец которого жестко закреплен, брус будет закручиваться. Выделим из бруса элементарный цилиндр длиной dz (рис. 1.1). Будем считать, что левое сечение бруса жестко закреплено. Под действием крутящего момента T правое сечение повернется на некоторый угол $d\varphi$.

Из рис. 1.1 видно, что $ds = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi$, откуда получаем

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho.$$

Из данной зависимости видно, что угол сдвига γ изменяется по радиусу вала по линейному закону.

Деформация бруса при кручении характеризуется относительным углом закручивания

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Согласно закону Гука при сдвиге

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Откуда получаем:

$$\tau = \frac{d\varphi}{dz} G \rho = \theta G \rho.$$

Из данной зависимости видно, что касательные напряжения изменяются по радиусу по линейному закону.

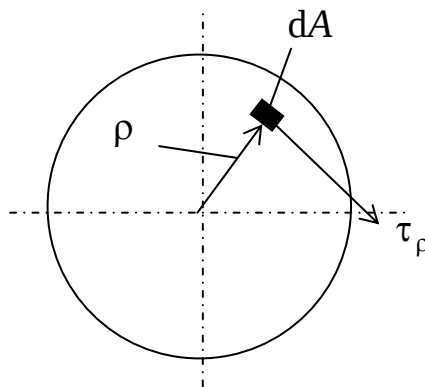


Рис. 1.2. Поперечное сечение вала

При кручении все внутренние силы, распределенные по поперечному сечению, приводятся к одной составляющей - к крутящему моменту. Касательные напряжения перпендикулярны радиусам, проведенные через точки их действия (рис. 1.2). Крутящий момент T в сечении бруса определяется по уравнению

$$T = \int_A \rho \tau_\rho dA,$$

где ρ – плечо элементарной силы.

Подставляя значение касательного ускорения, получим

$$T = \int_A \theta G \rho^2 dA = \theta G I_\rho = \frac{d\varphi}{dz} G I_\rho,$$

где I_ρ - полярный момент инерции круглого сечения.

Элементарный угол закручивания

$$d\varphi = \frac{T dz}{G I_\rho},$$

а полный угол закручивания бруса

$$\varphi = \frac{T l}{G I_\rho},$$

где l – длина вала.

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса будет определяться по зависимости:

$$\tau_{\max} = \theta G \rho_{\max} = \frac{T}{I_\rho} \rho_{\max} = \frac{T}{\frac{I_\rho}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_\rho},$$

где W_ρ - полярный момент сопротивления.

Таким образом, максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau = \frac{T}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Условие жесткости при кручении

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\rho}} \leq [\varphi],$$

где $[\varphi]$ - допускаемый угол закручивания, рад.

Для бруса круглого сечения эти условия имеют вид

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau];$$

$$\varphi = \frac{32Tl}{G\pi d^4} \leq [\varphi].$$

Крутящий момент в сечении бруса определяется методом сечений. По модулю он численно сечения равен алгебраической сумме внешних моментов слева или справа от сечения.

Брус разбивается на участки и на каждом участке проводится сечение (рис. 1.3).

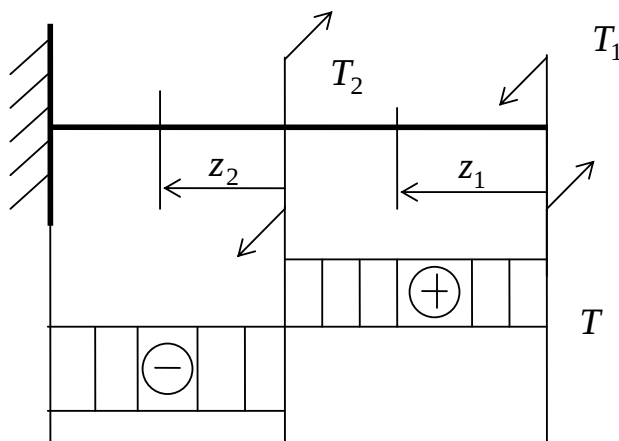


Рис. 1.3. Расчетная схема вала и эпюры крутящих моментов

В каждом сечении определяется крутящий момент, а затем строится эпюра крутящих моментов. Для случая, изображенного на рис. 1.3, крутящие моменты в сечениях 1 и 2 будут равны

$$T_{z1} = T_1;$$

$$T_{z2} = T_1 - T_2.$$

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ВАЛА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ НА КРУЧЕНИЕ

Стальной вал круглого сплошного поперечного сечения (рис. 2.1) нагружен внешними крутящими моментами в соответствии с заданной схемой. Требуется построить эпюру внутренних крутящих моментов и из условия прочности определить диаметр вала. Полученный из расчета диаметр вала округлить до ближайшего целого числа в мм. Для принятого диаметра вала построить эпюру углов закручивания поперечных сечений относительно крайнего левого сечения. Определить также наибольший угол закручивания. Допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 70 \text{ МПа}$.

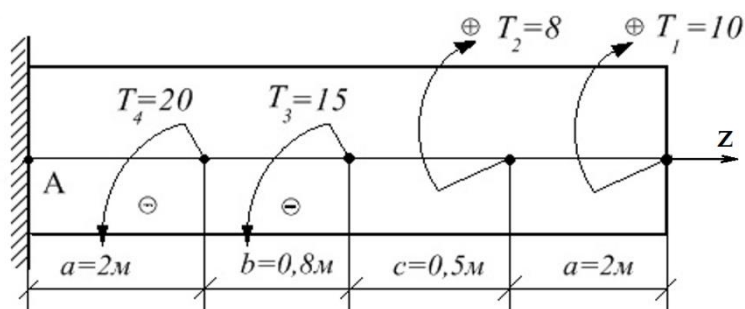


Рис. 2.1. Вал круглого сплошного сечения

Решение

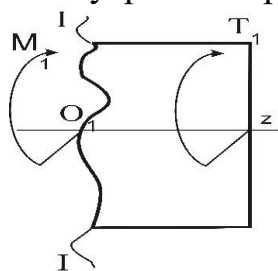
Определяем реактивный момента в жесткой заделке в т. А (рис. 2.1):

$$\sum M(A) = 0$$

$$M_A - T_4 - T_3 + T_2 + T_1 = 0$$

$$M_A = T_4 + T_3 - T_2 - T_1 = 20 + 15 - 8 - 10 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Определяем внутренние крутящие моменты в сечениях стержня:

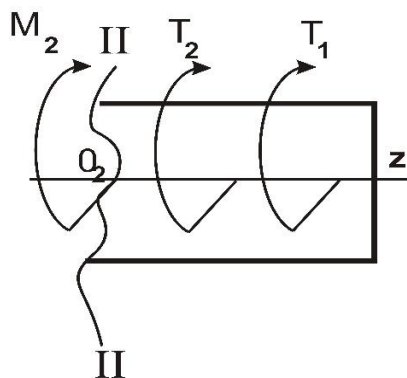


сечение I-I

$$\sum M(O_1) = 0$$

$$T_1 + M_1 = 0$$

$$M_1 = -T_1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

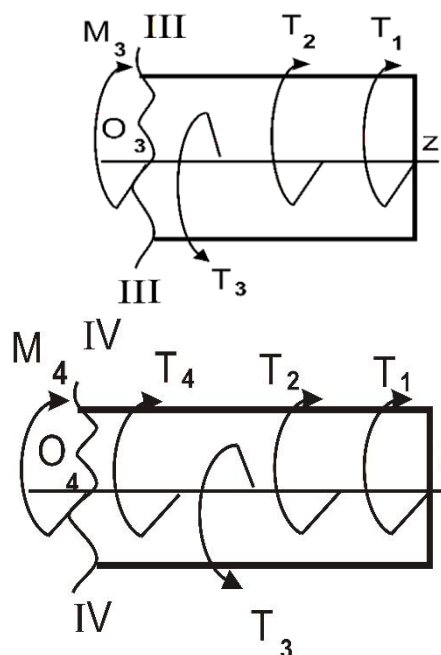


сечение II-II

$$\sum M(O_2) = 0$$

$$M_2 + T_2 + T_1 = 0$$

$$M_2 = -T_1 - T_2 = -8 - 10 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



сечение III-III

$$\sum M(O_3) = 0$$

$$M_3 - T_3 + T_2 + T_1 = 0$$

$$M_3 = T_3 - T_2 - T_1 = 15 - 8 - 10 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

сечение IV-IV

$$\sum M(O_4) = 0$$

$$M_4 - T_4 - T_3 + T_2 + T_1 = 0$$

$$M_4 = T_4 + T_3 - T_2 - T_1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По найденным значениям, строим эпюру внутренних крутящих моментов (см. рис. 2.2), по которой определяем максимальный внутренний крутящий момент $|M_{\max}| = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}$

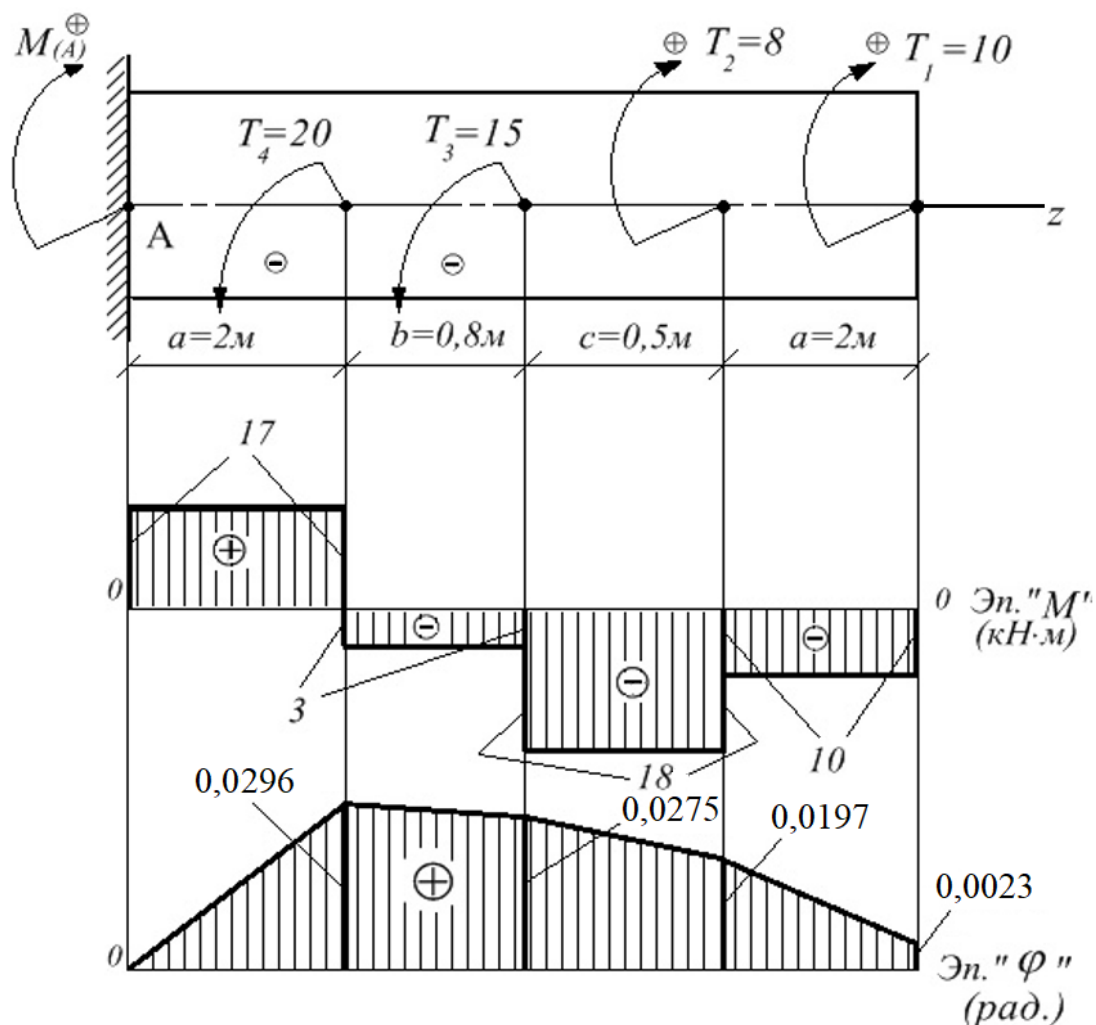


Рис. 2.2. Расчетная схема вала и эпюры крутящих моментов и углов закручивания

Определяем диаметр вала из условия прочности при кручении:

$$\tau_{расч} = \frac{|M_{max}|}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Откуда

$$W_{\rho} = \frac{|M_{max}|}{[\tau]} = \frac{18 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 0,000257 = 2,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 W_{\rho}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,57 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,1094 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 110 \text{ мм}$

Определяем углы закручивания сечений вала:

$$\varphi_i = \frac{M_i \cdot l}{G \cdot I_{\rho}}.$$

Для сплошного круглого сечения диаметром d полярный момент инерции

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,11^4}{32} = 1,437 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Тогда углы закручивания относительно жесткой заделки

$$\varphi_1 = \frac{M_4 \cdot a}{G \cdot I_{\rho}} = \frac{17 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,437 \cdot 10^{-5}} = 0,0296 \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_3 \cdot b}{G \cdot I_{\rho}} = 0,0296 + \frac{(-3) \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,437 \cdot 10^{-5}} = 0,0275 \text{ рад}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_2 \cdot c}{G \cdot I_{\rho}} = 0,0275 + \frac{(-18) \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,437 \cdot 10^{-5}} = 0,0197 \text{ рад}$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_{\rho}} = 0,0197 + \frac{(-10) \cdot 10^3 \cdot 2}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,437 \cdot 10^{-5}} = 0,0023 \text{ рад}$$

Максимальный угол закручивания:

$$\varphi_{\max} = \varphi_1 \frac{180^\circ}{\pi} = 0,0296 \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,7^\circ$$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Стальной вал круглого сплошного поперечного сечения нагружен внешними крутящими моментами (табл. 3.1) в соответствии с заданной схемой (рис. 3.1). Требуется построить эпюру внутренних крутящих моментов и из условия прочности определить диаметр вала. Полученный из расчета диаметр вала округлить до ближайшего целого числа в мм. Для принятого диаметра вала построить эпюру углов закручивания поперечных сечений относительно крайнего левого сечения. Определить также наибольший угол закручивания.

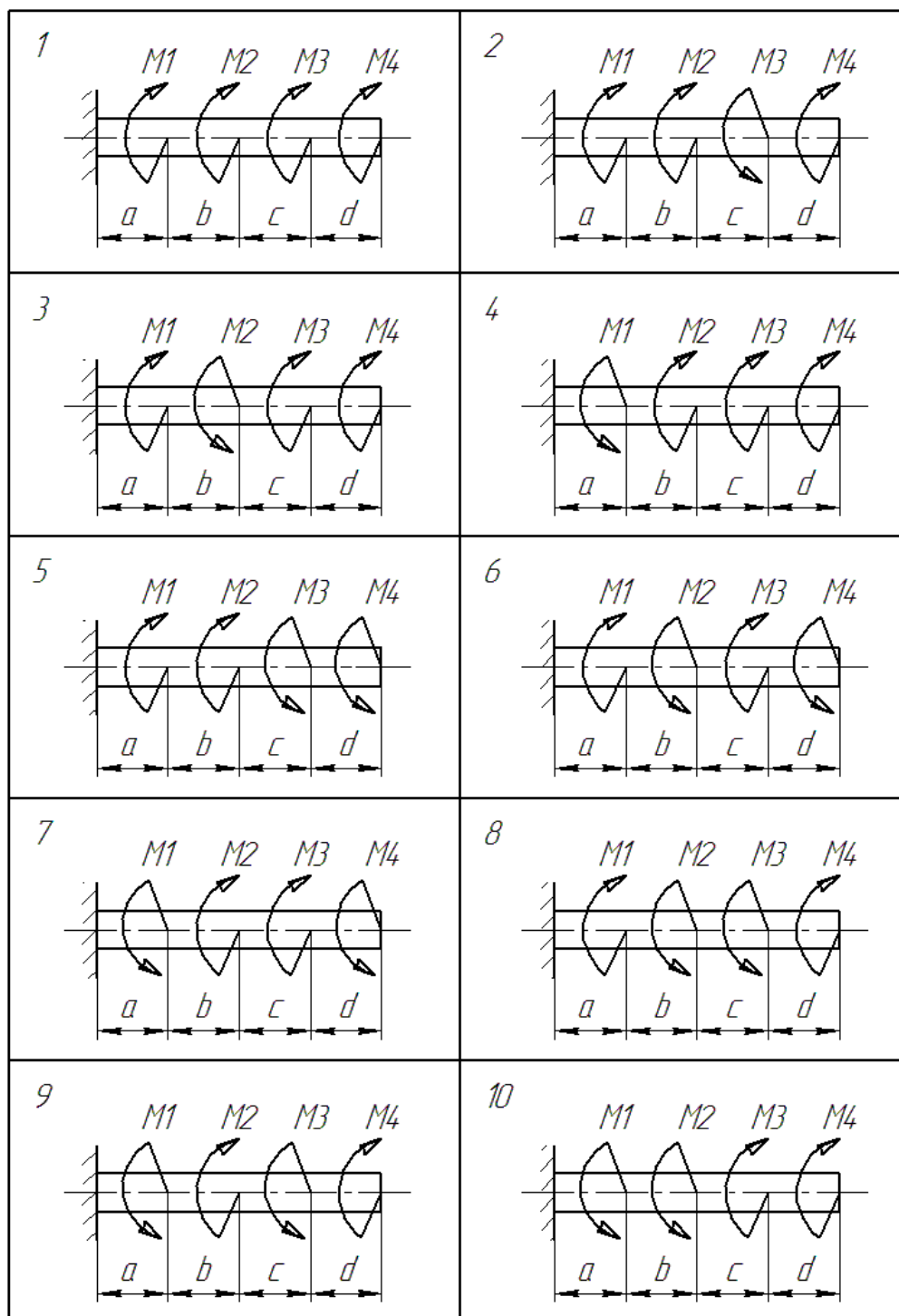


Рис. 3.1. Схемы валов

Таблица 3.1. Исходные данные

Вариант	Длины участков, м			Внешние крутящие моменты, кН·м				Допускаемое касательное напряжение, $[\tau]$, МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	M_4	
1	1,1	1,3	0,8	1,3	1,5	1,8	1,0	35
2	1,2	1,4	0,9	1,4	1,6	1,9	1,1	40
3	1,3	1,5	1,0	1,5	1,7	2,0	1,2	45
4	1,4	1,6	1,1	1,6	1,8	2,1	1,3	50
5	1,5	1,7	1,2	1,7	1,9	2,2	1,4	55
6	1,6	1,8	1,3	1,8	2,0	2,3	1,5	60
7	1,7	1,9	1,4	1,9	2,1	2,4	1,6	65
8	1,8	2,0	1,5	2,0	2,2	2,5	1,7	70
9	1,9	2,1	1,6	2,1	2,3	2,6	1,8	75
10	2,0	2,2	1,7	2,2	2,4	2,7	1,9	80

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробот В. А., Брусенцов А. С. Прикладная механика. – СПб.: Лань, 2022. - 180 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book>.
2. Затипякин А. М., Друзь И.Б., Гаманов В.Ф. Сопротивление материалов. - Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2019. - 196 с. - URL: <https://viewer.rsl.ru/ru/rsl07000487048?page=1&rotate=0&theme=white/>.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: учебник. - СПб.: Лань, 2022. - 556 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206420>.
4. Джамай В.В., Самойлов Е.А., Станкевич А.И., Чуркина Т.Ю. Прикладная механика: учебник для академического бакалавриата. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 360 с.
5. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 279 с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 432 с.