Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины
и наземный транспорт»

КОСОЙ ИЗГИБ БРУСА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «МЕХАНИКА»

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело
13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
20.03.02 Природообустройство и водопользование

Астрахань 2024

УДК 539.3

Хахов А.А.
Косой изгиб бруса. Методические указания по курсу «Механика». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 35 с.

В пособии рассмотрен пример составления расчетной схемы, определения внутренних силовых факторов и напряжений в сечениях и расчета на прочность бруса при косом изгибе.
Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»
Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2024
© Астраханский государственный технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....4
1. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ.....5
1.1. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе …….....5
1.2. Напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе.....10
1.2.1. Расчетные зависимости……....10
1.2.2. Нулевая линия в поперечном сечении при косом изгибе…….12
1.2.3. Опасные точки в поперечном сечении при косом изгибе……13
1.2.4. Силовая линия в поперечном сечении стержня…….16
1.3. Расчет на прочность при косом изгибе. ……17
1.4. Определение перемещений при косом изгибе……..20
2. ПРИМЕР. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ…….24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 35

ВВЕДЕНИЕ

Под сложным нагружением стержня будем понимать различные комбинации простых видов нагружения (растяжения-сжатия, сдвига, кручения, поперечного изгиба). В общем случае сложного нагружения в поперечных сечениях стержня действуют шесть составляющих внутренних сил: продольная сила N_z, поперечные силы Q_x и Q_y , крутящий момент T , изгибающие моменты M_x и M_y.

Принципиально нового задачи сложного нагружения стержня не вносят, так как на основе принципа независимости действия сил любое сложное нагружение можно представить в виде совокупности более простых нагружений. Производя расчет стержня при простых нагружениях и суммируя результаты расчета, можно определить нормальные и касательные напряжения в различных точках поперечного сечения, найти опасные точки, определить главные напряжения в этих точках. Затем, используя ту или иную теорию прочности, можно перейти к анализу условия прочности.

Аналогично могут быть определены деформации и перемещения тех или иных сечений стержня путем суммирования деформаций и перемещений, вычисленных для отдельных, более простых нагружений.

Принцип независимости действия сил применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука.

Одним из видов сложного нагружения является косой изгиб.

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

Встречается и другая трактовка понятия косого изгиба. Ее можно сформулировать следующим образом. *Если внешние силы, вызывающие изгиб бруса, действуют в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей бруса, то такой вид изгиба называется косым***.**

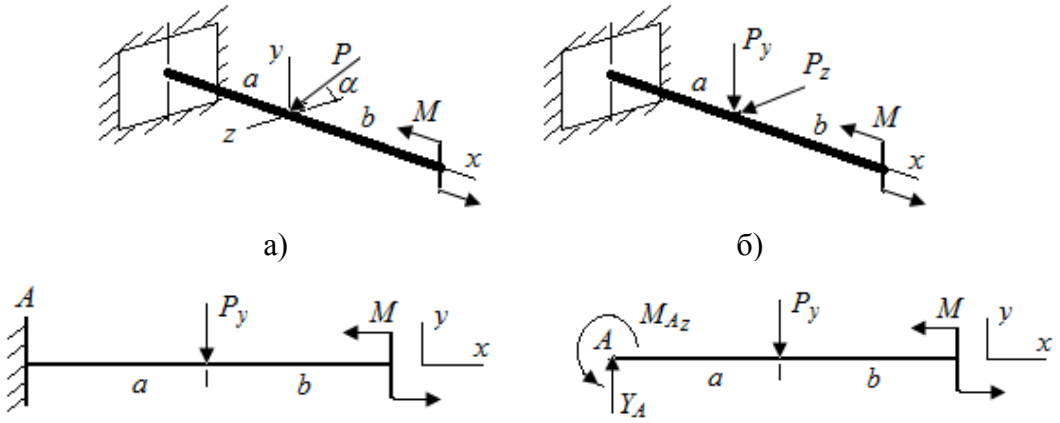
Такая трактовка удобна тем, что она позволяет говорить о виде изгиба (прямой или косой) еще на стадии рассмотрения расчетной схемы без определения изгибающего момента в расчетных сечениях и ориентации плоскости действия этого изгибающего момента.

Ниже рассмотрены основные положения расчета бруса при косом изгибе.

1. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

1.1. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе

Пусть на стержень действуют внешние силы, линии действия которых пересекают продольную ось стержня (рис. 1.1, а). Пусть оси y и z в поперечных сечениях стержня являются главными осями инерции сечения, а множество этих осей образуют главные плоскости стержня. Назовем ***силовой плоскостью*** плоскость, проходящую через продольную ось и линию действия силы.



а) б)

в) г)

Рис. 1.1. Схемы нагружения стержня: а) схема нагружения, когда силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями стержня; б) схема нагружения, когда сила P разложена на составляющие, лежащие в главных плоскостях; в) схема нагружения стержня в плоскости y-x; г) схема нагружения стержня в плоскости y-x при замене внешней связи неизвестными опорными реакциями Y_A и M_{Az}

Если силовые плоскости тех или иных внешних сил не совпадают с главными плоскостями стержня (рис. 1.1, а), целесообразно эти силы разложить на составляющие, линии действия которых будут лежать в главных плоскостях (рис. 1.1, б).

Далее рассматриваем нагружение стержня отдельно сначала в одной плоскости нагружения (например, в плоскости $y - x$, рис. 1.1, в), совпадающей с главной плоскостью стержня. Ось z перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю. Последовательность расчета соответствует той, что имеет место при поперечном изгибе:

1) отбрасываются внешние связи и их действие заменяется неизвестными реакциями связей Y_A и M_{Az} (рис. 1.1, г);

2) составляются уравнения равновесия, из которых могут быть определены неизвестные реакции связей;

3) составляются уравнения для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках.

Внутренними силовыми факторами в поперечных сечениях при нагружении стержня, испытывающего изгиб, в плоскости $y - x$ является поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z. Поперечная сила Q_y в произвольном поперечном сечении определяется как

$$Q_y = \begin{cases} (\sum P_{iy})_f, \\ -\left(\sum P_{iy}\right)_p, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $(\sum P_{iy})_f -$ сумма проекций на ось y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $(\sum P_{iy})_p -$ сумма проекций на ось y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня.

В системе уравнений (1.1) может быть использовано либо первое, либо второе уравнение. Выбор того или иного уравнения определяется стремлением сделать его более простым, содержащим как можно меньше слагаемых. А так как число слагаемых определяется числом проекций сил, рекомендуется использовать то уравнение, где число проекций сил будет меньше.

Уравнения вида (1.1) составляются для каждого участка стержня

$$\left(Q_y\right)_j = \begin{cases} (\sum P_{iy})_f, \\ -\left(\sum P_{iy}\right)_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.2)$$

где j – текущий номер участка; n – число участков; i – индекс силы.

Из формул (1.2) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для поперечной силы Q_y в поперечном сечении стержня (рис. 1.2):

если проекция внешней силы P_{iy} , действующей до сечения, положительна, то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_y;

если проекция внешней силы P_{iy} , действующей после сечения, отрицательна (рис. 1.2), то она также входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_y .

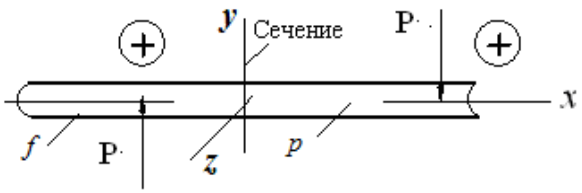


Рис. 1.2. Схема положительных слагаемых при составлении выражений для поперечной силы Q_y в поперечном сечении стержня

Изгибающий момент M_z в произвольном поперечном сечении стержня определяется на j-м участке как

$$\left(M_z\right)_j = \begin{cases} -[\sum M_z(P_i)]_f, \\ [\sum M_z(P_i)]_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.3}$$

где $[\sum M_z(P_i)]_f$ – сумма моментов относительно оси z поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_z(P_i)]_p$ – сумма моментов относительно оси z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Из формул (1.3) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня (рис. 1.3):

если момент внешних сил $M_z(P_i)$ относительно оси z направлен по часовой стрелке (если смотреть навстречу этой оси) и *действует до сечения* (рис. 1.3), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня;

если момент внешних сил $M_z(P_i)$ относительно оси z направлен против часовой стрелки (если смотреть навстречу этой оси) и *действует после сечения* (рис. 1.3), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня.

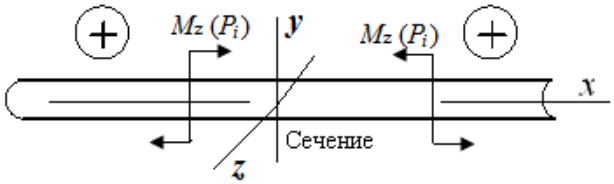


Рис. 1.3. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для изгибающего момента M_z в поперечном сечении стержня

После определения внутренних силовых факторов Q_y и M_z в поперечных сечениях на каждом участке стержня переходим к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня, нагруженного внешними силами уже в другой плоскости, совпадающей с главной плоскостью $z - x$ стержня (рис. 1.4, в).

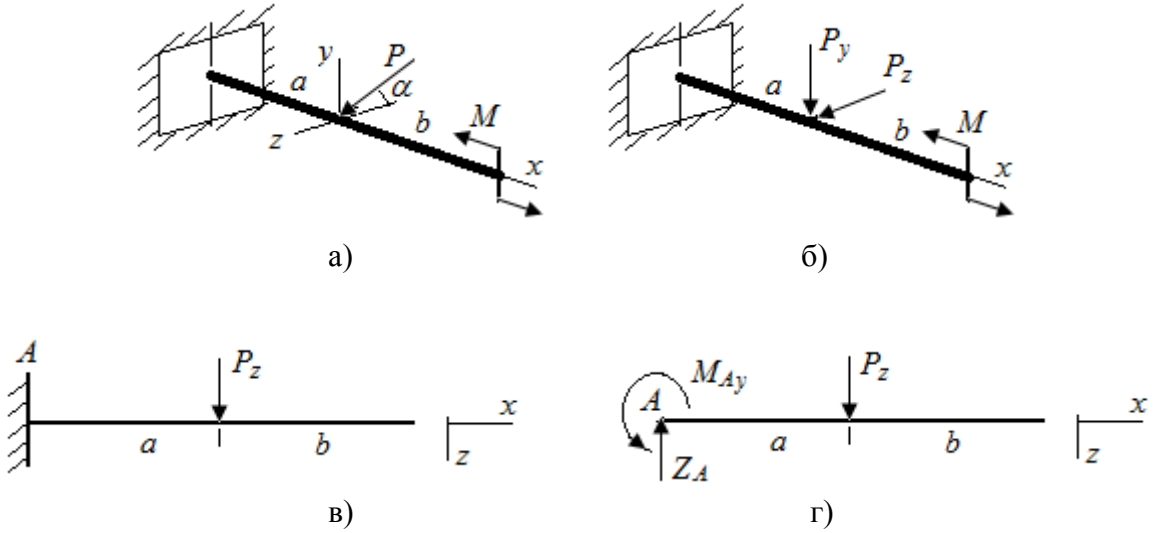
Ось y перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю.

Последовательность расчета соответствует изложенной выше:

– отбрасываются внешние связи, а их действие заменяется неизвестными реакциями связей Z_A и M_{Ay} (рис. 1.4, г);

– составляются уравнения равновесия, из которых могут быть определены неизвестные реакции связей;
– составляются уравнения для определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках.

Внутренними силовыми факторами в поперечных сечениях при нагружении стержня, испытывающего изгиб, в плоскости $z - x$ является поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_y.



а) б)

в) г)

Рис. 1.4. Схемы нагружения стержня: а) схема нагружения, когда силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями стержня; б) схема нагружения, когда сила P разложена на составляющие, лежащие в главных плоскостях; в) схема нагружения стержня в плоскости z-x; г) схема нагружения стержня в плоскости y-x при замене внешней связи неизвестными опорными реакциями Z_A и M_{Ay}

Поперечная сила Q_z в произвольном поперечном сечении на произвольном j-м участке определяется как

$$\left(Q_z\right)_j = \begin{cases} -\left(\sum P_{iz}\right)_f, \\ \left(\sum P_{iz}\right)_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.4)$$

где $\left(\sum P_{iz}\right)_f$ – сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $\left(\sum P_{iz}\right)_p$ – сумма проекций на ось z внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Так как ось z на схемах (рис. 1.4, в, г) направлена вниз, то из формул (1.4) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для поперечной силы Q_z в поперечном сечении стержня (рис. 1.5):

если проекция внешней силы P_{iz}, **действующей до сечения**, отрицательна (т. е. направлена вверх противоположно оси z), то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_z;

если проекция внешней силы P_{iz}, **действующей после сечения**, положительна (т. е. направлена вниз по направлению оси z), то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_z.

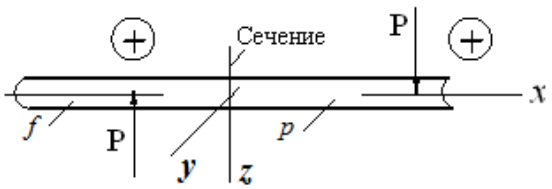


Рис. 1.5. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для поперечной силы Q_z в поперечном сечении стержня

Изгибающий момент M_y в произвольном поперечном сечении стержня на j -м участке определяется как

$$M_{y_j} = \begin{cases} -[\sum M_y(P_i)]_f, \\ [\sum M_y(P_i)]_p, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

где $[\sum M_y(P_i)]_f -$ сумма моментов относительно оси y поперечного сечения внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня от его начала до рассматриваемого сечения; $[\sum M_y(P_i)]_p -$ сумма моментов относительно оси y внешних сил (включая и реакции внешних связей), действующих на часть стержня после рассматриваемого сечения до конца стержня; j – текущий номер участка; n – число участков.

Из формул (1.5) следует такое правило знаков для слагаемых при составлении выражения для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня (рис. 1.6):

если момент внешних сил $M_y(P_i)$ относительно оси y отрицателен (т. е. направлен по часовой стрелке, если смотреть навстречу этой оси) и **действует до сечения** (рис. 1.6), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня;

если момент внешних сил $M_y(P_i)$ относительно оси y положителен (т. е. направлен против часовой стрелки, если смотреть навстречу этой оси) и **действует после сечения** (рис. 1.6), то он входит положительным слагаемым в выражение для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня.

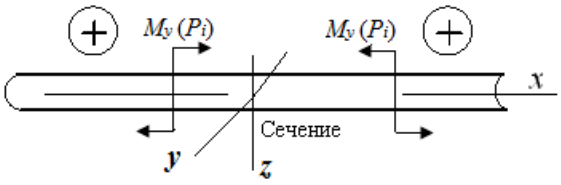
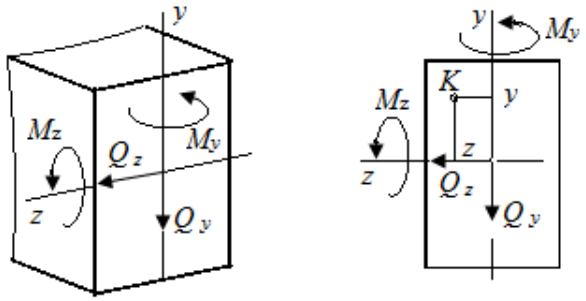


Рис. 1.6. Схема для определения знаков слагаемых при составлении выражений для изгибающего момента M_y в поперечном сечении стержня

1.2. Напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе

1.2.1. Расчетные зависимости

Рассмотрим поперечное сечение стержня (рис. 1.7, а), испытывающего косой изгиб. В поперечном сечении действуют следующие внутренние силовые факторы: **поперечные силы** Q_y и Q_z, **изгибающие моменты** M_z и M_y.



а) б)

Рис. 1.7. Схема поперечного сечения стержня с изображением поперечных сил Q_y, Q_z и изгибающих моментов M_y, M_z

Плоскость действия изгибающих моментов M_z и M_y проходит через главные центральные оси y и z поперечного сечения. Используя принцип независимости действия сил, можно задачу определения напряжений в точках поперечного сечения при косом изгибе свести к задачам определения напряжений в точках поперечного сечения при поперечном изгибе, рассматривая отдельно поперечный изгиб стержня в плоскости $y - x$ и поперечный изгиб стержня в плоскости $z - x$. Затем следует просуммировать полученные результаты.

Вычислим напряжения в некоторой произвольной точке K произвольного сечения (рис. 1.7, б), положение которой определяется координатами y и z. Нормальные напряжения в заданной точке определяются как

$$\sigma = \sigma\left(M_z\right) + \sigma\left(M_y\right), \qquad (1.6)$$

где $\sigma\left(M_z\right)$ и $\sigma\left(M_y\right)$ – нормальные напряжения в точке от действия изгибающих моментов M_z и M_y в рассматриваемом поперечном сечении.

Касательные напряжения τ в заданной точке определяются как

$$\tau = \sqrt{\tau^2\left(Q_y\right) + \tau^2\left(Q_z\right)}, \tag{1.7}$$

где $\tau\left(Q_y\right)$ и $\tau\left(Q_z\right)$ – касательные напряжения в точке от действия поперечных сил Q_y и Q_z в рассматриваемом поперечном сечении.

Для принятого направления координатных осей нормальные напряжения $\sigma\left(M_z\right)$ в произвольной точке от действия изгибающего момента M_z могут быть вычислены по формуле

$$\sigma\left(M_z\right) = -M_z y / J_z, \tag{1.8}$$

где J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z; y – координата точки по оси y.

Знак минус означает, что при положительных значениях изгибающего момента M_z в точках поперечного сечения, имеющих положительные значения координаты y, возникнут нормальные напряжения сжатия.

Нормальные напряжения $\sigma\left(M_y\right)$ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающего момента M_y могут быть вычислены по формуле

$$\sigma\left(M_y\right) = \frac{M_y}{J_y} z, \tag{1.9}$$

где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси y; z – координата точки по оси z.

Нормальные напряжения σ в произвольной точке поперечного сечения от действия изгибающих моментов M_z и M_y определяются как

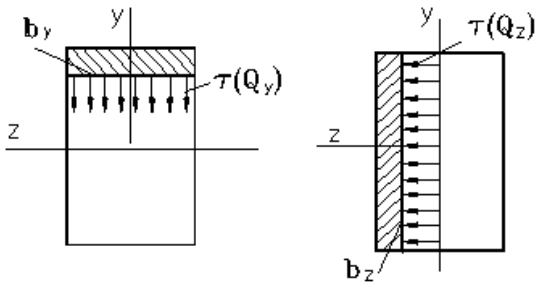
$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z\,. \tag{1.10}$$

Касательные напряжения $\tau(Q_y)$ и $\tau(Q_z)$ в произвольной точке поперечного сечения (рис. 1.8) от действия поперечных сил Q_y и Q_z могут быть определены по формуле Журавского соответственно как

$$\tau\left(Q_y\right) = \frac{Q_y S_z^*}{J_z b_y}, \qquad \tau\left(Q_z\right) = \frac{Q_z S_y^*}{J_y b_z}, \tag{1.11}$$

где b_y – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси z, проходящего через точки поперечного сечения, имеющие координаты y (рис. 1.8, а); b_z – длина отрезка поперечного сечения, параллельного оси y, проходящего через точки поперечного сечения, имеющие координаты z (рис. 1.8, б); S_z^* – статический момент относительно оси z части

поперечного сечения, расположенной по оси y над отрезком b_y (на рис. 1.8, а эта часть сечения заштрихована); S_y^* – статический момент относительно оси y части поперечного сечения, расположенной по оси z от отрезка b_z (на рис. 1.8, б эта часть сечения заштрихована).



а) б)

Рис. 1.8. Касательные напряжения $\tau\left(Q_y\right)$ и $\tau\left(Q_z\right)$ от поперечных сил Q_y и Q_z в точках поперечного сечения, лежащих на отрезке b_y (схема а) и b_z (схема б)

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинных стержней, когда влияние касательных напряжений на напряженное состояние в опасных точках несущественно и их можно не учитывать.

1.2.2. Нулевая линия в поперечном сечении при косом изгибе

При косом изгибе в поперечном сечении существуют такие точки (обозначим координаты этих точек y_0 и z_0), для которых $\sigma = 0$. Из (1.10)

$$-\frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0, \tag{1.12}$$

откуда следует, что

$$z_0 = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} y_0. \tag{1.13}$$

Обозначим постоянную величину

$$\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} = k. \tag{1.14}$$

Тогда

$$z_0 = k y_0. \tag{1.15}$$

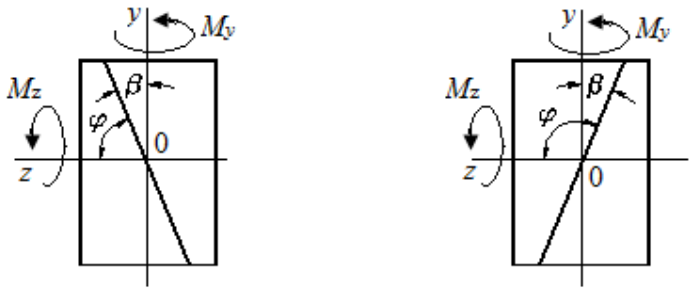
Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести сечения) с угловым коэффициентом

$$k = tg\beta, \qquad tg\beta = \frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z}, \tag{1.16}$$

где β – угол между координатной осью y и линией, в точках которой нормальные напряжения σ равны нулю.

Эта линия называется ***нулевой (или нейтральной)*** линией.

Рассмотрим поперечное сечение, в котором при известных значениях M_z, M_y, J_y, J_z можно построить нулевую линию (рис. 1.9, а).



а) б)

Рис. 1.9. Положение нулевой линии в поперечном сечении:
а) если угол $\beta > 0$, б) если угол $\beta < 0$

Угол β между осью y и нулевой линией определяется как

$$\beta = \text{arc tg}\, k, \qquad \beta = \text{arc tg}\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z}. \tag{1.17}$$

Если угол $\beta > 0$, то он должен быть отложен от оси y против часовой стрелки (рис. 1.9, а). Если угол $\beta < 0$, то этот угол должен быть отложен относительно оси y по часовой стрелке (рис. 1.9, б).

Положение нулевой линии можно задать также и углом φ, определяющим ориентацию нулевой линии относительно оси z. Несложно заметить (рис. 1.9, а, б), что

$$\varphi = \pi / 2 - \beta, \tag{1.18}$$

причем угол φ откладывется от оси z по часовой стрелке. Учитывая, что

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{ctg}\,\beta = \frac{1}{tg\,\beta},$$

имеем

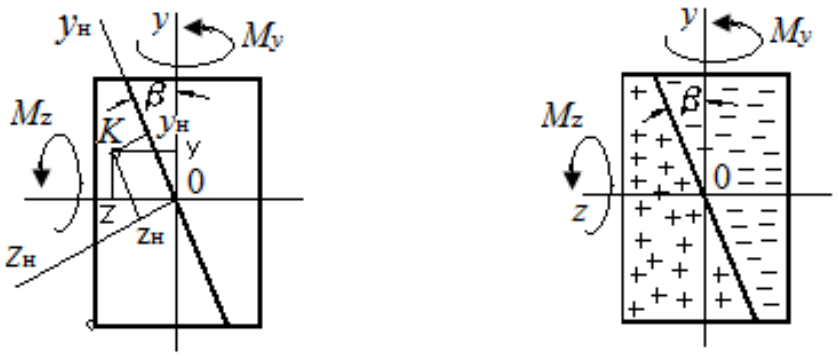
$$\text{tg}\,\varphi = \frac{1}{k} = \frac{M_y}{J_y}\frac{J_z}{M_z}. \tag{1.19}$$

1.2.3. Опасные точки в поперечном сечении при косом изгибе

Рассмотрим положение произвольной точки K (рис. 1.10, а) относительно нулевой линии. Точка K имеет координаты y и z. Введем новую систему координатных осей $y_н$ и $z_н$, проходящих через центр тяжести поперечного сечения таким образом, что ось $y_н$ совпадает с нулевой линией, а ось $z_н$ перпендикулярна ей (рис. 1.10, а).

Координаты точки K в новой системе координат, повернутой относительно осей y и z на угол β, могут быть определены из выражений

$$\begin{aligned} y_н &= y\cos\beta + z\sin\beta, \\ z_н &= z\cos\beta - y\sin\beta. \end{aligned} \tag{1.20}$$



а) б)

Рис. 1.10. Положение произвольной точки *K* относительно нулевой линии (схема а) и зоны растяжения и сжатия в поперечном сечении (схема б)

Заметим, что модуль координаты $z_н$ (рис. 1.10, а) определяет расстояние от точки *K* до нулевой линии.

Ранее мы установили, что нормальные напряжения в произвольной точке при косом изгибе равны

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Преобразуем данное равенство следующим образом

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}\left(z - \frac{M_z}{J_z}\frac{M_y}{J_y} y \right).$$

Учитывая, что из (1.14) и (1.16) $\frac{M_z}{J_z}\frac{J_y}{M_y} = tg\beta,$ получим

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}\left(z - tg\beta \cdot y\right) = \frac{M_y}{J_y}\frac{z\cos\beta - y\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Так как из (1.20) $z\cos\beta - y\sin\beta = z_н,$ то

$$\sigma = \frac{M_y z_н}{J_y \cos\beta}, \qquad (1.21)$$

т. е. нормальные напряжения пропорциональны координате $z_н$, модуль которой определяет расстояние от точки до нулевой линии. Следовательно, *опасными* будут те точки поперечного сечения, которые наиболее удалены от нулевой линии, т. е. $|z_н| = \max$.

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения при необходимости могут быть выражены в зависимости от изгибающего момента M_z. Так как

$$\frac{M_z}{J_z}\frac{J_y}{M_y} = \mathrm{tg}\beta, \quad \text{то} \quad \frac{M_y}{J_y \cos\beta} = \frac{M_z}{J_z \sin\beta}.$$

Тогда, учитывая (1.21), имеем, что

$$\sigma = \frac{M_z z_{\text{н}}}{J_z \sin\beta}. \qquad (1.22)$$

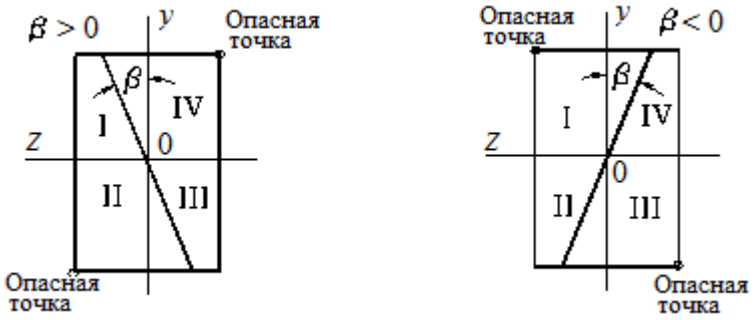
Чем удобно использовать выражение (1.21) для определения нормальных напряжений? Сомножители в знаменателе $J_y > 0,\ \cos\beta > 0$ всегда положительны (как при $\beta > 0$, так и при $\beta < 0$). В точках поперечного сечения, имеющих положительные координаты $(z_{\text{н}} > 0)$, при положительных значениях изгибающего момента $M_y > 0$ будут иметь место напряжения растяжения, т. е. $\sigma > 0$. И наоборот, если значения изгибающего момента $M_y < 0$, то в точках поперечного сечения, имеющих положительные координаты $(z_{\text{н}} > 0)$, будут иметь место деформации сжатия, т. е. $\sigma < 0$.

Нулевая линия делит поперечное сечение на две зоны: зону растяжения и зону сжатия. На рис. 1.10, б показано поперечное сечение, положение нулевой линии в поперечном сечении, действие изгибающих моментов M_z и M_y. Так как $M_y > 0$, то все точки поперечного сечения, имеющие $z_н > 0$, будут испытывать растяжение. На рис. 1.10, б зона растяжения обозначена знаками « + ».

Другая часть поперечного сечения – зона сжатия. На рис. 1.10, б зона сжатия обозначена знаками «–». Где следует искать опасные точки?

Анализируя выражение $z_{\text{н}} = z\cos\beta - y\sin\beta$, заметим, что, если оси y и z делят поперечное сечение на части в 1-м, 2-м, 3-м и 4-м квадрантах (рис. 1.11, а, б), то при $\beta > 0$ опасные точки следует искать во 2-м квадранте для точек $z > 0$ и $y < 0$ и в 4-м квадранте для точек $z < 0$ и $y > 0$ (рис. 1.11, а).

При $\beta < 0$ (рис. 1.11, б) опасные точки следует искать в 1-м квадранте для точек $z_{\text{н}} > 0$ и $y > 0$ и в 3-м квадранте для точек $z_{\text{н}} < 0$ и $y < 0$.



а) б)

Рис. 1.11. Положение опасных точек в поперечном сечении:
а) если угол $\beta > 0$, б) если угол $\beta < 0$

Если точки A_i – опасные точки поперечного сечения, имеющие координаты y_{A_i}, z_{A_i} в системе координатных осей y и z, и таких точек несколько $(i = 1,2,...,n)$, то нормальные напряжения в этих точках могут быть определены как

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{J_z} y_{A_i} + \frac{M_y}{J_y} z_{A_i}. \qquad (1.23)$$

Представим данное равенство в виде

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{J_z}\frac{y_{\max}}{y_{\max}} y_{A_i} + \frac{M_y}{J_y}\frac{z_{\max}}{z_{\max}} z_{A_i},$$

где $y_{\max}$, $z_{\max}$ – максимальные значения координат, которые имеют точки поперечного сечения.

Учитывая, что $J_z / y_{\max} = W_z$, $J_y / z_{\max} = W_y$, получим

$$\sigma_{A_i} = -\frac{M_z}{W_z}\frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + \frac{M_y}{W_y}\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}, \qquad (1.24)$$

где W_z, W_y – осевые моменты сопротивления сечения.

Преобразуем (1.24) к виду

$$\sigma_{A_i} = \frac{1}{W_z}\left(-M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y}\frac{z_{A_i}}{z_{\max}} \right), \qquad i = 1,2,3,4. \qquad (1.25)$$

Если обозначим

$$M_{\text{пр}} = -M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y}\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}, \qquad (1.26)$$

то $$\sigma_{A_i} = M_{\text{пр}} / W_z, \qquad (1.27)$$

где $M_{\text{пр}}$ – приведенный изгибающий момент в поперечном сечении стержня.

1.2.4. Силовая линия в поперечном сечении стержня

Помимо понятия нулевой линии при косом изгибе встречается понятие ***силовой линии*** – линии пересечения плоскости действия изгибающего момента с поперечным сечением стержня.

На рис. 1.12 показано поперечное сечение стержня. Изгибающие моменты $\overline{M}_z$ и $\overline{M}_y$, как векторы, лежат в плоскости поперечного сечения и направлены вдоль координатных осей z и y. Они являются составляющими вектора полного изгибающего момента $M_{\text{и}}$, величина которого определяется как

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Полный изгибающий момент $\bar{M}_{и}$, как вектор, лежит в плоскости поперечного сечения (рис. 1.12), перпендикулярен плоскости действия изгибающего момента (силовой плоскости) и совпадает по направлению с линией *n-n* поперечного сечения, составляющей угол α с осью *y*.

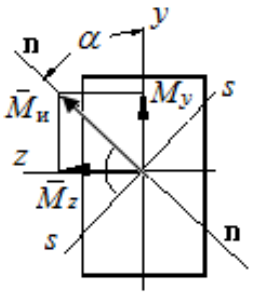


Рис. 1.12. Силовая линия *s-s* в поперечном сечении

Поясним понятие силовой линии.

Линия пересечения плоскости действия полного изгибающего момента $M_{и}$ (силовой плоскости) с поперечным сечением стержня образует силовую линию в поперечном сечении (линия $s-s$, рис. 1.12).

Заметим, что составляющие полного изгибающего момента M_z и M_y соответственно равны:

$$M_z = M_{и}\cos\alpha,\ \ M_y = M_{и}\sin\alpha.$$

Тангенс угла α равен отношению моментов M_z и M_y: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{M_z}{M_y}$.

Сопоставляя данное равенство с зависимостью (1.16) для $\operatorname{tg}\beta$, заметим, что если осевые моменты инерции J_y и J_z поперечного сечения равны между собой, то

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha,\qquad \beta=\alpha,$$

т. е. нулевая линия поперечного сечения (при $J_y = J_z$) совпадает с направлением вектора полного изгибающего момента $M_{и}$, а, следовательно, перпендикулярна силовой линии.

1.3. Расчет на прочность при косом изгибе

Расчет на прочность при косом изгибе связан с анализом условия прочности, которое можно сформулировать следующим образом: величина нормальных напряжений в опасных точках опасного сечения по модулю не должна превышать допускаемых

$$\left|\sigma_{A_i}\right| \le [\sigma]. \qquad (1.28)$$

Естественно, возникает необходимость определения положения опасного сечения и опасных точек в этом сечении. Для этого после определения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня на различных его участках следует найти значения приведенного момента

$$M_{пр} = -M_z\frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y\frac{W_z}{W_y}\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}.$$

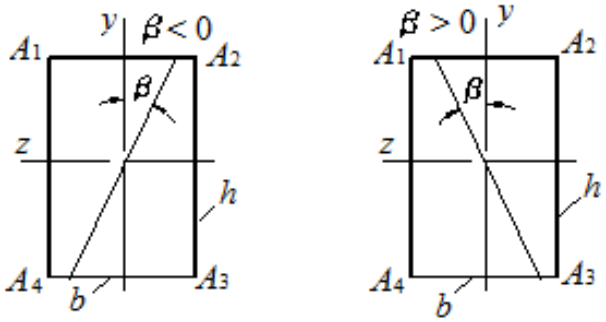
Наиболее просто эта задача решается для случая плоского косого изгиба стержня с постоянным профилем поперечного сечения по длине стержня. В этом случае ориентация нулевой линии в любом поперечном сечении одна и та же (т. е. $\beta = \text{const}$), отношение координат $\frac{y_{A_i}}{y_{\max}}$ и $\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}$ является постоянным для любого поперечного сечения, постоянно также отношение осевых моментов сопротивления. Тогда опасным будет то сечение, где модуль приведенного момента

$$\left|M_{\text{пр}}\right| = \left|M_z \frac{y_{A_i}}{y_{\max}} + M_y \frac{W_z}{W_y} \frac{z_{A_i}}{z_{\max}}\right|$$

достигает максимального значения.

Сложнее решение задачи для случая неплоского косого изгиба, когда ориентация нулевой линии в различных поперечных сечениях различна. Следовательно, опасными точками в различных поперечных сечениях могут быть неоднотипные точки поперечного сечения. Решается эта задача методом подбора: путем расчета приведенного момента $M_{\text{пр}}$ в нескольких сечениях, где изгибающие моменты M_z и M_y значительны по модулю.

Если поперечное сечение стержня имеет прямоугольный профиль (как это представлено на рис. 1.13), то процедура расчета на прочность значительно упрощается. Связано это с тем, что опасными точками поперечного сечения при любой ориентации нулевой линии будут угловые точки: точки A_1 и A_3 при $\beta < 0$ (рис. 1.13, а) и точки A_2 и A_4 при $\beta > 0$ (рис. 1.13, б).



а) б)

Рис. 1.13. Положение нулевой линии в поперечном сечении:
а) если угол $\beta < 0$, б) если угол $\beta > 0$

Так как для опасных точек прямоугольника модуль отношений

$$\left|\frac{y_{A_i}}{y_{\max}}\right| = 1, \qquad \left|\frac{z_{A_i}}{z_{\max}}\right| = 1, \qquad i = 1,2,3,4,$$

то модуль приведенного момента для прямоугольного поперечного сечения из (1.26) может быть вычислен как

$$\left|M_{\text{пр}}\right| = \left|M_z\right| + \left|M_y\right|\frac{W_z}{W_y}, \tag{1.29}$$

а модуль нормальных напряжений в опасных точках прямоугольного сечения из (1.27) будет равен

$$\left|\sigma_{A\,i}\right| = \frac{\left|M_{\text{пр}}\right|}{W_z}, \qquad \begin{array}{ll} i = 1,3 & \text{при} \quad \beta < 0, \\ i = 2,4 & \text{при} \quad \beta > 0, \end{array} \tag{1.30}$$

а с учетом (1.29) условие прочности (1.28) для прямоугольного поперечного сечения примет вид

$$\frac{\left|M_z\right| + \left|M_y\right|\dfrac{W_z}{W_y}}{W_z} \le \left[\sigma\right]. \tag{1.31}$$

Если расчет на прочность стержня с прямоугольным поперечным сечением при косом изгибе является поверочным расчетом (известны значения M_z и M_y в опасном сечении, осевые моменты сопротивления поперечного сечения W_z и W_y, допускаемые напряжения $\left[\sigma\right]$), то процедура расчета сводится к анализу выполнения неравенства (1.31) в опасном сечении.

Если расчет стержня с прямоугольным поперечным сечением является проектировочным и требуется, например, определить геометрические параметры сечения, то из (1.31) следует, что

$$W_z \ge \frac{\left|M_z\right| + \left|M_y\right|\dfrac{W_z}{W_y}}{\left[\sigma\right]}. \tag{1.32}$$

Так как для прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.13)

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \qquad W_y = \frac{hb^2}{6}, \qquad \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}, \tag{1.33}$$

где b – основание прямоугольника; h – высота, то из (1.32) имеем

$$\frac{bh^2}{6} \ge \frac{\left|M_z\right| + \left|M_y\right|\dfrac{h}{b}}{\left[\sigma\right]}. \tag{1.34}$$

Если задано соотношение сторон прямоугольника

$$\frac{b}{h} = \mu, \tag{1.35}$$

то $$b = \mu h, \qquad \frac{h}{b} = \frac{1}{\mu}. \tag{1.36}$$

Учитывая (1.35) в (1.34), получим

$$\frac{\mu h^3}{6} \geq \frac{|M_z| + |M_y| \frac{1}{\mu}}{[\sigma]},$$

откуда

$$h^3 = 6\frac{\mu|M_z| + |M_y|}{\mu^2[\sigma]}, \qquad h \leq \sqrt[3]{6\frac{\mu|M_z| + |M_y|}{\mu^2[\sigma]}}, \tag{1.37}$$

где $\mu = \frac{b}{h}$ – отношение сторон прямоугольного поперечного сечения.

1.4. Определение перемещений при косом изгибе

При определении линейных и угловых перемещений поперечного сечения при косом изгибе вновь используем принцип независимости действия сил, вычисляя перемещения при нагружении стержня отдельно в каждой главной плоскости.

Обозначим перемещения центра тяжести поперечного сечения в направлении главной центральной оси y через v, а в направлении главной центральной оси z – через w. Обозначим углы поворота поперечного сечения вокруг оси z через θ_z, а вокруг оси y – через θ_y.

Рассматривая нагружение стержня в главной плоскости $y-x$, ищем для произвольного поперечного сечения перемещения v и θ_z. Линейные перемещения v в главной плоскости $y–x$ можно определить из решения дифференциального уравнения упругой линии стержня вида

$$v'' = \frac{M_z}{EJ_z}, \tag{1.38}$$

где E – модуль упругости 1-го рода материала стержня; J_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси z.

Интегрируя (1.38), приходим к выражению

$$v' = v'_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M_z}{EJ_z} dx. \tag{1.39}$$

Так как

$$v' = \theta_z, \qquad v'_0 = (\theta_z)_0, \tag{1.40}$$

то имеем

$$\theta_z = (\theta_z)_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M_z}{EJ_z} dx, \tag{1.41}$$

где $(\theta_z)_0$ – угол поворота вокруг оси z поперечного сечения, положение которого определяется координатой x_0; θ_z – угол поворота вокруг оси z поперечного сечения, положение которого определяется координатой x.

Уравнение (1.41) позволяет производить расчет угла поворота θ_z произвольного поперечного сечения стержня, если известны значение $(\theta_z)_0$, функция изгибающего момента M_z, модуль упругости E, осевой момент инерции сечения J_z.

Интегрируя (1.39), приходим к выражению

$$v = v_0 + \int_{x_0}^{x} v_0' dx + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{M_z}{EJ_z} dx \right) dx. \qquad (1.42)$$

Из (1.41)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_z}{EJ_z} dx = \theta_z - (\theta_z)_0.$$

Тогда из (1.42) следует

$$v = v_0 + \int_{x_0}^{x} (\theta_z)_0 dx + \int_{x_0}^{x} \left[\theta_z - (\theta_z)_0 \right] dx = v_0 + \int_{x_0}^{x} \theta_z dx, \qquad (1.43)$$

где v_0 – перемещение в направлении оси y центра тяжести сечения, положение которого определяется координатой x_0.

Уравнение (1.43) позволяет производить расчет перемещения v центра тяжести поперечного сечения, если известны значения v_0 и функция θ_z.

Если нас интересуют перемещения конкретного поперечного сечения стержня, то вычисление линейного перемещения v_c и угла поворота поперечного сечения $(\theta_z)_c$ можно производить путем вычислений соответствующих интегралов Мора

$$v_c = \int_l \frac{M_z \bar{M}_1}{EJ_z} dx, \qquad (\theta_z)_c = \int_l \frac{M_z \bar{M}_1^*}{EJ_z} dx, \qquad (1.44)$$

где $\bar{M}_1$ – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерной единичной силы, приложенной в точке C продольной оси стержня в направлении оси y; $\bar{M}_1^*$ – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерного единичного момента, поворачивающего сечение С вокруг оси z.

Далее рассматриваем нагружение стержня в главной плоскости $z-x$ и ищем для произвольного поперечного сечения перемещения w и θ_y.

Линейные перемещения w в главной плоскости $z-x$ можно определить из решения дифференциального уравнения упругой линии стержня вида

$$w'' = \frac{M_y}{EJ_y}, \tag{1.45}$$

где J_y – момент инерции поперечного сечения относительно оси y.

Интегрируя (1.45), приходим к выражению

$$w = w_0' + \int_{x_0}^{x} \frac{M_y}{EI_y} dx. \tag{1.46}$$

Так как $$w' = \theta_y, \qquad w_0' = \left(\theta_y\right)_0, \tag{1.47}$$

то имеем выражение для расчета угла поворота вокруг оси y поперечного сечения, положение которого определяется координатой x,

$$\theta_y = \left(\theta_y\right)_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M_y}{EI_y} dx, \tag{1.48}$$

где $\left(\theta_y\right)_0$ – угол поворота вокруг оси y поперечного сечения, положение которого определяется координатой x_0.

Уравнение (1.48) позволяет производить расчет угла поворота θ_y произвольного поперечного сечения, если известны значения $\left(\theta_y\right)_0$, функция изгибающего момента M_y, модуль упругости E, осевой момент инерции J_y.

Интегрируя (1.46), приходим к выражению

$$w = w_0 + \int_{x_0}^{x} w_0' dx + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{M_y}{EI_y} dx. \right) dx = w_0 + \left(\theta_y\right)_0 x + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{M_y}{EI_y} dx \right) dx, \tag{1.49}$$

где w_0 – перемещение в направлении оси z центра тяжести сечения, положение которого определяется координатой x_0.

Уравнение (1.49) позволяет производить расчет перемещения w центра тяжести поперечного сечения, если известны значения w_0, $\left(\theta_y\right)_0$, E, J_y и функция изгибающего момента M_y.

Если нас интересует перемещение конкретного поперечного сечения стержня (например, сечения C), то вычисление линейного перемещения w_c и угла поворота $\left(\theta_y\right)_c$ поперечного сечения можно производить путем вычислений соответствующих интегралов Мора

$$w_c = \int_l \frac{M_y \overline{M}_1}{EI_y} dx, \qquad \left(\theta_y\right)_c = \int_l \frac{M_y \overline{M}_1^*}{EI_y} dx, \tag{1.50}$$

где $\overline{M}_1$ – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерной единичной силы, приложенной в точке C продольной оси стержня в направлении оси z; $\overline{M}_1^*$ – функция изгибающего момента в поперечных сечениях стержня от действия безразмерного единичного момента, поворачивающего сечение C вокруг оси y.

Определив линейные и угловые перемещения при нагружении стержня в главных плоскостях, можно перейти к определению полных линейных и угловых перемещений. Перемещение центра тяжести поперечного сечения (полное перемещение) и угол поворота поперечного сечения (полное его значение) определятся как

$$\Delta = \sqrt{v^2 + w^2}, \qquad \theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}. \tag{1.51}$$

Направление полного перемещения Δ можно найти из отношений

$$\frac{v}{\Delta} = \cos\alpha_n, \qquad \frac{w}{\Delta} = \sin\alpha_n, \qquad \frac{w}{v} = \mathrm{tg}\,\alpha_n,$$

откуда

$$\alpha_n = \arccos\frac{v}{\Delta}, \qquad \alpha_n = \arcsin\frac{w}{\Delta}, \qquad \alpha_n = arctg\frac{w}{v}, \tag{1.52}$$

где α_n – угол между осью y и направлением полного перемещения.

2. ПРИМЕР. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Стальной стержень (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа) прямоугольного поперечного сечения расположен на шарнирных опорах (рис. 2.1), главные плоскости стержня – плоскости $y - x$ и $z - x$.

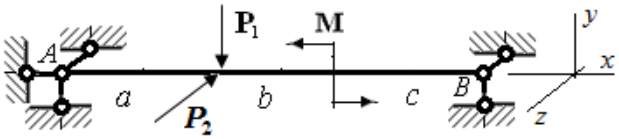


Рис. 2.1. Расчетная схема нагружения стержня в главных плоскостях $y-x$ и $z-x$

В плоскости y–x на стержень действуют сила P_1 и момент пары сил M, а в плоскости $z-x$ действует сила P_2.

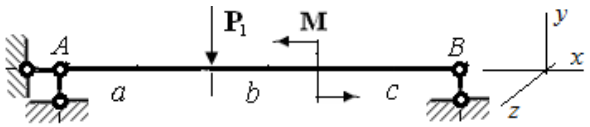
Требуется:

1. Определить поперечные силы Q_y, Q_z, изгибающие моменты M_z и M_y в поперечных сечениях стержня (оси y, z – главные центральные оси поперечного сечения), построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Определить положение опасного сечения.
3. Из условия прочности при допускаемом напряжении [σ] = 160 МПа подобрать размеры поперечного сечения стержня при заданном соотношении сторон h/b =2, где h и b – соответственно высота и ширина прямоугольного сечения.
4. Определить положение нулевой линии в опасном сечении стержня, найти опасные точки, построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений (построение выполнить в аксонометрии).

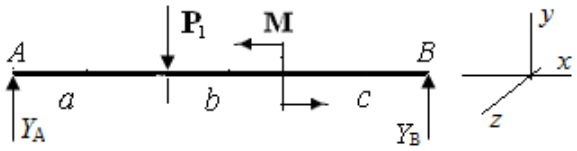
Исходные данные: $a = b = c = 1$ м, $P_1 = 70$ кН, $P_2 = 60$ кН, $M = 10$ кН·м.

Решение:

Рассмотрим вначале нагружение стержня в плоскости $y - x$ (рис. 2.2, а). Отбросим внешние связи (шарнирные опоры) и заменим их действие неизвестными реакциями связей Y_A и Y_B (рис. 2.2, б). Реакции связи в направлении оси x отсутствуют, так как проекции внешних активных сил на ось x равны нулю.



а)



б)

Рис. 2.2. Расчетная схема нагружения стержня: а) расчетная схема нагружения стержня главной плоскости $y-x$; б) расчетная схема нагружения стержня с заменой опор реакциями Y_A и Y_B

Для определения реакций Y_A и Y_B воспользуемся уравнениями равновесия:

а) сумма моментов сил относительно точки A равна нулю:

$$\sum M_A(P_i) = 0, \qquad -P_1 a + M + Y_B(a+b+c) = 0,$$

откуда $$Y_B = \frac{P_1 a - M}{a+b+c} = \frac{70 \cdot 1 - 10}{3} = 20 \ \text{кН};$$

б) сумма моментов сил относительно точки *B* равна нулю: $\sum M_B(P_i) = 0,$ которое представим как

$$-Y_A(a+b+c) + P_1(b+c) + M = 0,$$

откуда $$Y_A = \frac{P_1(b+c) + M}{a+b+c} = \frac{70 \cdot 2 + 10}{3} = 50 \ \text{кН}.$$

Рассмотрим теперь расчетную схему стержня, представленную на рисунке 2.3.

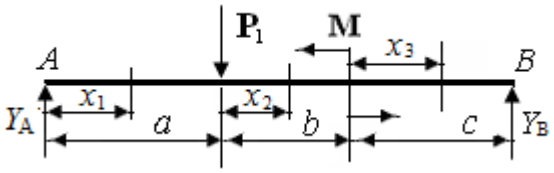


Рис. 2.3. Расчетная схема и положение секущих сечений на участках

Стержень имеет 3 участка (*n* = 3). Положение произвольного поперечного сечения на 1-м участке определяется координатой x_1 $(0 \le x_1 \le a)$, положение произвольного поперечного сечения на 2-м участке определяется координатой x_2 $(0 \le x_2 \le b)$, положение произвольного поперечного сечения на 3-м участке определяется координатой x_3 $(0 \le x_3 \le c),$.

Определим поперечную силу Q_y в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня (рис. 2.3) удобнее использовать уравнение:

$$Q_{y_1} = \left(\sum P_{iy}\right)_f = \left(Y_A\right) = Y_A = 50 \ \text{кН}, \quad 0 \le x_1 \le a.$$

Для 2-го участка стержня также можно использовать уравнение:

$$Q_{y_2} = \left(\sum P_{iy}\right)_f = Y_A - P_1 = 50 - 70 = -20 \,\text{кН}, \quad 0 \le x_2 \le b.$$

Для 3-го участка стержня удобнее использовать уравнение:

$$Q_{y_3} = -\left(\sum P_{iy}\right)_P = -Y_B = -20 \ \text{кН}, \quad 0 \le x_3 \le c.$$

Определим изгибающий момент в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня $0 \le x_1 \le a$ (рис. 2.3):

$$M_{z_1} = -\left[\sum M_z(P_i)\right]_f = -\left(-Y_A x_1\right) = Y_A x_1 = 50 x_1,$$

$$M_{z_1}\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad M_{z_1}\Big|_{x_1=a} = 50 \cdot 1 = 50 \ \text{кН·м}.$$

Для 2-го участка стержня $0 \le x_2 \le b$ (рис. 2.3):

$$M_{z_2} = -\left[\sum M_z(P_i)\right]_f = -\left[Y_A(a+x_2) + P_1 x_2\right] = Y_A(a+x_2) - P_1 x_2 = Y_A a + (Y_A - P_1) x_2,$$

$$M_{z_2}\Big|_{x_2=0} = Y_A a = 50\cdot 1 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_{z_2}\Big|_{x_2=b} = 50 + (50-70)\cdot 1 = 50 - 20 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для 3-го участка стержня $0 \le x_3 \le c$ (рис. 2.3):

$$M_{z_3} = \left[\sum M_z(P_i)\right]_P = Y_B(c - x_3),$$

$$M_{z_3}\Big|_{x_3=0} = Y_B \cdot c = 20\cdot 1 = 20 \text{ кНм}, \quad M_{z_3}\Big|_{x_3=c} = 0.$$

Определив значения поперечных сил в поперечных сечениях стержня, построим эпюру поперечной силы Q_y (рис. 2.4, б).

Определив значения изгибающего момента в поперечных сечениях стержня, построим эпюру изгибающего момента M_z (рис. 2.4, в).

На рисунке 2.4 представлены два варианта построения эпюры изгибающего момента M_z в поперечных сечениях стержня. В первом варианте при построении эпюры M_z положительные значения откладываются в верхней полуплоскости, а отрицательные значения – в нижней полуплоскости от продольной оси x.

Во втором варианте при построении эпюры M_z положительные значения откладываются в нижней полуплоскости, а отрицательные значения – в верхней полуплоскости от продольной оси x.

Первый вариант построения эпюры M_z принят при оформлении расчетов для машиностроительного направления, второй вариант – для строительного направления.

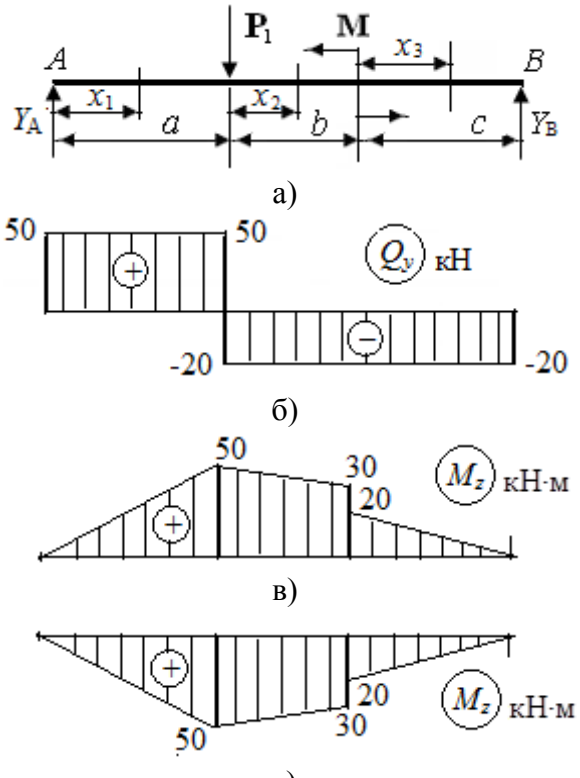
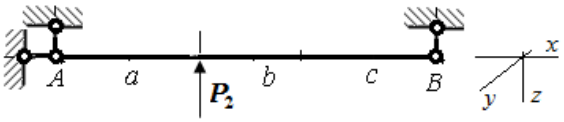
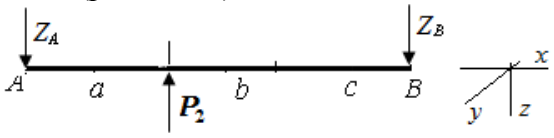


Рис. 2.4. Расчетная схема стержня, эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z: а) расчетная схема и положение секущих сечений на участках; б) эпюра поперечной силы Q_y; в) эпюра изгибающего момента M_z (для расчетов машиностроительного направления); г) эпюра изгибающего момента M_z (для расчетов строительного направления)

Рассмотрим теперь нагружение стержня в плоскости $z-x$. Ось y перпендикулярна плоскости нагружения и направлена к наблюдателю (рис. 2.5, а).



а) Расчетная схема нагружения стержня главной плоскости z–x



б) Расчетная схема нагружения стержня с заменой опор реакциями Z_A и Z_B

Рис. 2.5. Расчетная схема нагружения стержня

Отбросим внешние связи и заменим их действие неизвестными реакциями Z_A и Z_B (рис. 2.5, б). Реакция связи в направлении оси x отсутствует, так как проекции внешних активных сил на ось x равны нулю.

Для определения реакций Z_A и Z_B воспользуемся уравнениями равновесия в виде:

а) сумма моментов сил относительно точки A равна нулю: $\sum M_A(P_i)=0,$ которое представим как $P_2a-Z_B(a+b+c)=0,$ откуда

$$Z_B=P_2\frac{a}{a+b+c}=60\cdot\frac{1}{3}=20\ \text{кН};$$

б) сумма моментов сил относительно точки B равна нулю: $\sum M_B(P_i)=0,$ которое представим как $Z_A(a+b+c)-P_2(a+b)=0,$ откуда

$$Z_A=P_2\frac{a+b}{a+b+c}=60\cdot\frac{2}{3}=40\ \text{кН}.$$

Изобразим расчетную схему стержня, как показано на рисунке 2.6.

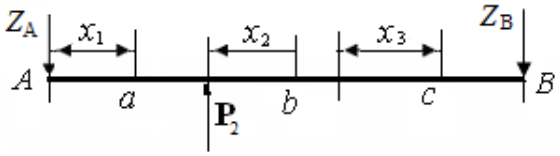


Рис. 2.6. Расчетная схема и положение секущих сечений на участках

Определим поперечную силу Q_z в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка стержня

$$Q_{z_1}=-\left(\sum P_{iz}\right)_f=-(Z_A)=-Z_A=-40\ \text{кН},\qquad 0\le x_1\le a\,.$$

Для 2-го и 3-го участков:

$$Q_{z_2}=\left(\sum P_{iz}\right)_p=Z_B=20\ \text{кН},\qquad 0\le x_2\le b\,,$$

$$Q_{z_3}=\left(\sum P_{iz}\right)_p=Z_B=20\ \text{кН},\qquad 0\le x_3\le c.$$

Определим изгибающий момент M_y в поперечных сечениях стержня на различных участках. Для 1-го участка $0\le x_1\le a$:

$$M_{y_1}=-[\sum M_y(P_i)]_f=-(Z_Ax_1)=-Z_Ax_1=-40x_1,$$

$$M_{y_1}\Big|_{x_1=0}=0,\qquad M_{y_1}\Big|_{x_1=a}=-40\cdot a=-40\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Для 2-го и 3-го участков:

$$M_{y_2} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c + b - x_2) = -20(2 - x_2), \qquad 0 \le x_2 \le b,$$

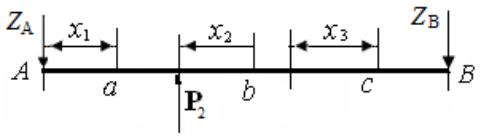
$$M_{y_2}\big|_{x_2=0} = -40 \text{ кН·м}, \qquad M_{y_2}\big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН·м},$$

$$M_{y_3} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c - x_3) = -20(1 - x_3), \qquad 0 \le x_3 \le c,$$

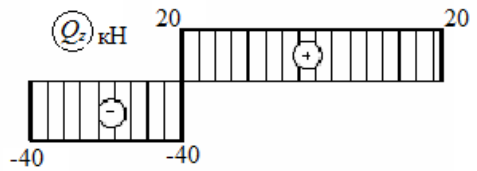
$$M_{y_3}\big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}, \qquad M_{y_3}\big|_{x_3=c} = 0.$$

Определив значения поперечных сил в поперечных сечениях стержня, построим эпюру поперечной силы Q_z (рис. 2.7, б).

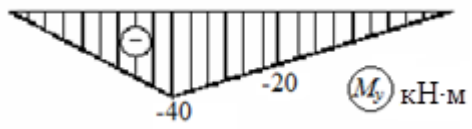
Определив значения изгибающего момента в поперечных сечениях стержня, построим эпюру изгибающего момента M_y (рис. 2.7, в, г).



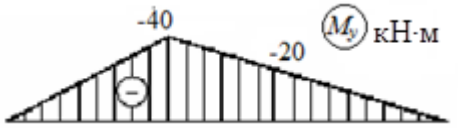
а)



б)



в)



г)

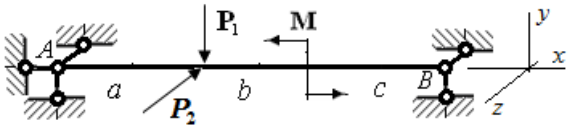
Рис. 2.7. Расчетная схема стержня, эпюры поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y: а) расчетная схема и положение секущих сечений на участках; б) эпюра поперечной силы Q_z; в) эпюра изгибающего момента M_y (для расчетов машиностроительного направления); г) эпюра изгибающего момента M_y (для расчетов строительного направления)

На рисунке 2.7 представлены два варианта построения эпюр изгибающих моментов M_z и M_y в поперечных сечениях стержня. В первом варианте при построении эпюр M_z и M_y положительные значения откладываются в верхней полуплоскости, а отрицательные значения – в нижней полуплоскости от продольной оси x (для расчетов машиностроительного направления).

Во втором варианте при построении эпюр M_z и M_y положительные значения откладываются в нижней полуплоскости, а отрицательные значения – в верхней полуплоскости от продольной оси x (для расчетов строительного направления).

Последовательность расчета приведем в виде схем на рисунке 2.8. На рисунке 2.9 построены эпюры поперечных сил Q_y, Q_y и изгибающих моментов M_z, M_y.

Исходные данные: $a = b = c = 1$ м,
$P_1 = 70$ кН, $P_2 = 60$ кН, $M = 10$ кН·м



Расчетная схема нагружения стержня в главных плоскостях $y-x$ и $z-x$

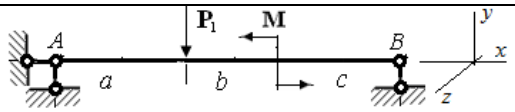


схема нагружения стержня в главной плоскости $y-x$

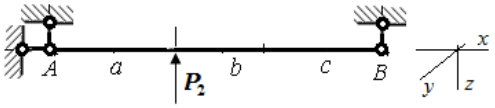
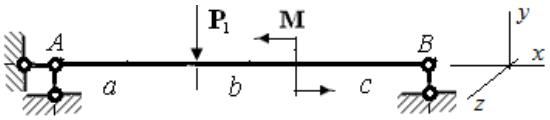
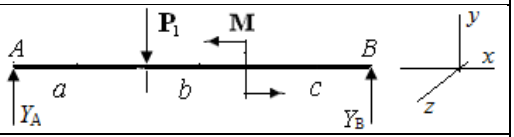


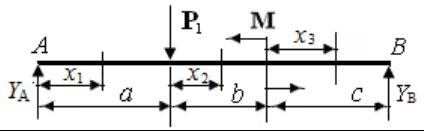
схема нагружения стержня в главной плоскости $z-x$





$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad -P_1 a + M + Y_B(a+b+c) = 0, \quad Y_B = \frac{P_1 a - M}{a+b+c} = \frac{70 \cdot 1 - 10}{3} = 20 \text{ кН},$$

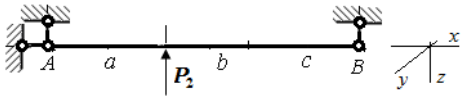
$$\sum M_B(P_i) = 0, \quad -Y_A(a+b+c) + P_1(b+c) + M = 0, \quad Y_A = \frac{P_1(b+c) + M}{a+b+c} = 50 \text{ кН}$$

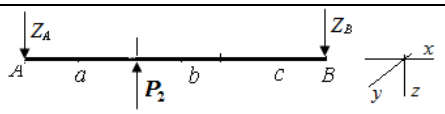


$$0 \le x_1 \le a, \quad Q_{y_1} = \left(\sum P_{iy}\right)_f = Y_A = 50 \text{ кН}, \quad M_{z_1} = -\left[\sum M_z(P_i)\right]_f = Y_A x_1 = 50 x_1,$$

$$0 \le x_2 \le b, \quad Q_{y_2} = \left(\sum P_{iy}\right)_f = Y_A - P_1 = -20 \text{ кН}, \quad M_{z_2} = Y_A(a + x_2) - P_1 x_2,$$

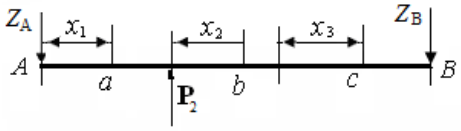
$$0 \le x_3 \le c, \quad Q_{y_3} = -\left(\sum P_{iy}\right)_P = -Y_B = -20 \text{ кН}, \quad M_{z_3} = \left[\sum M_z(P_i)\right]_P = Y_B(c - x_3)$$





$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad P_2 a - Z_B(a+b+c) = 0, \quad Z_B = P_2 \frac{a}{a+b+c} = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(P_i) = 0, \quad Z_A(a+b+c) - P_2(a+b) = 0, \quad Z_A = P_2 \frac{a+b}{a+b+c} = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40 \text{ кН}$$



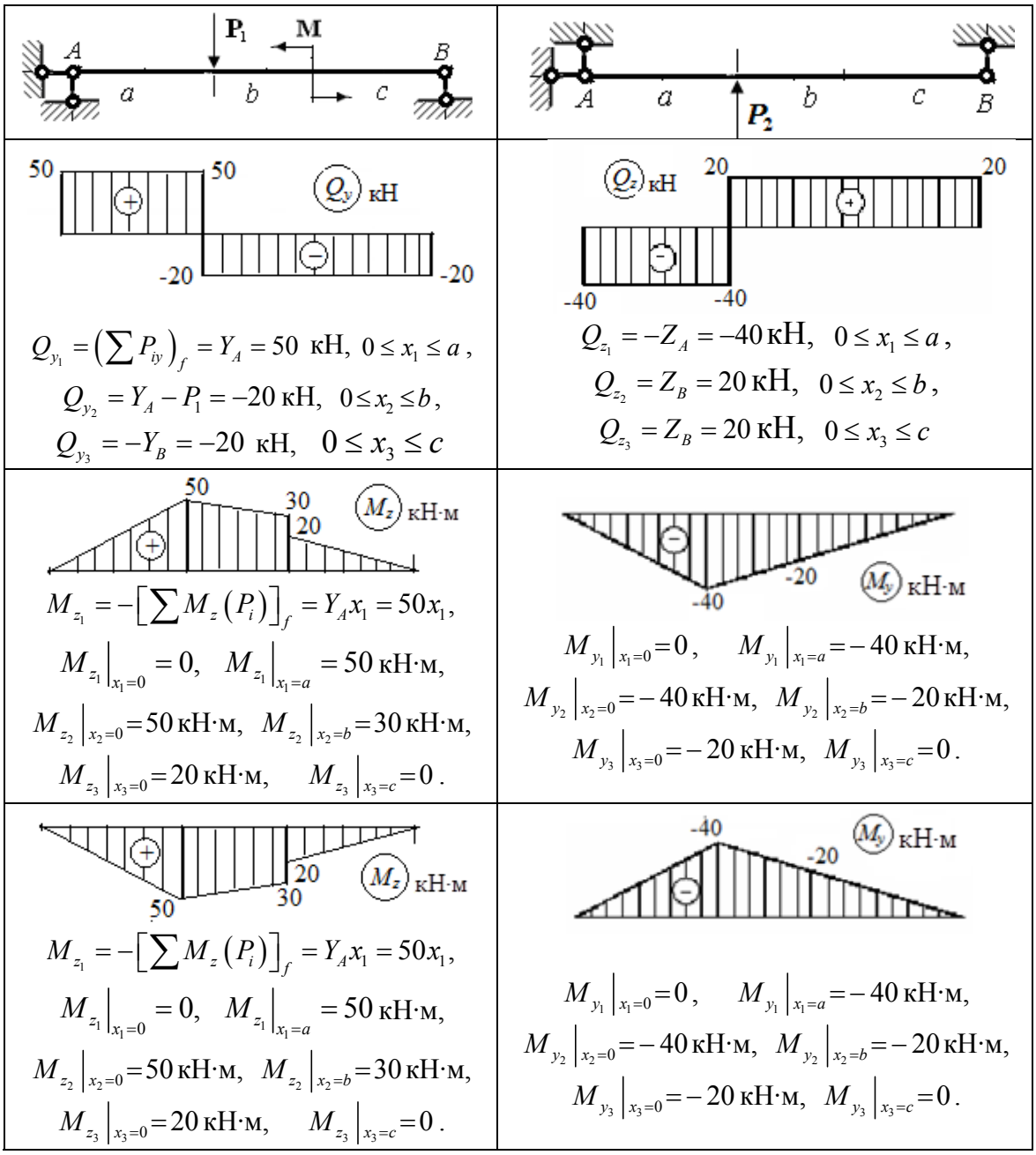
$$0 \le x_1 \le a, \quad Q_{z_1} = -\left(\sum P_{iz}\right)_f = -Z_A = -40 \text{ кН}, \quad M_{y_1} = -[\sum M_y(P_i)]_f = -Z_A x_1 = -40 x_1,$$

$$0 \le x_2 \le b, \quad Q_{z_2} = \left(\sum P_{iz}\right)_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad M_{y_2} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c + b - x_2),$$

$$0 \le x_3 \le c, \quad Q_{z_3} = \left(\sum P_{iz}\right)_p = Z_B = 20 \text{ кН}, \quad M_{y_3} = [\sum M_y(P_i)]_p = -Z_B(c - x_2)$$

Рис. 2.8. Последовательность расчета стержня при косом изгибе поперечных сил Q_y, Q_y и изгибающих моментов M_z, M_y в поперечных сечениях

$$M_{y_3}\big|_{x_3=c} = 0 \quad M_{y_1}\big|_{x_1=a} = -40 \text{ кН·м} \quad M_{y_3}\big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН·м} \quad M_{y_2}\big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН·м}$$



$$Q_{y_1} = \left(\sum P_{iy}\right)_f = Y_A = 50 \text{ кН}, \; 0 \le x_1 \le a,$$
$$Q_{y_2} = Y_A - P_1 = -20 \text{ кН}, \; 0 \le x_2 \le b,$$
$$Q_{y_3} = -Y_B = -20 \text{ кН}, \; 0 \le x_3 \le c$$

$$Q_{z_1} = -Z_A = -40 \text{ кН}, \; 0 \le x_1 \le a,$$
$$Q_{z_2} = Z_B = 20 \text{ кН}, \; 0 \le x_2 \le b,$$
$$Q_{z_3} = Z_B = 20 \text{ кН}, \; 0 \le x_3 \le c$$

$$M_{z_1} = -\left[\sum M_z(P_i)\right]_f = Y_A x_1 = 50x_1,$$
$$M_{z_1}\big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1}\big|_{x_1=a} = 50 \text{ кН·м},$$
$$M_{z_2}\big|_{x_2=0} = 50 \text{ кН·м}, \quad M_{z_2}\big|_{x_2=b} = 30 \text{ кН·м},$$
$$M_{z_3}\big|_{x_3=0} = 20 \text{ кН·м}, \quad M_{z_3}\big|_{x_3=c} = 0.$$

$$M_{y_1}\big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{y_1}\big|_{x_1=a} = -40 \text{ кН·м},$$
$$M_{y_2}\big|_{x_2=0} = -40 \text{ кН·м}, \quad M_{y_2}\big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН·м},$$
$$M_{y_3}\big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН·м}, \quad M_{y_3}\big|_{x_3=c} = 0.$$

$$M_{z_1} = -\left[\sum M_z(P_i)\right]_f = Y_A x_1 = 50x_1,$$
$$M_{z_1}\big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{z_1}\big|_{x_1=a} = 50 \text{ кН·м},$$
$$M_{z_2}\big|_{x_2=0} = 50 \text{ кН·м}, \quad M_{z_2}\big|_{x_2=b} = 30 \text{ кН·м},$$
$$M_{z_3}\big|_{x_3=0} = 20 \text{ кН·м}, \quad M_{z_3}\big|_{x_3=c} = 0.$$

$$M_{y_1}\big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{y_1}\big|_{x_1=a} = -40 \text{ кН·м},$$
$$M_{y_2}\big|_{x_2=0} = -40 \text{ кН·м}, \quad M_{y_2}\big|_{x_2=b} = -20 \text{ кН·м},$$
$$M_{y_3}\big|_{x_3=0} = -20 \text{ кН·м}, \quad M_{y_3}\big|_{x_3=c} = 0.$$

Рис. 2.9. Определение числовых значений и построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях стержня при косом изгибе

Определив внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержня, переходим к определению напряжений в различных точках поперечного сечения и нахождению опасных точек в этом сечении.

Определение положения опасного сечения стержня

Опасным является то поперечное сечение стержня, где значение приведенного момента по модулю $|M_{\text{пр}}|$ достигает наибольшего значения. Для прямоугольного поперечного сечения

$$|M_{\text{пр}}| = |M_z| + |M_y| \frac{W_z}{W_y}.$$

Анализируя эпюры изгибающих моментов M_y и M_z (рис. 2.9), визуально легко установить, что опасным сечением стержня является сечение $x_1 = a$, где изгибающий момент $|M_z| = 50$ кН·м, изгибающий момент $|M_y| = 40$ кН·м.

Модуль приведенного изгибающего момента

$$|M_{\text{пр}}| = 50 + 40\frac{W_z}{W_y}\cdot$$

Учитывая, что для прямоугольного поперечного сечения $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$ а по условию задания $\frac{h}{b} = 2$, имеем $|M_{\text{пр}}| = 50 + 40 \cdot 2 = 130$ кН·м.

Определение положения нулевой линии и опасных точек в опасном сечении

Положение нулевой линии определяется углом β, величина которого равна

$$\beta = \text{arc tg}\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения стержня

$$J_z = \frac{1}{12}bh^3, \qquad J_y = \frac{1}{12}hb^3, \qquad \frac{J_y}{J_z} = \frac{b^2}{h^2} = \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

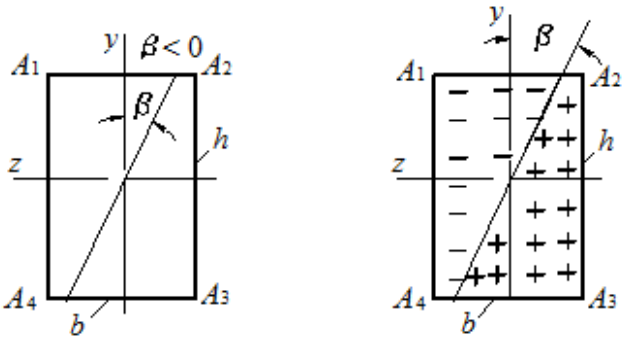
Для рассматриваемой задачи $b/h = 0{,}5$. Следовательно,

$$\frac{J_y}{J_z} = \left(\frac{b}{h}\right)^2 = 0{,}25, \qquad \beta = \text{arc tg}\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z} = \text{arc tg}\left(\frac{50}{-40}\cdot 0{,}25\right) = -17{,}35^0.$$

Так как угол $\beta < 0$, то он должен быть отложен от оси y (рис. 2.10, а) по часовой стрелке, и нулевая линия ориентирована под углом β к оси y, проходя через центр тяжести поперечного сечения.

Если провести нулевую линию в поперечном сечении стержня (рис. 2.10, б), то легко визуально установить, что опасными точками в сечении являются точки, наиболее удаленные от нулевой линии. Этими точками являются точка A_1 и точка A_2.

Нулевая линия делит поперечное сечение на две зоны: зону растяжения (на рисунке 2.10 эта зона обозначена знаками «+») и зону сжатия (на рисунке 2.10 эта зона обозначена знаками « –»).



а) б)

Рис. 2.10. Нулевая линия в поперечном сечении

Определение размеров поперечного сечения стержня, обеспечивающих выполнение условия прочности

Условие прочности при косом изгибе сформулировано следующим образом: величина нормальных напряжений в опасных точках опасного сечения по модулю не должна превышать допускаемых

$$|\sigma_{A_i}| \le [\sigma], \qquad |\sigma_{A_i}| = \frac{|M_{\text{пр}}|}{W_z},$$

где $\left|\sigma_{A_i}\right|$ – модуль нормальных напряжений в опасных точках поперечного сечения.

Имея неравенство $\frac{\left|M_{\text{пр}}\right|}{W_z} \le [\sigma]$, находим, что осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня $W_z \ge \frac{[\sigma]}{\left|M_{\text{пр}}\right|}$.

Так как $W_z = \frac{bh^2}{6}$, то при заданном отношении $\frac{b}{h} = \mu$ имеем $W_z = \frac{\mu h^3}{6}$. Тогда неравенство $W_z \ge \frac{[\sigma]}{\left|M_{\text{пр}}\right|}$ можно преобразовать к виду $\frac{\mu h^3}{6} \ge \frac{\left|M_{\text{пр}}\right|}{[\sigma]}$, откуда имеем

$$h \ge \sqrt[3]{\frac{6\cdot\left|M_{\text{пр}}\right|}{\mu\cdot[\sigma]}}, \quad \mu = 0,5, \quad h \ge \sqrt[3]{\frac{6\cdot 130\cdot 10^3}{0,5\cdot 100\cdot 10^6} = \frac{2,49}{10}} = 0,249 \text{ м}.$$

Округлим значение h до величины 0, 25 м. Значение b определим из заданного отношения сторон $\frac{b}{h} = \mu = 0,5; \quad b = 0,5h = 0,5\cdot 0,5 = 0,125$ м.

Определение нормальных напряжений в характерных точках профиля опасного поперечного сечения и построение эпюр напряжений для точек профиля поперечного сечения

В качестве характерных точек профиля прямоугольного поперечного сечения выделим точки A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 2.10, а). Нормальные напряжения в этих точках поперечного сечения могут быть определены как

$$\sigma_{A_i} = \frac{1}{W_z}\left(-M_z\frac{y_{A_i}}{y_{max}} + M_y\frac{W_z}{W_y}\frac{z_{A_i}}{z_{max}}\right), \qquad i = 1,2,3,4.$$

Момент сопротивления сечения $W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{0,125\cdot 0,25^2}{6} = 1,3\cdot 10^{-3}$ м^3.

Отношение $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b} = 2$. Учитывая, что

$$z_{\max} = \frac{b}{2}, \quad y_{A_1} = \frac{h}{2}, \quad z_{A_1} = \frac{b}{2}, \quad y_{A_2} = \frac{h}{2}, \quad z_{A_2} = -\frac{b}{2},$$

$$y_{A_3} = -\frac{h}{2}, \quad z_{A_3} = -\frac{b}{2}, \quad y_{A_4} = -\frac{h}{2}, \quad z_{A_4} = \frac{b}{2},$$

имеем

$$\frac{y_{A_1}}{y_{\max}} = 1, \quad \frac{y_{A_2}}{y_{\max}} = 1, \quad \frac{y_{A_3}}{y_{\max}} = -1, \quad \frac{y_{A_4}}{y_{\max}} = -1,$$

$$\frac{z_{A_1}}{z_{\max}} = 1, \quad \frac{z_{A_2}}{z_{\max}} = -1, \quad \frac{z_{A_3}}{z_{\max}} = -1, \quad \frac{z_{A_4}}{z_{\max}} = 1,$$

Тогда нормальные напряжения в точках A_1, A_2, A_3, A_4 будут равны

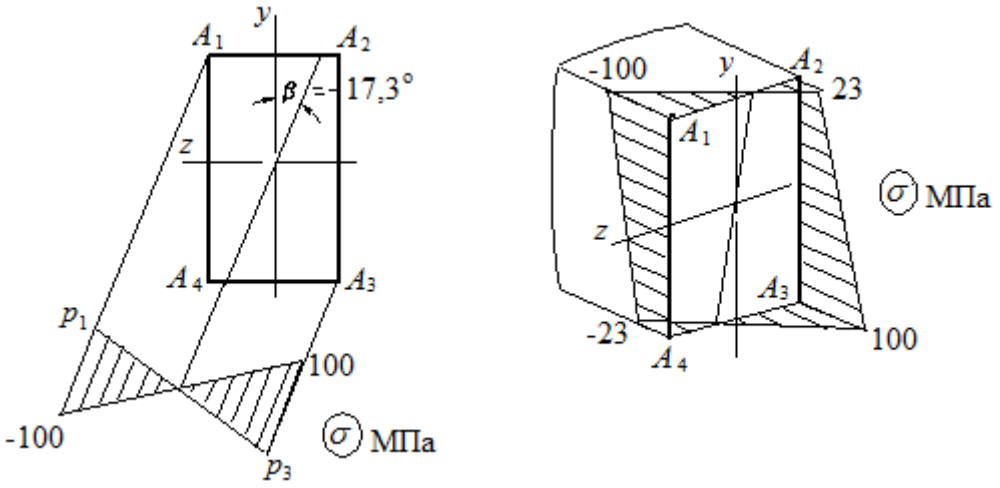
$$\sigma_{A_1} = \frac{1}{W_z}\left[-50\cdot 10^3\cdot 1 + (-40)10^3\cdot 2\cdot 1\right] = \frac{-130\cdot 10^3}{1,3\cdot 10^{-3}} = -100\cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{A_2} = \frac{1}{W_z}\left[-50\cdot 10^3\cdot 1 + (-40)\cdot 10^3\cdot 2\cdot(-1)\right] = \frac{30\cdot 10^3}{1,3\cdot 10^{-3}} = 23\cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{A_3} = \frac{1}{W_z}\left[-50\cdot10^3\cdot(-1)+(-40)\cdot10^3\cdot2\cdot(-1)\right]=\frac{130\cdot10^3}{1{,}3\cdot10^{-3}} = 100\cdot10^6\ \text{Па},$$

$$\sigma_{A_4} = \frac{1}{W_z}\left[-50\cdot10^3\cdot(-1)+(-40)\cdot10^3\cdot2\cdot1\right]=\frac{-30\cdot10^3}{1{,}3\cdot10^{-3}} = -23\cdot10^6\ \text{Па}.$$

Построим эпюры нормальных напряжений для точек поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии (рис. 2.11, а).



а) б)

Рис. 2.11. Эпюры нормальных напряжений: а) для точек поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии; б) для точек профиля поперечного сечения

Для этого за пределы профиля поперечного сечения проведем линию, перпендикулярную нулевой линии. Спроецируем на эту линию точки A_1 и A_3 (опасные точки поперечного сечения). Проекцией точки A_1 будет точка p_1, а проекцией точки A_3 будет точка p_3.

Из точки p_1 отложим ординату, соответствующую нормальному напряжению в точке A_1 (σ_{A_1} = – 100 МПа). Из точки p_3 отложим ординату, соответствующую нормальному напряжению в точке A_3 (σ_{A_3} = 100 МПа). Так как напряжения в точках A_1 и A_3 противоположны по знаку, то и ординаты при построении эпюры должны быть отложены по разные стороны от линии $p_1 - p_3$. Соединив концы ординат линией и проведя соответствующие ординаты для других точек (рис. 2.11, а), получим эпюру нормальных напряжений в точках поперечного сечения, равноудаленных от нулевой линии.

Построим эпюры нормальных напряжений для точек профиля поперечного сечения. Для построения эпюры напряжений в аксонометрии поперечное сечение целесообразно расположить таким образом (рис. 2.11, б), чтобы зона сжимающих напряжений была расположена со стороны наблюдателя. Отложим в точке A_1 отрезок, соответствующий напряжению σ_{A_1} = – 100 МПа и параллельный оси x. Так как напряжение в этой точке сжимающее, отрезок откладываем в тело стрежня.

Далее отложим в точке A_2 отрезок, соответствующий напряжению σ_{A_2} = 23 МПа и параллельный продольной оси стержня. Так как напряжения в этой точке растягивающие, отрезок откладываем от поперечного сечения (рис. 2.11, б). В точке A_3

отложим отрезок, соответствующий напряжению σ_{A_3} = 100 МПа, а в точке A_4 - отрезок, соответствующий напряжению σ_{A_4} = -23 МПа (рис. 2.11, б).

Соединив концы отрезков σ_{A_1} и σ_{A_2} (рис. 2.11, б), получим эпюру нормальных напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне A_1A_2.

Соединив концы отрезков σ_{A_2} и σ_{A_3} , получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне A_2A_3. Соединив концы отрезков σ_{A_3} и σ_{A_4} , получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне A_3A_4. Соединив концы отрезков σ_{A_4} и σ_{A_1}, получим эпюру напряжений точек профиля прямоугольного сечения, лежащих на стороне A_4A_1.

В точках пересечения эпюры со сторонами прямоугольника величина нормальных напряжений равна нулю. Соединив эти точки, получим нулевую линию в поперечном сечении стержня (рис. 2.11, б). Эта линия делит поперечное сечение на две зоны: зону сжатия и зону растяжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробот В. А., Брусенцов А. С. Прикладная механика. – СПб.: Лань, 2022. - 180 с. - URL: https://e.lanbook.com/book.
2. Затипякин А. М., Друзь И.Б., Гаманов В.Ф. Сопротивление материалов. - Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2019. - 196 с. - URL: https://viewer.rsl.ru/ru/rsl07000487048?page=1&rotate=0&theme=white/.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В.А. Сопротивление материалов: учебник. - СПб.: Лань, 2022. - 556 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/206420.
4. Джамай В.В., Самойлов Е.А., Станкевич А.И., Чуркина Т.Ю. Прикладная механика: учебник для академического бакалавриата. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 360 с.
5. Асадулина Е.Ю. Сопротивление материалов: учеб. пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 279 с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов: учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. - 432 с.