



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины
и наземный транспорт»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «МЕХАНИКА»**

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело

13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника

20.03.02 Природообустройство и водопользование

Астрахань 2024

УДК 539.3

Хахов А.А.

Определение главных и эквивалентных напряжений. Методические указания по курсу «Механика». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 106 с.

В пособии рассмотрены основы теории напряженного состояния, теории прочности и представлены методики расчета главных и эквивалентных напряжений.

Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»

Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2024

© Астраханский государственный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	6
1.1. Понятие напряженного состояния в точке. Тензор напряжений.....	6
1.2. Закон парности касательных напряжений	9
1.3. Напряжения в наклонной площадке	10
1.4. Главные площадки. Главные нормальные напряжения.....	14
1.5. Исследование напряженного состояния в точке. Прямая и обратная задачи.....	16
1.5.1. Определение напряжений в наклонной площадке по заданным главным нормальным напряжениям. Прямая задача.....	16
1.5.2. Частный случай - всестороннее равномерное растяжение (сжатие). Шаровой тензор	18
1.5.3. Определение главных нормальных напряжений и площадок их действия. Обратная задача	19
1.5.4. Инварианты тензора напряжений и их физический смысл.....	21
1.5.5. Геометрическое представление тензора напряжений. Эллипсоид напряжений	25
1.6. Главные касательные напряжения	27
1.7. Октаэдрические напряжения	31
2. ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ.....	34
2.1. Линейное напряженное состояние.....	34
2.2. Плоское напряженное состояние	41
2.2.1 Определение напряжений при повороте осей	43
2.2.2 Определение напряжений по заданным главным напряжениям. Прямая задача.....	45
2.2.3 Определение положения главных площадок и главных нормальных напряжений. Обратная задача.....	46
2.3. Объемное напряженное состояние	51
3. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ. КРУГИ МОРА.....	51

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ...	60
5. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА.....	65
6. ЧИСТЫЙ СДВИГ КАК ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ. ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ.....	77
7. ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ.....	83
8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ.....	88
9. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ.....	93
Литература.....	106

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса «Механика материалов» теория напряженного и деформированного состояния в точке является главной фундаментальной темой теории исследования прочности и жесткости элементов конструкций, работающих под нагрузкой. Изучение напряжений и деформаций в точке нагруженного тела, возникающих по различным направлениям, позволяет решать самые разнообразные задачи прочности и жесткости, прогнозировать возможное разрушение и направление его возникновения, моделировать поведение работающего элемента и принимать соответствующее инженерное решение.

В читаемых курсах по теории напряженного и деформированного состояния существует два основных направления в порядке изложения данной темы.

Первое, наиболее распространенное, основано на постепенном изложении материала, т.е. на движении «от частного к общему», когда сначала изучаются напряжения по секущим площадкам при одноосном растяжении, вводится понятие главных площадок и главных нормальных напряжений, а затем, ссылаясь на теорию упругости, переходят к общему трехосному нагружению. Этот способ прост и методически наиболее удобен для студентов, начинающих изучать предмет. Однако он не позволяет охватить общую картину поведения материалов, анализировать, прогнозировать и моделировать процесс работы элемента. Это приводит к проблемам в понимании этого процесса и к неизбежным ошибкам в расчетах.

Второй способ – «от общего к частному» – основан на первоначальном рассмотрении общего случая напряженного состояния в точке, после чего плоское и линейное напряженные состояния представляются как частные случаи пространственной задачи. Этот способ отличается большей глубиной освоения материала и позволяет рассматривать простейшие деформации и их комбинацию через исследование напряженного состояния в точке.

В данном пособии предлагается лекционный объем и последовательность изложения курса по теории напряженного и деформированного состояния с обязательным рассмотрением примеров и решением задач, необходимых для понимания и правильного приме-

нения теоретических формул, а также показывающих практическую значимость данной темы.

Пособие предназначено в помощь студентам всех специальностей в качестве литературы для изучения темы и в помощь для подготовки к экзаменам. Пособие предназначено также для преподавателей, читающих курс «Сопротивление материалов» и «Механика материалов» и позволяет на усмотрении данного преподавателя выбирать необходимые вопросы и задачи в зависимости от специальности студентов и количества выделенных часов.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

1.1. Понятие напряженного состояния в точке.

Тензор напряжений

При нагружении тела внешними силами происходит смещение частиц относительно первоначального положения и, как результат, их взаимодействие друг с другом. Предполагая на основании гипотезы сплошности, что каждая частица материала плотно окружена соседними частицами (рис. 1), воздействие на нее будет оказываться усилиями различной величины и по различным направлениям.

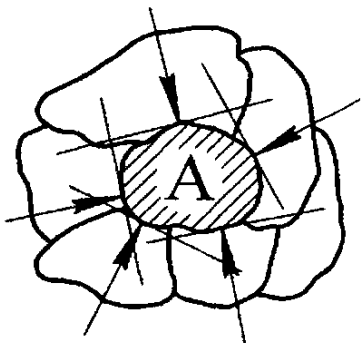


Рис. 1

Мысленно уменьшая размеры частицы А, мы в конечном итоге «стягиваем» ее в точку, а усилие, действующее в точке, есть напряжение.

Таким образом, если через точку тела провести множество секущих площадок, то напряжения, действующие по этим площадкам, будут различны по величине и по направлению, в зависимости от ориентации площадки.

Совокупность напряжений, действующих в различных секущих площадках, проходящих через точку напряженного тела, называется напряженным состоянием в точке

Исследуем напряженное состояние в точке тела, нагруженного системой уравновешенных сил (рис. 2).

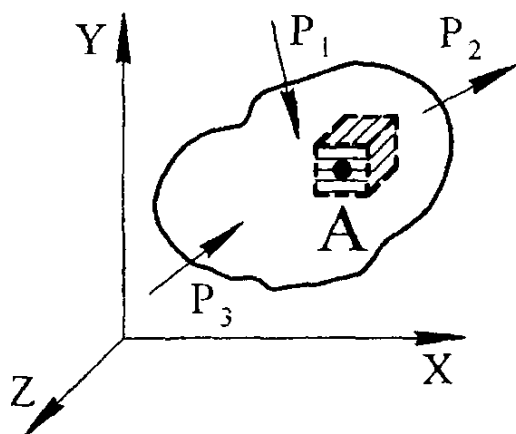


Рис. 2

При переходе от точки к точке напряженное состояние изменяется достаточно медленно, поэтому в окрестности точки A всегда можно выделить такую бесконечно малую область, для которой напряженное состояние можно рассматривать как однородное. Такой подход возможен только в пределах принятой гипотезы сплошности, допускающей переход к предельно малым объемам.

Рассмотрим отдельно выделенный в окрестности точки A параллелепипед и напряжения, действующие по его граням (рис. 3): здесь по трем взаимно перпендикулярным площадкам будут действовать напряжения p_x , p_y и p_z , величина и направление которых определяются взаимодействием точки (частицы) A с соседними частицами тела.

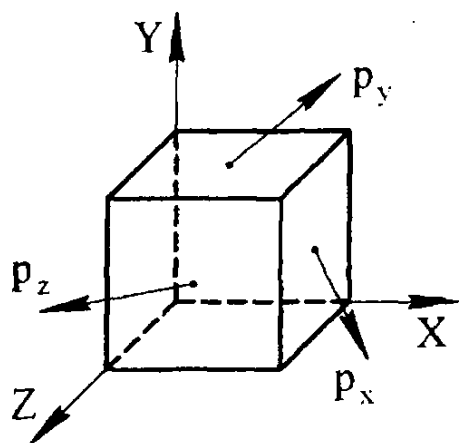


Рис. 3

Если размеры параллелепипеда уменьшать то он будет «стягиваться» в точку, а его противоположные грани сольются. В пределе мы будем иметь три взаимно перпендикулярные площадки, пересекающиеся в точке A . Поэтому напряжения, действующие по граням параллелепипеда, окружающего точку, можно рассматривать как напряжения, действующие в точке.

Полные напряжения p_x , p_y и p_z , действующие по граням, можно разложить на три составляющие: одно – по нормали, перпендикулярно к площадке; две другие – в плоскости площадки:

$$p_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; \quad p_y = \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}; \quad p_z = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{pmatrix}.$$

И тогда в результате на гранях выделенного параллелепипеда действуют напряжения (рис. 4):

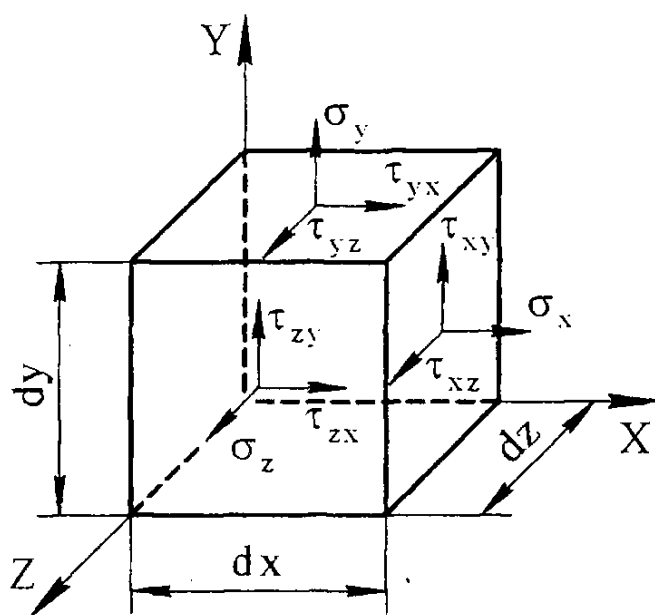


Рис. 4

— нормальные напряжения σ_i (σ_x σ_y σ_z), которые обозначаются одинарным индексом, соответствующим оси их направления;

— касательные напряжения τ_{ij} , обозначаемые двойным индексом (i — указывает направление оси, перпендикулярной площадке действия τ ; j — указывает ось направления действия τ).

Нормальные напряжения σ считаются положительными,

если они направлены от площадки и вызывают растяжение элементарного объема. И наоборот. Знак касательных напряжений имеет чисто геометрическое значение, так как по своему физическому действию на элемент $\tau_{(+)}$ и $\tau_{(-)}$ не отличаются между собой. Однако в расчетах мы будем принимать условное правило знаков для касательных напряжений, о чем будет сказано ниже.

Таким образом, на гранях выделенного объема действуют девять напряжений. На невидимых гранях элемента действуют такие же напряжения, но обратные по направлению. А так как напряженное состояние в точке описывается несколькими векторными величинами, то, обобщая векторное исчисление и матричную алгебру, напряжения, действующие в точке в заданных координатных площадках, можно записать в матричной форме в виде *тензора напряжений*:

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Тензор (1) является симметричным тензором второго ранга и в отличие от скалярной величины (определяемой числом) и векторной (определяемой числом и направлением) тензорное описание

означает, что напряженное состояние в точке геометрически описывается поверхностью второго порядка. Геометрическим изображением тензора напряжений является эллипсоид напряжений, о чем более подробно будет сказано ниже.

1.2. Закон парности касательных напряжений

Так как под действием внешних сил элемент должен сохранять свое состояние равновесия, значит, в равновесии должен находиться и любой, даже самый бесконечно малый объем, выделенный в этом элементе. А это означает, что вся система сил, действующих по граням параллелепипеда (см. рис. 4), должна быть уравновешена. Рассматривая равновесие этого выделенного элемента, мы получаем один из важных законов теории напряженного состояния:

На двух взаимно перпендикулярных площадках (гранях) касательные напряжения, перпендикулярные к ребру, равны по величине и направлены либо оба к ребру, либо от него

Этот закон известен как закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2)$$

Доказательство.

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, выделенный в окрестности точки (см. рис. 4), по граням которого действуют заданные напряжения. Составим для него уравнения равновесия, при этом следует помнить, что уравнения равновесия составляются не для напряжений, а для сил, для чего каждое из напряжений будем умножать на величину площадки, в которой оно действует:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0; \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0; \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

Так как на невидимых гранях элемента действуют такие же напряжения, но обратного направления, то первые три уравнения рав-

новесия удовлетворяются тождественно. Проверим остальные уравнения. Составим уравнение $\sum M_x = 0$:

- силы $\sigma_x dydz$, $\tau_{yx} dx dz$, $\tau_{zx} dx dy$ момент относительно оси X не создают, так как они действуют по направлению этой оси, параллельно ей;
- силы $\sigma_y dx dz$, $\tau_{xy} dy dz$, $\sigma_z dx dy$, $\tau_{xz} dz dy$ создают момент относительно оси X , но он уравновешивается моментом таких же сил, действующих на невидимых гранях элемента;
- остаются силы $\tau_{zy} dx dy$ и $\tau_{yz} dx dz$:

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dz dy = 0,$$

отсюда: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Проводя аналогичные рассуждения по остальным уравнениям равновесия $\sum M_y = 0$ и $\sum M_z = 0$, получаем равенство касательных напряжений с одинаковыми индексами (2), что и подтверждает закон парности касательных напряжений и симметричность тензора напряжений (1) относительно главной диагонали (линии расположения напряжений σ).

Таким образом, на трех взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, выделенного в окрестности точки, действуют шесть независимых компонент тензора напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$. И если эти шесть напряжений нам известны, мы считаем, что напряженное состояние в точке определено полностью, так как существуют формулы, позволяющие определять напряжения в любых других наклонных площадках, проходящих через данную точку.

1.3. Напряжения в наклонной площадке

Проведем через точку напряженного тела три взаимно перпендикулярные плоскости в системе координат $X-Y-Z$ и предположим, что напряжения в этих трех секущих площадках нам известны. В задаче требуется определить полное S , нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения в другой секущей площадке, проходящей

через данную точку и наклоненной к осям X-Y-Z на углы α , β , γ соответственно (рис. 5).

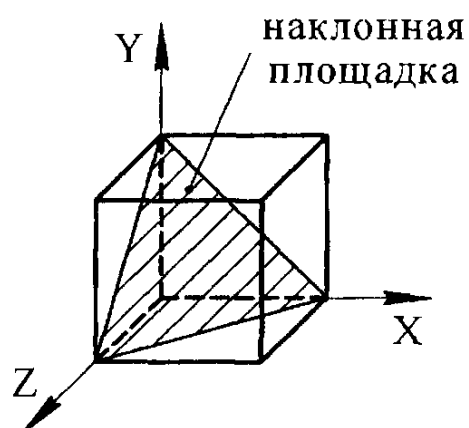


Рис. 5

Дано:

Напряжения σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{zy} в системе координат X-Y-Z.

Определить:

Напряжения S , σ_n , τ_n в наклонной площадке, расположенной под углами α , β , γ к осям X-Y-Z соответственно.

Отбросим видимую часть параллелепипеда и «откроем» наклонную площадку. Приложив заданные напряжения к невидимым граням полученного тетраэдра и полное напряжение S к наклонной площадке, а также разложив его на составляющие по направлению осей S_x , S_y , S_z , составляем уравнения равновесия для полученного элемента (рис. 6):

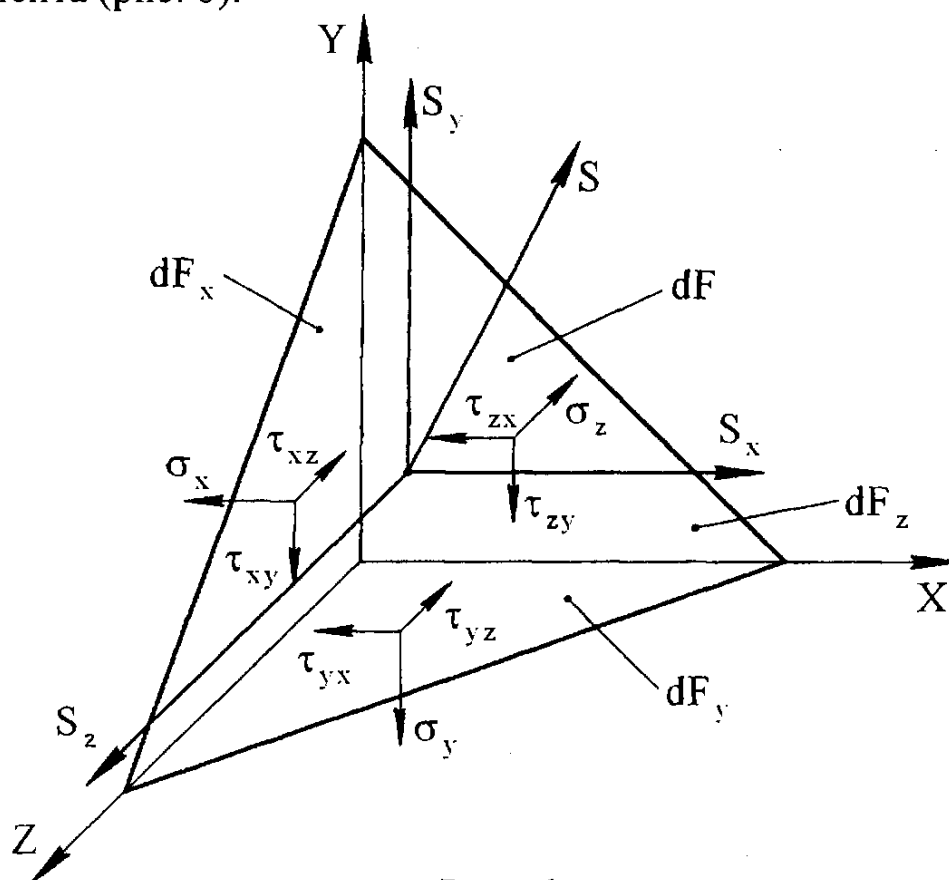


Рис. 6

$$\sum X = 0: S_x dF - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0;$$

$$\sum Y = 0: S_y dF - \tau_{xy} dF_x - \sigma_y dF_y - \tau_{zy} dF_z = 0;$$

$$\sum Z = 0: S_z dF - \tau_{xz} dF_x - \tau_{yz} dF_y - \sigma_z dF_z = 0,$$

где dF_x , dF_y , dF_z , dF – площади невидимых площадок тетраэдра и наклонной площадки соответственно, связанные между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos \alpha; \\ dF_y &= dF \cos \beta; \\ dF_z &= dF \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в уравнения равновесия и сократив на dF , получаем значения составляющих полного напряжения S (S_x , S_y , S_z):

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma; \\ S_y &= \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma; \\ S_z &= \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Определив составляющие полного напряжения по формулам (4), находим полное напряжение в наклонной площадке:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (5)$$

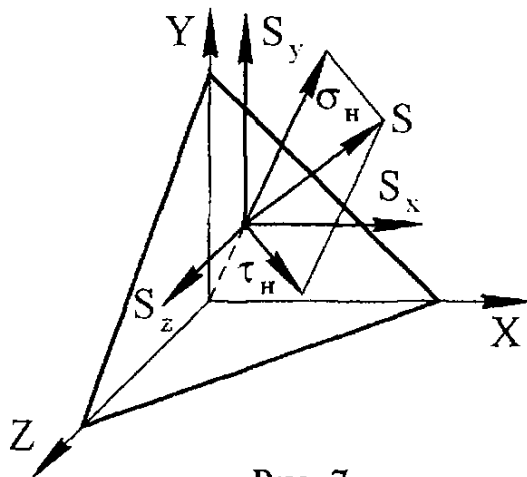


Рис. 7

Полное напряжение S в наклонной площадке раскладываем на нормаль к этой площадке и на ее плоскость (рис. 7) и получаем нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения. Значение σ_n определяем как сумму проекций на нормаль составляющих напряжения S :

$$\sigma_n = S_x \cos \alpha + S_y \cos \beta + S_z \cos \gamma. \quad (6)$$

Подставив выражения (4) в (6), после преобразований имеем

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (7)$$

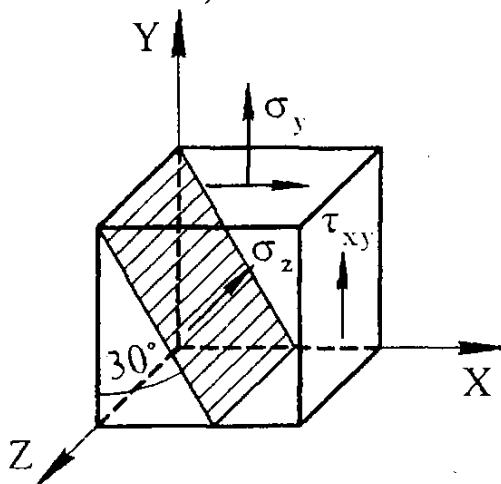
Касательное напряжение в наклонной площадке определится на основании (5) и (7) по формуле

$$\tau_n = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2}. \quad (8)$$

Таким образом, если в точке нагруженного тела в какой-либо выбранной системе трех взаимно перпендикулярных площадок известны нормальные и касательные напряжения, это значит, что напряженное состояние данной точки полностью определено. На основании формул (4)–(8) можно определить напряжения в любых других секущих площадках, проходящих через данную точку. Исследуя, таким образом, напряженное состояние в точке, можно определить величину и направление действия наибольших напряжений, представляющих опасность с точки зрения прочности данного элемента.

Задача 1

Для заданного напряженного состояния определить нормальное и касательное напряжения в площадке, параллельной оси Z и наклоненной, как показано на рисунке.



Дано:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0; & \tau_{xy} &= 30 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 20 \text{ МПа}; & \tau_{yz} &= 0; \\ \sigma_z &= -50 \text{ МПа}; & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Решение.

Следует помнить, что угол наклона площадки к оси определяется углом наклона ее нормали к этой оси, поэтому:

- угол наклона к оси X $\alpha = 60^\circ$;
- угол наклона к оси Z $\gamma = 90^\circ$ (площадка параллельна этой оси);
- угол наклона к оси Y $\beta = 30^\circ$ (так как $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

На основании формул (4)–(8) определяем полное, нормальное и касательное напряжения в площадке:

$$S_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 30 \cos 30^\circ = 26 \text{ МПа};$$

$$S_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma = 30 \cos 60^\circ + 20 \cos 30^\circ = \\ = 32,3 \text{ МПа};$$

$$S_z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma = 0;$$

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 26^2 + 32,3^2 = 1719,3 \text{ (МПа)}^2;$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma = 20 \cos^2 30^\circ + \\ + 2 \cdot 30 \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 17,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_n = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{1719,3 - 17,6^2} = 37,5 \text{ МПа}.$$

1.4. Главные площадки. Главные нормальные напряжения

Через любую точку напряженного тела можно провести сколько угодно секущих площадок, напряжения в которых и им ортогональных можно определить на основании формул (4)–(8), рассмотренных выше. Однако в каждой точке напряженного тела будет суще-

ствовать только **одна единственная** система трех взаимно перпендикулярных площадок, которая от остальных отличается тем, что касательные напряжения в этих площадках равны нулю, а действуют здесь только нормальные напряжения.

*Секущие площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, а действуют только нормальные напряжения, называются **главными площадками**.*

*Координатные оси системы трех взаимно перпендикулярных главных площадок называются **главными осями** и обозначаются цифрами 1-2-3.*

*Нормальные напряжения, действующие в главных площадках, называются **главными нормальными напряжениями** и обозначаются $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$.*

Тензор напряжений в главных осях имеет вид (рис. 8):

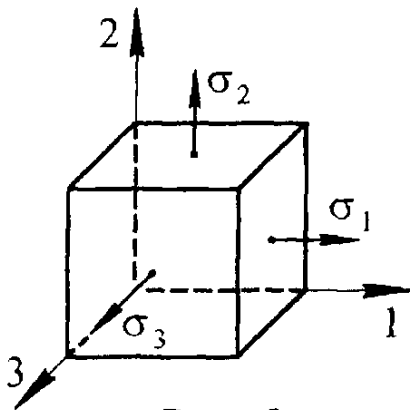


Рис. 8

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем считать алгебраически большим главным напряжением σ_1 , а алгебраически меньшим — σ_3 (σ_2 занимает промежуточное значение) и будем придерживаться следующего соотношения:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (10)$$

Главные напряжения обладают свойством экстремальности. Это значит, что среди всех напряжений, действующих в данной точке,

главные напряжения имеют наибольшие (по модулю) значения, а значит, в расчетах на прочность именно главные напряжения и будут представлять наибольший интерес.

1.5. Исследование напряженного состояния в точке.

Прямая и обратная задачи

Исследование напряженного состояния включает в себя постановку и решение различных классов задач по определению напряжений, действующих в точке, анализ этих напряжений и, как результат, прогнозирование и моделирование работы элемента под нагрузкой. На основании формул (4) – (8), позволяющих определять напряжения в площадках при повороте координатных осей, в зависимости от цели исследования и наличия исходных данных рассматриваются следующие основные классы задач:

- определение напряжений в секущих площадках по заданным главным напряжениям (**Прямая задача**);
- определение величины и направления действия главных напряжений по заданным напряжениям в неглавной системе координат $X-Y-Z$ (**Обратная задача**).

1.5.1. Определение напряжений в наклонной площадке по заданным главным нормальным напряжениям. Прямая задача

При некоторых видах нагружения элементов определение главных нормальных напряжений и направления их действия является наиболее простым и доступным (например, с помощью эксперимента или простейших расчетов), чем определение напряжений по другим секущим площадкам, проходящим через данную точку. Если главные нормальные напряжения в точке известны, а целью исследования является определение напряжений по другим направлениям, то задача решается следующим образом.

Дано:

Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в системе координат 1-2-3.

Определить:

Напряжения S, σ_n, τ_n в наклонной площадке, расположенной к главным осям 1-2-3 под углами α, β, γ соответственно.

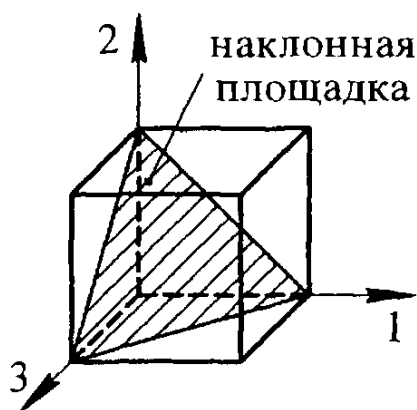


Рис. 9

Предположим, что напряженное состояние в точке задано в главных осях 1-2-3 и главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ нам известны. Задача заключается в том, чтобы определить полное S , нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения в секущей площадке, наклоненной к главным осям под углами α, β, γ соответственно (рис. 9). Решая задачу по аналогии с

задачей определения напряжений в наклонной площадке (п.1.3), рассматриваем равновесие тетраэдра (рис. 10) и получаем:

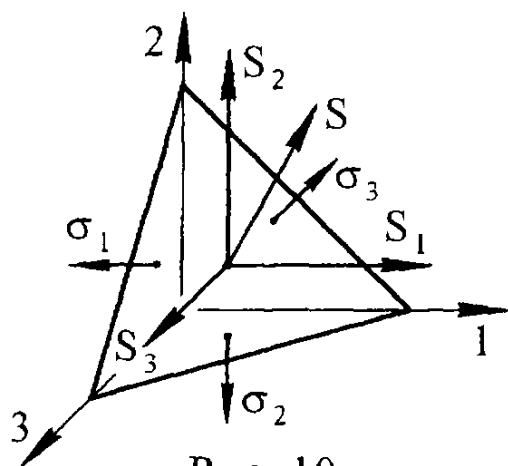


Рис. 10

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 \cos \alpha; \\ S_2 &= \sigma_2 \cos \beta; \\ S_3 &= \sigma_3 \cos \gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

где S_1, S_2, S_3 – составляющие полного напряжения S в наклонной площадке, которое определяется как

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Тогда на основании (11) получаем

$$S^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma. \quad (12)$$

Разложив полное напряжение S на нормаль к наклонной площадке и на ее плоскость, получаем нормальное σ_n и касательное τ_n

напряжения. Значение σ_n определится как сумма проекций составляющих S_1, S_2, S_3 на нормаль к площадке:

$$\sigma_n = S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta + S_3 \cos \gamma.$$

Тогда на основании (11) и (8):

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma; \quad (13)$$

$$\tau_n = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2}. \quad (14)$$

1.5.2. Частный случай – всестороннее равномерное растяжение (сжатие). Шаровой тензор

При некоторых видах нагружения в точках напряженного тела главные нормальные напряжения равны между собой:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma. \quad (15)$$

Такой вид напряженного состояния (рис. 11) описывается тензором вида (16), который называется *шаровым тензором*:

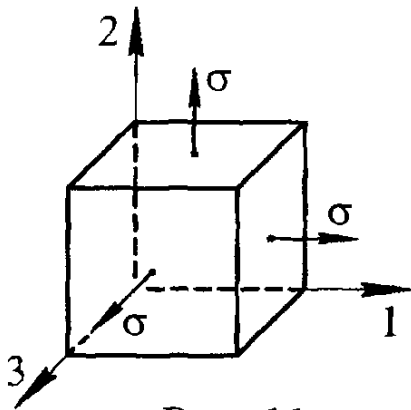


Рис. 11

$$T_{\text{ш}} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Если через точку, в которой главные нормальные напряжения равны, провести секущую площадку, то на основании формул (12) – (15) получаем

$$\begin{aligned}
S^2 &= \sigma^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \sigma^2 \quad (S^2 = \sigma^2); \\
\sigma_n &= \sigma (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \sigma \quad (\sigma_n = \sigma); \\
\tau_n &= \sqrt{S^2 - \sigma_n^2}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Вывод. Если в точке напряженного тела главные нормальные напряжения в главных площадках равны между собой, то любая другая площадка, проходящая через точку, также будет являться главной, так как в ней касательные напряжения равны нулю, а все нормальные напряжения будут являться главными и равными σ .

Этот случай называется всесторонним равномерным (гидростатическим) растяжением (сжатием). Напряженное состояние, определяемое шаровым тензором (16), не вызывает изменение формы элемента, а приводит только к изменению объема (при упругой деформации) и к дальнейшему разрушению.

1.5.3. Определение главных нормальных напряжений и площадок их действия. Обратная задача

Как было указано ранее, главные нормальные напряжения обладают свойством экстремальности, т.е. имеют в точке наибольшее по модулю значение. А это значит, что с точки зрения прочности элемента именно они и представляют наибольший интерес. Поэтому при расчете инженерных конструкций чаще всего решается обратная задача – определяется величина и направление действия главных нормальных напряжений.

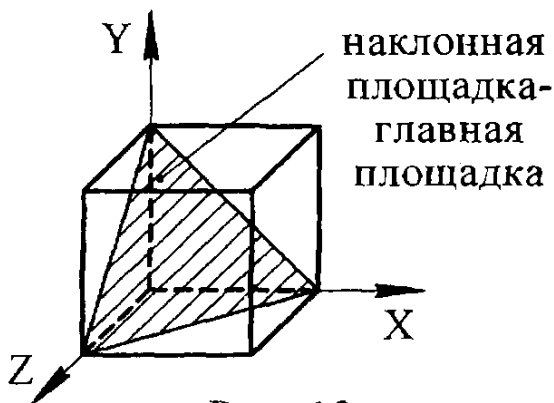


Рис. 12

Дано:

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ в системе координат X-Y-Z.

Определить:

Величину главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и положение главных площадок.

Рассмотрим точку, для которой напряженное состояние в системе координат X-Y-Z нам задано (см. рис. 4) и описывается тензором (1), а секущая площадка, проходящая через ту же точку, является главной (рис. 12). Тогда в главной площадке

$$\tau_n = 0, \sigma_n = \sigma, S = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sigma,$$

т.е. полное напряжение S равно главному нормальному напряжению σ и направлено по нормали к площадке (рис. 13). Разложив напряжение $S = \sigma$ на координатные оси, получаем

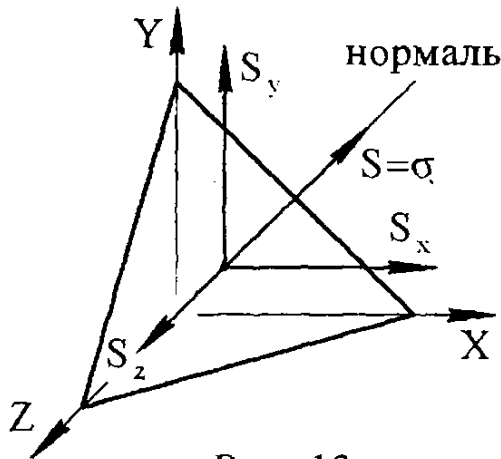


Рис. 13

$$\begin{aligned} S_x &= S \cos \alpha = \sigma \cos \alpha; \\ S_y &= S \cos \beta = \sigma \cos \beta; \\ S_z &= S \cos \gamma = \sigma \cos \gamma, \end{aligned} \quad (18)$$

где α, β, γ — углы наклона главной площадки к осям X-Y-Z соответственно. Напомним, что угол наклона площадки к оси — это угол наклона ее нормали к данной оси.

Сравнивая выражения (18) и (4), мы можем приравнять их правые части и после преобразования имеем

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0; \\ \tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma = 0; \\ \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где для главной площадки углы ее наклона к осям X-Y-Z связаны выражением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (20)$$

Объединив выражения (19) и (20), мы получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными (главное напряжение σ и ко-

синусы углов наклона главной площадки $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ к заданной системе осей X-Y-Z).

Решаем систему уравнений следующим образом. Так как все три косинуса одновременно нулю равны быть не могут, то однородная система уравнений, как известно из линейной алгебры, может иметь нулевое решение лишь в случае, если нулю будет равен определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma)\tau_{yx}\tau_{zx} \\ \tau_{xy}(\sigma_y - \sigma)\tau_{zy} \\ \tau_{xz}\tau_{yz}(\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Перемножая определитель (21) по правилу Саррюса и преобразовывая на основании закона парности касательных напряжений, получаем кубическое уравнение следующего вида:

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) называется *характеристическим уравнением*, решением которого являются три действительных (в силу симметрии определителя) корня — σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные нормальные напряжения, действующие в трех взаимно перпендикулярных площадках, что и требовалось определить.

Для нахождения углов наклона главных площадок, например, площадки действия σ_1 , следует это напряжение внести в любые два уравнения (19) и присоединив к ним выражение (20), получаем систему уравнений для определения $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, где α_1 , β_1 , γ_1 — углы наклона площадки действия σ_1 к осям X-Y-Z соответственно. Аналогичным образом находят углы наклона других главных площадок.

1.5.4. Инварианты тензора напряжений и их физический смысл

Введем обозначение коэффициентов кубического уравнения (22):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда уравнение (22) принимает вид

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (24)$$

Принимая в качестве исходной систему координат X-Y-Z и в качестве заданных соответствующие напряжения, в результате решения уравнения (24) мы определяем главные напряжения в точке ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) и положение главных площадок (см. выше). Но если в той же точке напряженного тела в качестве исходной взять другую систему координат $X_1 - Y_1 - Z_1$ с заданными напряжениями $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{z1}, \tau_{x1y1}, \tau_{x1z1}, \tau_{z1y1}$, то решение кубического уравнения (24) приведет к тому же результату – мы получим те же значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а главные площадки будут занимать в точке то же самое положение.

Это означает, что в каждой точке напряженного тела величина главных нормальных напряжений и положение главных площадок определены однозначно, т.е. главные напряжения имеют определенную величину и направление, независимо, от какой исходной системы координат они определены. В этом случае говорят, что главные напряжения и площадки их действия *инвариантны* (безразличны) к выбранной системе координат. Так как решение кубического уравнения, независимо от выбранной системы координат в точке, дает нам одно и то же значение главных напряжений и направления их действия, значит коэффициенты уравнения (24) остаются постоянными для данной точки, инвариантными при повороте осей. Эти коэффициенты – I_1, I_2, I_3 (23) – называются *инвариантами тензора напряжений*: I_1 – линейный, I_2 – квадратичный, I_3 – кубический инварианты. Для каждой точки напряженного тела:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{const}; \\
 I_2 &= \text{const}; \\
 I_3 &= \text{const}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Физический смысл инвариантов

Если напряженное состояние задано двумя тензорами напряжений:

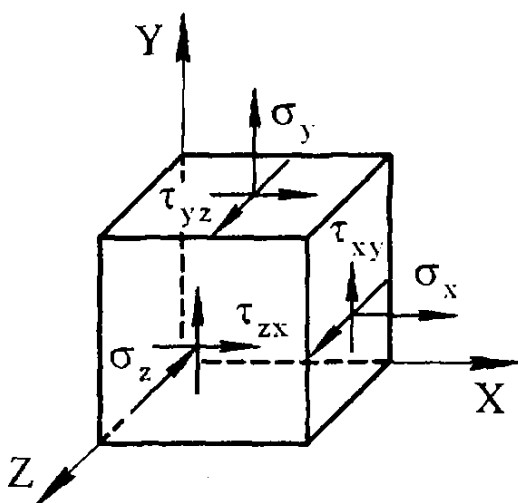
$$T_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{y1x1} & \tau_{z1x1} \\ \tau_{x1y1} & \sigma_{y1} & \tau_{z1y1} \\ \tau_{x1z1} & \tau_{y1z1} & \sigma_{z1} \end{Bmatrix} \quad T_2 = \begin{Bmatrix} \sigma_{x2} & \tau_{y2x2} & \tau_{z2x2} \\ \tau_{x2y2} & \sigma_{y2} & \tau_{z2y2} \\ \tau_{x2z2} & \tau_{y2z2} & \sigma_{z2} \end{Bmatrix},$$

то, пользуясь инвариантами, можно определить, выражают ли они напряженное состояние одной и той же точки, но в разных системах координат, или они описывают напряженное состояние двух разных точек тела.

Соответственно инварианты тензора напряжений в главных осях имеют вид

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\
 I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\
 I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Задача 2



Для заданного объемного напряженного состояния определить положение главных площадок и величину главных нормальных напряжений.

Дано:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 20 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 40 \text{ МПа}; \\
 \sigma_y &= 80 \text{ МПа}; \quad \tau_{yz} = 60 \text{ МПа}; \\
 \sigma_z &= -60 \text{ МПа}; \quad \tau_{zx} = 30 \text{ МПа}.
 \end{aligned}$$

Решение.

Для определения главных напряжений используем характеристическое уравнение (24) в виде:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Определяем коэффициенты уравнения, являющиеся инвариантами тензора напряжений, по формулам (23):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 + 80 + (-60) = 40 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 20 \cdot 80 + 80 \cdot (-60) + (-60) \cdot 20 - 40^2 - 60^2 - 30^2 = -10500 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 20 \cdot 80 \times (-60) + 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot 30 - 20 \cdot 60^2 - 80 \cdot 30^2 - (-60) \cdot 40^2 = 0.$$

Подставляем коэффициенты в кубическое уравнение и решаем его. Три корня кубического уравнения и являются главными нормальными напряжениями:

$$\sigma^3 - 40\sigma^2 + 10500\sigma = 0;$$

$$\sigma(\sigma^2 - 40\sigma + 10500) = 0.$$

Отсюда: $\sigma = 0$; $\sigma = 124,4 \text{ МПа}$; $\sigma = -84,4 \text{ МПа}$.

В соответствии с соотношением (10) $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$:

$$\sigma_1 = 124,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -84,4 \text{ МПа}.$$

Определим положение главной площадки, в которой действует напряжение σ_1 , расположенной по отношению к осям X-Y-Z под углами α_1 - β_1 - γ_1 соответственно. Для этого используем любые два уравнения (19), подставляя туда $\sigma = \sigma_1$, и формулу (20):

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0; \\ \tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma = 0; \\ \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (20 - 124,4) \cos \alpha_1 + 40 \cos \beta_1 + 30 \cos \gamma_1 = 0; \\ 40 \cos \alpha_1 + (80 - 124,4) \cos \beta_1 + 60 \cos \gamma_1 = 0; \\ \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1. \end{cases}$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= 0,4203; & \alpha_1 &= 65,1^\circ; \\ \cos \beta_1 &= 0,8406; & \beta_1 &= 32,8^\circ; \\ \cos \gamma_1 &= 0,3417; & \gamma_1 &= 70^\circ. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно определить положение главных площадок, где действуют σ_2 и σ_3 . Однако все три главные площадки являются взаимно перпендикулярными, поэтому достаточно знать положение какой-либо одной главной площадки. Две другие будут к ней ортогональны.

1.5.5. Геометрическое представление тензора напряжений. Эллипсоид напряжений

Как было указано ранее, тензор напряжений, описывающий напряженное состояние в точке в неглавных (1) либо главных (9) осях, в геометрическом отношении является поверхностью второго рода и изображается в виде эллипсоида напряжений. Записав на основании (11):

$$\cos^2 \alpha = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}; \quad \cos^2 \beta = \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}; \quad \cos^2 \gamma = \frac{S_3^2}{\sigma_3^2}$$

и подставив эти значения в (20), получаем

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (27)$$

Учитывая, что для данного напряженного состояния главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ постоянны, уравнение (27) представляет собой уравнение трехосного эллипсоида, полуосями которого являются главные нормальные напряжения в точке, а координаты других точек поверхности — это проекции полного напряжения S для различных наклонных площадок. Следовательно, длина любого отрезка от центра до пересечения с поверхностью эллипсоида (радиус-вектора) представляет собой полное напряжение S в какой-то наклонной площадке.

Поскольку длина любого радиус-вектора всегда меньше длины большей полуоси эллипсоида, но больше длины его меньшей полуоси, постольку полные напряжения S в различных наклонных площадках всегда будут алгебраически меньше наибольшего главного напряжения, но больше — наименьшего. Это полностью отражает идею экстремальности главных нормальных напряжений, которые в данной точке имеют алгебраически наибольшее и наименьшее значение по сравнению с другими напряжениями, действующими в данной точке.

Эллипсоид напряжений отражает и любые частные случаи напряженного состояния. Если два из трех главных напряжений равны между собой, то эллипсоид напряжений превращается в эллипсоид вращения. В случае, когда все три главных напряжения равны между собой и напряженное состояние в точке описывается тензором (16), эллипсоид напряжений превращается в шар, в котором все радиус-векторы равны, а значит во всех текущих площадках, проходящих через точку, напряжения одинаковы и являются главными. Именно по причине превращения эллипсоида в шар тензор (16) и получил название *шаровой тензор*.

Если одно из главных напряжений равно нулю, эллипсоид превращается в эллипс, а объемное напряженное состояние превращается в плоское. Если два главных напряжения равны нулю, эллипсоид превращается в отрезок прямой, что соответствует линейному напряженному состоянию. Два последних случая более подробно будут рассмотрены ниже.

1.6. Главные касательные напряжения

Исследуя напряженное состояние, можно обнаружить, что в каждой точке нагруженного тела существуют три пары площадок, в которых касательные напряжения имеют наибольшее значение. Эти напряжения называются *главными касательными напряжениями* и играют важную роль в исследовании пластичности материала. Так как пластическая деформация происходит по механизму сдвига, то начинается она именно в площадках, где действуют наибольшие касательные напряжения, когда последние достигают некоторого предельного значения. Поэтому изучение этих напряжений и площадок их действия является важным для исследования вопросов прочности пластичных материалов.

Определим величину главных касательных напряжений и площадки их действия по отношению к главным осям.

Пусть напряженное состояние в точке задано тензором (9) и главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ нам известны. Тогда на основании выражений (12)–(14) касательные напряжения в наклонной площадке определятся как

$$\begin{aligned} \tau_n^2 = & \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - \\ & - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где τ_n^2 является функцией направляющих косинусов $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Выразив из формулы (20):

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (20a)$$

и подставив это значение в (28), получаем

$$\begin{aligned} \tau_n^2 = & \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) - \\ & - [\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)]^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Для того чтобы определить положение площадок, в которых касательные напряжения принимают наибольшие значения, следует

взять производную функции (29) по аргументу (например, по $\cos \alpha$) и приравнять ее к нулю:

$$\frac{\partial(\tau_n^2)}{\partial(\cos \alpha)} = 2\sigma_1^2 \cos \alpha - 2\sigma_3^2 \cos \alpha - 2(2\sigma_1 \cos \alpha - 2\sigma_3 \cos \alpha) \times \\ \times [\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)] = 0. \quad (30)$$

После преобразования (30) получаем

$$\cos \alpha [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha + (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \beta - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0. \quad (31)$$

Продифференцировав выражение (29) по аргументу $\cos \beta$ и приравняв производную к нулю, после преобразования получаем

$$\cos \beta [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha + (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \beta - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0. \quad (32)$$

Решением уравнений (31)–(32) является, прежде всего, $\cos \alpha = 0$ и $\cos \beta = 0$, подставив которые в (20а), получаем первую группу площадок, в которых касательные напряжения принимают экстремальные значения:

$$\cos \alpha = 0; \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = \pm 1.$$

Другим решением уравнений (31) и (32) является равенство нулю выражений в квадратных скобках. Приравняв к нулю $\cos \alpha$ в (32) и $\cos \beta$ в (31) и используя (20а), получаем вторую группу площадок с наибольшими касательными напряжениями:

$$\cos \alpha = 0; \quad \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Выразив из формулы (20) значения $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, подставив их последовательно в (28) и проведя аналогичное дифференцирование

с приравниванием производной к нулю, мы получаем две группы площадок:

$$\left. \begin{array}{lll} \cos \alpha = 0 & \cos \beta = 0 & \cos \gamma = \pm 1 \\ \cos \alpha = 0 & \cos \beta = \pm 1 & \cos \gamma = 0 \\ \cos \alpha = \pm 1 & \cos \beta = 0 & \cos \gamma = 0 \end{array} \right\}; \quad (33)$$

$$\left. \begin{array}{lll} \cos \alpha = 0 & \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \beta = 0 & \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \gamma = 0 \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Первая группа площадок с направляющими косинусами (33) является главными площадками и касательные напряжения здесь равны нулю (т.е. $\tau = 0$ – это промежуточное значение между алгебраически большими и алгебраически меньшими касательными напряжениями). Вторая группа площадок с направляющими косинусами (34) являются площадками, в которых касательные напряжения достигают максимальных значений. Каждая из этих главных касательных площадок проходит параллельно одной из главных координатных осей, а с двумя другими главными осями составляет угол 45° (рис. 14):

Подставив значения направляющих косинусов (34) для главных касательных площадок в (28), находим значения главных касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{12} = \tau_{21} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \\ \tau_{23} = \tau_{32} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \\ \tau_{13} = \tau_{31} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

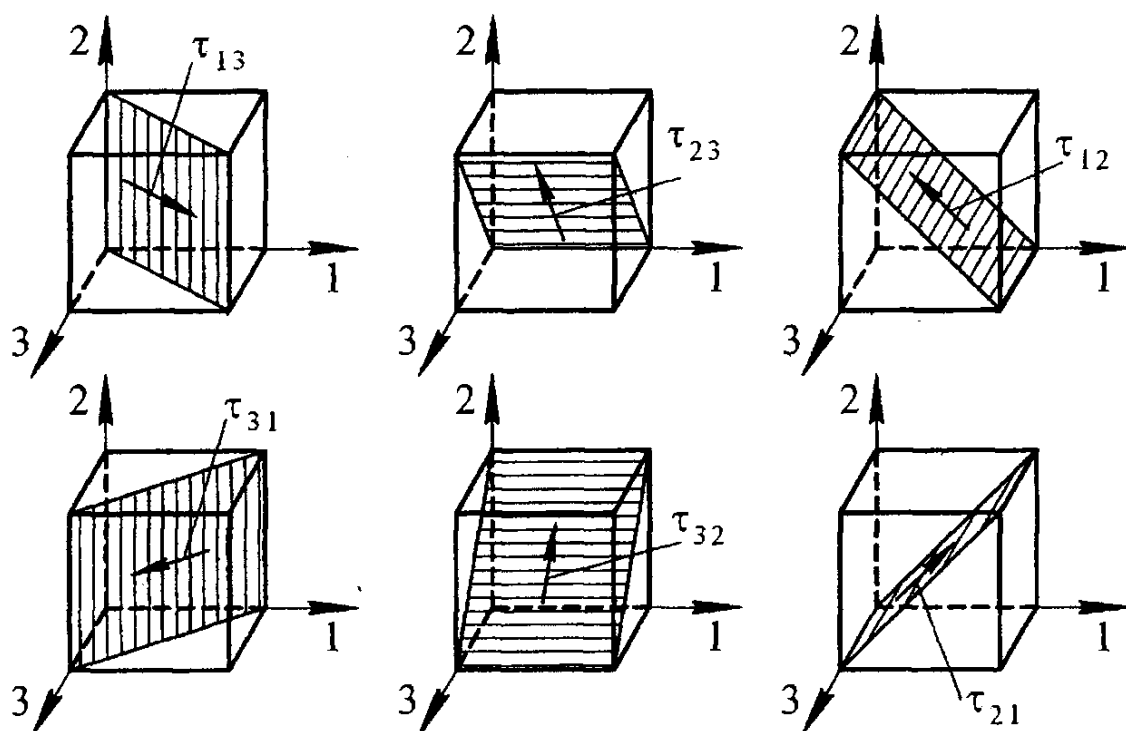


Рис. 14

Индексы при главных касательных напряжениях показывают, разность каких главных напряжений равна данному τ и к каким осям площадка действия τ наклонена под углом 45° . Наибольшее касательное напряжение равно полуразности алгебраически наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений.

В случае, если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то все касательные напряжения обращаются в нуль и это соответствует напряженному состоянию, описываемому шаровым тензором (16).

Направления главных касательных напряжений на площадках их действия параллельны той главной площадке, к которой данная площадка перпендикулярна.

Как видно из формул (35):

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0, \quad (36)$$

откуда следует, что знак наибольшего по абсолютной величине главного касательного напряжения противоположен знаку двух других. Это условие необходимо соблюдать при назначении знаков главных касательных напряжений в каждой конкретной задаче.

Подставив значения направляющих косинусов (34) в (13), можно определить величину нормальных напряжений, действующих в главных касательных площадках:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \\ \sigma_{23} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \\ \sigma_{13} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.\end{aligned}\tag{37}$$

Как видно из формул (35), при увеличении или уменьшении главных нормальных напряжений на одну и ту же величину значения главных касательных напряжений не изменятся, т.е. добавление к напряженному состоянию равномерного растяжения или сжатия не изменят величины касательных напряжений. Это дает возможность тензор напряжений представить в виде двух тензоров – шарового тензора $T_{ш}$ (16) и девиатора напряжений D_{σ} :

$$T_{\sigma} = T_{ш} + D_{\sigma},\tag{38}$$

где шаровой тензор $T_{ш}$ описывает всестороннее равномерное растяжение или сжатие, при котором не происходит изменения формы, а только изменение объема (при упругом деформировании) или разрушение; девиатор напряжений D_{σ} описывает напряженное состояние, при котором, наоборот, происходит изменение формы без изменения объема даже при упругом деформировании.

1.7. Октаэдрические напряжения

Исследование напряженного состояния в точке позволяет обнаружить еще четыре замечательные площадки, которые имеют одинаковый угол наклона к главным осям. Эти площадки с четырьмя им параллельными образуют октаэдр, поэтому они называются октаэдрическими площадками, а действующие в них напряжения – октаэдрическими напряжениями.

На основании уравнения (20), если $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$, угол наклона октаэдрических площадок к главным осям равен

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha = \beta = \gamma \approx 54,7^\circ. \quad (39)$$

Подставив значения (39) в (13) и (28), получаем величину нормальных и касательных октаэдрических напряжений:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{\text{ср}}; \quad (40)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (41)$$

Используя выражения (35), октаэдрические касательные напряжения можно выразить через главные касательные напряжения:

$$\tau_{\text{окт}} = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \quad (42)$$

Таким образом, октаэдрические напряжения представляют собой обобщенные или осредненные значения главных нормальных и главных касательных напряжений (40) – (41). В этом и заключается их особое значение:

– если $\tau_{\text{окт}} = 0$, то как видно из (41), это возможно только в случае, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. А это всестороннее равномерное растяжение либо сжатие, описываемое шаровым тензором (16), при котором происходит изменение объема элемента без изменения формы;

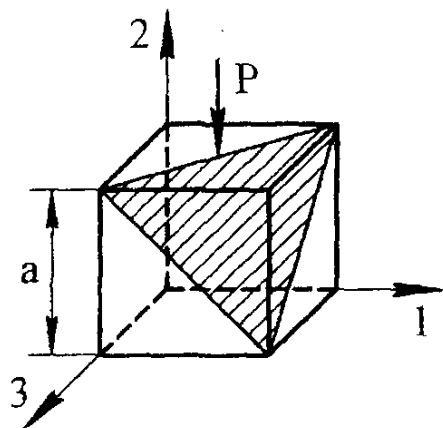
– если $\sigma_{\text{окт}} = 0$, то как видно из (40), в октаэдрических площадках имеет место только сдвиг, что приводит к изменению формы без изменения объема.

Следовательно, в общем случае, когда $\sigma_{\text{окт}} \neq 0$ и $\tau_{\text{окт}} \neq 0$, напряженное состояние будет представлять собой сочетание всестороннего растяжения или сжатия и сдвига, мерой интенсивности которых будут соответственно $\sigma_{\text{окт}}$ и $\tau_{\text{окт}}$. В этом отношении октаэдрические напряжения характеризуют структуру напряженного

состояния, состоящего из доли всестороннего растяжения (сжатия) и доли, приходящейся на сдвиг. Такое же разделение напряженного состояния по составу мы получили ранее при анализе главных касательных напряжений (35), рассматривая напряженное состояние как сумму шарового тензора $T_{ш}$ и девиатора напряжений D_{σ} .

Задача 3

Кубик с ребром $a = 2,5$ см был испытан на сжатие. При нагрузке $P = 420$ кН он разрушился в плоскости, проходящей через диагональ верхней стороны и диагонали смежных вертикальных сторон (см. рисунок). Определить нормальное и касательное напряжения в этом сечении.



Решение.

При одноосном сжатии главные нормальные напряжения равны:

$$\sigma_3 = -\frac{P}{F} = -\frac{420 \cdot 10^3}{2,5^2 \cdot 10^2} = -672 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = 0.$$

Площадка, по которой произошло разрушение кубика, как видно из рисунка, является октаэдрической, т.е. равнонаклоненной к главным осям. Следовательно, напряжения в ней можно определить по формулам (40) и (41):

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_3}{3} = -\frac{672}{3} = -224 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_3 = -317 \text{ МПа}.$$

Таким образом, исследуя напряженное состояние в точке, можно выделить 13 характерных площадок:

три главные площадки, в которых действуют главные нормальные напряжения, а касательные равны нулю;

шесть площадок, в которых действуют главные касательные напряжения.

четыре равнонаклоненные к главным осям площадки, в которых действуют равные по величине нормальные и касательные октаэдрические напряжения.

Все вышеуказанные напряжения и площадки их действия играют важную роль при построении современной теории прочности и пластичности.

2. ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Различают линейное, плоское и объемное напряженное состояние. Рассмотрим каждое из них более подробно и проведем исследование напряженного состояния в точке для данных случаев.

2.1. Линейное напряженное состояние

Необходимым условием линейного напряженного состояния является одновременное равенство нулю второго и третьего инвариантов тензора напряжений: $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$. Это означает, что при линейном напряженном состоянии из трех главных нормальных напряжений присутствует только одно, а два других равны нулю.

Простым примером возникновения данного вида напряженного состояния является осевое растяжение или сжатие. Так как за алгебраически большее главное напряжение принято σ_1 , за алгебраически меньшее — σ_3 , то при растяжении за единственное главное напряжение будем принимать σ_1 ($\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$), а при сжатии — σ_3 ($\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$).

Исследуем напряженное состояние в точке для случая осевого растяжения. Рассмотрим элемент, растягиваемый силой P , и определим напряжения в секущих площадках I, II, III, как показано на рис. 15.

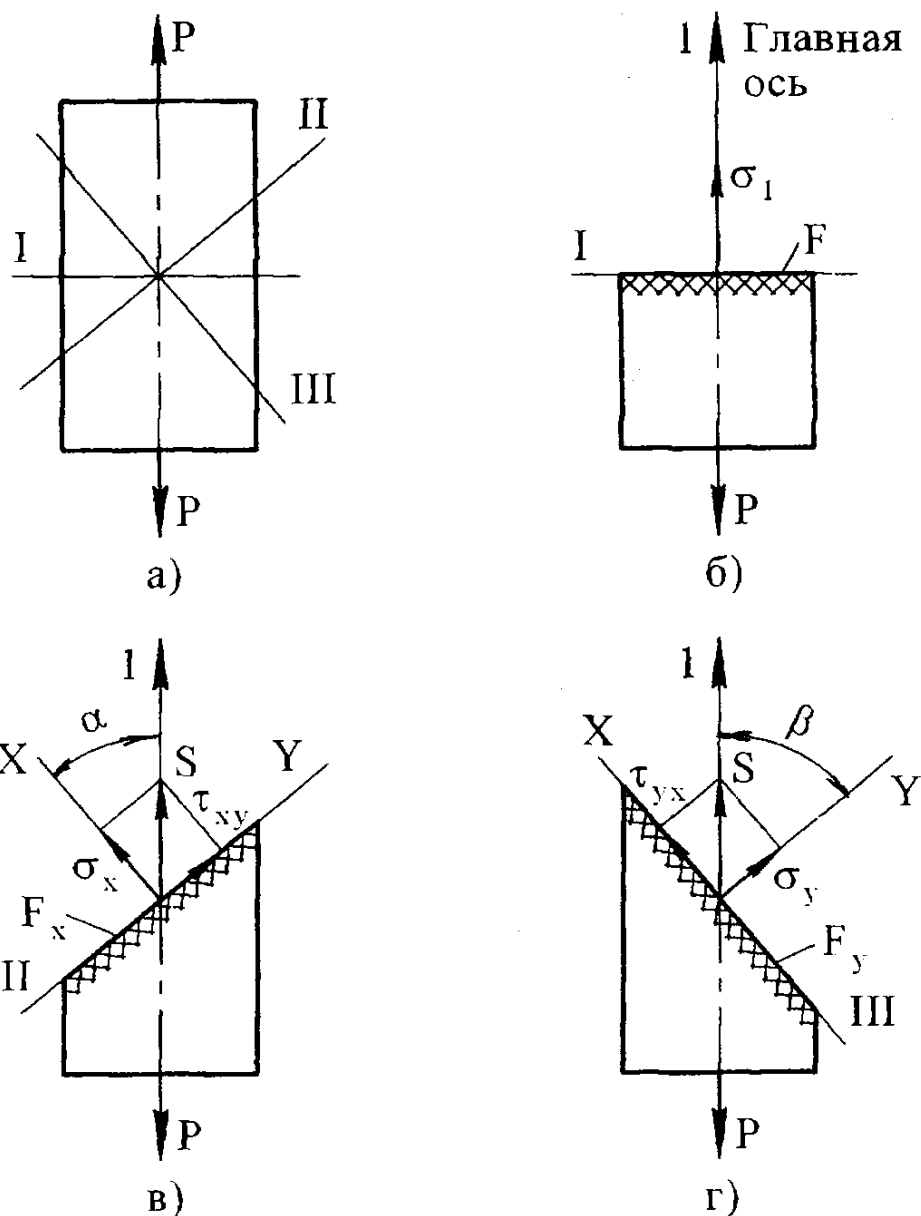


Рис. 15

Площадка I (рис. 15, б) является главной и в ней действует главное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}; \quad \tau = 0.$$

Площадка II (рис. 15, в) наклонена по отношению к главному напряжению σ_1 (к главной оси 1) на угол α и имеет площадь $F_x = F / \cos \alpha$. Следует помнить, что угол наклона площадки к оси — это есть угол наклона ее нормали (здесь ось X) к этой оси. Полное S_x ,

нормальное σ_x и касательное τ_{xy} напряжения в этой площадке определяются следующим образом:

$$S_x = \frac{P}{F_x} = \frac{P \cos \alpha}{F} = \sigma_1 \cos \alpha ;$$

$$\sigma_x = S_x \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha ;$$

$$\tau_{xy} = S_x \sin \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha .$$

Площадка III (рис. 15, з), ортогональная площадке II, имеет угол наклона к главной оси $i - \beta = (90^\circ - \alpha)$. Полное S_y , нормальное σ_y и касательное τ_{yx} напряжения в этой площадке определяются аналогичным образом:

$$S_y = \sigma_1 \cos \beta = \sigma_1 \sin \alpha ;$$

$$\sigma_y = S_y \cos \beta = S_y \sin \alpha = \sigma_1 \sin^2 \alpha ;$$

$$\tau_{yx} = S_y \sin \beta = S_y \cos \alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha .$$

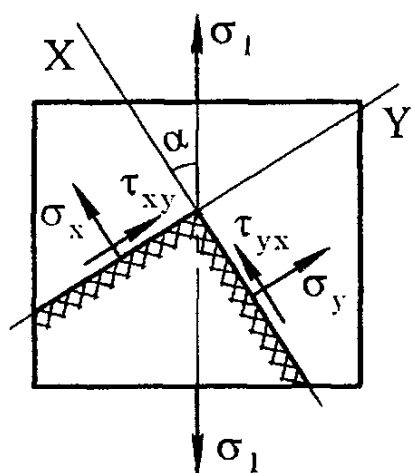


Рис. 16

Следует обратить внимание, что при линейном напряженном состоянии полное напряжение на любой наклонной площадке имеет постоянное направление, совпадающее с направлением внешней силы.

Таким образом, при линейном напряженном состоянии напряжения в любых двух взаимно перпендикулярных площадках, повернутых относительно главной оси 1 (или 3) на заданный угол α (рис. 16), определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \alpha; \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \alpha; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{43}$$

Примечание.

В случае осевого сжатия в (43) вместо σ_1 следует подставлять σ_3 со знаком «минус».

Для решения задач принимаем следующее *правило знаков* для напряжений, действующих в наклонных площадках (рис. 17):

– нормальные напряжения положительны и являются растягивающими, если они направлены от площадки. И наоборот.

– касательные напряжения считаются положительными, если они стремятся повернуть рассматриваемую часть элемента относительно любой точки, взятой внутри него, по часовой стрелке. И наоборот.

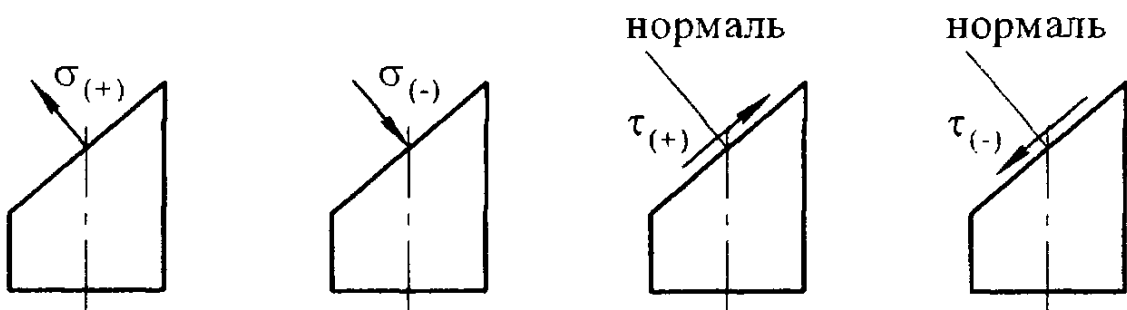


Рис. 17

Линейное напряженное состояние можно рассматривать как частный случай объемного напряженного состояния, приняв, например, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Тогда формулы (43) могли бы быть получены из формул (12)–(14) для объемного напряженного состояния (прямая задача).

Проанализируем формулы (43):

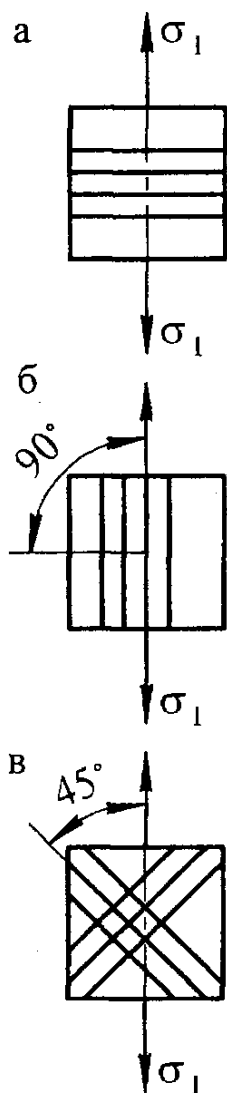


Рис. 18

Если $\alpha = 0$ (рис. 18, а): $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ — это главные площадки, перпендикулярные главной оси 1.

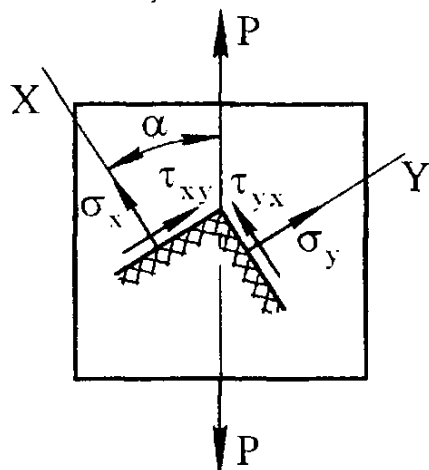
Если $\alpha = 90^\circ$ (рис. 18, б): $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_1$, $\tau_{xy} = 0$ — это также главные площадки, так как в них нет касательных напряжений.

Если $\alpha = 45^\circ$ (рис. 18, в): $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_1/2$, $\tau_{xy} = \sigma_1/2 = \tau_{\max}$ — это главные касательные площадки, где действуют наибольшие касательные напряжения. Именно по этим площадкам при осевом растяжении начинается сдвиг и пластическая деформация элемента. Если растяжению подвергать образец с полированной поверхностью,

то в момент наступления пластического течения его поверхность тускнеет. Этот эффект объясняется появлением на поверхности образца так называемых «линий скольжения», которые являются периметрами площадок скольжения. Эти линии скольжения расположены под углом 45° к направлению растяжения и это является опытным подтверждением того, что пластическая деформация, происходящая по механизму сдвига, всегда начинается в площадках, где возникают наибольшие касательные напряжения.

Задача 4

Стержень с квадратным поперечным сечением $10 \times 10 \text{ см}^2$ растянут вдоль оси силой $P = 600 \text{ кН}$. Определить нормальные и касательные напряжения в площадке, повернутой к оси стержня на угол $\alpha = 30^\circ$, а также в площадке, ей ортогональной.



Решение.

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} = \frac{600 \cdot 10^3}{10 \cdot 10 \cdot 10^2} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 60 \times \cos^2 30^\circ = 45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha = 60 \sin^2 30^\circ = 15 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha = \frac{60}{2} \sin 60^\circ = 26 \text{ МПа}.$$

Примечание. Если угол α задан отрицательным, его следует откладывать по часовой стрелке и учитывать знак «минус» в расчетах.

Задача 5

Стержень прямоугольного сечения с отношением сторон $h/b = 5:1$ растянут вдоль оси силой $P = 320 \text{ кН}$. Допускаемое касательное напряжение для материала равно $[\tau] = 80 \text{ МПа}$. Определить размеры сечения.

Решение.

Наибольшие касательные напряжения возникают в площадке, расположенной под углом 45° к направлению растяжения и равны согласно формуле (43) $\tau = \sigma_1/2$. Условие прочности в этом случае имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \leq [\tau];$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{P}{2F} = \frac{P}{2bh} = \frac{P}{10b^2} \leq [\tau];$$

Отсюда:

$$b = \sqrt{\frac{P}{10[\tau]}} = \sqrt{\frac{320 \cdot 10^3}{10 \cdot 80}} = 20 \text{ мм};$$

$$h = 100 \text{ мм}.$$

Задача 6

В растянутом стержне нормальные напряжения по одной из наклонных площадок равны $\sigma_x = 90$ МПа, а касательные $\tau_{xy} = 75,5$ МПа. Определить угол наклона площадки к оси стержня, а также наибольшие нормальные и касательные напряжения в нем.

Решение.

На основании рис. 15, в: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{75,5}{90} = 0,8388$, откуда $\alpha = 40^\circ$;

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

отсюда

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{\cos^2 \alpha} = \frac{90}{\cos^2 40^\circ} = 153,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha,$$

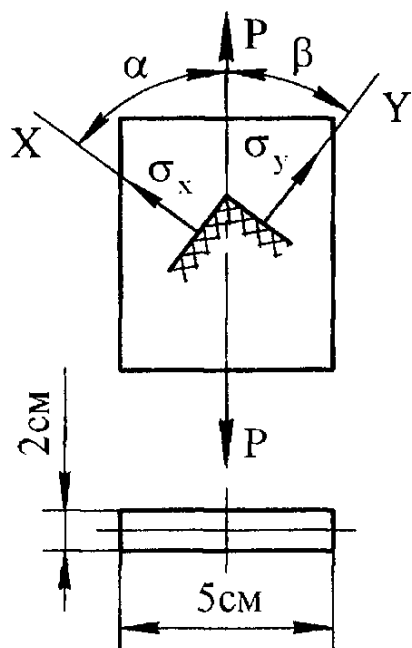
отсюда

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{153,4}{2} = 76,7 \text{ МПа}.$$

Задача 7

Вычислить силу P , растягивающую стержень, если известны нормальные напряжения $\sigma_x = 20$ МПа и $\sigma_y = 60$ МПа в двух взаимно перпендикулярных площадках. Определить углы, образующие этими площадками с осью стержня.

Решение.



$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha$; $\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha$, отсюда (см. рисунок):

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} = \sqrt{\frac{60}{20}} = 1,732;$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ;$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{\cos^2 \alpha} \text{ и } \sigma_1 = \frac{P}{F} = \frac{P}{bh},$$

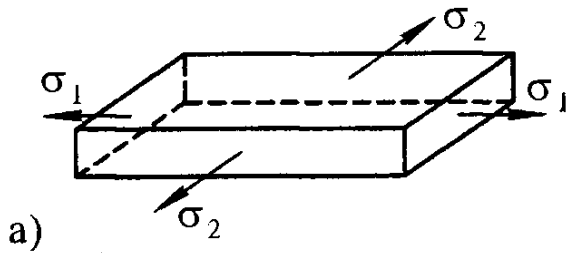
отсюда

$$\frac{\sigma_x}{\cos^2 \alpha} = \frac{P}{bh} \text{ и } P = \frac{\sigma_x bh}{\cos^2 \alpha} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 10^2}{\cos^2 60^\circ} = 80 \text{ кН}.$$

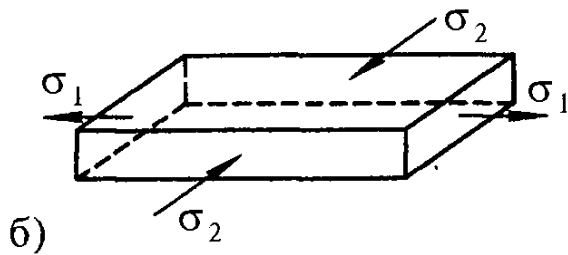
2.2. Плоское напряженное состояние

Необходимым условием плоского напряженного состояния является равенство нулю третьего инварианта тензора напряжений: $I_3 = 0$. Это означает, что при плоском напряженном состоянии, если оно задано в главных осях, одно из главных нормальных напряжений равно нулю. Принимая для главных нормальных напряжений соотношение (10) и учитывая, что одно из них равно нулю, будем

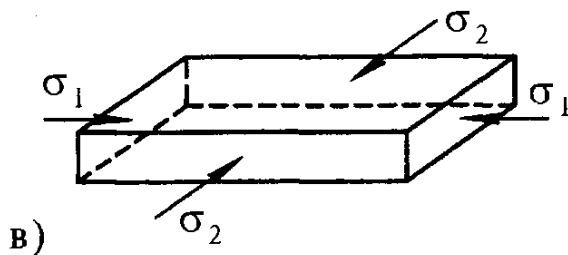
рассматривать следующие варианты плоского напряженного состояния (рис. 19):



Если оба главных напряжения растягивающие, то большее обозначаем σ_1 , меньшее — σ_2 , а $\sigma_3 = 0$ (рис. 19, а)



Если одно главное напряжение растягивающее, а другое — сжимающее, то растягивающее как алгебраически большее обозначаем σ_1 , сжимающее как алгебраически меньшее σ_3 , а $\sigma_2 = 0$ (рис. 19, б).



Если оба главных напряжения сжимающие, то алгебраически большее обозначаем σ_2 , меньшее σ_3 , а $\sigma_1 = 0$ (рис. 19, в).

Рис. 19

При плоском напряженном состоянии в неглавных осях одно из нормальных напряжений равно нулю. В этом случае и касательные напряжения, куда входит индекс данного нормального напряжения, также обращаются в нуль. Например, если $\sigma_z = 0$, то $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Тогда плоское напряженное состояние изображают следующим образом (рис. 20):

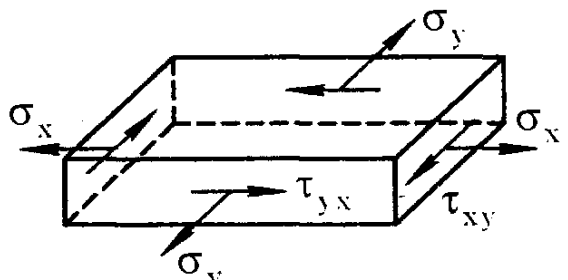
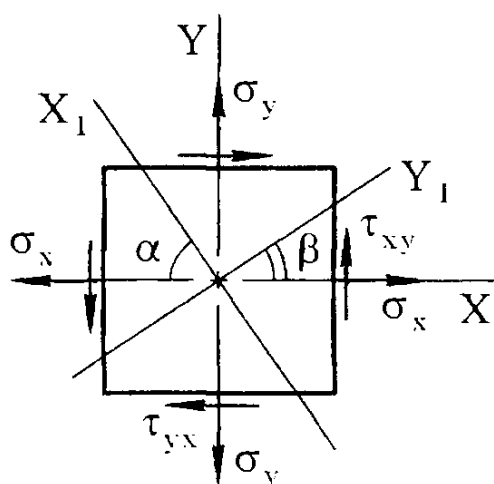


Рис. 20

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{Bmatrix}.$$

Рассмотрим три задачи для плоского напряженного состояния и выведем формулы, позволяющие определять напряжения в различных секущих площадках, проходящих через точку.

2.2.1. Определение напряжений при повороте осей



Дано:

Напряжения σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, α ,
 $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Определить:

Напряжения в наклонных площадках
 σ_{x1} , σ_{y1} , $\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1}$.

Рассмотрим первоначально площадку с нормалью X_1 , повернутую относительно оси X на угол α и определим здесь напряжения σ_{x1} и τ_{x1y1} (рис. 21, а).

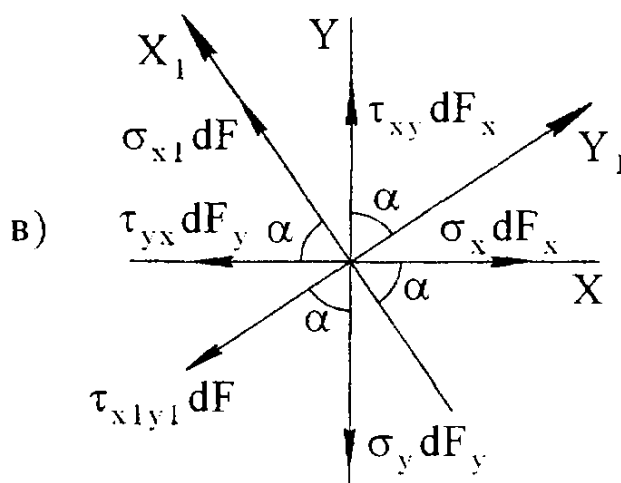
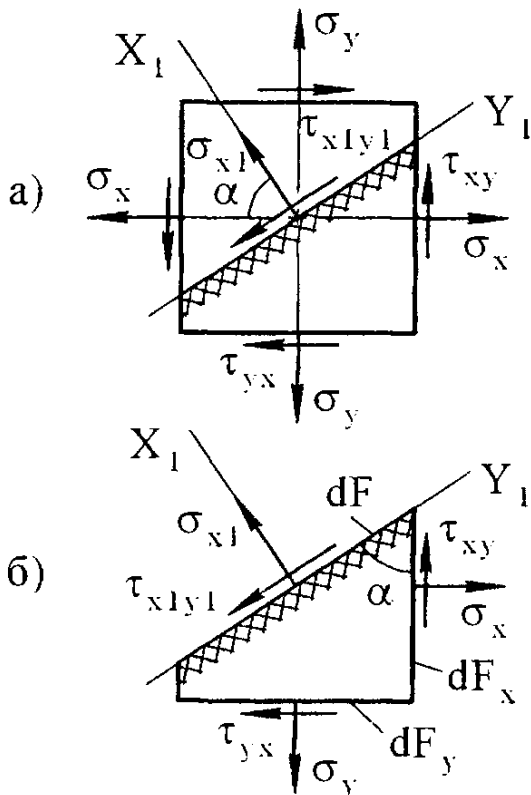


Рис. 21

Мысленно отсечем верхнюю часть элемента (рис. 21, б) и рассмотрим равновесие отсеченной части. Площади рассматриваемой площадки dF и граней треугольника связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos \alpha; \\ dF_y &= dF \sin \alpha. \end{aligned} \quad (44)$$

Так как элемент бесконечно мал, то предполагается, что площадки пересекаются в точке (рис. 21, в). При составлении уравнений равновесия следует помнить, что уравнения составляются не для напряжений, а для сил. Поэтому каждое действующее напряжение следует умножать на площадку его действия:

$$\begin{aligned} \sum X_1 = 0: & \sigma_{x1} dF + \tau_{xy} dF_x \sin \alpha + \tau_{yx} dF_y \cos \alpha - \sigma_x dF_x - \sigma_y dF_y = 0; \\ \sum Y_1 = 0: & -\tau_{x1y1} dF - \tau_{yx} dF_y \sin \alpha - \sigma_y dF_y \cos \alpha + \tau_{xy} dF_x \cos \alpha - \\ & - \sigma_x dF_x \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

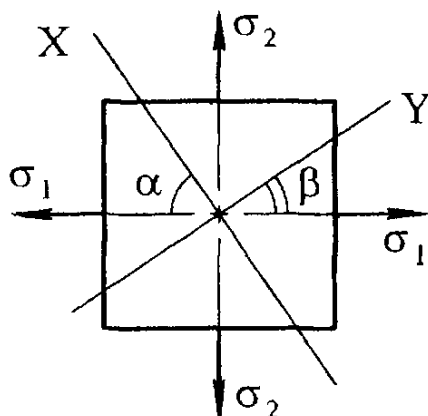
Подставляем сюда значения (44) и рассматривая аналогичным образом площадку с нормалью Y_1 , ортогональную к вышеописанной и наклоненную к площадке X под углом $\beta = (90^\circ - \alpha)$, после преобразования получаем окончательно формулы для определения напряжений в точке при повороте координатных площадок:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \sigma_{y1} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{x1y1} &= \tau_{y1x1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, если известны напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку, мы считаем, напряженное состояние в точке определено полностью, так как используя формулы (45), можно определить напряжения в любых других секущих площадках, проходящих через точку. Рассматривая плоское напряженное состояние как частный случай объемного на-

пряженного состояния, формулы (45) могли бы быть получены из формул (4)-(8), полагая, что $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, а $\beta = (90^\circ - \alpha)$.

2.2.2. Определение напряжений по заданным главным напряжениям. Прямая задача



Дано:

Напряжения σ_1 , σ_2 , α , $\beta = (90^\circ - \alpha)$.

Определить:

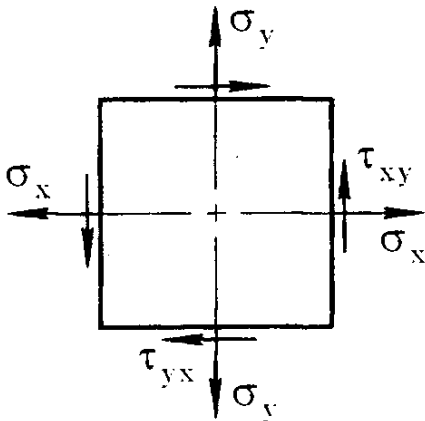
Напряжения в наклонных площадках σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Для решения данной задачи используем формулы (45), позволяющие определять напряжения при повороте координатных осей. Только в качестве заданных теперь будем считать главные площадки, в которых действуют главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2 , а $\tau = 0$. Тогда согласно (45) в координатных площадках X-Y напряжения будут равны

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{46}$$

Рассматривая плоское напряженное состояние как частный случай объемного напряженного состояния, формулы (46) можно было бы получить из формул (11)–(14), принимая $\sigma_3 = 0$, а $\beta = (90^\circ - \alpha)$.

2.2.3. Определение положения главных площадок и главных нормальных напряжений. Обратная задача



Дано:

Напряжения σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Определить:

Положение главных площадок и величину главных нормальных напряжений.

Как было сказано ранее, среди всех напряжений, действующих в точке, главные нормальные напряжения принимают наибольшие значения, т.е. обладают свойством экстремальности. Поэтому именно данная задача по определению величины и направления действия главных нормальных напряжений представляет наибольший интерес с точки зрения прочности элемента.

Так как главные площадки являются площадками, повернутыми по отношению к исходной системе координат X-Y, то для определения их положения используем формулы (45), зная, что в главных площадках касательные напряжения равны нулю:

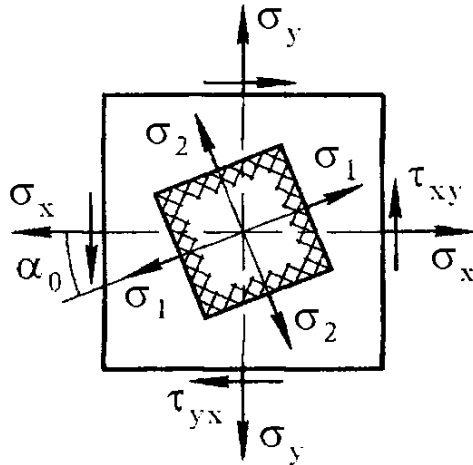
$$\tau_{x_1y_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Отсюда после преобразования получаем формулу для определения положения главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (47)$$

При этом угол α_0 – угол поворота главных площадок относительно исходной системы координат X-Y – при расчете его по формуле (47) может принимать как положительное, так и отрицательное значение, что зависит от величины и знака напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Поэтому, при определении положения главных площадок будем придерживаться следующих правил (рис. 22):



– угол α_0 следует откладывать от алгебраически большего заданного нормального напряжения;

– если α_0 положительный, его следует откладывать против часовой стрелки. И наоборот.

Рис. 22

Подставляя значение α_0 (47) в выражения σ_{x1} и σ_{y1} (45), после преобразования получаем формулу для определения главных нормальных напряжений в данной точке:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]. \quad (48)$$

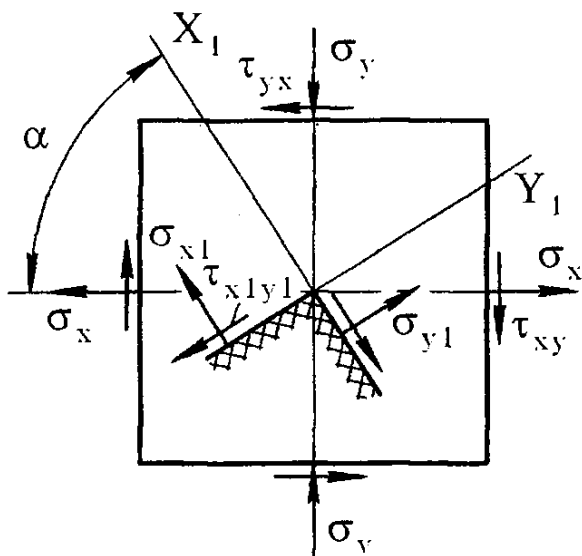
где индекс главным напряжениям назначается в зависимости от полученного знака и числового значения, как это показано на рис. 19 а, б, в.

Задача 8

По граням квадратной пластины, показанной на рисунке, действуют напряжения, равные: $\sigma_x = 50$ МПа, $\sigma_y = -30$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа. Определить напряжения в площадке, расположенной под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению σ_x , а также к ней ортогональной.

Решение.

Указываем на рисунке заданные площадки. Следует иметь ввиду, что при определении положения площадок угол α всегда от-



кладывают от алгебраически большего нормального напряжения. При этом угол, отложенный по часовой стрелке, считается отрицательным и в расчеты подставляется со знаком «минус». И наоборот. Следует также учитывать и знак касательных напряжений, для которых правило знаков, было рассмотрено выше.

Определяем напряжения по формулам (45):

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 50 \cos^2(-60^\circ) +$$

$$+ (-30) \sin^2(-60^\circ) - 20 \sin 2(-60^\circ) = 7,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = 50 \sin^2(-60^\circ) +$$

$$+ (-30) \cos^2(-60^\circ) + 20 \sin 2(-60^\circ) = 12,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{x1y1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \frac{50 - (-30)}{2} \sin 2(-60^\circ) +$$

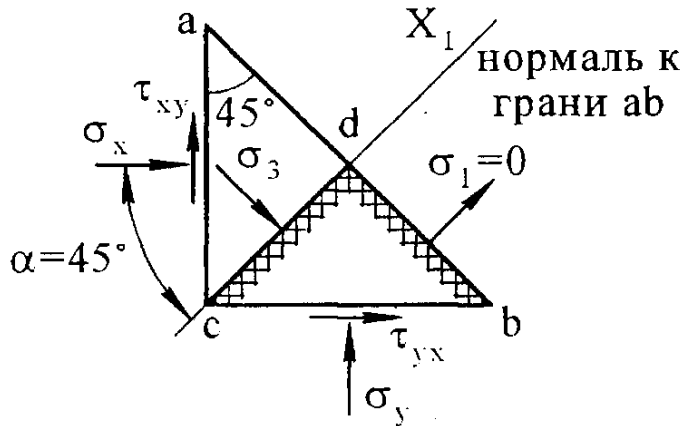
$$+ 20 \cos 2(-60^\circ) = -44,6 \text{ МПа}.$$

Задача 9

По граням **ac** и **cb** треугольного элемента действуют одинаковые сжимающие нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_y = -50 \text{ МПа}$, а также касательные напряжения τ_{xy} . Нормальные напряжения на грани **ab**, расположенной под углом $\alpha = 45^\circ$ к направлению σ_x , равны нулю.

Определить касательные напряжения в гранях **ac** и **cb**, а также величину и направление действия главных нормальных напряжений.

Решение.



Так как грань **ab** является повернутой по отношению к направлению σ_x , используем для определения напряжений в ней первое выражение из (45) и приравняем его к нулю:

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 0;$$

$$\sigma_{x1} = (-50) \cos^2 45^\circ + \sigma_y \sin^2 45^\circ - \tau_{xy} = 0.$$

Отсюда $\tau_{xy} = 50$ МПа.

Положение главных площадок определим по формуле (47):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 50}{(-50) - (-50)} = \infty,$$

откуда $\alpha = 45^\circ$.

Следовательно, как видно из рис., грань **ab** и ей перпендикулярная **cb**, являются главными площадками. Величину главных нормальных напряжений определяем по формуле (48):

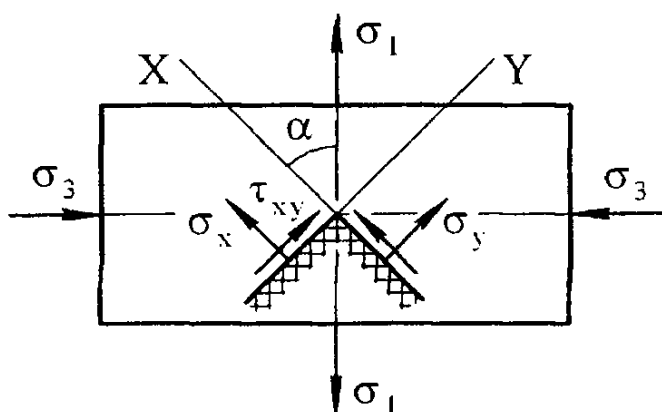
$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(-50 - 50) \pm \sqrt{(-50 - (-50))^2 + 4 \cdot 50^2} \right] = \frac{-100 \pm 100}{2} \text{ МПа,} \end{aligned}$$

откуда $\sigma_1 = 0$ (что соответствует условию задачи $\sigma_1 = \sigma_{x1} = 0$),
 $\sigma_3 = -100$ МПа.

Задача 10

По граням прямоугольного элемента, вырезанного по главным площадкам, действуют нормальные напряжения $\sigma_1 = 160$ МПа и $\sigma_3 = -80$ МПа. Известно, что в двух взаимно перпендикулярных площадках, повернутых по отношению к главным осям, действуют одинаковые нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_y$. Определить, под каким углом к напряжению σ_1 расположены эти площадки и чему равны в них касательные напряжения.

Решение.



Напряжения в повернутых площадках по главным нормальным напряжениям определяются по формуле (46):

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha ;$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha .$$

По условию задачи $\sigma_x = \sigma_y$, поэтому приравниваем выражения, представленные выше:

$$\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha ;$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin^2 \alpha .$$

Отсюда $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, следовательно, $\alpha = 45^\circ$.

Касательные напряжения определяются также по формуле (46):

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{160 - (-80)}{2} = 120 \text{ МПа.}$$

2.1. Объемное напряженное состояние

Необходимым условием объемного напряженного состояния является неравенство нулю всех трех инвариантов тензора напряжений (23), (26) – $I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, I_3 \neq 0$, что подразумевает присутствие всех трех главных нормальных напряжений ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$), если напряженное состояние задается в главных осях, или всех трех нормальных напряжений ($\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z \neq 0$) для неглавных осей.

Данный вопрос по объемному напряженному состоянию целиком и полностью рассмотрен выше (см. пп. 1.1–1.7), где представлены формулы по определению напряжений в различных секущих площадках, проходящих через точку, рассмотрены прямая и обратная задачи, изучены главные касательные и октаэдрические напряжения и площадки их действия. Объемное напряженное состояние является общим случаем напряженного состояния, из которого линейное и плоское напряженные состояния вытекают как частные случаи со всеми соответствующими формулами, также рассмотренными выше.

3. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ. КРУГИ МОРА

Исследование напряженного состояния в точке и определение напряжений в различных секущих площадках можно проводить не с помощью аналитических формул, рассмотренных выше, а графическим способом – путем построения круга напряжений или круга Мора. Круг напряжений строится в масштабе в координатах $\sigma - \tau$ и обладает тем свойством, что каждая его точка дает значение нормальных и касательных напряжений в секущей площадке, расположенной под углом α к исходной системе координат.

Круг напряжений при линейном напряженном состоянии

Дано:

Элемент с поперечным сечением F растягивается силой P , в результате чего в сечении возникает единственное главное нормальное напряжение $\sigma_1 = P/F$.

Определить:

Нормальные и касательные напряжения в площадке X , расположенной под углом α к главной оси 1, а также в площадке, ей ортогональной – σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Определяем указанные напряжения графическим способом – путем построения круга Мора (рис. 23):

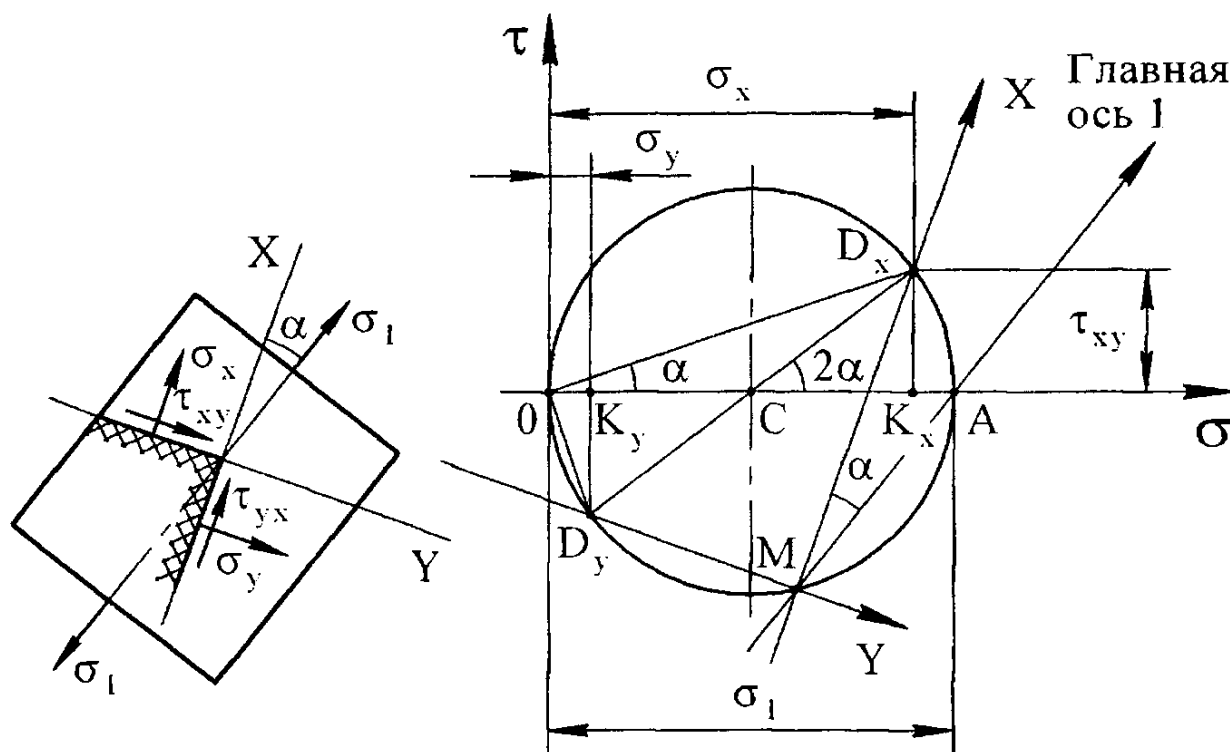


Рис. 23

Круг напряжений (круг Мора) строится следующим образом. По оси σ в положительном ее направлении откладываем в масштабе заданное значение σ_1 . На отрезке OA как на диаметре строим окружность. Чтобы определить напряжения в площадках X - Y , повернутых к главной оси 1 на угол α , откладываем от оси σ угол 2α и

проводим диагональ $D_x D_y$. Проекции точек D_x и D_y на оси σ и τ дадут нам значения σ_x , σ_y и τ_{xy} соответственно.

Докажем, что вышеуказанные построения полностью соответствуют аналитическим формулам (43) для линейного напряженного состояния:

$$\sigma_x = OK_x = OC + CK_x = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \sigma_1 \cos^2 \alpha ;$$

$$\sigma_y = OK_y = OC - CK_y = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 - \cos 2\alpha) = \sigma_1 \sin^2 \alpha ;$$

$$\tau_{xy} = K_x D_x = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha .$$

Отрезки OD_x и OD_y дают значения полных напряжений S_x и S_y в соответствующих площадках, направление которых всегда совпадает с направлением внешней силы.

Кроме значений искомых напряжений на круге Мора можно показать направление осей X-Y по заданной главной оси 1. Для этого следует прежде всего найти на круге **полюс круга напряжений М** (рис. 23), который обладает следующим свойством: если через полюс круга и любую другую его точку, соответствующую какому-либо напряжению σ , провести линию, то она укажет ось направления действия данного напряжения. Так как в задаче задано направление главной оси 1 и на круге Мора напряжению σ_1 соответствует точка А, проводим через нее линию, параллельную оси 1 (направление оси 1 показано на рис. 23 слева). Точка пересечения этой линии с кругом напряжений дает нам полюс круга М. Далее, проводя линии через полюс М и точки D_x и D_y , мы получаем оси X-Y, т.е. оси направления действия этих напряжений.

Аналогичным образом строится круг для осевого сжатия, когда действует единственное главное напряжение σ_3 . Однако так как напряжение σ_3 отрицательно, его следует откладывать в отрицательном направлении оси σ и тогда круг Мора будет расположен

слева от оси τ . При этом напряжения σ_x и σ_y также будут отрицательными (сжимающими).

Круг напряжений при плоском напряженном состоянии.

Прямая задача

Дано:

Элемент находится в плоском напряженном состоянии под действием растягивающих напряжений σ_1 и σ_2 .

Определить:

Нормальные и касательные напряжения в площадках X-Y, повернутых по отношению к главным на угол α .

Строим круг Мора по заданным главным напряжениям σ_1 и σ_2 (рис. 24).

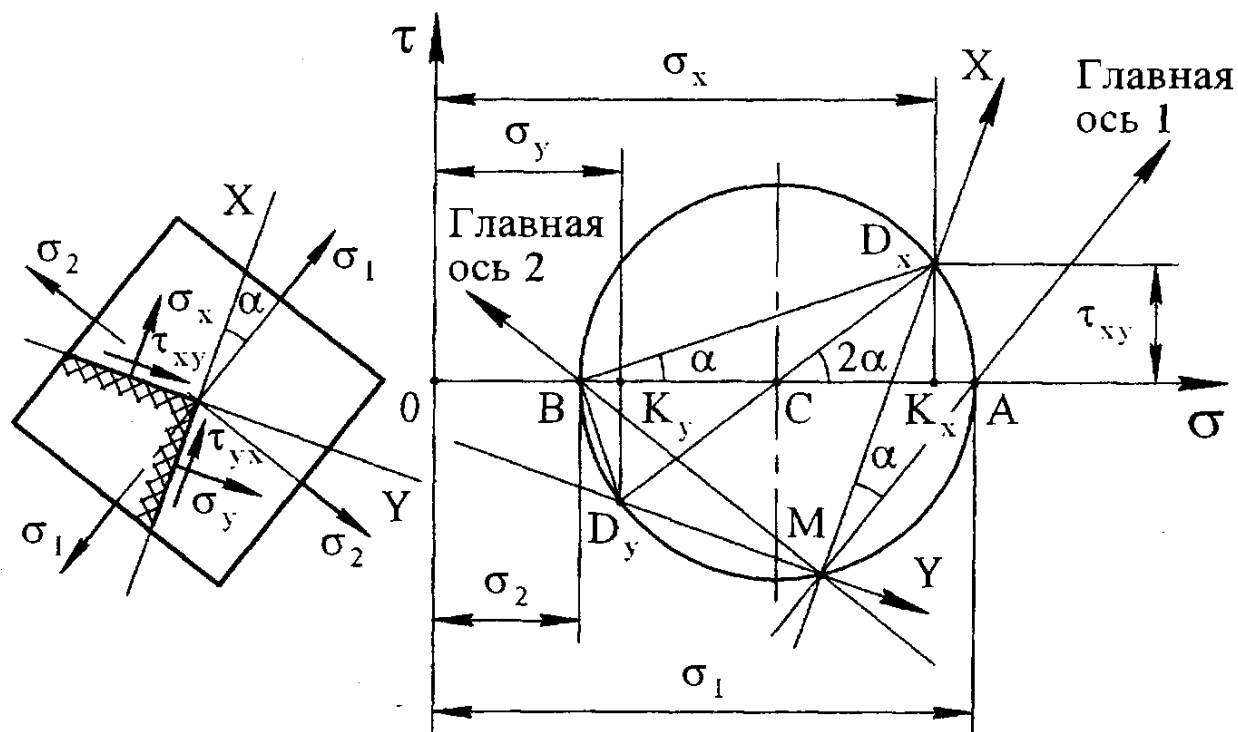


Рис. 24

Так как оба заданных главных напряжения растягивающие (положительные), откладываем в масштабе их значения в положительном направлении оси σ . На отрезке АВ как на диаметре строим окружность. Для определения напряжений в площадках X-Y откладываем двойной угол их поворота относительно главных осей и проводим диагональ $D_x D_y$. Проекции точек D_x и D_y на оси σ и τ дадут нам значения σ_x , σ_y и τ_{xy} соответственно. Несложно доказать, что данные построения (рис. 24) полностью соответствуют аналитическим формулам (46) для данного случая:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= OK_x = OB + BC + CK_x = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2} (1 - \cos 2\alpha) = \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha ; \\ \sigma_y &= OK_y = OB + BC - CK_y = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2} (1 + \cos 2\alpha) = \\ &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha ; \\ \tau_{xy} &= K_x D_x = K_y D_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .\end{aligned}$$

Отрезки BD_x и BD_y дают значения полных напряжений S_x и S_y в соответствующих площадках.

Круг напряжений для плоского напряженного состояния строится полностью по аналогии с кругом для линейного напряженного состояния. Аналогичным образом находится полюс круга М и указывается направление осей X-Y, т.е. направление действия напряжений σ_x и σ_y . Отличие круга для плоского напряженного со-

стояния заключается лишь в том, что он смещен от оси τ либо может пересекать ее, если одно из главных напряжений отрицательное (сжимающее).

Круг напряжений при плоском напряженном состоянии. Обратная задача

Дано:

Элемент находится в плоском напряженном состоянии, для которого заданы напряжения в неглавных осях — σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Определить:

Величину и направление действия главных нормальных напряжений.

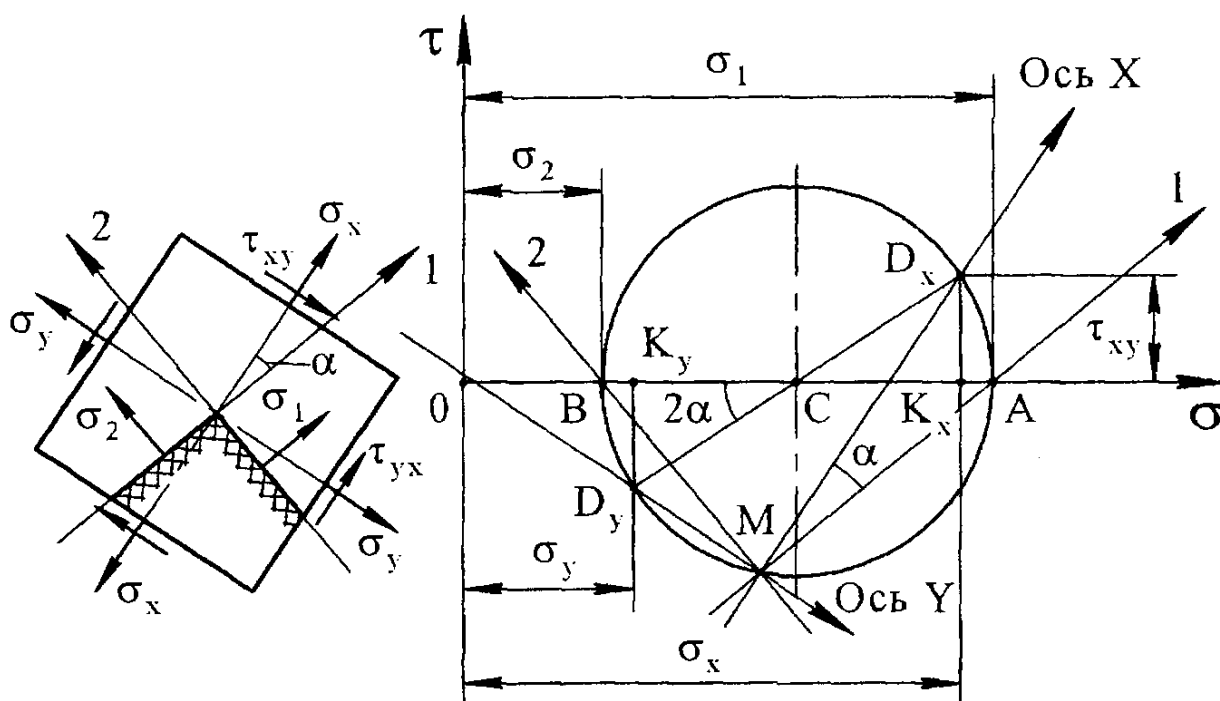


Рис. 25

Строим круг Мора по заданным напряжениям σ_x , σ_y и τ_{xy} (рис. 25). Откладываем в масштабе по осям σ - τ заданные значения

σ_x (точка K_x), σ_y (точка K_y) и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (отрезки $K_x D_x = K_y D_y$). Соединяем точки D_x и D_y и на полученном отрезке как на диаметре строим окружность. Точки пересечения окружности с осью σ дают нам отрезки, равные искомым главным напряжениям: $OA = \sigma_1$, $OB = \sigma_2$.

Несложно доказать, что проведенные построения полностью соответствуют аналитическим формулам (47)-(48):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{K_x D_x}{CK_x} = \frac{K_y D_y}{CK_y} = \pm \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y};$$

$$\sigma_1 = OA = OK_y + K_y C + CA (\text{прим. } CA = CD_x) = \sigma_y + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right].$$

Аналогично можно рассмотреть σ_2 как $\sigma_2 = OB = OK_y + K_y C - CB$ и доказать соответствие вышеназванным формулам.

На круге Мора можно также показать направление действия главных напряжений (положение главных осей), для чего следует сначала найти полюс круга напряжений M способом, рассмотренным ранее, а затем провести линии через полюс M и точки A и B , соответствующие значениям главных напряжений на круге Мора.

Круги напряжений при объемном напряженном состоянии

Исследование напряженного состояния в точке при трехосном нагружении с помощью аналитических формул, рассмотренных выше, часто представляется задачей достаточно громоздкой и в некоторых случаях ее проще решать графическим способом путем построения круга напряжений. Такое решение дает графическое представление о совокупности векторов нормального σ_n и кас-

тельного τ_n напряжений, действующих в различных секущих площадках, рассматриваемых в системе главных осей. Диаграмму напряжений строят по заданным главным нормальным напряжениям, придерживаясь соотношения (10): $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Рассмотрим точку, находящуюся в объемном напряженном состоянии, и выделим в ней три системы секущих площадок, параллельных направлению одного из главных напряжений (рис. 26):

- площадки I параллельны σ_1 ;
- площадки II параллельны σ_2 ;
- площадки III параллельны σ_3 .

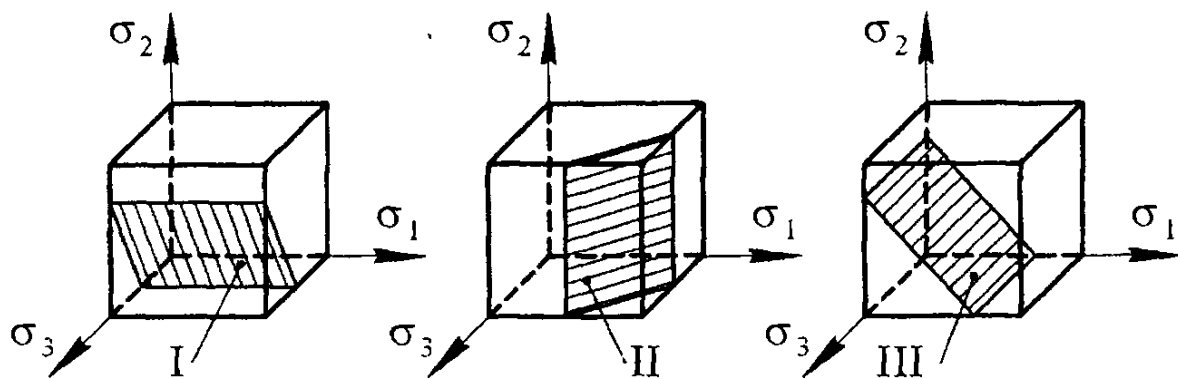


Рис. 26

Площадки, параллельные какой-либо главной оси, составляют с этой осью угол 90° :

- для площадок серии I $\alpha = 90^\circ$;
- для площадок серии II $\beta = 90^\circ$;
- для площадок серии III $\gamma = 90^\circ$.

Тогда на основании формулы (13) нормальные напряжения в площадках серии I, II, III будут соответственно равны:

- в площадках серии I: $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma$;
- в площадках серии II: $\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \gamma$;
- в площадках серии III: $\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta$.

А это означает, что напряжения в данных наклонных площадках не зависят от того главного напряжения, к которому эта площадка параллельна. Следовательно, напряженное состояние в этих пло-

щадках является плоским и круги напряжений для них можно построить как для плоского напряженного состояния (рис. 27). В результате – круг I описывает напряженное состояние в площадках, параллельных σ_1 ; круг II – в площадках, параллельных σ_2 ; круг III – в площадках, параллельных σ_3 .

Напряжения в любой другой площадке, непараллельной ни одной из главных осей, определяются точками в заштрихованной области.

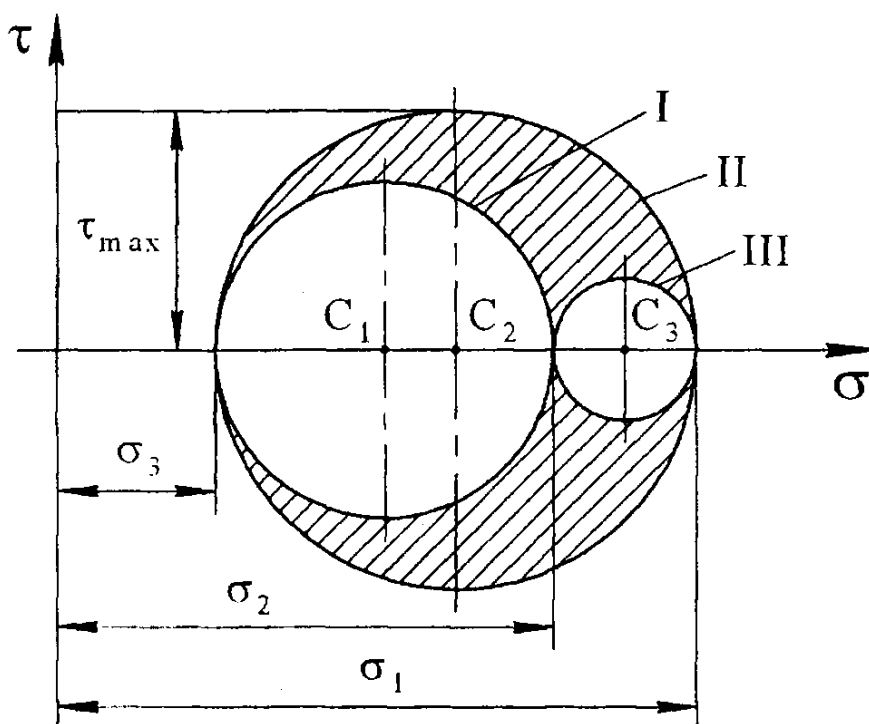


Рис. 27

Таким образом, три круга Мора полностью характеризуют напряженное состояние в точке, позволяя получать нормальное и касательное напряжения в любой секущей площадке, проходящей через нее.

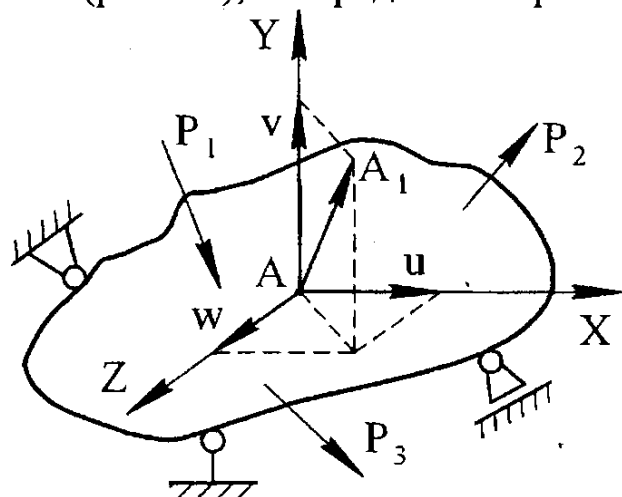
Как видно из рис.27, наибольшее касательное напряжение всегда действует в площадках, параллельных главной оси 2 и равно полуразности алгебраически большего и алгебраически меньшего нормальных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (49)$$

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

При нагружении тела внешней нагрузкой происходит изменение его размеров, объема и формы, что связано с перемещением точек внутри материала.

Рассмотрим элемент, нагруженный системой уравновешенных сил (рис. 28), и определим перемещения и деформации в точке A .



Вектор AA_1 , имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец — в той же точке деформированного тела, называется вектором полного перемещения точки

Рис. 28

Составляющие вектора полного перемещения по координатным осям X - Y - Z обозначаются соответственно u , v , w и имеют размерность длины.

Интенсивность изменения размеров и формы в точке нагруженного тела характеризуется деформацией, которая является количественной мерой изменения геометрических размеров в окрестности точки. Деформации различают линейные (ϵ) и угловые (γ) и они имеют различную величину по различным направлениям и плоскостям для одной и той же точки нагруженного тела.

Совокупность линейных и угловых деформаций, возникающих в различных направлениях и плоскостях, проходящих через точку, называется деформированным состоянием в точке.

Деформация — величина безразмерная. В дальнейшем для удобства расчетов мы будем рассматривать составляющие линейных

($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) и угловых ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$) деформаций для выбранной в данной точке системы координат X-Y-Z.

Между перемещениями и деформациями существует зависимость.

Выделим в окрестности точки в системе координат X-Y-Z элементарный параллелепипед (рис. 29) и рассмотрим одну из его граней ABCD, для которой определим изменение размеров и формы.

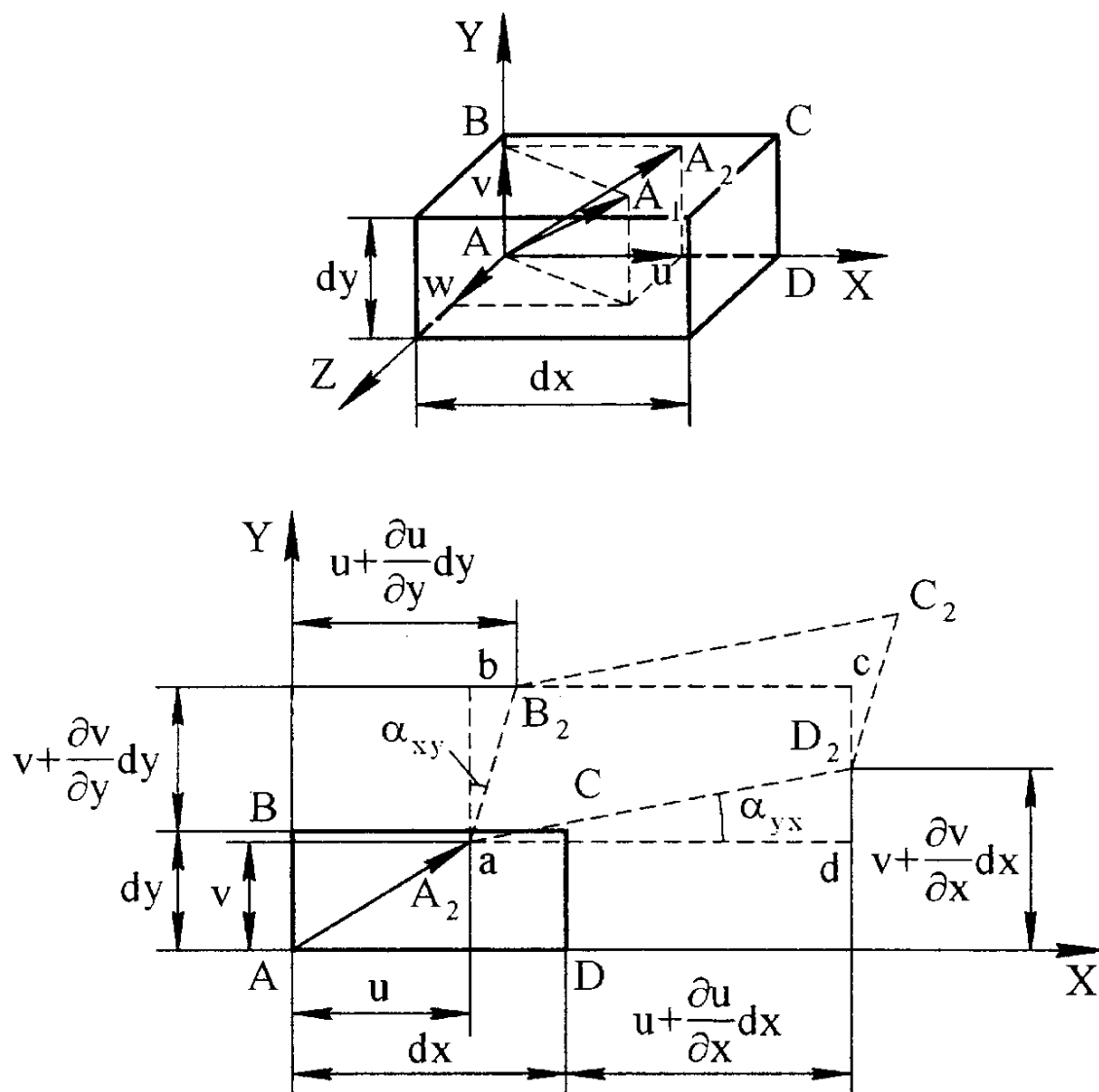


Рис. 29

Определим относительные линейные деформации ϵ_x и ϵ_y точки A в направлении осей X-Y, что соответствует относительному удлинению граней AD и AB.

Первоначальная длина грани AD равна $l_{AD} = dx$. Если точка A переместилась в направлении X на величину u , то точка D в том же направлении переместилась на $(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$, где $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ – приращение перемещения u на длине отрезка AD. Следовательно, длина отрезка AD после деформации будет

$$l_{ad} = \left[dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \right] - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Тогда линейная деформация в направлении оси X равна

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_{AD}} = \frac{l_{ad} - l_{AD}}{l_{AD}} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно удлинения отрезка AB в направлении оси Y, получаем

$$l_{AB} = dy \quad l_{ab} = \left[dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) \right] - v = dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy;$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta l}{l_{AB}} = \frac{l_{ab} - l_{AB}}{l_{AB}} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Кроме линейных деформаций (изменения размеров) грань ABCD испытывает также изменение формы, т.е. искажение первоначально прямых углов (рис. 29). Суммарная угловая деформация (угол сдвига) грани ABCD в плоскости X-Y равна

$$\gamma_{xy} = \alpha_{yx} + \alpha_{xy}.$$

При определении углов α_{yx} и α_{xy} будем считать, что в силу малости деформаций $\operatorname{tg} \alpha_{yx} \approx \alpha_{yx}$ и $\operatorname{tg} \alpha_{xy} \approx \alpha_{xy}$. Тогда на основании рис. 29 получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_{yx} \approx \alpha_{yx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{xy} \approx \alpha_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy}.$$

Так как слагаемые $\frac{\partial u}{\partial x} dx \ll dx$ и $\frac{\partial v}{\partial y} dy \ll dy$, ими в расчетах можно пренебречь и тогда окончательно получаем угловую деформацию в точке А в плоскости X-Y:

$$\gamma_{xy} = \alpha_{yx} + \alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определяя аналогичным образом линейные и угловые деформации точки А по другим направлениям и плоскостям в системе координат X-Y-Z, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (50)$$

Уравнения (50) называются уравнениями О.Л. Коши и они связывают перемещения точки с линейными и угловыми деформациями в ней.

Деформированное состояние в точке, так же как и напряженное, можно представить в виде тензора деформаций T_ε (51). При этом, что касается сдвиговых деформаций, то безразлично, какие относительные значения будут иметь углы α_{yx} и α_{xy} , лишь бы их сумма оставалась постоянной и равной γ . Это дает возможность представить угловые деформации в виде двух, рассматривая половины значений γ и принимая индексы аналогично, как это было сделано для

углов (например, $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ и $\frac{1}{2} \gamma_{yx}$). Тогда тензор деформаций имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (51)$$

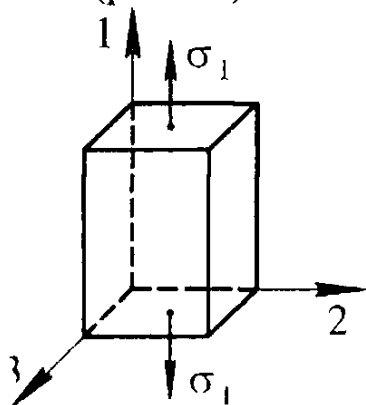
Сравнивая тензор деформаций (51) с тензором напряжений (1), нетрудно заметить, что тензор (51) имеет ту же структуру, полученную путем замены в тензоре (1) напряжений σ на ε , а напряжений τ на $\frac{1}{2} \gamma$ с сохранением соответствующих индексов. Такая замена полностью соответствует физической сущности вопроса, так как нормальные напряжения σ вызывают только изменение размеров элемента, но не искажают его формы, а значит, они связаны с линейными деформациями ε . Касательные напряжения τ , наоборот, не изменяют размеры элемента, но искажают его форму, а значит, связаны только с деформацией сдвига γ . А поэтому, для исследования деформированного состояния в точке и решения всех основных вопросов - определение деформаций в наклонных площадках, понятие главных линейных деформаций (ε_1 , ε_2 , ε_3), решение прямых и обратных задач, рассмотрение частных случаев, запись и использование инвариантов тензора деформаций и т.п. — целиком и полностью можно использовать формулы, полученные в теории напряженного состояния путем соответствующей замены значков, о чем было сказано выше.

Однако здесь следует особо выделить вопрос, касающийся соответствия видов деформированного и напряженного состояния, которые по своему смыслу не всегда совпадают. Например, при осевом растяжении имеет место *линейное напряженное состояние*, но *объемное деформированное*, так как элемент получает деформации по трем направлениям. Аналогичное несоответствие может наблюдаться также при плоском и объемном нагружении. А это значит,

что возможны различные комбинации схем напряженного и деформированного состояния, что важно учитывать в расчетах на прочность, жесткость, а также при разработке технологических операций обработки материалов.

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Рассмотрим элемент, находящийся в состоянии линейного напряженного состояния (осевое растяжение) и определим для него относительные линейные деформации по направлению главных осей (рис. 30):



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E};$$

$$\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E};$$

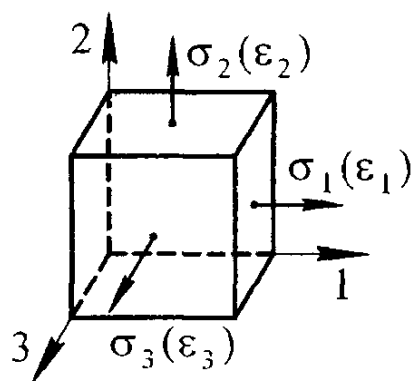
$$\varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E},$$

Рис. 30

где ε_1 — продольная деформация в направлении действующего напряжения, определяемая по закону Гука; ε_2 и ε_3 — поперечные по отношению к σ_1 деформации, связанные с продольными деформациями через коэффициент Пуассона.

По аналогии с данным примером рассмотрим случай объемного напряженного состояния (рис. 31) и определим линейные деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 , возникающие по направлению главных напряжений. При этом следует иметь в виду, что каждая из этих деформаций зависит не только от напряжения по своему направлению, но и от всех трех главных напряжений.

Используя принцип независимости действия сил, определим сначала деформацию ε_1 как сумму деформаций в направлении главной оси 1 от каждого из напряжений в отдельности:



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1(\sigma_1)} + \varepsilon_{1(\sigma_2)} + \varepsilon_{1(\sigma_3)}, \quad (52)$$

где $\varepsilon_{1(\sigma_1)}$ является продольной деформацией по отношению к σ_1 (рис. 31, а) и определяется как

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E};$$

$\varepsilon_{1(\sigma_2)}$ и $\varepsilon_{1(\sigma_3)}$ являются поперечными деформациями по отношению к σ_2 и σ_3 соответственно (рис. 31, б, в) и определяются как

$$\varepsilon_{1(\sigma_2)} = -\mu \varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E};$$

$$\varepsilon_{1(\sigma_3)} = -\mu \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Подставляем полученные выражения в (52):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \end{aligned}$$

где E – модуль упругости первого рода или модуль Юнга, характеризует жесткость материала при растяжении (сжатии), определяется экспериментально; μ – коэффициент поперечной деформации

или коэффициент Пуассона, характеризует способность материала к поперечной деформации, имеет значения в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$, определяется экспериментально.

Определяя аналогичным образом деформации по направлениям σ_2 и σ_3 , окончательно получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (53)$$

Формулы (53) называются *обобщенным законом Гука для изотропного тела в главных осях*. Так как касательные напряжения в главных площадках равны нулю, значит, по главным направлениям углы сдвига также равны нулю.

Обобщенный закон Гука справедлив не только для главной системы координат, но и для любой произвольной системы X-Y-Z, проходящей через точку. В этом случае связь между напряжениями и деформациями принимает вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},\end{aligned}\quad (54)$$

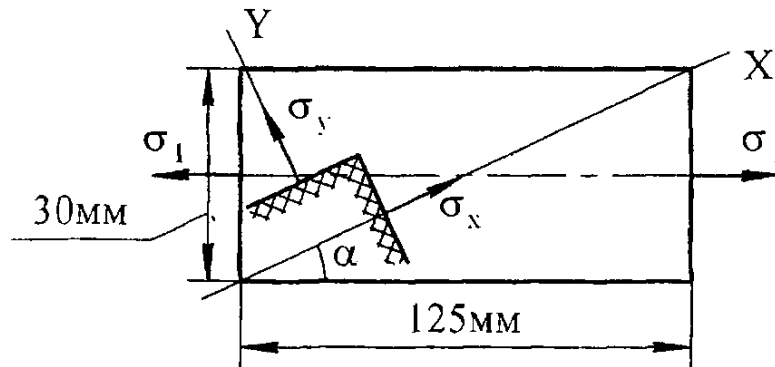
где G – модуль упругости второго рода или модуль сдвига, характеризует жесткость материала при сдвиге и кручении.

Как видно из формул (53) и (54), линейные деформации не зависят от касательных напряжений, а угловые – от нормальных, что подтверждает: нормальные напряжения приводят только к изменению размеров, а касательные – только к искажению формы (т.е. искажению первоначально прямых углов). Формулы (53) и (54) позволяют также переходить к плоскому и линейному напряженному состояниям, рассматривая их как частный случай, когда одно или два нормальных напряжения равны нулю.

Задача 11

Стальная полоса указанных размеров подвергается действию растягивающего напряжения σ_1 . Чему должно быть равно это напряжение, чтобы удлинение диагонали не превышало $\Delta l = 0,1$? Принять для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,24$.

Решение.



Первоначальная длина диагонали

$$l_0 = \sqrt{125^2 + 30^2} = 128,5 \text{ мм}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{125} = 0,24; \quad \alpha = 13,5^\circ.$$

Согласно условию задачи относительная линейная деформация диагонали не должна превышать

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,1}{128,5} = 0,00078. \quad (\text{a})$$

Но с другой стороны, удлинение диагонали (в направлении оси X) согласно закону Гука определяется напряжениями σ_x и σ_y (см. рисунок) и в соответствии с формулами (54) равно

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y),$$

где $\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha;$

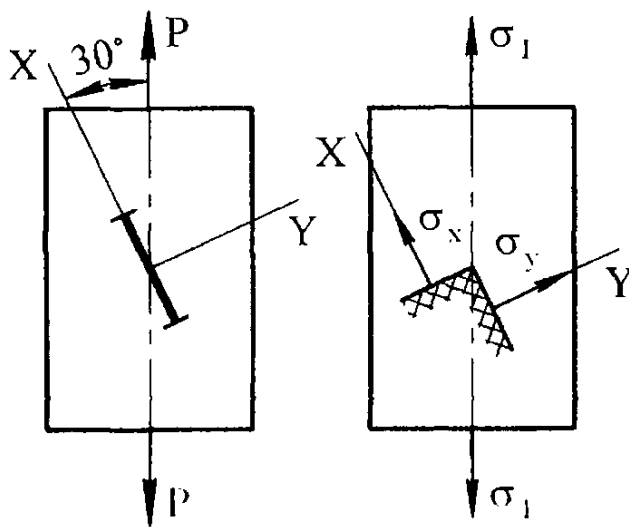
$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_1 \cos^2 \alpha - \mu \sigma_1 \sin^2 \alpha) = \frac{\sigma_1}{E} (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha). \quad (6)$$

Приравниваем выражения (а) и (б) и определяем σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_x E}{\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha} = \frac{0,00078 \cdot 2 \cdot 10^5}{\cos^2 13,5^\circ - 0,24 \sin^2 13,5^\circ} = 167 \text{ МПа}.$$

Задача 12



Стальная полоса прямоугольного сечения $1 \times 2 \text{ см}^2$ растягивается силой $P = 20 \text{ кН}$. На поверхности образца под углом 30° к оси наклеен тензодатчик (см. рисунок), показывающий линейную деформацию $\varepsilon_x = 0,00034$. Определить коэффициент Пуассона материала, если $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} = \frac{20 \cdot 10^3}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 100 \cos^2 30^\circ = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha = 100 \sin^2 30^\circ = 25 \text{ МПа};$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y),$$

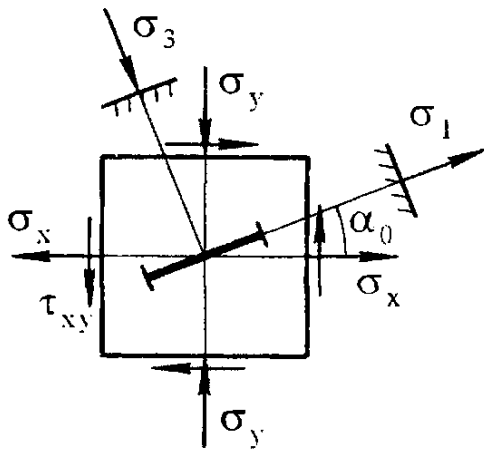
отсюда

$$\mu = \frac{\sigma_x - \varepsilon_x E}{\sigma_y} = \frac{75 - 0,00034 \cdot 2 \cdot 10^5}{25} = 0,28.$$

Задача 13

Стальная пластина находится под действием напряжений, как показано на рисунке: $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = -40$ МПа, $\tau_{xy} = -50$ МПа (согласно правилу знаков). В каком направлении следует приклеить на пластине тензодатчик, чтобы он показывал наибольшую линейную деформацию? Вычислить эту деформацию. Принять для стали $\mu = 0,25$ и $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.



Среди всех деформаций, возникающих в точке, наибольшей является линейная деформация в направлении наибольшего главного напряжения σ_1 , т.е. ε_1 . Поэтому для определения направления, в котором следует приклеить тензодатчик, чтобы он показывал наибольшую деформацию ε_1 , нужно найти направление действия σ_1 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-50)}{100 - (-40)} = +0,7143; \quad \alpha_0 = 17,8^\circ.$$

Главные напряжения в точке равны (48):

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(100 - 40) \pm \sqrt{(100 - (-40))^2 + 4(-50)^2} \right] = \frac{60 \pm 172}{2} \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Отсюда $\sigma_1 = 116 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -56 \text{ МПа}$.

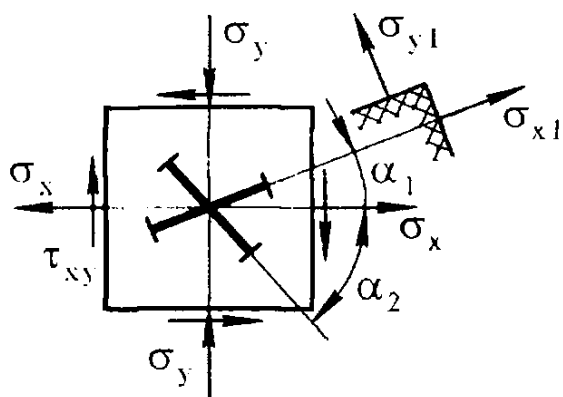
Наибольшая линейная деформация ε_1 определяется по закону Гука (53):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [116 - 0,25(-56)] = 0,00065.$$

Задача 14

Квадратная тонкая пластина из стали нагружена по краям напряжениями, как показано на рисунке: $\sigma_x = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_y = -60 \text{ МПа}$, $\tau_{xy} = 30 \text{ МПа}$. Найти направление, по которому линейная деформация в пластине будет отсутствовать. Принять $\mu = 0,25$.

Решение.



Предположим, линейная деформация будет отсутствовать в направлении X_1 . Тогда на основании закона Гука имеем:

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{E}(\sigma_{x_1} - \mu\sigma_{y_1}) = 0,$$

откуда

$$\sigma_{x_1} - \mu\sigma_{y_1} = 0. \quad (a)$$

Используем формулы (45) для определения напряжений при повороте площадок и подставим их в (a):

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$(\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha) - \\ - \mu(\sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha) = 0.$$

Разделим слагаемые на $\cos^2 \alpha$, и группируя их, после преобразования получаем квадратное уравнение:

$$(\sigma_y - \mu\sigma_x) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\tau_{xy}(1 + \mu) \operatorname{tg} \alpha + (\sigma_x - \mu\sigma_y) = 0;$$

$$(-60 - 0,25 \cdot 20) \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \cdot 30(1 + 0,25) \operatorname{tg} \alpha + (20 - \mu \cdot (-60)) = 0;$$

$$65 \operatorname{tg}^2 \alpha + 75 \operatorname{tg} \alpha - 35 = 0.$$

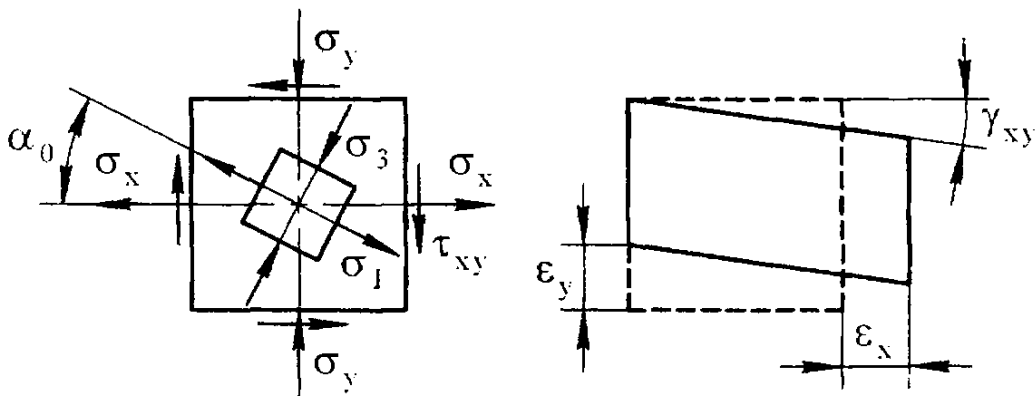
Решением квадратного уравнения (б) являются два корня:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,356, \text{ откуда } \alpha_1 = 19,6^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -1,51, \text{ откуда } \alpha_2 = -56,5^\circ.$$

Таким образом, имеются два направления на пластине, по которым будет отсутствовать линейная деформация (см. рисунок).

Задача 15



Напряженное состояние элемента, вырезанного из стальной детали, показано на рисунке. При этом возникают соответствующие деформации: $\epsilon_x = 0,00053$; $\epsilon_y = -0,00018$; $\gamma_{xy} = 0,0012$. Определить

величину и направление главных напряжений. Принять для стали:
 $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение.

По закону Гука (45):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Отсюда $\tau_{xy} = \gamma_{xy}G = 0,0012 \cdot 8 \cdot 10^4 = 96$ МПа.

Решая систему уравнений, определяем остальные напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_x = \varepsilon_x E + \mu\sigma_y; \\ \sigma_y = \varepsilon_y E + \mu\sigma_x, \end{cases}$$

откуда получаем $\sigma_x = 105$ МПа; $\sigma_y = -5$ МПа.

Положения главных площадок определяем по формуле (47):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 96}{105 - (-5)} = -1,7455; \quad \alpha_0 = -30^\circ.$$

Главные нормальные напряжения равны (48):

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(105 - 5) \pm \sqrt{(105 - (-5))^2 + 4 \cdot 96^2} \right] = \frac{100 \pm 220}{2} \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Отсюда $\sigma_1 = 160$ МПа; $\sigma_3 = -60$ МПа.

Задача 16

Алюминиевый кубик со стороной $a = 20$ мм вставлен в гнездо массивной плиты, которую можно считать абсолютно жесткой. Кубик вставлен с зазором $\Delta_1 = 0,004$ мм и $\Delta_2 = 0,003$ мм, как показано на рисунке, и сжимается силой $P = 50$ кН. Определить в кубике главные напряжения и главные линейные деформации. Принять для алюминия $\mu = 0,36$, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

Напряжение в направлении силы является наибольшим по величине, но так как оно сжимающее, обозначаем его σ_3 :

$$\sigma_3 = -\frac{P}{F} = -\frac{50 \cdot 10^3}{20 \cdot 20} = -125 \text{ МПа.}$$

Сжимаясь, кубик получает абсолютные деформации, равные зазорам. Тогда относительные его деформации будут соответственно равны (см. рисунок):

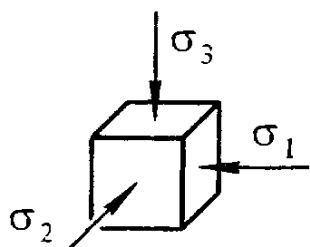
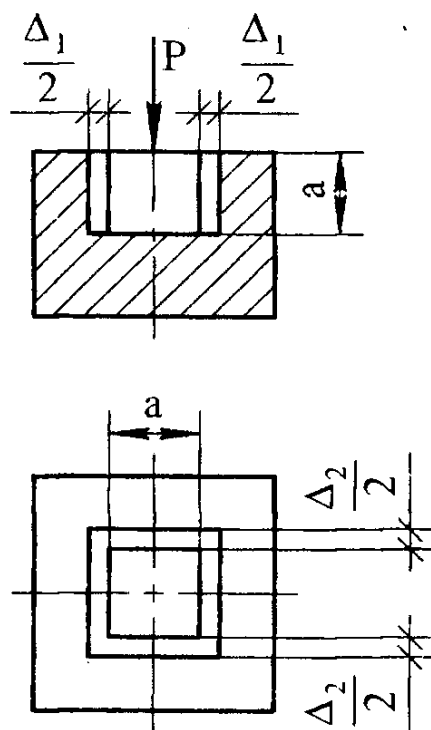
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{a} = \frac{0,004}{20} = 0,0002;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta_2}{a} = \frac{0,003}{20} = 0,00015.$$

Эти же деформации на основании закона Гука равны (53):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)].$$



Преобразовывая выражения к виду, показанному ниже, и используя полученное значение σ_3 , получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, которую решаем относительно напряжений σ_1 и σ_2 :

$$\begin{cases} \sigma_1 - \mu\sigma_2 = \varepsilon_1 E + \mu\sigma_3; \\ \sigma_2 - \mu\sigma_1 = \varepsilon_2 E + \mu\sigma_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 - 0,36\sigma_2 = 0,0002 \cdot 0,7 \cdot 10^5 + 0,36(-125); \\ \sigma_2 - 0,36\sigma_1 = 0,00015 \cdot 0,7 \cdot 10^5 + 0,36(-125). \end{cases}$$

Отсюда $\sigma_1 = -50$ МПа; $\sigma_3 = -52,5$ МПа.

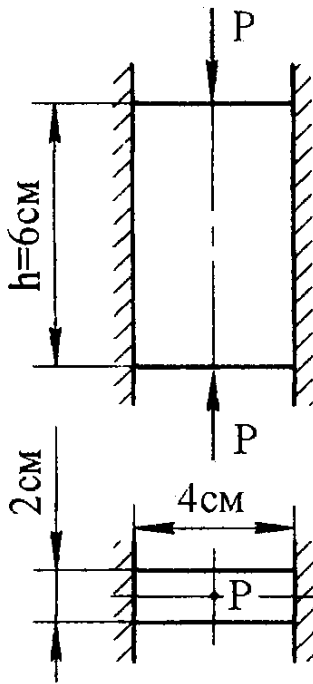
Линейная деформация в направлении σ_3 будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} [(-125) - 0,36 \cdot (-50 - 52,5)] = \\ &= -0,0013. \end{aligned}$$

Задача 17

Между параллельными неподвижными абсолютно жесткими плитами плотно вставлен стальной брус, имеющий форму параллелепипеда с размерами сечения 2×4 см² и высотой $h = 6$ см (см. рисунок). Брус сжимается силой P , в результате чего возникает давление на боковые стенки, равное $p = 40$ Н/мм² и происходит уменьшение его высоты на $\Delta h = 0,045$ мм. Определить силу P , сжимающую брус, и коэффициент Пуассона материала, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.



Определяем напряжения, возникающие в бруссе:

– наибольшее по модулю напряжение возникает в направлении силы P :

$$\sigma_3 = \frac{P}{F}; \quad (a)$$

– со стороны стенки возникает второе главное напряжение, также сжимающее, равное

$$\sigma_2 = p = 40 \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)};$$

– в направлении, перпендикулярном чертежу,

$$\sigma_1 = 0.$$

Согласно обобщенному закону Гука, деформации в направлении σ_2 и σ_3 определяются как

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_3) \text{ и } \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_2),$$

при этом $\varepsilon_2 = 0$, а $\varepsilon_3 = \Delta h/h$. Тогда получаем

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_3); \quad \sigma_2 - \mu\sigma_3 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_2}{\mu}; \quad (б)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_2}{\mu} - \mu\sigma_2\right) = \frac{\sigma_2}{\mu E}(1 - \mu^2). \quad (в)$$

Преобразуем выражение (в) и получаем квадратное уравнение вида

$$\frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{\mu E}{\sigma_2} = 1 - \mu^2;$$

$$\frac{0,045}{60} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{40} \mu = 1 - \mu^2;$$

$$\mu^2 + 3,75\mu - 1 = 0,$$

решением которого являются два корня – положительный и отрицательный, не имеющий смысла. Поэтому принимаем положительное значение $\mu = 0,25$. Далее на основании (а) и (б) определяем силу P :

$$\sigma_3 = \frac{P}{F} = \frac{\sigma_2}{\mu};$$

$$P = \frac{\sigma_2 F}{\mu} = \frac{40 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^2}{0,25} = 128000 \text{ Н} = 128 \text{ кН}.$$

6. ЧИСТЫЙ СДВИГ КАК ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ. ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ

Вид нагружения, когда в сечении элемента действует только поперечная сила Q или крутящий момент $M_{кр}$, а остальные внутренние силы равны нулю, называется *чистым сдвигом*. В этом случае в точках сечения действуют только касательные напряжения, а потому с точки зрения теории напряженного состояния чистому сдвигу можно дать следующее определение:

Чистым сдвигом называется такой вид напряженного состояния, когда на гранях элемента, выделенного в окрестности точки, действуют только касательные напряжения, а нормальные равны нулю.

Площадки, в которых действуют эти касательные напряжения, называются площадками чистого сдвига.

На практике примеры чистого сдвига встречаются крайне редко, чаще всего деформация сопровождается деформацией растяжения или сжатия, т.е. в площадках действуют не только касательные, но и нормальные напряжения.

Установим, при каких видах деформаций и при каких условиях может возникнуть чистый сдвиг.

Линейное напряженное состояние.

Согласно рис. 16 и формулам (43) видно, что невозможно найти такое значение угла α (т.е. найти такие площадки), в которых бы $\tau \neq 0$, а $\sigma = 0$:

$$\text{— при } \alpha = 0 \quad \sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = 0, \text{ но и } \tau_{xy} = 0;$$

$$\text{— при } \alpha = 90^\circ \quad \sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma_1, \text{ но и } \tau_{xy} = 0,$$

где для указанных значений α мы получаем главные площадки, в которых действуют главные нормальные напряжения, а касательные равны нулю. Следовательно, при линейном напряженном состоянии нет точек, находящихся в состоянии чистого сдвига.

Плоское напряженное состояние

Согласно формулам (46) для определения напряжений в наклонных площадках (прямая задача) видно, что чистый сдвиг возможен в точках только при условии, если в главных площадках здесь действуют равные по величине, но противоположные по знаку главные нормальные напряжения и только площадках, расположенных под углом $\alpha = 45^\circ$ по отношению к главным (рис. 32, а):

$$\sigma_{\max} = \sigma_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3; \quad \sigma_1 = -\sigma_3.$$

Тогда на основании формул (46), подставив значения $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_1 = -\sigma_3$ (если заданы главные напряжения σ_1 и σ_3 , то в (46) σ_2 следует заменить на σ_3), получаем значение касательных напряжений в площадках чистого сдвига (рис. 32, б, прямая задача):

$$\tau = \pm \sigma_{1,3}. \quad (55a)$$

Аналогичный результат можно получить, если площадки чистого сдвига и τ считать заданными (рис. 32, в), тогда на основании (47), (48), решая обратную задачу, получаем, что в точках чистого

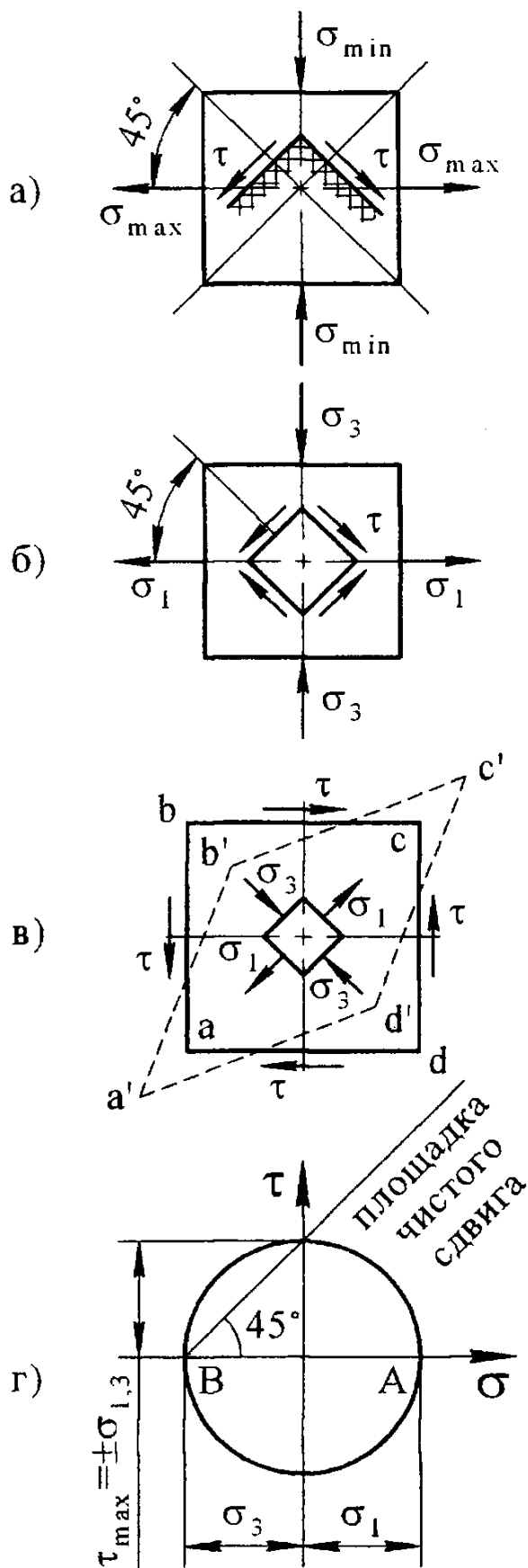


Рис. 32

сдвига главные площадки расположены под углом $\alpha = 45^\circ$ к площадкам чистого сдвига и главные напряжения здесь соответственно равны:

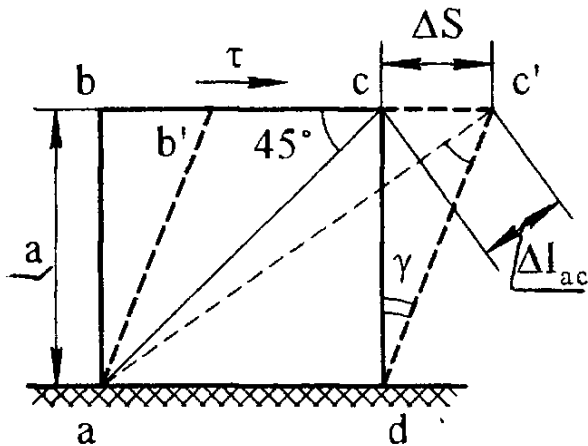
$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_3 = -\tau. \quad (556)$$

Таким образом, чистый сдвиг является частным случаем плоского напряженного состояния, при котором главные нормальные напряжения в главных площадках равны по величине и обратные по знаку. Деформация элемента, при этом, происходит, как показано на рис. 32, в – квадрат превращается в ромб без изменения длин сторон: $ab = a'b'$ и т.п.

Круг напряжений для чистого сдвига показан на рис. 32, г. Так как $\sigma_1 = -\sigma_3$, центр круга лежит в начале координат и $\tau = \sigma_{1,3}$. Чистый сдвиг представляет собой единственный случай напряженного состояния, при котором по абсолютной величине экстремальные нормальные и касательные напряжения равны между собой.

Мерой деформации при сдвиге является величина изменения прямого угла (угол сдвига γ). Установим зависимость между этой деформацией и действующими в площадках сдвига касательными напряжениями.

Рассмотрим квадратный элемент **abcd**, по граням которого действуют напряжения τ (рис. 33), где ΔS – абсолютный сдвиг, γ – угол сдвига, связанные между собой соотношением



$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (56)$$

Определим изменение длины диагонали **ac**, которое происходит в направлении действия σ_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_{ac}}{l_{ac}} = \frac{\Delta S \cos 45^\circ}{a / \cos 45^\circ} = \frac{\gamma}{2}.$$

Рис. 33

С другой стороны, относительная линейная деформация на основании обобщенного закона Гука (53) с учетом, что $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$, $\sigma_2 = 0$, будет равна

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \mu}{E} \tau.$$

Сравнивая значения ε_1 , полученные выше, окончательно имеем

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma.$$

Введем обозначение

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (57)$$

где G – модуль упругости при сдвиге, о нем было сказано выше. Формула (57) устанавливает *связь между тремя упругими постоянными* материала. В лабораторных условиях все три характеристики материала могут быть определены независимо друг от друга, и опыт показывает, что формула (57) правильно отражает их связь.

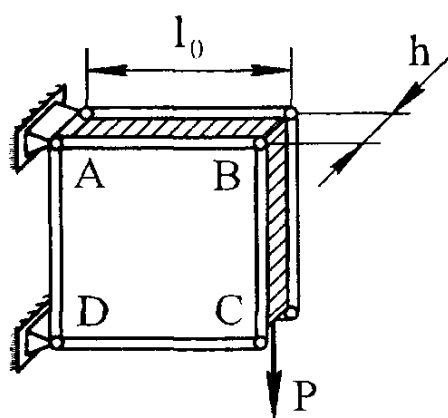
Тогда используя (57), получаем зависимость, которая называется *законом Гука при сдвиге*:

$$\tau = G\gamma. \quad (58)$$

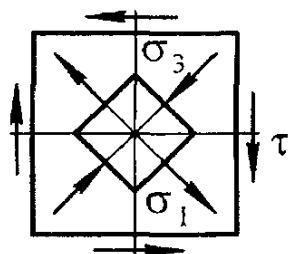
Анализ октаэдрических напряжений (40), (41) в точках чистого сдвига показывает, что $\sigma_{\text{окт}} = 0$, а $\tau_{\text{окт}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \tau$. А это значит, что чистый сдвиг приводит только к изменению формы элемента без изменения его объема.

Задача 18

Дюралюминовая квадратная пластина со стороной $l_0 = 25$ см и



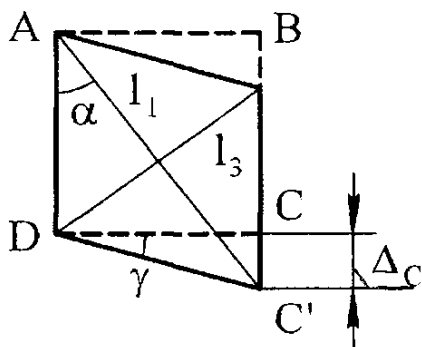
толщиной $h = 2$ мм имеет по краям рамку из шарнирно соединенных по углам абсолютно жестких стержней (см. рисунок). Пластина нагружается силой $P = 25$ кН. Определить главные напряжения в пластине, изменение длин диагоналей и прямого угла, а также опускание точки С. Принять $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа и $\mu = 0,34$.



Решение.

Пластина испытывает чистый сдвиг. Касательные напряжения, действующие по сторонам, равны

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{lh} = \frac{25 \cdot 10^3}{250 \cdot 2} = 50 \text{ МПа.}$$



При чистом сдвиге главные площадки расположены под углом 45° к площадкам чистого сдвига и главные нормальные напряжения в них равны

$$\sigma_1 = \tau = 50 \text{ МПа;} \quad \sigma_3 = -\tau = -50 \text{ МПа.}$$

Изменение длин диагоналей происходит в направлении действия главных напряжений и определяется по закону Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} [50 - 0,34(-50)] = 0,001;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} [-50 - 0,34 \cdot 50] = -0,001,$$

где $\varepsilon_1 = \frac{\Delta a_1}{a}$; $\varepsilon_3 = \frac{\Delta a_3}{a}$; $a = l_0 \sqrt{2} = 35,4$ мм – первоначальная длина диагонали пластины. Новая длина диагоналей равна

$$\Delta a_1 = \varepsilon_1 a = 0,001 \cdot 35,4 = 0,0354 \text{ мм};$$

$$\Delta a_3 = \varepsilon_3 a = -0,001 \cdot 35,4 = -0,0354 \text{ мм};$$

$$l_1 = a + \Delta a_1 = 35,44 \text{ мм};$$

$$l_3 = a - \Delta a_3 = 35,36 \text{ мм}.$$

Определим модуль сдвига материала:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{0,7 \cdot 10^5}{2(1 + 0,34)} = 2,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Тогда угол сдвига (изменение первоначально прямого угла 90°) по закону Гука будет равен

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{50}{2,6 \cdot 10^4} = 0,002 \text{ рад} \approx 0,11^\circ.$$

Опускание точки С определится через тангенс этого угла сдвига:

$$\Delta_c = l_0 \cdot \operatorname{tg} \gamma = 250 \cdot \operatorname{tg} 0,11^\circ = 0,5 \text{ мм}.$$

Примечание. Угол сдвига можно найти геометрически как

$$\gamma = 90^\circ - 2\alpha,$$

где $\alpha = \arctg \frac{l_3/2}{l_1/2}$.

7. ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Под действием внешних сил упругое тело деформируется и происходит изменение его объема. В общем случае, когда напряженное состояние каждой точки различно, для определения изменения объема всего тела необходимо знать изменение объема в каждой элементарной его частице.

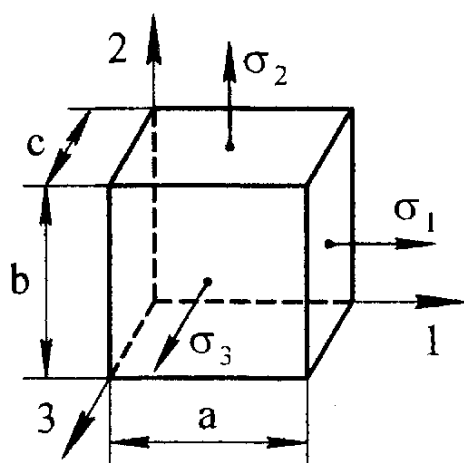


Рис. 34

Выделим в окрестности точки, находящейся в объемном напряженном состоянии, бесконечно малый параллелепипед с размерами граней – a , b , c (рис. 34).

Первоначальный объем параллелепипеда равен $V_0 = abc$. После нагружения размеры граней увеличились и в направлении главных осей возникли деформации:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \epsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \epsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}.$$

Определим объем параллелепипеда после нагружения:

$$\begin{aligned} V_1 &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = (a + \epsilon_1 a)(b + \epsilon_2 b)(c + \epsilon_3 c) = \\ &= abc(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3). \end{aligned}$$

Перемножая скобки и пренебрегая величинами малого порядка (произведения ϵ между собой), получаем

$$V_1 = V_0(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3).$$

Абсолютная и относительная объемная деформации определяются как

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad (59)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (60)$$

Подставляя в формулу (60) значения деформаций по обобщенному закону Гука (53), после преобразования получаем

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (61)$$

Как видно из последних формул, относительная объемная деформация численно определяется первым инвариантом тензоров деформаций и напряжений, а значит для одной и той же точки она есть величина постоянная. Поэтому объемную деформацию можно выразить через компоненты напряжений и деформаций в других (не главных) секущих площадках, проходящих через данную точку:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (62)$$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Анализ выражений (61) и (62) показывает, что объемная деформация не зависит от каждого нормального напряжения в отдельности, а определяется только их суммой, поэтому на основании выражения (40) ее можно представить через среднее (или октаэдрическое) напряжение:

$$\varepsilon_V = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_{\text{окт}}. \quad (63)$$

В случае, когда $\sigma_{\text{окт}} = 0$, не происходит изменения объема тела, о чем было сказано ранее и подтверждается формулой (63). В этом случае деформация сводится только к изменению формы тела. Постоянная в формуле (63):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (64)$$

называется *объемным модулем упругости* материала и является еще одной физической константой, характеризующей его упругие свойства. Тогда относительную объемную деформацию можно представить как

$$\varepsilon_V = \frac{\sigma_{\text{окт}}}{K} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}. \quad (65)$$

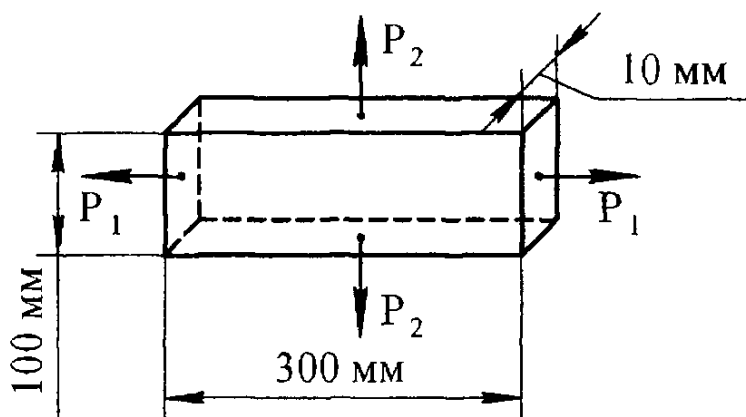
Анализ формул (61)–(63) показывает также, что объемная деформация тел, материал которых имеет $\mu = 0,5$ (например, резина, каучук, полиуретан), равна нулю. Такие материалы называются *несжимаемыми* и при деформировании, несмотря на твердое состояние, ведут себя как высоковязкие жидкости.

Из формул видно также, что коэффициент Пуассона не может быть больше 0,5. Иначе в противном случае при растяжении объем материала должен уменьшаться, а при сжатии – увеличиваться, что не соответствует реальности.

Задача 19

Для заданной стальной пластины, нагруженной силами $P_1 = 120 \text{ кН}$ и $P_2 = 180 \text{ кН}$, как показано на рисунке, определить абсолютное и относительное изменение объема, а также объемный модуль упругости. Принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,25$.

Решение.



Напряжения, действующие по граням пластины, равны

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{120 \cdot 10^3}{100 \cdot 10} = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \frac{180 \cdot 10^3}{300 \cdot 10} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 0.$$

Относительная объемная деформация равна

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^5} (120 + 60) = 0,00045.$$

Первоначальный объем пластины

$$V_0 = 300 \cdot 100 \cdot 10 = 3 \cdot 10^5 \text{ мм}^3.$$

Абсолютное изменение объема равно

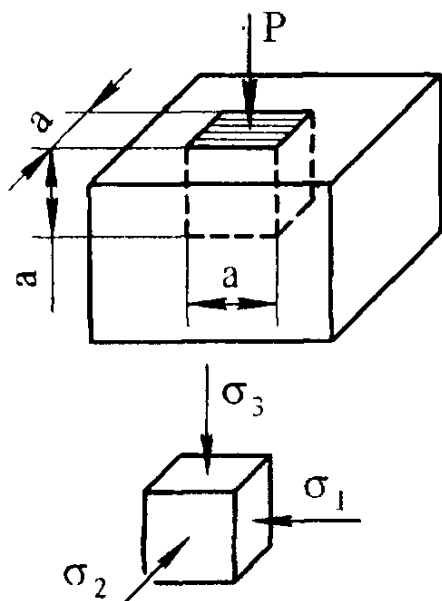
$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}; \quad \Delta V = \varepsilon_V V_0 = 0,00045 \cdot 3 \cdot 10^5 = 135 \text{ мм}^3.$$

Объемный модуль упругости равен (64):

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{3(1-2 \cdot 0,25)} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Задача 20

Медный кубик со стороной $a = 10 \text{ см}$ вставлен плотно без зазоров в кубическое гнездо абсолютно жесткой недеформируемой плиты. Кубик сжимается силой $P_2 = 500 \text{ кН}$. Определить относительную и объемную деформации кубика, а также установить, какой высоты следует сделать кубик, чтобы при приложении силы P его верхняя грань была заподлицо с плитой. Принять $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,34$.



Решение.

Определяем напряжения, действующие по граням кубика. Наибольшее по модулю будет напряжение со стороны действия силы:

$$\sigma_3 = \frac{P}{F} = -\frac{500 \cdot 10^3}{10 \cdot 10 \cdot 10^2} = -50 \text{ МПа};$$

$\sigma_1 = \sigma_2$ в силу симметрии.

Так как деформация в направлении σ_1 (так же как и σ_2) равна нулю, используем это для определения напряжений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\mu \sigma_3}{1 - \mu} = \frac{0,34(-50)}{1 - 0,34} = -25,8 \text{ МПа}.$$

Относительная и абсолютная объемная деформации кубика равны

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2 \cdot 0,34}{1 \cdot 10^5} (-25,8 - 25,8 - 50) = -0,00033;$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V},$$

отсюда $\Delta V = \varepsilon_V V_0 = -0,00033 \cdot 100^3 = -330 \text{ мм}^3.$

Относительная объемная деформация равна сумме линейных деформаций: $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Но так как $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 0$, то линейная деформация в направлении силы равна $\varepsilon_3 = \varepsilon_V = -0,00033$. Так как $\varepsilon_3 = \Delta a / a$, получаем

$$\Delta a = \varepsilon_3 \cdot a = 0,00033 \cdot 100 = 0,033 \text{ мм}.$$

Следовательно, чтобы под действием силу кубик оказался заподлицо с плитой, его следует сделать выше на 0,033 мм.

8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Потенциальной энергией деформации называется энергия, накапливаемая в теле при его упругом деформировании. Когда под действием внешней статической нагрузки тело деформируется, точки приложения внешних сил перемещаются, и потенциальная энергия НАГРУЗКИ убывает на величину, численно равную работе внешних сил A_p . Однако эта энергия, потерянная внешними силами, не исчезает, а превращается в потенциальную энергию деформации (незначительными потерями энергии, рассеянными в пространстве, можно пренебречь).

Определим потенциальную энергию деформации при осевом растяжении (рис. 35, а).

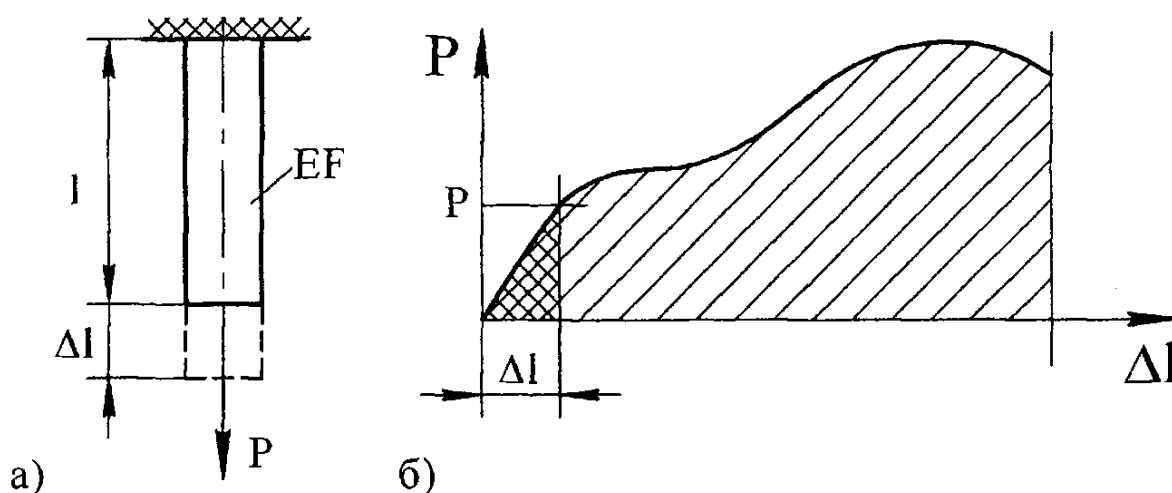


Рис. 35

Растягивая стержень, сила P на удлинении Δl совершает работу. Если полная работа, затраченная на растяжение, пластическую деформацию и разрыв образца, определяется площадью всей диаграммы растяжения, то работа, затраченная только на его упругую деформацию в пределах участка пропорциональности, определяется площадью треугольника (рис. 35, б) и на основании закона сохране-

ния энергии численно равна потенциальной энергии упругой деформации:

$$A_p = U = \frac{P \cdot \Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\sigma^2 l F}{2E} = \frac{\sigma^2 V_0}{2E},$$

где $V_0 = lF$ – объем растягиваемого стержня.

Отнеся эту энергию к единице объема и учитывая на основании закона Гука, что $\sigma = \epsilon E$, получаем удельную потенциальную энергию деформации при растяжении:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (66)$$

В случае объемного напряженного состояния (рис. 8) потенциальная энергия определяется суммарной работой главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на соответствующих перемещениях $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$u = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2}. \quad (67)$$

Подставляя в (67) значения линейных деформаций по обобщенному закону Гука (53), после преобразования получаем

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \quad (68)$$

Однако при деформации упругого тела происходит не только изменение его объема, но и формы (например, кубик превращается в параллелепипед), поэтому полную удельную потенциальную энергию можно представить в виде двух слагаемых:

$$u = u_{об} + u_{ф}, \quad (69)$$

где $u_{об}$ – удельная потенциальная энергия изменения объема; $u_{ф}$ – удельная потенциальная энергия изменения формы (формоизменения).

Определим эти слагаемые. Для этого представим выражение в круглых скобках формулы (68) в виде

$$2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

где на основании формул (40), (41) для октаэдрических напряжений нетрудно убедиться, что

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = (3\sigma_{\text{окт}})^2 = 9\sigma_{\text{окт}}^2;$$

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 3(\sigma_{\text{окт}}^2 + \tau_{\text{окт}}^2).$$

Подставляем эти значения скобок в выражение (68) и после преобразования получаем

$$u = \frac{3}{2E} \left[(1 - 2\mu)\sigma_{\text{окт}}^2 + (1 + \mu)\tau_{\text{окт}}^2 \right]. \quad (70)$$

Так как $\sigma_{\text{окт}}$ определяет изменения объема, а $\tau_{\text{окт}}$ — изменение формы, то первое слагаемое выражения (70) является удельной потенциальной энергией изменения объема $u_{\text{об}}$, а второе — удельной потенциальной энергией изменения формы $u_{\text{ф}}$:

$$u_{\text{об}} = \frac{3(1 - 2\mu)}{2E} \sigma_{\text{окт}}^2 = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (71)$$

$$u_{\text{ф}} = \frac{3(1 + \mu)}{2E} \tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1 + \mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (72)$$

Вычислим для примера потенциальную энергию изменения объема и изменения формы для различных видов напряженного состояния.

Растяжение

При растяжении $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Примем для материала $\mu = 0,3$. Тогда на основании (71) и (72) получаем

$$u_{\text{об}} = \frac{1 - 2\mu}{6E} \sigma_1^2 = 0,07 \frac{\sigma_1^2}{E}; \quad u_{\text{ф}} = \frac{1 + \mu}{6E} 2\sigma_1^2 = 0,43 \frac{\sigma_1^2}{E};$$

$$u = u_{об} + u_{\phi} = 0,5 \frac{\sigma_1^2}{E}.$$

Расчеты показывают, что 87% всей потенциальной энергии при растяжении идет на изменение формы, и только 13 % – на изменение объема.

Чистый сдвиг

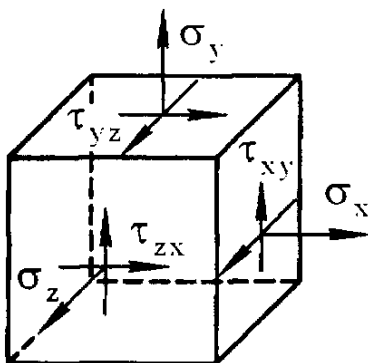
При чистом сдвиге $\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$. Примем $\mu = 0,3$. Тогда на основании (71) и (72) получаем

$$u_{об} = 0; \quad u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 4\sigma_1^2] = \frac{1+\mu}{E} \sigma_1^2 = 1,3 \frac{\sigma_1^2}{E}.$$

При чистом сдвиге вся энергия полностью расходуется на изменение формы. Заметим, что при одинаковом значении σ_1 энергия сдвига почти в три раза больше энергии растяжения.

Задача 21

Стальной кубик нагружен по граням нормальными и касательными напряжениями, как показано на рисунке: $\sigma_x = 120$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\sigma_z = 100$ МПа, $\tau_{xy} = 40$ МПа, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$. Определить полную относительную потенциальную энергию изменения объема и изменения формы. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,25$.



Решение.

Первоначально определяем главные нормальные напряжения в кубике, для чего используем характеристическое уравнение (24):

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0,$$

где коэффициентами являются инварианты тензора напряжений (23):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 120 + 80 + 100 = 300 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 120 \cdot 80 + 80 \cdot 100 + \\ + 100 \cdot 120 - 40^2 = 28000 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ = 120 \cdot 80 \cdot 100 - 100 \cdot 40^2 = 800000 \text{ (МПа)}^3.$$

Уравнение принимает вид

$$\sigma^3 - 300\sigma^2 + 28000\sigma - 800000 = 0.$$

Решаем кубическое уравнение методом Кардано и получаем три корня, которые являются главными нормальными напряжениями:

$$\sigma_1 = 144,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 100 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 55,3 \text{ МПа}.$$

Проверка: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$

Определяем потенциальную энергию деформации по формулам (68), (71) и (72):

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \times \\ \times [144,7^2 + 100^2 + 55,3^2 - 2 \cdot 0,25(144,7 \cdot 100 + 100 \cdot 55,3 + 144,7 \cdot 55,3)] = \\ = 0,05 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{мм}^3};$$

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2 \cdot 0,25}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} (144,7 + 100 + 55,3)^2 = \\ = 0,0375 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{мм}^3};$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1+0,25}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \times$$

$$\times \left[(144,7 - 100)^2 + (100 - 55,3)^2 + (55,3 - 144,7)^2 \right] = 0,0125 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{мм}^3};$$

$$u = u_{об} + u_{\phi} = 0,0375 \cdot 10^{-3} + 0,0125 \cdot 10^{-3} = 0,05 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{мм}^3}.$$

9. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Состояние материала, которое соответствует возникновению нежелательного или опасного физического процесса, называется *предельным*. То есть под предельным состоянием материала понимают такое, при котором происходит качественное изменение его свойств – переход от одного механического состояния к другому.

В механике твердого деформируемого тела различают два основных типа предельных состояний: текучесть и хрупкое разрушение.

Деление материалов на пластичные и хрупкие достаточно условно. Иногда пластичные материалы могут разрушаться как хрупкие (например, при высоких скоростях нагружения и низких температурах). А хрупкие материалы в условиях высокого гидростатического давления обнаруживают значительные пластические деформации. Поэтому при оценке прочности различных элементов конструкций необходимо учитывать, что предельное состояние материала существенно зависит от вида напряженного состояния.

Чтобы оценить прочность материала при объемном напряженном состоянии, т.е. его сопротивляемость разрушению или пластическому течению, необходимо установить опасную комбинацию главных нормальных напряжений и сравнить ее с действующими главными напряжениями. То есть требуется определить некое наибольшее опасное напряжение $\sigma_{\max}$, которое будет зависеть от трех

главных напряжений и определяться как функция комбинации этих напряжений:

$$\sigma_{\max} = f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3). \quad (73)$$

А далее, чтобы прочность элемента была обеспечена, следует ограничить это максимальное напряжение, задав условие

$$\sigma_{\max} = f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (74)$$

И здесь возникают две проблемы: какой вид должна иметь функция (73) и что использовать в качестве допускаемого напряжения $[\sigma]$ в выражении (74)? Например, при простом растяжении в качестве $\sigma_{\max}$ рассматривается σ_1 , а $[\sigma]$ определяется для материала из простого испытания на растяжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n},$$

где σ_T и σ_B – предел текучести и предел прочности материала соответственно; n – коэффициент запаса прочности.

Однако для объемного напряженного состояния проводить испытания, комбинируя значения главных напряжений с целью установить, при каком их сочетании наступит предельное состояние материала, эта работа достаточно трудоемкая и долговременная. Поэтому при объемном напряженном состоянии для проверки прочности поступают следующим образом:

1. Исходя из условий работы элемента и схемы его нагружения, определяют для него расчетным путем главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 .

2. Выбирают материал и опытным путем при простом растяжении и сжатии определяют для него $[\sigma]_{\text{раст}}$ и $[\sigma]_{\text{сж}}$.

3. А далее, объемное напряженное состояние рассматривают как РАВНООПАСНОЕ или ЭКВИВАЛЕНТНОЕ простому растяжению или сжатию:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max(\text{экв})} &= f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{раст}}; \\ \sigma_{\max(\text{экв})} &= f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{сж}},\end{aligned}\tag{75}$$

при этом первое выражение применяют при объемном растяжении, второе – при объемном сжатии. При смешанном объемном состоянии должны быть одновременно удовлетворены оба условия прочности (75). Таким образом, за эталон прочности, с помощью которого устанавливается прочность материала в любом случае напряженного состояния, применяются результаты испытаний на одноосное растяжение и сжатие.

4. Определяют вид функции (73).

Вид этой функции устанавливают в зависимости от выдвигаемой гипотезы о причинах наступления предельного состояния (разрушения или пластического течения), на основании чего и строится ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ. При записи условия прочности по любой из теорий, учитывая, что объемное напряженное состояние рассматривается как эквивалентное простому растяжению, левая часть уравнения будет состоять из параметров объемного напряженного состояния, а правая часть – допускаемые величины напряжений и деформаций для простого растяжения.

Рассмотрим наиболее важные из существующих теорий прочности.

I ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

(Теория наибольших нормальных напряжений)

Авторами этой теории являются Галилей, Ламе, Лейбниц, Клебш и др. и основана она на предположении, что разрушение материала происходит в результате отрыва и что поэтому опасное состояние наступает, когда наибольшее растягивающее напряжение (σ_1) достигает опасного значения. В связи с этим в качестве $\sigma_{\text{экв}}^I$ принимают только σ_1 (из трех главных напряжений) и сравнивают его с допускаемыми напряжениями на растяжение. В результате условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]_{\text{раст}}. \quad (76)$$

Данная теория не учитывает влияние двух других главных напряжений и в практических расчетах почти не применяется.

II ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

(Теория наибольших линейных деформаций)

Авторами этой теории являются Сен-Венан, Мариотт, Понселе, Навье и основана она на предположении, что опасность разрушения материала вызывается изменением расстояний между частицами, т.е. когда наибольшее относительное удлинение (ε_1) достигает опасного значения. В этом случае для обеспечения прочности необходимо, что наибольшая линейная деформация при объемном напряженном состоянии не превышала допускаемой деформации на растяжение:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]_{\text{раст}}. \quad (77)$$

Подставляя значения ε_1 и $[\varepsilon]_{\text{раст}}$ на основании обобщенного закона Гука (53): $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$ и $[\varepsilon]_{\text{раст}} = \frac{[\sigma]_{\text{раст}}}{E}$, в выражение (77), после преобразования получаем условие прочности по второй теории:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_{\text{раст}}. \quad (78)$$

Из опытов известно, что достигнуть разрушения материалов при всестороннем равномерном сжатии не удастся даже при очень высоких давлениях. Первая и вторая теории прочности объясняют это тем, что при всестороннем сжатии в материале не возникают растягивающие напряжения и деформации удлинения, а потому отрыв невозможен. Однако эти теории не подтверждаются опытами и применяются в расчетах только в очень частных случаях.

III ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

(Теория наибольших касательных напряжений)

Эта теория впервые была предложена Кулоном и в дальнейшем подтверждалась и другими авторами. Она основана на предположении, что разрушение материала происходит в результате сдвига, вызываемого касательными напряжениями, а поэтому опасное состояние материала наступает тогда, когда касательные напряжения в нем достигают опасного значения. И, следовательно, для обеспечения прочности необходимо, чтобы максимальные касательные напряжения при объемном напряженном состоянии не превышали допускаемых напряжений для одноосного растяжения:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]_{\text{раст}}. \quad (79)$$

Подставляя в выражение (79) значения $\tau_{\max}$ (49) для объемного напряженного состояния и $[\tau]_{\text{раст}}$ для простого растяжения (согласно рис. 18, в): $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и $[\tau]_{\text{раст}} = \frac{[\sigma]_{\text{раст}}}{2}$, получаем условие прочности по третьей теории:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{раст}}. \quad (80)$$

Исследования показали, что эта теория довольно хорошо совпадает с результатами испытаний пластичных материалов, но она совершенно непригодна для хрупких, когда имеет место хрупкое разрушение. К тому же, эта теория не учитывает влияние промежуточного напряжения σ_2 , а оно, как показывают опыты, влияет на прочность материала.

IV ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ

(Энергетическая или Теория энергии формоизменения)

Эта теория предложена целым рядом авторов – Губером, Мизесом, Генки – и предполагает, что наступление предельного состояния определяется количеством накопленной вблизи опасной точки упругого тела удельной потенциальной энергии формоизменения.

А это значит, что для обеспечения прочности, рассматривая объемное и линейное напряженные состояния как равноопасные или эквивалентные, необходимо соблюдение условия

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}]_{\text{раст}}. \quad (81)$$

Принимаем значения u_{ϕ} по формуле (72) и вытекающее отсюда $[u_{\phi}]_{\text{раст}}$ как частный случай, при котором $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

$$[u_{\phi}]_{\text{раст}} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2 = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]_{\text{раст}}^2.$$

Объединяя полученные выражения в формулу (81), после преобразования получаем условие прочности по четвертой (энергетической) теории:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_{\text{раст}}. \quad (82)$$

Результаты этой теории хорошо совпадают с экспериментальными данными для пластичных материалов. Однако и эта теория не является совершенной, так как в некоторых случаях она не соответствует действительности. Например, в случае, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, получаем $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = 0$, а это означает, что при любом значении напряжения данное напряженное состояние не может вызвать разрушения материала. Однако это не является верным, так как всестороннее равномерное растяжение всегда вызывает хрупкое разрушение материала.

ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА

Теория прочности Мора не содержит критериальных гипотез, а является уточнением третьей теории прочности, которое сводится к тому, что хотя причиной разрушения по-прежнему считается сдвиг,

однако поведение пластичных и хрупких материалов сильно отличается при растяжении (сжатии) и это обстоятельство необходимо учитывать в расчетах на прочность.

Проведем для материала серию испытаний. Зададим в нем некоторое первоначальное напряженное состояние, испытаем его, а затем, увеличивая всякий раз эти напряжения в одинаковое число раз и испытывая материал снова, доведем его до предельного состояния: образец либо разрушится, либо в нем появятся пластические деформации. На графике в координатах $\sigma - \tau$ вычертим для этого предельного состояния наибольший из трех кругов Мора, построенный на значениях $\sigma_1 - \sigma_3$ (рис. 36). Будем считать, что предельное состояние не зависит от напряжения σ_2 . Далее, на образце того же материала зададим другое напряженное состояние и, увеличивая компоненты напряжений, снова добьемся, чтобы оно стало предельным. Вычертим для него также наибольший круг Мора, аналогично, как сказано выше. В результате, изображая каждое опасное напряженное состояние при помощи круга Мора, получаем семейство таких кругов, показанных на рис. 36.

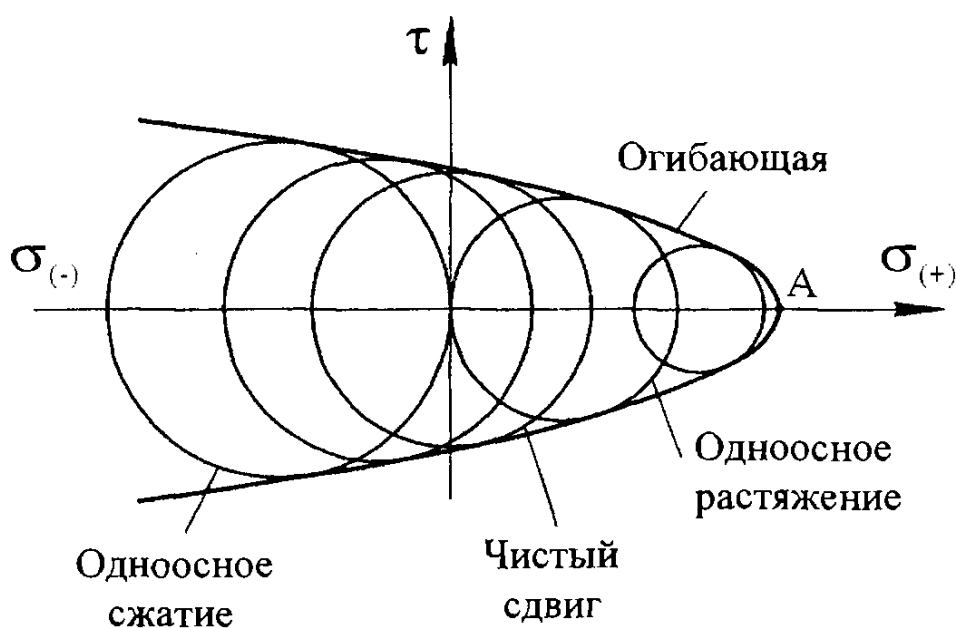


Рис. 36

Огибающая, проведенная к этому семейству кругов, будет характеризовать предельное состояние материала. Теперь, чтобы проверить прочность элемента, следует построить для него по главным

напряжениям $\sigma_1 - \sigma_3$ круг Мора: если этот круг будет располагаться внутри огибающей, то можно говорить о прочном состоянии материала; если он будет касаться огибающей, то материал находится в опасном состоянии.

Форма огибающей предельных кругов Мора зависит от свойств материала и является его механической характеристикой, как например, диаграмма растяжения. Если такая огибающая дана, то при любом напряженном состоянии можно определить коэффициент запаса прочности данного элемента. Для этого по заданным (расчетным) напряжениям вычерчивают наибольший из трех кругов Мора, а затем графически устанавливают, во сколько раз надо увеличить σ_1 и σ_3 , чтобы увеличенный круг касался огибающей.

Однако, если коэффициент запаса прочности n известен, то уменьшив круги предельных состояний (рис. 36) в n раз и сохранив масштаб для напряжений, можно сразу получить круги и огибающую, соответствующие допускаемым напряжениям (рис. 37).

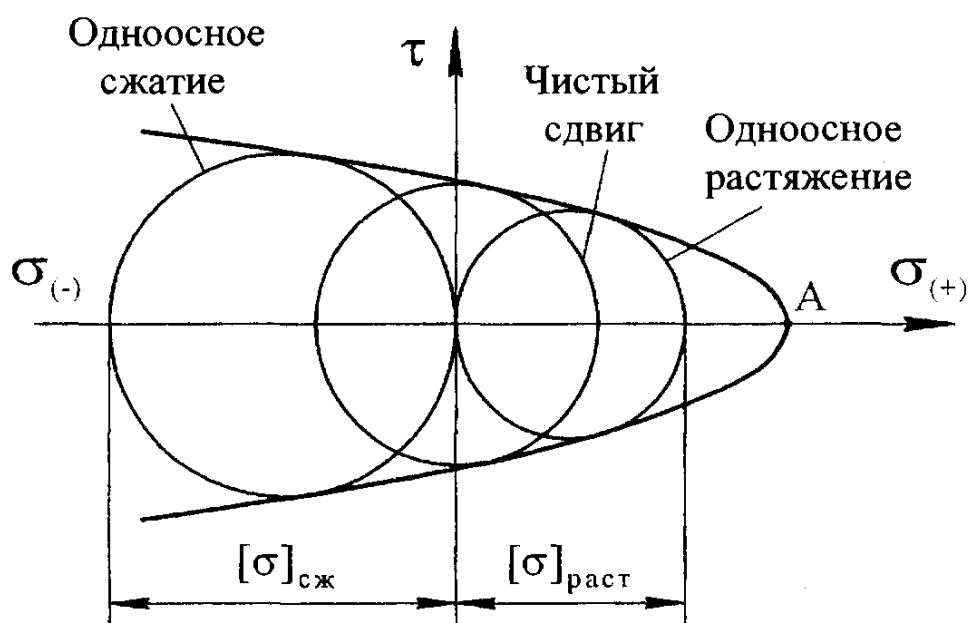


Рис. 37

Для материалов, сопротивление сжатию которых больше, чем растяжению, ординаты огибающих уменьшаются по мере возрастания растягивающих напряжений (см. рис. 36, 37). В некоторой точке А огибающая пересекает ось абсцисс и эту точку можно рассматривать круг Мора для всестороннего равномерного растяжения. Напряжение в этой точке является напряжением отрыва при всесто-

ронном растяжении. В то же время, так как при всестороннем равномерном сжатии разрушить материал не удастся, как бы велики ни были сжимающие напряжения, огибающая остается незамкнутой и не пересекает ось абсцисс при отрицательных значениях σ .

Использование теории прочности Мора требует проведения большого количества экспериментов для построения огибающей. Поэтому для ограничения числа испытаний проводят только опыты на одноосное растяжение, сжатие и чистый сдвиг, определяя компоненты $[\sigma]_{\text{раст}}$ и $[\sigma]_{\text{сж}}$, а криволинейную огибающую аппроксимируют касательной к кругам растяжения и сжатия (рис. 38).

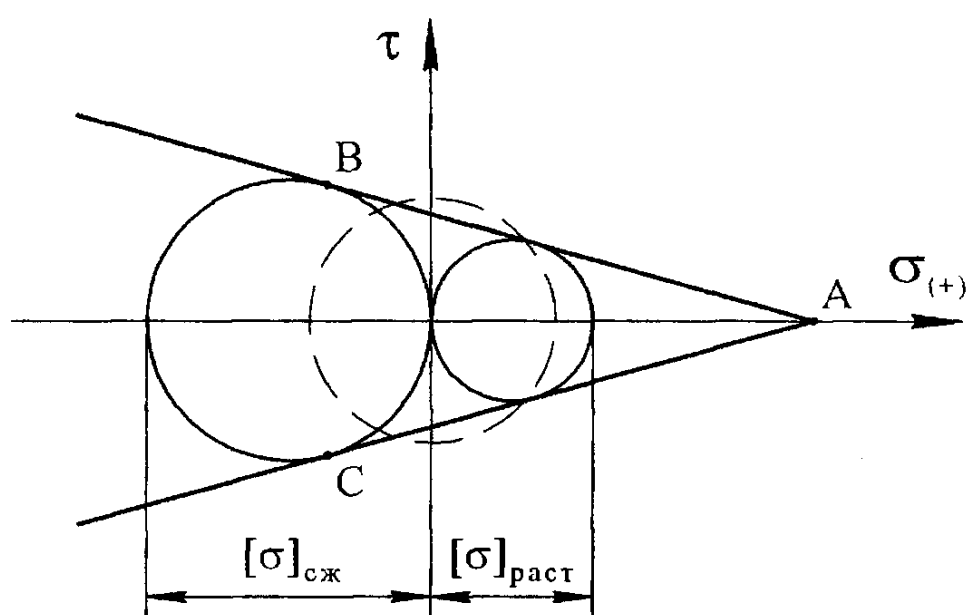


Рис. 38

Для того чтобы выяснить, удовлетворяется ли условие прочности в некоторой точке тела при возникающих напряжениях σ_1 и σ_3 , по этим значениям необходимо построить круг Мора. Если этот круг будет располагаться между прямыми АВ и АС (рис. 38), то следовательно материал в этой точке имеет прочность с запасом. Если этот круг будет пересекать прямые АВ и АС, то этот материал имеет недостаточную прочность, для него значения допускаемых напряжений завышены и требуется увеличить коэффициент запаса. И, наконец, круг, касающийся прямых АВ и АС, характеризует напряженное состояние, которое является допускаемым.

Этот способ проверки прочности предложен О. Мором.

Аналитическим путем условие прочности по Мору можно записать выражением

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{\text{раст}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{раст}}, \quad (83)$$

которое легко выводится на основании рис. 38 для любого заданного допускаемого напряженного состояния, т.е. круга, построенного на σ_1 и σ_3 , к которому прямые АВ и АС являются касательными, по заданным значениям $[\sigma]_{\text{раст}}$ и $[\sigma]_{\text{сж}}$ для данного материала.

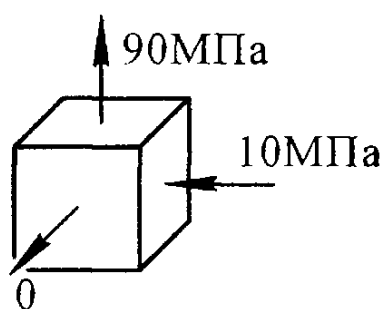
Теория прочности Мора широко используется при расчете конструкций из хрупких материалов. Для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, для которых $[\sigma]_{\text{раст}} \approx [\sigma]_{\text{сж}}$, теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности. Поэтому теорию прочности Мора можно рассматривать как третью теорию, откорректированную применительно к хрупким материалам.

Рассмотренные выше теории прочности (кроме них существуют и другие), построенные на различных гипотезах наступления предельного состояния, не являются совершенными и универсальными. Они часто дают противоречивые результаты, не соответствующие опытным данным. Поэтому для проверки прочности в каждом частном случае следует применять ту теорию, которая является наиболее достоверной (хорошо согласующейся с результатами экспериментов) для данного материала и типа напряженного состояния в точке.

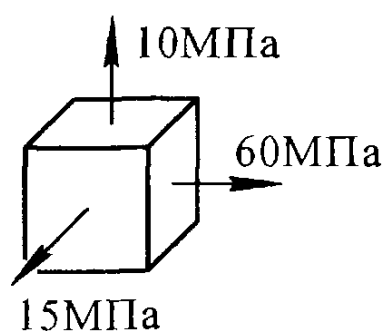
Задача 22

Используя III и IV теории прочности, установить, какое из двух заданных напряженных состояний является наиболее опасным, считая, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

Решение.



а)



б)

В соответствии с принятым соотношением для главных нормальных напряжений обозначим заданные напряжения:

– для состояния (а):

$$\sigma_1 = 90 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -10 \text{ МПа};$$

– для состояния (б):

$$\sigma_1 = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 15 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 10 \text{ МПа}.$$

По третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 :$$

– для состояния (а): $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 90 - (-10) = 100 \text{ МПа};$

– для состояния (б): $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 60 - 10 = 50 \text{ МПа}.$

По четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}:$$

– для состояния (а):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(90 - 0)^2 + (0 - (-10))^2 + (-10 - 90)^2]} = 95,4 \text{ МПа};$$

– для состояния (б):

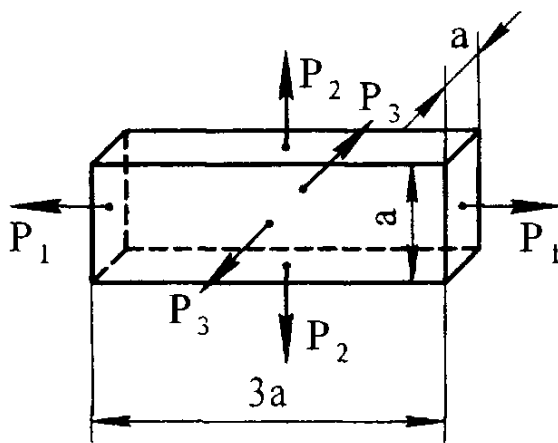
$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(60-15)^2 + (15-10)^2 + (10-60)^2]} = 47,7 \text{ МПа.}$$

Напряженное состояние (а) является более опасным.

Задача 23

Стальной брусок размерами $3a \times a \times a$ растягивается силами $P_1 = 70 \text{ кН}$, $P_2 = 20 \text{ кН}$ и $P_3 = 15 \text{ кН}$ как показано на рисунке. Используя IV теорию прочности, подобрать размер a бруска, если для материала $[\sigma]_{\text{раст}} = 160 \text{ МПа}$.

Решение.



Напряжения, действующие по граням бруска, равны

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{a^2}; \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{3a^2}; \quad \sigma_3 = \frac{P_3}{3a^2}.$$

Подбираем размер a из условия прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_{\text{раст}};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{P_1}{a^2} - \frac{P_2}{3a^2} \right)^2 + \left(\frac{P_2}{3a^2} - \frac{P_3}{3a^2} \right)^2 + \left(\frac{P_3}{3a^2} - \frac{P_1}{a^2} \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{3P_1 - P_2}{3} \right)^2 + \left(\frac{P_2 - P_3}{3} \right)^2 + \left(\frac{P_3 - 3P_1}{3} \right)^2 \right]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{210-20}{3} \right)^2 + \left(\frac{20-15}{3} \right)^2 + \left(\frac{15-210}{3} \right)^2 \right]} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot 64,2 \cdot 10^3 \leq [\sigma]_{\text{раст}}.$$

Отсюда определяем размер a :

$$a = \sqrt{\frac{64,2 \cdot 10^3}{[\sigma]_{\text{раст}}}} = \sqrt{\frac{64,2 \cdot 10^3}{160}} = 20 \text{ мм.}$$

Задача 24

Проверить прочность чугуновой детали по величине главных нормальных напряжений в опасной точке, равных $\sigma_1 = 15$ МПа, $\sigma_2 = -40$ МПа, $\sigma_3 = -60$ МПа, если для чугуна $[\sigma]_{\text{раст}} = 30$ МПа и $[\sigma]_{\text{сж}} = 100$ МПа. Применить теорию прочности Мора.

Решение.

Условие прочности по теории Мора имеет вид (83):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_{\text{раст}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \sigma_3 \leq [\sigma]_{\text{раст}};$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = 15 - \frac{30}{100} (-60) = 33 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{раст}}.$$

Перенапряжение на растяжение составляет 10 %, что недопустимо. Прочность чугуновой детали не обеспечена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дробот В. А., Брусенцов А. С. Прикладная механика. – СПб.: Лань, 2022. - 180 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book>.
2. Затипякин А. М., Друзь И.Б., Гаманов В.Ф. Сопротивление материалов. - Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2019. - 196 с. - URL: <https://viewer.rsl.ru/ru/rsl07000487048?page=1&rotate=0&theme=white/>.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: учебник. - СПб.: Лань, 2022. - 556 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206420>.
4. Джамай В.В., Самойлов Е.А., Станкевич А.И., Чуркина Т.Ю. Прикладная механика: учебник для академического бакалавриата. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 360 с.
5. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 279 с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 432 с.