Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины
и наземный транспорт»

ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «МЕХАНИКА»

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело
13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
20.03.02 Природообустройство и водопользование

Астрахань 2024

УДК 539.3

Хахов А.А.
Изгиб с кручением бруса круглого сечения. Методические указания по курсу «Механика». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 26 с.

В пособии рассмотрен пример составления расчетной схемы, определения внутренних силовых факторов и напряжений в сечениях и расчета на прочность бруса круглого поперечного сечения, работающего на изгиб с кручением.
Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»
Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2024
© Астраханский государственный технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....4
1. СОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ СТЕРЖНЯ.....4
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ.....10
2.1. Нагружение стержня в плоскости y – x.....10
2.2. Нагружение стержня в плоскости z – x.....12
2.3. Нагружение стержня моментами 1 M и 2 M , плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня.....13
3. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЧКАХ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ 14
4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.....24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 26

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Изгиб с кручением стержня возникает тогда, когда внешние силы (включая и реакции внешних связей) создают на участках стержня моменты сил относительно продольной оси стержня (примем за продольную ось – ось x) и координатных осей y и z, лежащих в плоскости рассматриваемого поперечного сечения. Для круглого поперечного сечения стержня любые оси поперечного сечения, проходящие через его центр тяжести – главные центральные оси. Поэтому оси y и z являются главными центральными осями инерции поперечного сечения.

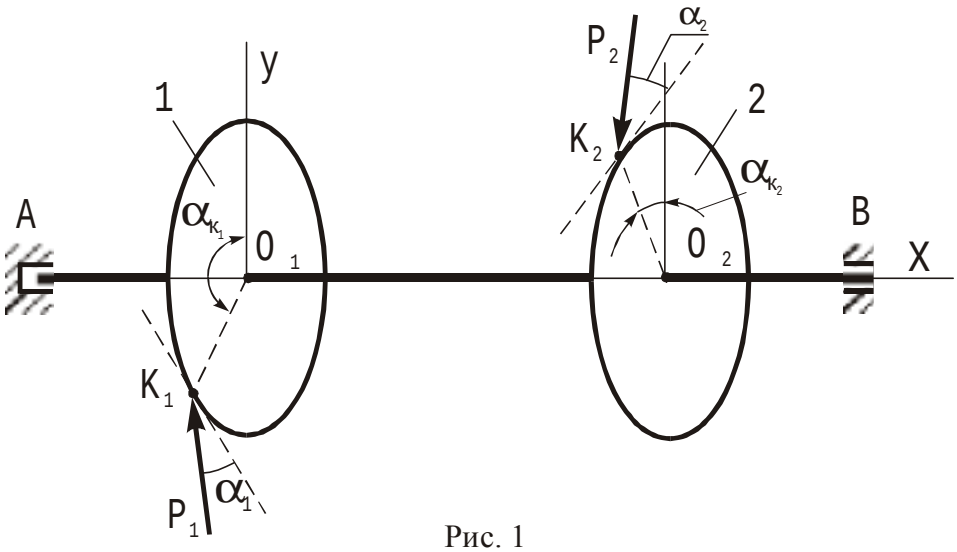


Рис. 1

Характерный вид такого нагружения показан на рис. 1. Стержень (вал), установленный на опорах A и B, имеет жесткие диски 1 и 2, плоскость которых перпендикулярна продольной оси стержня x. В плоскости этих дисков соответственно в точках K_1 и K_2 приложены силы P_1 и P_2

Положение точки K_1 на окружности радиуса $O_1 K_1$ зададим углом α_{K1} между осью y и радиусом O_1K_1. Положение точки K_2 на окружности радиуса $O_2 K_2$ зададим углом α_{K2} между осью y и радиусом O_2K_2. Если ось y до совмещения с радиусом O_iK_i поворачивается против часовой стрелки, то угол α_{Ki} считается положительным, если по часовой стрелке – то отрицательным.

Предположим, что линии действия сил P_1 и P_2 составляют с касательными к окружностям в точках K_1 и K_2 соответственно углы α_1 и α_2. Полагаем также, что под действием сил P_1 и P_2 стержень находится в состоянии покоя или равномерного вращения (состоянии статического равновесия). Покажем, что стержень при таком нагружении будет испытывать изгиб с кручением.

1. СОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ СТЕРЖНЯ

При составлении расчетной схемы стержня силы P_1 и P_2 , приложенные в точках K_1 и K_2 вне продольной оси стержня, необходимо привести к продоль-

ной оси стержня, выбрав в качестве центра приведения для силы P_1 точку O_1, а для силы P_2 – точку O_2 . Точки O_1 и O_2 – это точки пересечения плоскости дисков 1 и 2 с продольной осью стержня.

При приведении силы P_1 из точки K_1 в точку O_1 необходимо добавить момент силы P_1 относительно центра приведения (момент M_1). Модуль момента M_1 равен

$$M_1 = O_1K_1 \cdot P_1 \cdot \cos\alpha_1, \qquad M_1 = P_{1t} \cdot \frac{D_1}{2}, \tag{1.1}$$

где $P_{1t} = P_1 \cos\alpha_1$ – модуль окружной составляющей силы P_1 (модуль проекции силы P_1 на касательную к окружности в точке K_1); D_1 – диаметр окружности с радиусом O_1K_1.

Процедура определения сил и моментов в ряде задач может быть обратной. По постановке задачи вначале может быть определен модуль момента силы P_1 относительно точки O_1 (момент M_1). Затем при известном значении диаметра D_1 может быть определен модуль проекции силы P_1 на касательную в точке K_1 и модуль силы P_1

$$P_{1t} = \frac{2M_1}{D_1}, \qquad P_1 = P_{1t} / \cos\alpha_1 = \frac{2M_1}{D_1 \cos\alpha_1}. \tag{1.2}$$

При приведении силы P_2 из точки K_2 в точку O_2 необходимо добавить момент силы P_2 относительно центра приведения (момент M_2). Модуль момента M_2 равен

$$M_2 = O_2K_2 \cdot P_{2t}, \qquad M_2 = P_{2t} \cdot \frac{D_2}{2}, \tag{1.3}$$

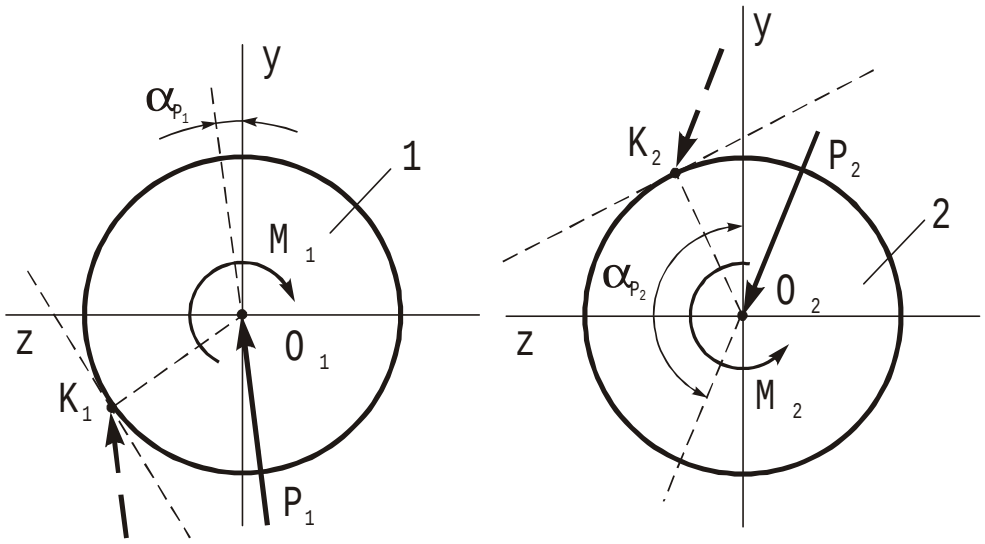
где $P_{2t} = P_2 \cos\alpha_2$ – модуль окружной составляющей силы P_2 (модуль проекции силы P_2 на касательную к окружности в точке K_2); D_2 – диаметр окружности с радиусом O_2K_2.

Если по условию задачи вначале удается определить модуль момента силы P_2 относительно точки O_2 (момент M_2), то при известном значении диаметра D_2 может быть определен модуль проекции силы P_2 на касательную в точке K_2 и модуль силы P_2, т. е.

$$P_{2t} = \frac{2M_2}{D_2}, \qquad P_2 = P_{2t} / \cos\alpha_2 = \frac{2M_2}{D_2 \cos\alpha_2}. \tag{1.4}$$

На рис. 2, а в плане показан диск 1 (если смотреть на диск 1 со стороны продольной оси *x*), точки K_1 и O_1, сила P_1, приведенная к точке O_1, и момент M_1, равный модулю момента силы P_1 относительно точки O_1.

На рис. 2, б в плане показан диск 2 (если смотреть на диск 2 со стороны продольной оси x), точки K_2 и O_2, сила P_2, приведенная к точке O_2, и момент M_2, равный модулю момента силы P_2 относительно точки O_2.

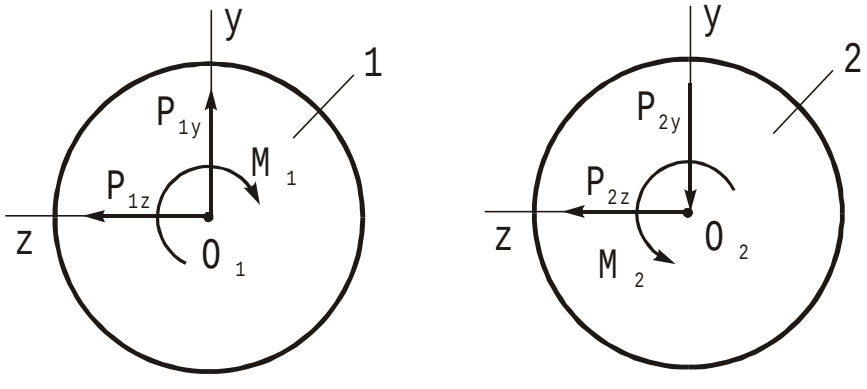


а) б)

Рис.2

Так как силы P_1 и P_2 могут быть расположены к оси y под разными углами α_{p1} и α_{p2} (рис. 2), целесообразно эти силы после приведения их к точкам O_1 и O_2 разложить на составляющие P_{1y}, P_{2y} и P_{1z}, P_{2z}, линии действия которых параллельны соответствующим осям y и z. В этом случае мы приходим к единым плоскостям нагружения стержня (нагружение в плоскости $y-x$, нагружение в плоскости $z-x$).

На рис. 3, а в плане показан диск 1, силы P_{1y} и P_{1z}, а также момент M_1.



а) б)

Рис.3

Проекции сил P_{1y} и P_{1z} на координатные оси y и z могут быть найдены как

$$P_{1y}=P_1\cos\alpha_{p1}, \qquad P_{1z}=P_1\sin\alpha_{p1} \ . \tag{1.5}$$

На рис. 3, б в плане показан диск 2, силы P_{2y} и P_{2z}, а также момент M_2. Проекции сил P_{2y} и P_{2z} на координатные оси y и z могут быть найдены как

$$P_{2y}=P_2\cos\alpha_{p2},\qquad P_{2z}=P_2\sin\alpha_{p2}\ . \tag{1.6}$$

Естественно возникает вопрос: а как определить углы α_{p1} и α_{p2} (углы между осью y и линиями действия сил P_1 и P_2), если заданы положения точки K_1 (угол α_{k1}) и точки K_2 (угол α_{k2}), линии действия силы P_1 относительно касательной в точке K_1 (угол α_1), линии действия силы P_2 относительно касательной в точке K_2 (угол α_2).

Рассмотрим для этого возможные схемы приложения произвольной силы P в точке K под углом α к касательной (рис. 4, а, б).

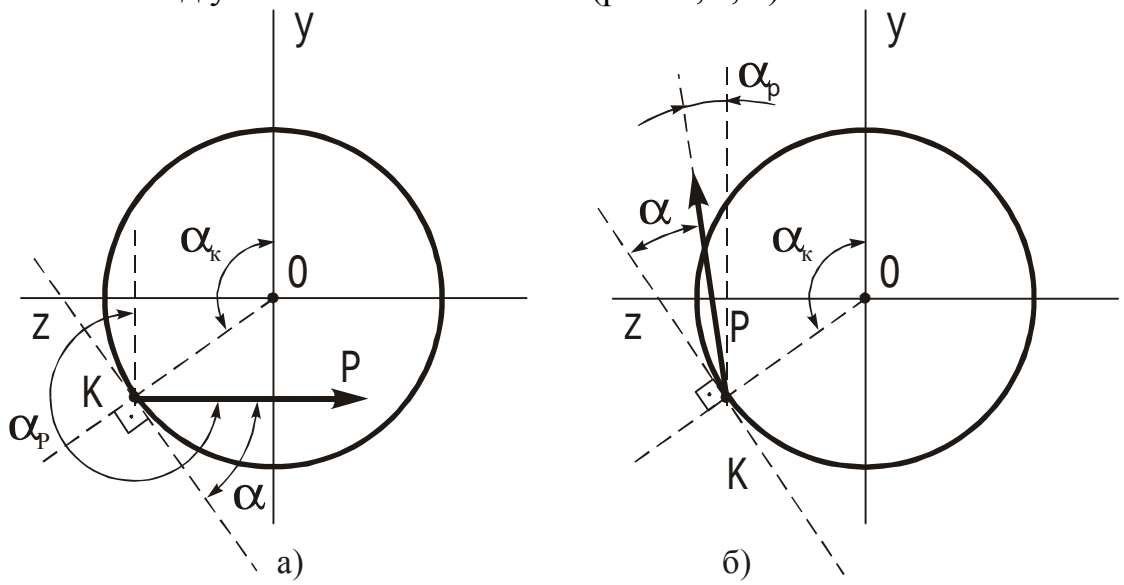


Рис.4

Ограничимся случаем, когда сила P направлена в зону между точкой O и касательной к точке K. Здесь возможно рассмотрение двух схем:

1) сила P, приложенная в точке K, стремится повернуть диск вокруг точки O против часовой стрелки (рис 4, а);

2) сила P, приложенная в точке K, стремится повернуть диск вокруг точки O по часовой стрелке (рис 4, б).

В первом случае (рис.4, а) угол α_p определится как

$$\alpha_p=\alpha_k+(\frac{\pi}{2}+\alpha), \tag{1.7}$$

во втором случае (рис.4, б)

$$\alpha_p=\alpha_k-(\frac{\pi}{2}+\alpha). \tag{1.8}$$

Общей формулой, описывающей оба случая, является

$$\alpha_p=\alpha_k\pm(\frac{\pi}{2}+\alpha), \tag{1.9}$$

где знак «плюс» принимается в случае, если сила P в точке K стремится повернуть диск против часовой стрелки; знак «минус» принимается в случае, если сила P в точке K стремится повернуть диск по часовой стрелке.

Так как в построенной нами схеме (рис. 1) сила P_1 стремится повернуть диск 1 по часовой стрелке, значение угла α_{p1} определится по формуле (1.8)

$$\alpha_{p1}=\alpha_{k1}-(\frac{\pi}{2}+\alpha). \qquad (1.10)$$

На схеме, изображенной на рис. 1, сила P_2 стремится повернуть диск 2 против часовой стрелки. Поэтому значение угла α_{p2} определится по формуле (1.7)

$$\alpha_{p2}=\alpha_{k2}+(\frac{\pi}{2}+\alpha). \qquad (1.11)$$

Заметим, что значения угла α_{ki} (i=1,2) берутся с учетом его знаков. Если ось y до совмещения с радиусом-вектором ОК поворачивается против часовой стрелки, то угол α_{ki} считается положительным. Если ось y до совмещения с радиусом-вектором ОК поворачивается по часовой стрелке, то угол α_{ki} считается отрицательным.

Изобразим расчетную схему стержня с действующими на него силами на рис. 5.

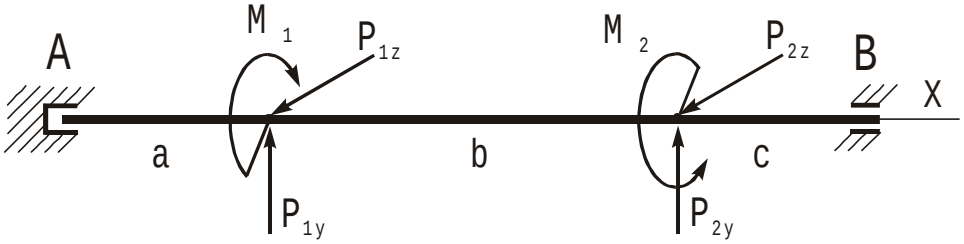


Рис. 5

Так как стержень находится в состоянии статического равновесия, то из условий равновесия следует, что сумма моментов сил относительно продольной оси x должна быть равна нулю:

$$\sum M_x(P_i)=0 \ .$$

Если пренебречь трением в опорах А и В стержня, то

$$\sum M_x(P_i)=-M_1+M_2 \ .$$

Из условия равновесия следует

$$-M_1+M_2=0 \ , \ M_2=M_1 \ , \ P_{2t}\frac{D_2}{2}=P_{1t}\frac{D_1}{2} \ , \qquad (1.12)$$

откуда

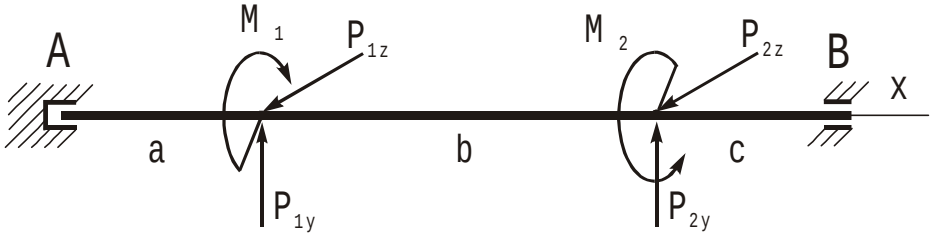
$$\frac{P_{1t}}{P_{2t}}=\frac{D_2}{D_1} \ , \qquad (1.13)$$

т. е. в условии статического равновесия отношение окружных составляющих сил P_{1t} и P_{2t} обратно пропорционально отношению диаметров окружностей D_1 и D_2, на которых лежат точки приложения сил (точки K_1 и K_2).

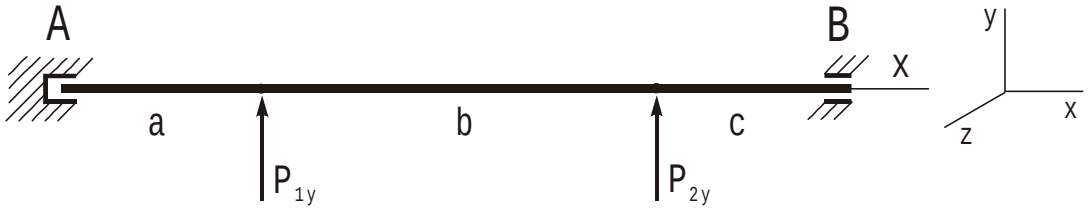
Равенство (1.13) при известных значениях D_1 и D_2 позволяет определить P_{2t} (если найдено значение P_{1t}) или, наоборот, определить P_{1t} (если найдено значение P_{2t}):

$$P_{2t} = P_{1t}\frac{D_1}{D_2}\ , \qquad P_{1t} = P_{2t}\frac{D_2}{D_1}\ . \tag{1.14}$$

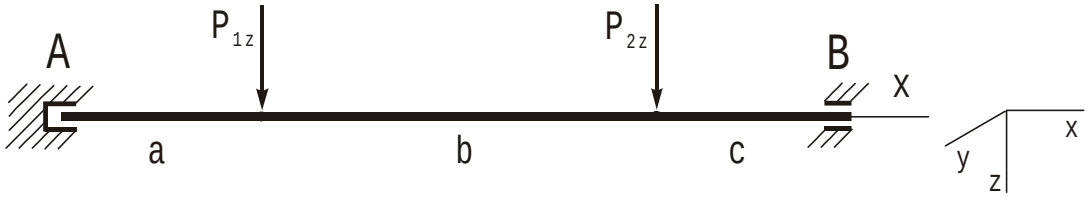
Используя принцип независимости действия сил, расчетную схему стержня (рис.6, а) можно представить в виде следующих расчетных схем:



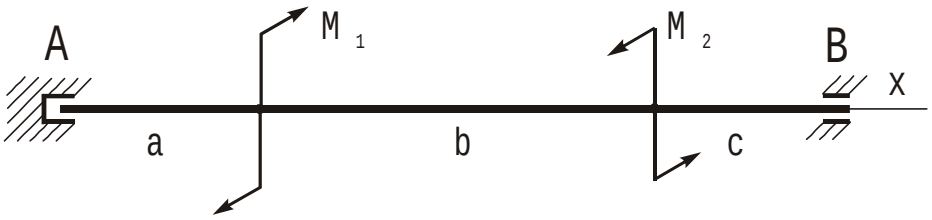
а) расчетная схема нагружения стержня



б) расчетная схема нагружения стержня в плоскости y - x



в) расчетная схема нагружения стержня в плоскости z - x



г) расчетная схема нагружения стержня при кручении

Рис. 6

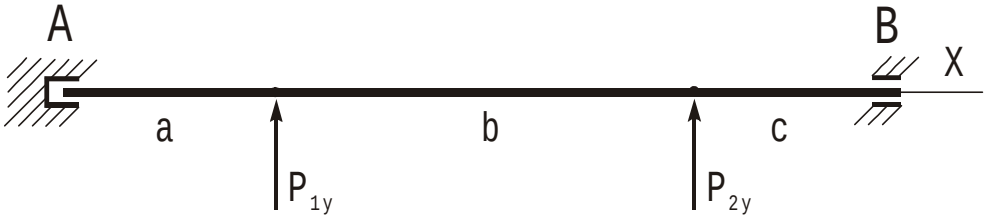
– расчет стержня на изгиб при его нагружении в плоскости $y - x$ (рис. 6, б);
– расчет стержня на изгиб при его нагружении в плоскости $z - x$ (рис. 6, в);
– расчет стержня на кручение при его нагружении моментами M_1 и M_2, плоскости действия которых совпадают с плоскостями дисков 1 и 2 и перпендикулярны продольной оси стержня (рис. 6, г).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

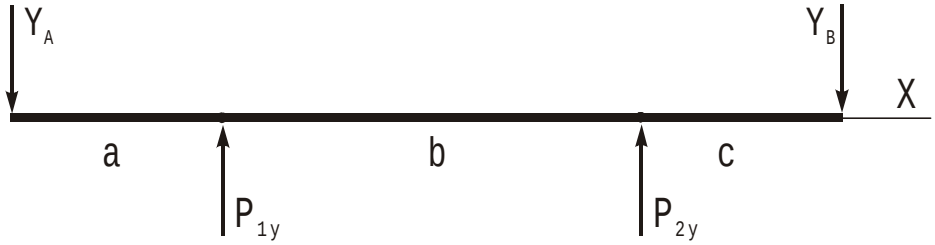
Для каждой схемы нагружения стержня (рис. 6, б, в, г) определяются внутренние силовые факторы в поперечных сечениях.

2.1. Нагружение стержня в плоскости y – x

Схема нагружения стержня в плоскости $y - x$ представлена на рис. 7, а. В поперечных сечениях стержня возникают поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_z.



а) расчетная схема нагружения стержня в плоскости y - x



б) расчетная схема стержня с учетом опорных реакций Y_A и Y_B

Рис. 7

Для их определения необходимо вначале найти опорные реакции Y_A и Y_B (рис. 7, б), используя уравнения равновесия вида

$$\sum M_A(\vec{P}_i) = 0 \ , \qquad \sum M_B(\vec{P}_i) = 0 \ .$$

Из первого уравнения, которое можно представить как

$$-Y_B(a+b+c) + P_{1y} \cdot a + P_{2y}(a+b) = 0 \ ,$$

находим $$Y_B = \frac{P_{1y} \cdot a + P_{2y}(a+b)}{(a+b+c)} \quad .$$

Из второго уравнения $\sum M_B(\vec{P}_i) = 0$ следует, что

$$Y_A(a+b+c) - P_{1y}(b+c) - P_{2y} \cdot c = 0,$$

откуда $$Y_A = \frac{P_{1y}(b+c) + P_{2y} \cdot c}{(a+b+c)}.$$

После определения опорных реакций Y_A и Y_B приступаем к определению поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z в поперечных сечениях стержня на различных участках

$$Q_y = \begin{cases} -(\sum P_{iy})_f, \\ \left(\sum P_{iy}\right)_p, \end{cases} \qquad (1.15)$$

где $(\sum P_{iy})_f -$ сумма проекций на ось *y* внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала (точки А) до рассматриваемого сечения; $(\sum P_{iy})_p -$ сумма проекций на ось *y* внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня.

Изгибающий момент M_z в произвольном поперечном сечении стержня определяется на *j* -м участке как

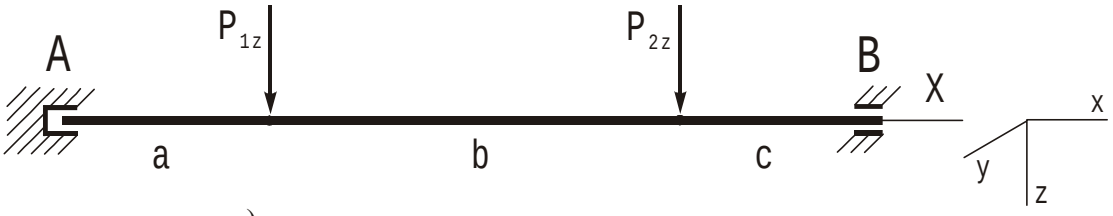
$$M_{z_j} = \begin{cases} -[\sum M_z(P_i)]_f, \\ [\sum M_z(P_i)]_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.16)$$

где $[\sum M_z(P_i)]_f -$ сумма моментов относительно оси z поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_z(P_i)]_p -$ сумма моментов относительно оси *z* внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; *j* – текущий номер участка; *n* – число участков.

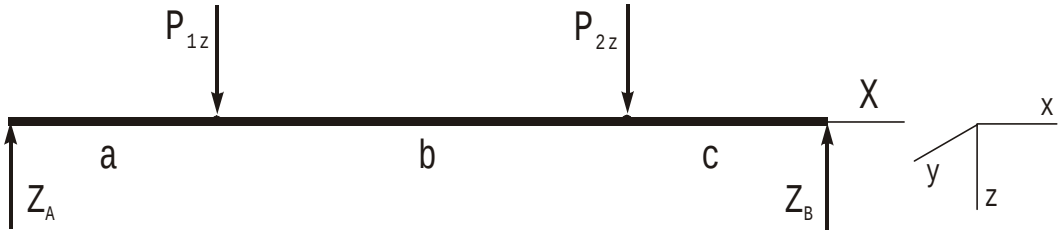
Процедуру определения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z в поперечных сечениях стержня можно найти в методических указаниях [5 – 6].

2.2. Нагружение стержня в плоскости z – x

Схема нагружения стержня в плоскости $z - x$ представлена на рис. 8, а.



а) расчетная схема нагружения стержня в плоскости z - x



б) расчетная схема стержня с учетом опорных реакций Z_A и Z_B

Рис. 8

В поперечных сечениях стержня возникают поперечные силы Q_z и изгибающие моменты M_y. Для их определения необходимо вначале найти опорные реакции Z_A и Z_B (рис. 8, б), используя уравнения равновесия вида

$$\sum M_A(\vec{P}_i) = 0 \ , \qquad \sum M_B(\vec{P}_i) = 0 \ .$$

Из первого уравнения, которое можно представить как

$$Z_B(a+b+c) - P_{1z} \cdot a - P_{2z}(a+b) = 0 \ ,$$

находим $$Z_B = \frac{P_{1z} \cdot a + P_{2z}(a+b)}{(a+b+c)} \ .$$

Из второго уравнения $\sum M_B(\vec{P}_i) = 0$ следует, что

$$-Z_A(a+b+c) + P_{1z}(b+c) + P_{2z} \cdot c = 0 \, ,$$

откуда $$Z_A = \frac{P_{1z}(b+c) + P_{2z} \cdot c}{(a+b+c)} \, .$$

После определения опорных реакций Z_A и Z_B приступаем к определению поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y в поперечных сечениях стержня на различных участках

$$Q_z = \begin{cases} -\left(\sum P_{iz}\right)_f , \\ \left(\sum P_{iz}\right)_p , \end{cases} \qquad (1.17)$$

где $(\sum P_{iz})_f -$ сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала (точки А) до рассматриваемого сечения; $(\sum P_{iz})_p -$ сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня.

Изгибающий момент M_y в произвольном поперечном сечении стержня определяется на j – м участке определяется как

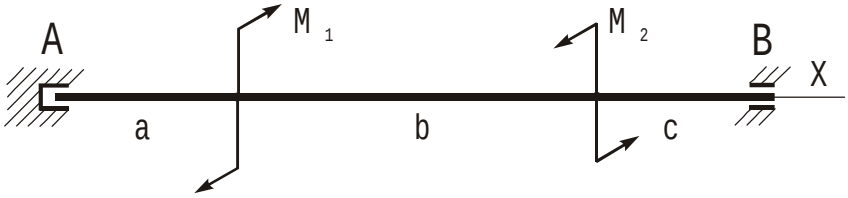
$$M_{y_j} = \begin{cases} -[\sum M_y(P_i)]_f, \\ [\sum M_y(P_i)]_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.18}$$

где $[\sum M_y(P_i)]_f -$ сумма моментов относительно оси z поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_y(P_i)]_p -$ сумма моментов относительно оси z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

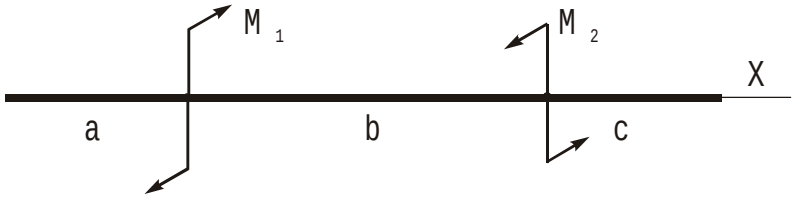
Процедуру определения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z в поперечных сечениях стержня можно найти в методических указаниях [5 – 6].

2.3. Нагружение стержня моментами M_1 и M_2, плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня

Схема нагружения стержня моментами M_1 и M_2 представлена на рис. 9,а. Плоскость действия моментов M_1 и M_2 перпендикулярна продольной оси стержня.



а) расчетная схема стержня, испытывающего кручение



б) расчетная схема стержня, испытывающего кручение, когда внешние связи не создают реакций

Рис. 9

Если пренебречь трением в опорах A и B, то связи, ограничивающие возможность поворота стержня вокруг продольной оси x, отсутствуют. Соответственно отсутствуют и реакции таких связей. Стержень при отбрасывании внешних связей оказывается нагружен лишь моментами M_1 и M_2. Причем из условия статического равновесия $\sum M_x(\vec{P}_i) = 0$ имеем

$$-M_1 + M_2 = 0, \qquad M_1 = M_2 .$$

Крутящий момент M_x в поперечных сечениях стержня возникает лишь на части стержня, ограниченного плоскостями действия моментов M_1 и M_2. На схеме, представленной на рис. 9, б, это участок стержня длиной b . Крутящий момент M_x в поперечных сечениях этого участка определится как

$$M_x = \begin{cases} -[\sum M_x(P_i)]_f = -(-M_1) = M_1, & a \le x \le a+b, \\ [\sum M_x(P_i)]_p = M_2, & a \le x \le a+b, \end{cases} \qquad (1.19)$$

где $[\sum M_x(P_i)]_f -$ сумма моментов относительно продольной оси x пар сил, действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_x(P_i)]_p -$ сумма моментов относительно продольной оси x пар сил, действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения.

3. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЧКАХ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Рассмотрим поперечное сечение стержня (рис. 10), испытывающего изгиб с кручением. В поперечном сечении действуют следующие внутренние силовые факторы: поперечные силы Q_y и Q_z, изгибающие моменты M_y и M_z, крутящий момент M_x.

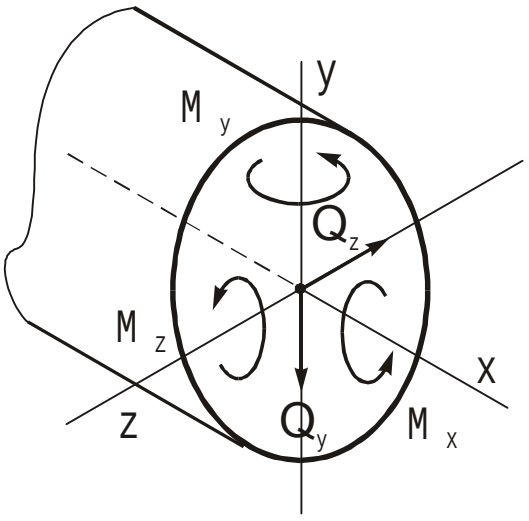


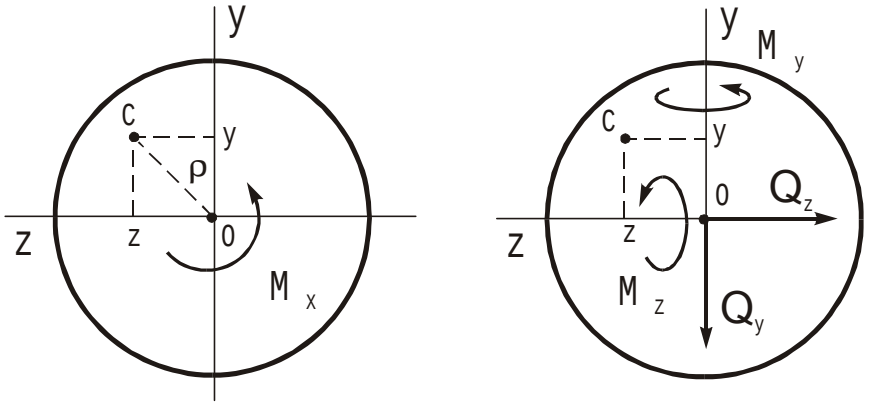
Рис. 10. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением

Плоскость действия изгибающих моментов M_y и M_z проходит через главные центральные оси y и z поперечного сечения. Используя принцип независимости действия сил, можно задачу определения напряжений в точках поперечного сечения свести к задачам определения напряжений в точках поперечного сечения при поперечном изгибе, рассматривая отдельно поперечный изгиб стержня в плоскости $y-x$ и поперечный изгиб стержня в плоскости $z-x$, а также определения касательных напряжений $\tau(M_x)$ в точках поперечного сечения от действия крутящего момента M_x.

Касательные напряжения $\tau(M_x)$ в произвольной точке поперечного сечения, имеющей координаты y и z (рис. 11, а), при кручении стержня круглого поперечного сечения определяются по формуле

$$\tau(M_x)=\frac{M_x}{J_p}\rho \ , \qquad (1.20)$$

где $\rho=\sqrt{y^2+z^2}$ – расстояние от рассматриваемой точки С до точки О продольной оси стержня; J_p- полярный момент инерции поперечного сечения относительно точки О; y и $z-$ координаты точки, где определяются касательные напряжения.



а) б)

Рис. 11.

Максимальные по модулю касательные напряжения возникают в наиболее удаленных точках поперечного сечения на расстоянии, равном радиусу круга,

$$\tau_{\max}(M_x)=\frac{|M_x|}{J_p}\rho_{\max}=\frac{|M_x|}{W_p}, \qquad \rho_{\max}=\frac{D_c}{2} \ , \qquad (1.21)$$

где D_c – диаметр круга; $W_p=\dfrac{\pi D_c^{\,3}}{16}$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

При поперечном изгибе при нагружении стержня в плоскости $y-x$ в произвольной точке поперечного сечения возникают нормальные напряжения $\sigma(M_z)$ от действия изгибающего момента M_z (рис. 11, б)

$$\sigma(M_z)=-\frac{M_z}{J_z}y, \tag{1.22}$$

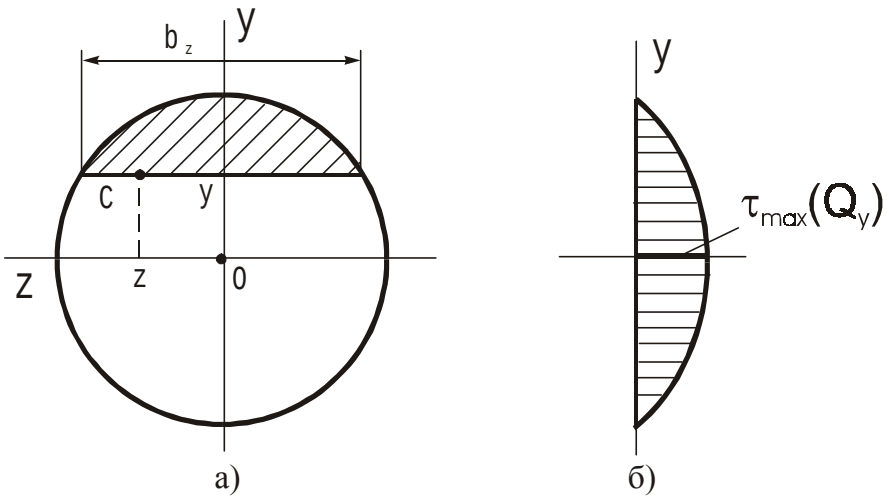
где J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z; y – координата точки по оси y.

Знак «минус» означает, что при положительных значениях изгибающего момента M_z в точках поперечного сечения, имеющего положительные координаты y, возникают нормальные напряжения сжатия.

Касательные напряжения $\tau(Q_y)$ в произвольной точке поперечного сечения от действия поперечной силы Q_y могут быть определены по формуле Журавского

$$\tau(Q_y)=\frac{Q_y S_z^*}{J_z b_z}, \tag{1.23}$$

где Q_y – значение поперечной силы в поперечном сечении; S_z^* – статический момент относительно оси z части поперечного сечения, расположенной над точками поперечного сечения с координатами y (на рис. 12, а эта часть сечения заштрихована); b_z – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси z и проходящего через точки с координатами y (рис. 12, а).



а) б)

Рис. 12.

Касательные напряжения $\tau(Q_y)$ распределены по высоте поперечного сечения по нелинейному закону (рис. 12,б). Максимального значения касательные напряжения для круглого поперечного сечения достигают в точках, лежащих на оси z, причем

$$\tau_{\max}(Q_y)=\frac{4}{3}\frac{Q_y}{A}\ , \tag{1.24}$$

где А – площадь поперечного сечения.

При поперечном изгибе при нагружении стержня в плоскости $z-x$ в произвольной точке поперечного сечения возникают нормальные напряжения $\sigma(M_y)$ от действия изгибающего момента M_y (рис. 11, б)

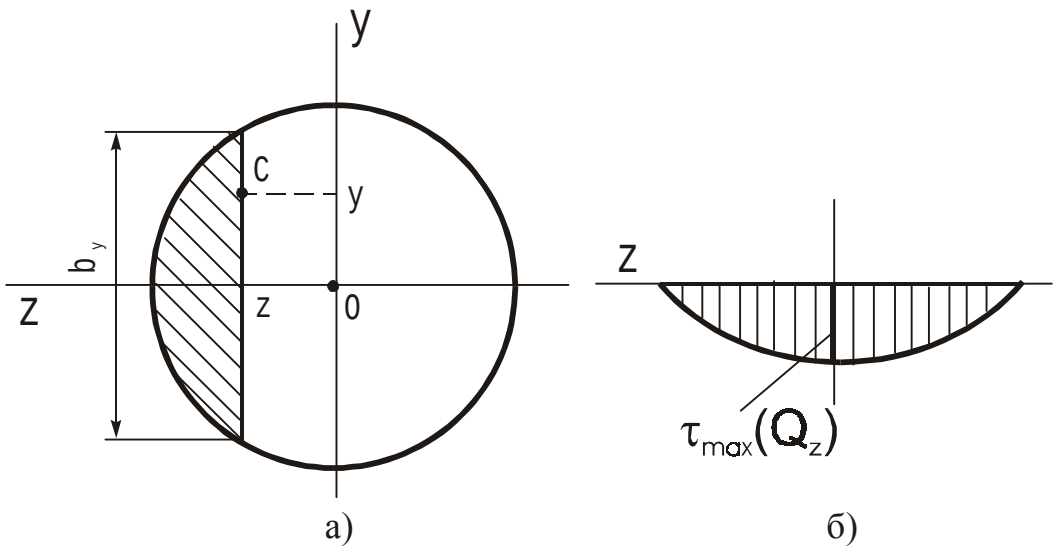
$$\sigma(M_y)=\frac{M_y}{J_y}z, \tag{1.25}$$

где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси y; z – координата точки по оси z.

Касательные напряжения $\tau(Q_z)$ в произвольной точке поперечного сечения от действия поперечной силы Q_z могут быть определены по формуле Журавского

$$\tau(Q_z)=\frac{Q_z S_y^*}{J_y b_y}, \tag{1.26}$$

где Q_z – значение поперечной силы в поперечном сечении; S_y^* – статический момент относительно оси y части поперечного сечения, расположенной от отрезка b_y в сторону оси z (на рис. 13, а эта часть сечения заштрихована); b_y – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси y и проходящего через точки с координатами z (рис. 13, а).



а) б)

Рис. 13.

Касательные напряжения $\tau(Q_z)$ распределены по ширине поперечного сечения по нелинейному закону (рис. 13, б). Максимального значения каса-

тельные напряжения для круглого поперечного сечения достигают в точках, лежащих на оси y, причем

$$\tau_{\max}(Q_z)=\frac{4}{3}\frac{Q_z}{A},$$

где А – площадь поперечного сечения.

Ось z, где расположены точки поперечного сечения с максимальными $\tau_{\max}(Q_y)$, и ось y, где расположены точки поперечного сечения с максимальными $\tau_{\max}(Q_z)$, пересекаются в центре тяжести поперечного сечения. В точке пересечения (в центре тяжести поперечного сечения) максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max}=\sqrt{\tau^2_{\max}(Q_y)+\tau^2_{\max}(Q_z)}=\frac{4}{3}\frac{1}{A}\sqrt{Q_y^2+Q_z^2}=\frac{4}{3}\frac{Q}{A},$$

где $Q=\sqrt{Q_y^2+Q_z^2}$ – поперечная сила в сечении.

Нормальные напряжения σ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающих моментов M_z и M_y суммируются

$$\sigma=\sigma(M_z)+\sigma(M_y)=-\frac{M_z}{J_z}y+\frac{M_y}{J_y}z. \qquad (1.27)$$

В поперечном сечении существуют такие точки (обозначим координаты этих точек y_0 и z_0), для которых $\sigma=0$, т.е.

$$-\frac{M_z}{J_z}y_0+\frac{M_y}{J_y}z_0=0.$$

Из данного равенства следует, что

$$z_0=\frac{M_z}{J_z}\frac{J_y}{M_y}y_0.$$

Учитывая, что для круглого поперечного сечения $J_y=J_z$, получим

$$z_0=\frac{M_z}{M_y}y_0. \qquad (1.28)$$

Обозначим отношение $\frac{M_z}{M_y}=k$. Тогда

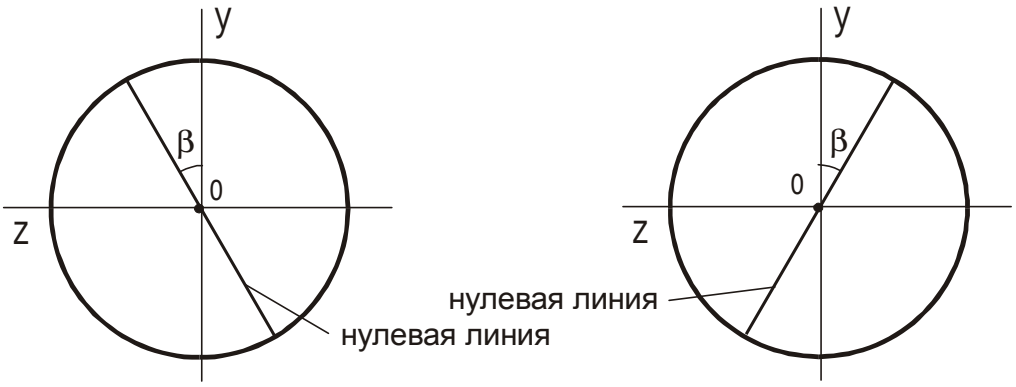
$$z_0=k\,y_0. \qquad (1.29)$$

Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести поперечного сечения) с угловым коэффициентом

$$k=tg\,\beta,\quad tg\,\beta=\frac{M_z}{M_y}, \qquad (1.30)$$

где β – угол между координатной осью y и линией, в точках которой нормальные напряжения равны нулю.

Эта линия называется нулевой (или нейтральной) линией. Ее положение относительно оси y определяется углом β. Если угол $\beta > 0$, то он должен быть отложен от оси y против часовой стрелки (рис. 14, а). Если угол $\beta < 0$, то этот угол должен быть отложен от оси y по часовой стрелке (рис. 14, б).



а) $\beta > 0$ б) $\beta < 0$

Рис. 14

Рассмотрим положение произвольной точки С поперечного сечения относительно нулевой линии (рис. 15). Точка С имеет координаты y и z в системе координатных осей y, z. Введем новую систему координат $y_н$ и $z_н$, проходящих через центр тяжести поперечного сечения таким образом, что ось $y_н$ совпадает с нулевой линией, а ось $z_н$ перпендикулярна нулевой линии (рис. 15). Координаты точки С в новой системе координатных осей, повернутых относительно осей y и z на угол β, могут быть определены как

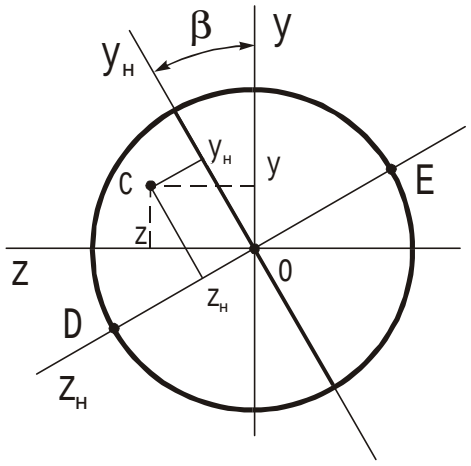


Рис.15

$$y_н = y\cos\beta + z\sin\beta,$$
$$z_н = z\cos\beta - y\sin\beta \ . \qquad (1.31)$$

Заметим, что модуль координаты $z_н$ определяет расстояние от точки С до нулевой линии.

В произвольной точке С, имеющей координаты y и z, нормальные напряжения σ определяются как

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z \ . \qquad (1.32)$$

Преобразуем данное равенство следующим образом:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}(z - \frac{M_z}{J_z}\frac{J_y}{M_y}y).$$

Учитывая, что для круглого поперечного сечения $J_y = J_z$, а отношение $\frac{M_z}{M_y} = tg\,\beta$, получим

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}(z - tg\,\beta \cdot y) = \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{z\cos\beta - y\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Но из (1.31) $z_н = z\cos\beta - y\sin\beta$. Тогда

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{z_н}{\cos\beta}, \qquad (1.33)$$

т. е. нормальные напряжения σ в произвольной точке поперечного сечения пропорциональны координате $z_н$ этой точки (модуль $z_н$ определяет расстояние от рассматриваемой точки до нулевой линии).

Опасными точками будут те точки поперечного сечения, которые наиболее удалены от нулевой линии. Для круглого поперечного сечения это точки *D* и *E* (рис. 15), где ось $z_н$ пересекает профиль сечения. Так как $(z_н)_{\max} = r$ (где r – радиус круга), то в опасных точках возникают максимальные по модулю нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{J_y} \cdot \frac{z_r}{\cos\beta} = \frac{|M_y|}{W_y} \cdot \frac{1}{\cos\beta}, \qquad (1.34)$$

где $W_y = \frac{J_y}{r}$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения.

Учитывая, что $tg\,\beta = \frac{M_z}{M_y}$, $\cos\beta = \frac{M_y}{M_z}\sin\beta$, можно выразить $\sigma_{\max}$ как

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{J_z} \cdot \frac{r}{\sin\beta} = \frac{|M_z|}{W_z} \cdot \frac{1}{|\sin\beta|}. \qquad (1.35)$$

Расчет $\sigma_{\max}$ в опасных точках поперечного сечения следует вести в опасном сечении стержня. Естественно возникает вопрос: а где находится опасное сечение? Если $\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y} \cdot \frac{1}{\cos\beta}$, а также, что для $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{1 + tg^2\beta}, \quad \text{а} \quad tg^2\beta = \frac{M_z^2}{M_y^2}, \quad \text{то} \quad \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{|M_y|}\sqrt{M_y^2 + M_z^2},$$

а максимальные по модулю нормальные напряжения

$$\sigma_{\max}=\frac{1}{W_y}\sqrt{M_y^2+M_z^2}\ =\frac{M_{изг}}{W_y}\ ,\ \ M_{изг}=\sqrt{M_y^2+M_z^2}\ , \qquad (1.36)$$

где $M_{изг}$ – модуль полного изгибающего момента.

Тогда опасным по нормальным напряжениям будет то поперечное сечение стержня, в котором $M_{изг}$ достигает наибольшего значения.

Итак, в точках круглого поперечного сечения, удаленных от центра тяжести на расстоянии, равном радиусу круга, возникают максимальные по модулю нормальные напряжения $\sigma_{\max}=\frac{M_{изг}}{W_y}$ и максимальные по модулю касательные напряжения от действия крутящего момента M_x

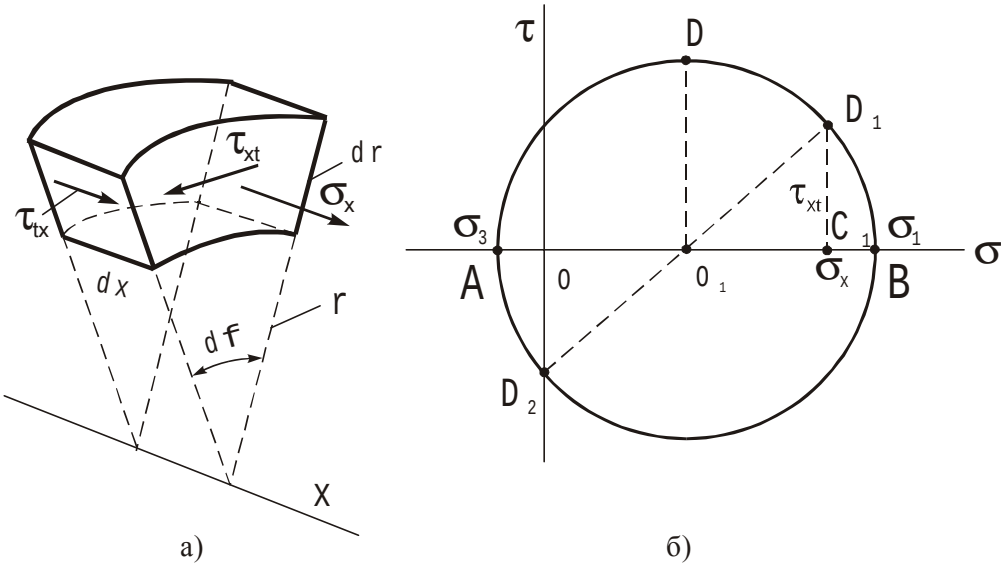
$$\tau_{\max}(M_x)\ =\ \frac{|M_x|}{W_p}\ . \qquad (1.37)$$

В центре тяжести поперечного сечения возникают максимальные касательные напряжения от действия поперечной силы

$$\tau_{\max}(Q)=\frac{4}{3}\frac{Q}{A}\ ,\quad Q=\sqrt{Q_y^2+Q_z^2}\ . \qquad (1.38)$$

Как правило, более опасными являются периферийные точки круга. Проанализируем напряженное состояние в этих опасных точках.

Выделим в окрестности опасной точки элементарный объем (рис.16, а), по граням которого действуют нормальные напряжения σ_x и касательные напряжения τ_{xt} (по граням, совпадающим с поперечным сечением стержня).



а) б)

Рис. 16

По перпендикулярным граням, плоскость которых проходит через продольную ось *x*, действуют только касательные напряжения τ_{tx} (первый индекс соответствует направлению нормали к грани, а второй индекс – направлению

самого касательного напряжения). На рис. 16, а напряжения на невидимых гранях условно не показаны, чтобы не загромождать рисунок.

Решение обратной задачи при анализе напряженного состояния в опасной точке (определение главных напряжений σ_1 и σ_3) при известных нормальных ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_t = 0$) и касательных τ_{xt} и τ_{tx} напряжений в двух взаимно перпендикулярных гранях элементарного объема осуществим путем построения круга Мора (рис. 16, б).

Для этого проведем координатные оси σ и τ (рис. 16, б). На оси σ отложим отрезок OC_1, соответствующий в определенном масштабе нормальному напряжению σ_x. Из точки C_1 построим отрезок C_1D_1, соответствующий в масштабе значению касательного напряжения τ_{xt}. Так как во взаимно перпендикулярной грани нормальные напряжения $\sigma_t = 0$ (изображающая это напряжение точка на оси σ совпадает с началом координат – точкой О) и действуют только касательные напряжения τ_{tx}, то из точки О строим отрезок OD_2, соответствующий в масштабе касательному напряжению τ_{tx}.

По закону парности касательных напряжений следует, что $\tau_{tx} = \tau_{xt}$. Поэтому отрезки OD_2 и C_1D_1 равны между собой. Соединим точки D_1 и D_2. Пересечение отрезка D_1D_2 с осью σ произойдет в точке O_1, причем $OO_1 = O_1C_1 = \frac{\sigma_x}{2}$. Радиусом O_1D_1 из точки O_1 проведем окружность, которая пересечет ось σ в точках А и В. Отрезок ОА в масштабе соответствует главному напряжению σ_3, а отрезок ОВ – главному напряжению σ_1.

Радиус O_1D_1 окружности равен

$$O_1D_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \ . \qquad (1.39)$$

С другой стороны O_1D_1 – гипотенуза прямоугольного треугольника $O_1C_1D_1$ и

$$O_1D_1 = \sqrt{(O_1C_1)^2 + (C_1D_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xt}^2} \ . \qquad (1.40)$$

Приравнивая равенства (1.39) и (1.40), получим

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xt}^2} \quad \text{или} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xt}^2} \ . \qquad (1.41)$$

Отрезок ОВ = $OO_1 + O_1B$. Переходя к напряжениям, имеем

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xt}^2} \ . \qquad (1.42)$$

Отрезок ОА = $O_1O - O_1A$. Переходя к напряжениям и учитывая, что $\sigma_3 < 0$, получим

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xt}^2}\ . \qquad (1.43)$$

Если учесть, что в опасной точке поперечного сечения $\sigma_x = \sigma_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_y}$, а касательные напряжения $\tau_{xt} = \tau_{\max}(M_x) = \frac{|M_x|}{W_p}$, то при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения в опасных точках сечения

$$\sigma_1 = \frac{M_{изг}}{2W_y} + \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{2W_y}\right)^2 + \frac{M_x^2}{W_p^2}}\ , \qquad (1.44)$$

$$\sigma_3 = \frac{M_{изг}}{2W_y} - \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{2W_y}\right)^2 + \frac{M_x^2}{W_p^2}}\ . \qquad (1.45)$$

Если учесть, что для круглого поперечного сечения полярный момент сопротивления $W_p = 2W_y$, то последние равенства можно преобразовать к виду

$$\sigma_1 = \frac{1}{2W_y}(M_{изг} + \sqrt{M_{изг}^2 + M_x^2}), \qquad (1.46)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2W_y}(M_{изг} - \sqrt{M_{изг}^2 + M_x^2}). \qquad (1.47)$$

Если теперь учесть, что $M_{изг}^2 = M_y^2 + M_z^2$, то

$$\sqrt{M_{изг}^2 + M_x^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = M_0\ , \qquad (1.48)$$

где M_0 – модуль главного момента внутренних сил в поперечном сечении при приведении их к центру тяжести сечения.

Тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{W_y} \cdot \frac{M_{изг} + M_0}{2}\ , \qquad (1.49)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{W_y} \cdot \frac{M_{изг} - M_0}{2}\ . \qquad (1.50)$$

4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При расчете на прочность в опасных точках опасного сечения анализируется неравенство

$$\sigma_{экв} \le [\sigma], \tag{1.51}$$

где $\sigma_{экв}$ – эквивалентные нормальные напряжения, учитывающие главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 по главным площадкам в опасной точке; $[\sigma]$ – допускаемые напряжения для материала стержня.

Для вычисления $\sigma_{экв}$ можно воспользоваться формулами соответствующих теорий прочности. По третьей теории прочности

$$(\sigma_{экв})_3 = \sigma_1 - \sigma_3 \ . \tag{1.52}$$

Учитывая выражения для σ_1 и σ_3, получим

$$(\sigma_{экв})_3 = \frac{M_0}{W_y} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_y} = \frac{(M_{пр})_3}{W_y} \ , \tag{1.53}$$

где $(M_{пр})_3 = M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ – приведенный момент в поперечном сечении, вычисленный по третьей теории прочности.

По четвертой теории прочности

$$(\sigma_{экв})_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]} \ . \tag{1.54}$$

При изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения в окрестности опасной точки одна из главных площадок элементарного объема находится на боковой поверхности стержня и нормальные напряжения там отсутствуют . Тогда, принимая, что $\sigma_2 = 0$, получим

$$(\sigma_{экв})_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(2\sigma_1^{\ 2} + 2\sigma_3^{\ 2} - 2\sigma_1\sigma_3)} = \sqrt{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_3^{\ 2} - \sigma_1\sigma_3} \ .$$

Так как с учетом выражений (1.49) и (1.50) для σ_1 и σ_3

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 = \frac{1}{W_y^2} \cdot \frac{M_{изг}^2 + M_0^2}{2} \ , \qquad \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \frac{1}{W_y^2} \cdot \frac{M_{изг}^2 - M_0^2}{4} \ ,$$

то $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \frac{1}{W_y^2} \cdot \frac{M_{изг}^2 + M_0^2}{2} - \frac{1}{W_y^2} \cdot \frac{M_{изг}^2 - M_0^2}{4}$ и после преобразований получим $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \frac{1}{W_y^2}(M_{изг}^2 + \frac{3}{4}M_x^2)$.

Тогда эквивалентные напряжения по 4-й теории прочности

$$(\sigma_{экв})_4 = \frac{1}{W_y}\sqrt{M_{изг}^2 + 0{,}75M_x^2} = \frac{(M_{пр})_4}{W_y} \ , \tag{1.55}$$

где $(M_{пр})_4 = \sqrt{M_{изг}^2 + 0{,}75M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0{,}75M_x^2}$ – приведенный момент в поперечном сечении, вычисленный по 4-й теории прочности.

Вернемся теперь к условию прочности (1.51) $\sigma_{экв} \le [\sigma]$, которое с учетом (1.53) и (1.55) запишем как

$$\frac{(M_{пр})_i}{W_y} \le [\sigma], \quad i = 3 \text{ или } i = 4, \tag{1.56}$$

где индекс $i = 3$ означает, что приведенный момент $(M_{пр})_i$ вычисляется по третьей теории прочности с использованием формулы (1.53),

$$(M_{пр})_3 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \tag{1.57}$$

а индекс $i = 4$ означает, что приведенный момент $(M_{пр})_i$ вычисляется по четвертой теории прочности с использованием формулы (1.55),

$$(M_{пр})_4 = \sqrt{M_{изг}^2 + 0{,}75M_x^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0{,}75M_x^2}. \tag{1.58}$$

Расчет на прочность может проводиться как поверочный и связан с анализом выполнения неравенства (1.56) при известных значениях $M_{пр}$, осевого момента сопротивления поперечного сечения W_y и допускаемого напряжения $[\sigma]$. Расчет на прочность может проводиться как проектировочный и связан, как правило, либо с определением W_y, либо с определением $[\sigma]$ и выбором материала.

При проектировочном расчете, когда неизвестной величиной является W_y, из формулы (1.56) следует

$$W_y \ge \frac{(M_{пр})_i}{[\sigma]}, \; i = 3 \text{ или } i = 4. \tag{1.59}$$

Для круглого кольцевого сечения стержня

$$W_y = \frac{\pi(D_c^3 - d_c^3)}{32} = \frac{\pi D_c^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d_c}{D_c}\right)^3\right], \tag{1.60}$$

где $D_c -$ диаметр внешней окружности кольцевого сечения; $d_c -$диаметр внутренней окружности кольцевого сечения.

Если задано соотношение $\frac{d_c}{D_c} = k$, то диаметр D_c может быть определен из (1.59) с учетом (1.60) как $D_c \ge \sqrt[3]{\frac{32(M_{пр})_i}{\pi(1-k^3)[\sigma]}}$, а диаметр $d_c = kD_c$. (1.61)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробот В. А., Брусенцов А. С. Прикладная механика. – СПб.: Лань, 2022. - 180 с. - URL: https://e.lanbook.com/book.
2. Затипякин А. М., Друзь И.Б., Гаманов В.Ф. Сопротивление материалов. - Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2019. - 196 с. - URL: https://viewer.rsl.ru/ru/rsl07000487048?page=1&rotate=0&theme=white/.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: учебник. - СПб.: Лань, 2022. - 556 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/206420.
4. Джамай В.В., Самойлов Е.А., Станкевич А.И., Чуркина Т.Ю. Прикладная механика: учебник для академического бакалавриата. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 360 с.
5. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 279 с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 432 с.