



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована
ООО «ДКС РУС» по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Общеинженерные дисциплины
и наземный транспорт»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ В ПОКОЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО КУРСУ «МЕХАНИКА»**

для студентов направлений

21.03.01 Нефтегазовое дело

13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника

20.03.02 Природообустройство и водопользование

Астрахань 2024

УДК 539.3

Хахов А.А.

Определение реакций связей в покоящейся системе сочлененных тел. Методические указания по курсу «Механика». – Астрахань: АГТУ, 2024. – 63с.

В пособии представлены методики расчета реакций связей для плоской и пространственной систем сил.

Пособие предназначено в помощь студентам для подготовки к текущей аттестации по курсам «Механика», «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»

Протокол заседания кафедры № 3 от 13.03.2024г.

Рецензент: Славин Б.М., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2024

© Астраханский государственный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Основные понятия и аксиомы статики.....	6
1.1. Понятие силы.....	6
1.2. Аксиомы статики.....	10
1.3. Связи и их реакции.....	12
2. Система сходящихся сил.....	17
2.1. Геометрический способ сложения сходящихся сил.....	17
2.2. Теорема о трех силах.....	19
2.3. Разложение силы на сходящиеся составляющие.....	20
2.4. Проекция вектора на ось и на плоскость.....	23
2.5. Аналитический способ сложения сил.....	25
2.6. Условия равновесия системы сходящихся сил.....	26
2.7. Системы статически определимые и статически неопределимые.....	27
2.8. Системы взаимосвязанных (сочлененных) тел	29
2.9. Момент силы относительно центра (точки).....	29
2.10. Теорема Вариньона.....	31
2.11. Уравнения моментов для сходящихся сил.....	32
3. Параллельные силы.....	34
3.1. Сложение двух параллельных сил.....	34
3.2. Пара сил. Момент пары.....	36
3.3. Теорема об эквивалентности пар.....	38
3.4. Сложение пар. Условия равновесия систем пар.....	40
4. Система сил, произвольно расположенных на плоскости.....	44
4.1. Теорема о параллельном переносе силы.....	44
4.2. Приведение плоской системы сил к данному центру.....	44
4.3. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.....	46
5. Примеры решения задач.....	48
5.1. Определение реакций опор (плоская система сил).....	48

5.2. Определение реакций опор составной конструкции.....	50
6. Произвольная пространственная система сил.....	54
6.1. Момент силы относительно оси.....	54
6.2. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси.....	55
6.3. Приведение пространственной системы сил к данному центру.....	56
6.4. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.....	58
7. Пример решения задач.....	60
7.1. Определение реакций опор (пространственная система сил).....	60
Список литературы.....	63

Введение

Теоретическая механика - это часть механики, в которой изучаются общие законы механического движения или равновесия материальных тел и механического взаимодействия между ними.

Под *механическим взаимодействием* понимают силовое действие одних тел на другие, а под *механическим движением* – изменение взаимного расположения материальных тел.

Механика является одной из самых древних наук. Термин «механика» введен выдающимся философом древности Аристотелем. Первые научные основы учения о равновесии тел содержатся в трудах Архимеда. В основу классической механики легли принцип относительности Г. Галилея и сформулированные И. Ньютоном законы.

Научные достижения в области механики позволяют решать сложные практические проблемы в области техники, а также способствуют развитию фундаментальных наук.

Традиционно теоретическая механика состоит из трех частей: статики, кинематики и динамики.

В статике изучают свойства сил, приложенных к точкам твердого тела, и условия равновесия тел.

В кинематике изучают движение материальных объектов с геометрической точки зрения: выбирают уравнения, описывающие их движение, определяют кинематические параметры движения – траектории, скорости и ускорения.

В динамике изучают движение материальных объектов в зависимости от действующих на них сил.

Основными задачами статики являются:

- изучение методов преобразования сложных систем сил, приложенных к абсолютно твердому телу, в более простой вид, эквивалентный заданным;
- установление условий равновесия тел при действии данной системы сил.

1. Основные понятия и аксиомы статики

Под равновесием мы будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам. Условия равновесия тела существенно зависят от того, является ли это тело твердым, жидким или газообразным. В теоретической механике рассматривается равновесие только твердых тел, равновесие жидких или газообразных объектов изучается в курсах гидростатики или аэростатики.

Все встречающиеся в природе твердые тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свою форму, то есть деформируются. Для обеспечения прочности сооружений материал и размеры их частей подбирают так, чтобы деформации были достаточно малы. Тогда при изучении условий равновесия вполне допустимо пренебрегать малыми деформациями твердых тел и считать их абсолютно твердыми. *Абсолютно твердым* называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

Для равновесия твердого тела под действием некоторой системы сил необходимо, чтобы эти силы удовлетворяли определенным условиям равновесия данной системы сил.

1.1. Понятие силы

Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется *силой*.

В механике сила изображается в виде вектора и характеризуется тремя основными свойствами:

- а) численной величиной или модулем;
- б) направлением;
- в) точкой приложения.

Единицей измерения силы в международной системе единиц служит ньютон (Н). Но на практике используется иногда и другая единица — килограмм силы: $1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ Н}$. Графически сила, как и всякий вектор, изображается отрезком, направленным в сторону действия силы. Прямая, вдоль которой действует сила, называется *линией действия силы*.

$\vec{F}$ — сила (направленный отрезок АВ), А — точка приложения силы, ab — линия действия силы (рис. 1.1).

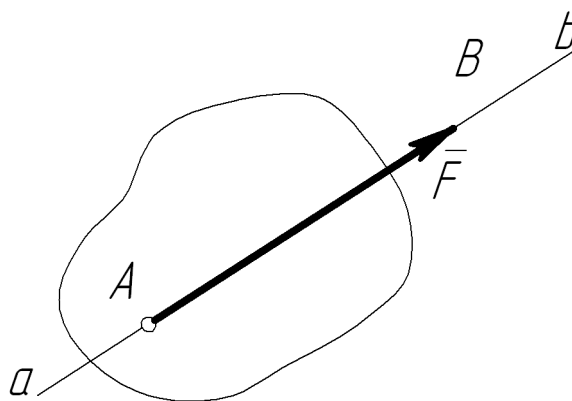


Рис. 1.1. Графическое изображение силы

Совокупность сил, действующих на твердое тело, называется *системой сил*.

Для системы сил справедливы следующие определения:

- тело, не скрепленное с другими телами, которому можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*;
- если одну систему сил, действующих на свободное тело, можно заменить другой системой сил, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*;
- система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*;
- если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил. Сила, равная равнодействующей

по модулю, но противоположная по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей силой*.

Все силы, действующие на точки механической системы, делятся на *внешние* и *внутренние*. *Внешними* называют силы, действующие на частицы данного тела со стороны других тел, а *внутренними* – с которыми частицы одного тела взаимодействуют друг с другом. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь точке, называется *сосредоточенной*; сила, действующая на все точки данной поверхности или объема тела, называется *распределенной*.

Простейшим примером распределенных сил, лежащих в одной плоскости, является равномерно-распределенная нагрузка (рис. 1.2). Такая система распределенных сил характеризуется интенсивностью q – т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного участка. Размерность распределенной нагрузки $[q] = \text{Н/м}$. Распределенную силу можно заменить сосредоточенной, если сосчитать площадь фигуры, которую описывает распределенная нагрузка и приложить сосредоточенную силу в центре тяжести этой фигуры.

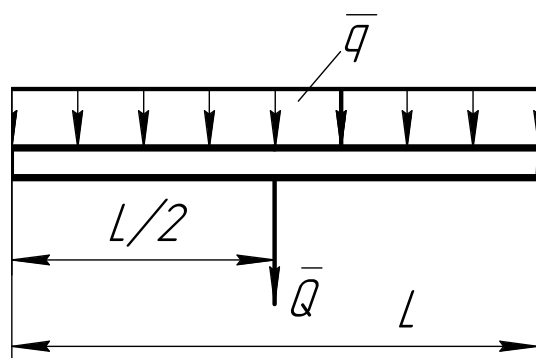


Рис. 1.2. Равномерно-распределенная нагрузка

Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой. Для такой системы сил интенсивность q является величиной постоянной. При статических расчетах эту систему параллельных сил можно заменить равнодействующей Q (рис. 1.2), приложенной в середине отрезка, а ее модуль равен:

$$Q = q \cdot L$$

Силы, распределенные вдоль отрезка по линейному закону. Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину. Для этих сил интенсивность q является переменной величиной, изменяющейся от нуля до максимального значения q_{max} (рис. 1.3). Равнодействующая Q таких сил по модулю равна площади треугольника:

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot L$$

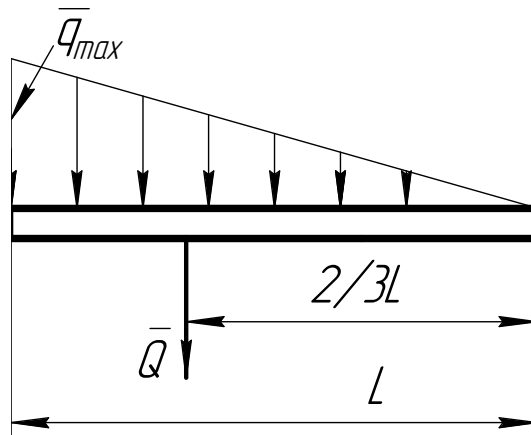


Рис. 1.3. Распределение сил по линейному закону

Линия действия этой силы проходит через центр тяжести треугольника, то есть на расстоянии $2/3$ стороны треугольника от его вершины.

Распределенную нагрузку, интенсивность которой представляет собой сложную геометрическую фигуру можно разбить на части и заменить не одной, а несколькими сосредоточенными силами (рис. 1.4).

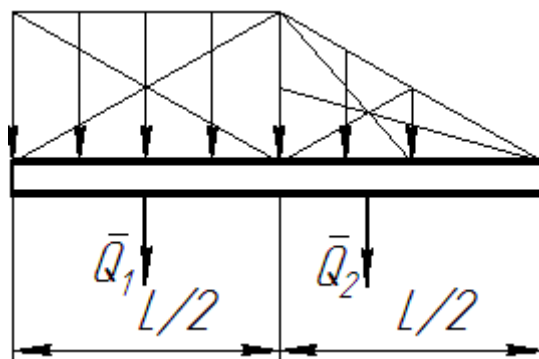


Рис. 1.4. Замена распределенной нагрузки двумя сосредоточенными силами

1.2. Аксиомы статики

Аксиомы статики представляют собой результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений за равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны по модулю, и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.5).

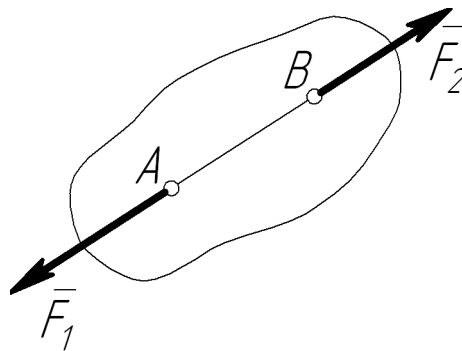


Рис. 1.5. Равновесие тела под действием двух сил

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил.

Следствие из 1 и 2. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии её действия в любую другую точку тела (рис. 1.6).

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке А. Приложим на линии действия силы $\vec{F}$ две уравновешенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ ($F_1 = F = -F_2$). Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ также образуют уравновешенную систему сил. В результате на тело будет действовать только сила $\vec{F}_1$, равная силе $\vec{F}$, но приложенная в точке В. Такой вектор называют *скользящим*.

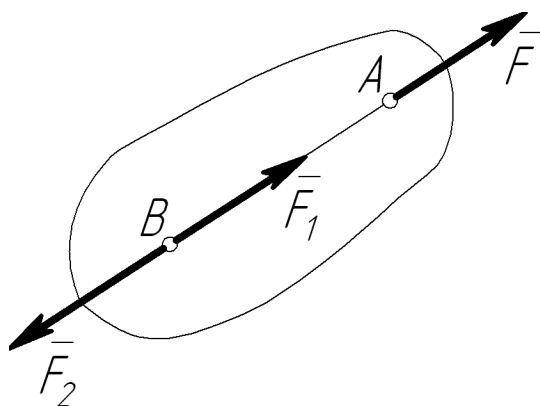


Рис. 1.6. Скользящий вектор

Аксиома 3. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис. 1.7).

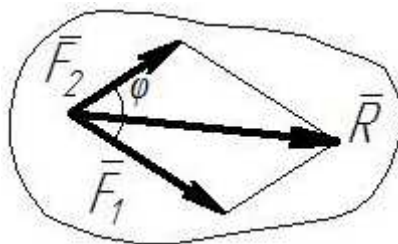


Рис. 1.7. Равнодействующая двух сил

Вектор $\bar{R}$ – геометрическая сумма векторов $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Аксиома 4 (3-й закон Ньютона). При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис. 1.8).

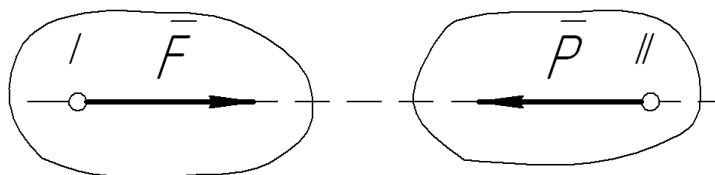


Рис. 1.8. Взаимодействие двух тел

Если тело I действует на тело II с силой F , а тело II действует на тело I с силой P (рис. 1.8), то эти силы равны по модулю ($F = P$) и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то есть $\overline{F} = -\overline{P}$.

Если обозначить через F силу, с которой Солнце притягивает Землю, то Земля притягивает Солнце с такой же по модулю, но противоположно направленной силой $-F$.

Аксиома 5. Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушается, если тело считать абсолютно твердым.

Аксиома 6. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи, заменив их соответствующими реакциями связей.

1.3. Связи и их реакции

Тело называется *свободным*, если его перемещение в пространстве ничем не ограничено. В противном случае тело называется *несвободным*.

Все то, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве, называется *связью*. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется *реакцией связи*.

Силы, не являющиеся реакциями связей, принято называть *активными* (или *заданными*).

Основные виды связей и их реакции:

1. *Гладкая поверхность или опора* (рис. 1.9).

Линия действия реакции гладкой поверхности направлена по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей тел независимо от сил, приложенных к рассматриваемому телу. $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ направлены от опорной поверхности к телу (рис. 1.9).

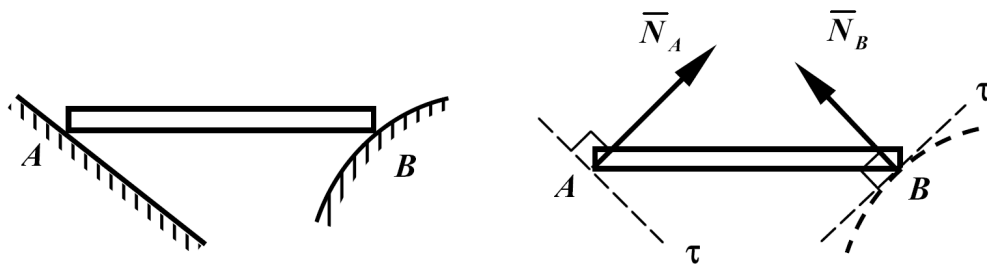


Рис. 1.9. Гладкая поверхность

2. Невесомая, нерастяжимая нить (рис. 1.10).

Под термином «нить» в теоретической механике понимают, кроме собственно нитей, также любую гибкую связь: трос, канат, веревку и т. п. Реакция нити направлена вдоль нити и в сторону подвеса (нить растянута).

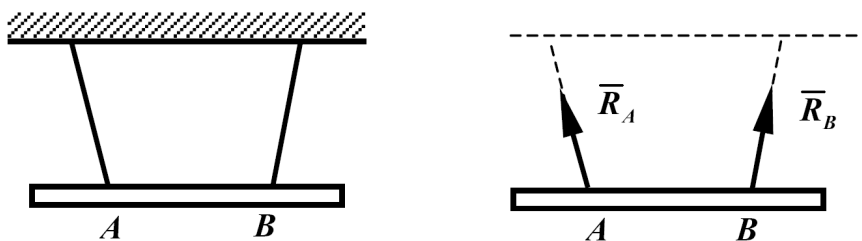


Рис. 1.10. Нерастяжимая нить

3. Цилиндрический шарнир (рис. 1.11).

Цилиндрический шарнир представляет собой втулку с осью.

В этом случае заранее известно только то, что реакция проходит через ось шарнира перпендикулярно этой оси, так как шарнирное соединение допускает вращение вокруг оси, но не допускает перемещений тела, перпендикулярных этой оси. Реакции шарниров (A или B) $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ изображаются их составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_B$ или $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, параллельными выбранным координатным осям.

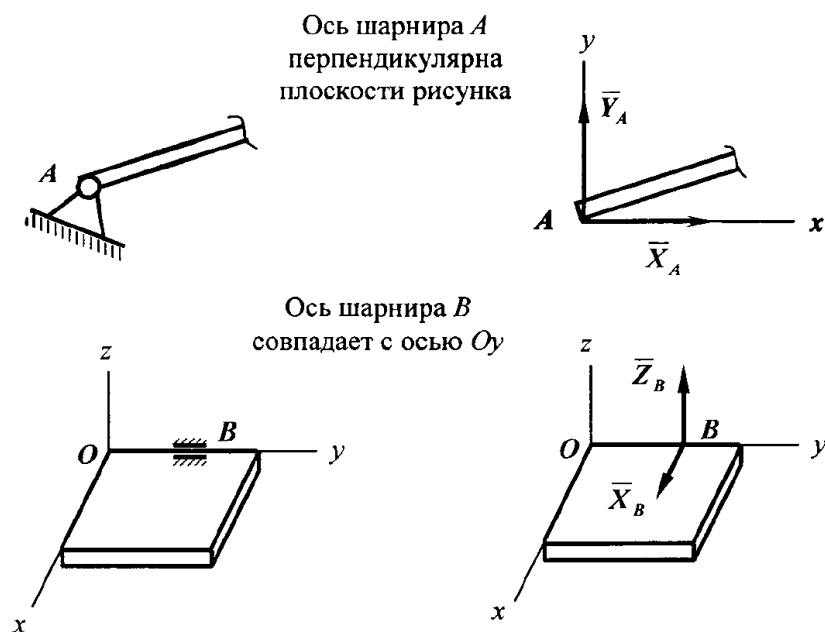


Рис. 1.11. Цилиндрический шарнир

4. Подвижная шарнирная связь (опора на катках) (рис. 1.12).

Если втулка закреплена на подвижной опоре с катками, то давление оси на втулку заставляет такую конструкцию перемещаться по поверхности качения. Поэтому реакцию (силу, с которой ось действует на втулку) принимают направленной перпендикулярно к плоскости качения.

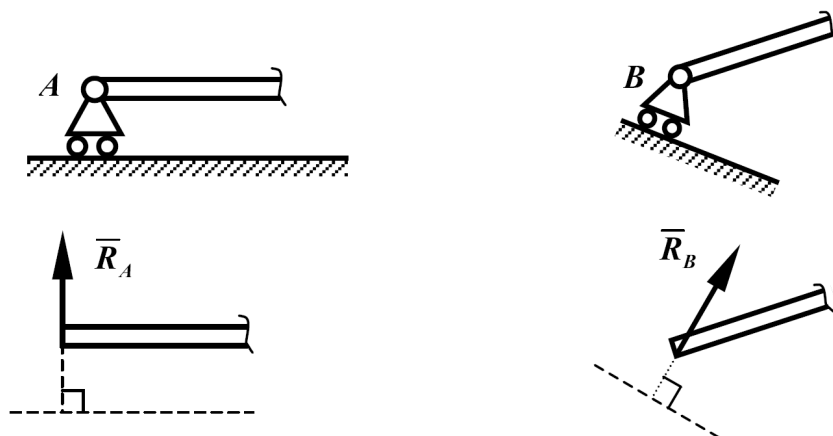


Рис. 1.12. Подвижная шарнирная связь

5. Сферический шарнир и подпятник (рис. 1.13).

Шарнир этого типа представляет собой шар в сфере. Подобный шарнир ограничивает перемещение центра шарнира, и, следовательно, реакция может

иметь любое направление в пространстве (рис. 1.13, а). Реакция $\bar{R}_A$ изображается её составляющими ($\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$), параллельными осям координат. И по найденным составляющим подсчитывают модуль реакции $\bar{R}_A$.

Подпятник ограничивает перемещение вала как в поперечном направлении, так и вертикальном (рис. 1.13, б). Поэтому реакция $\bar{R}_B$, как и в предыдущем случае, неизвестна по модулю и по направлению и с ней поступают так же, как и в случае со сферическим шарниром.

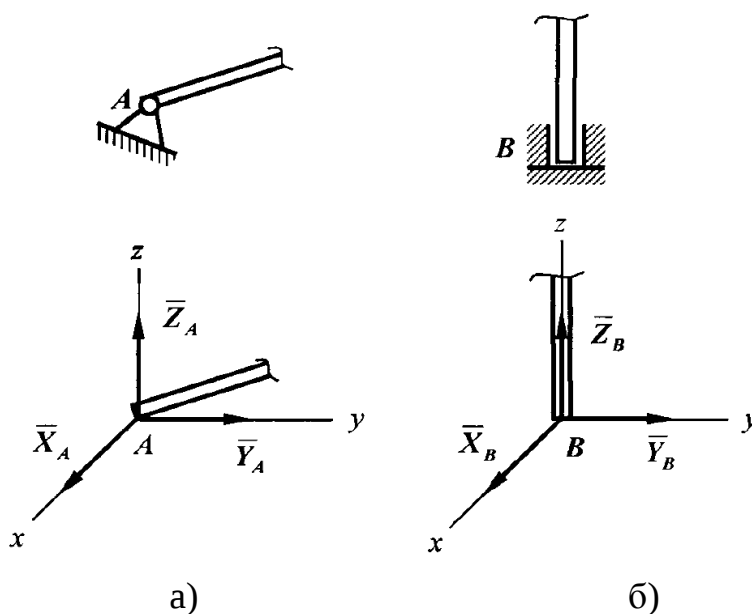


Рис. 1.13. Сферический шарнир и подпятник

6. Невесомые стержни (с шарнирами на концах) (рис. 1.14).

Реакции $\bar{R}_B$ и $\bar{R}_C$ направлены по осям стержней в произвольном направлении. (Стержни могут работать и на сжатие, и на растяжение.) В случае изогнутых стержней линия действия реакции $\bar{R}_A$ проходит через оси шарниров.

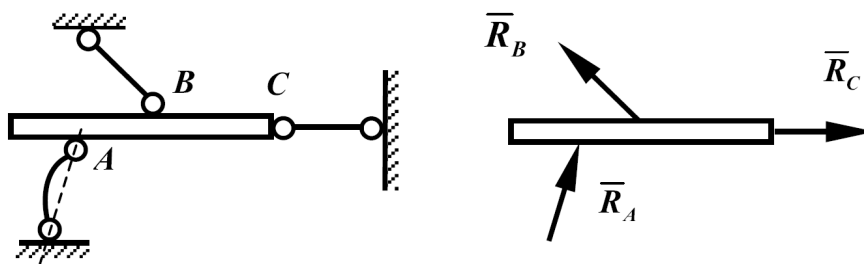


Рис. 1.14. Невесомые стержни

7. Жесткая заделка (рис. 1.15).

Такая связь препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления A . В данном случае, имеем распределенную систему сил реакций, которая может быть заменена одной силой и парой сил. При этом векторы силы и момента пары удобно разложить на составляющие по координатным осям. На рисунках действие пары на твердое тело изображается стрелкой в виде дуги, показывающей направление действия пары, с указанием её момента. Таким образом, в пространственной системе реакция заделки будет представлена тремя силами $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ и тремя моментами $\bar{M}_{Ax}, \bar{M}_{Ay}, \bar{M}_{Az}$.

В плоской заделке реакция будет представлена двумя силами $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ и моментом пары $\bar{M}_A$ (рис. 1.15).

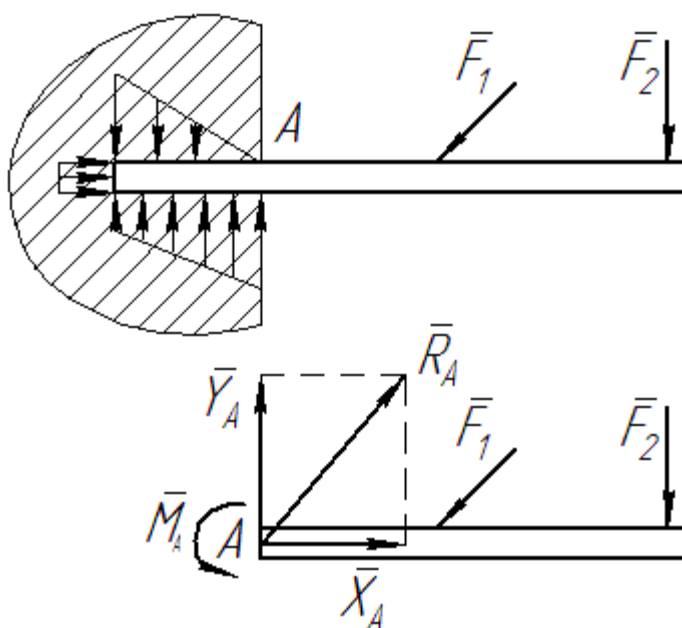


Рис. 1.15. Жесткая заделка

Аксиома связей. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.

2. Система сходящихся сил

2.1. Геометрический способ сложения сходящихся сил

Силы, действующие на тело, называются *сходящимися*, если линии их действия пересекаются в одной точке.

1. Если к телу приложены *две силы*, линии действия которых пересекаются, то их равнодействующая определяется по правилу параллелограмма (рис. 2.1, а) или построением силового треугольника (рис. 2.1, б).

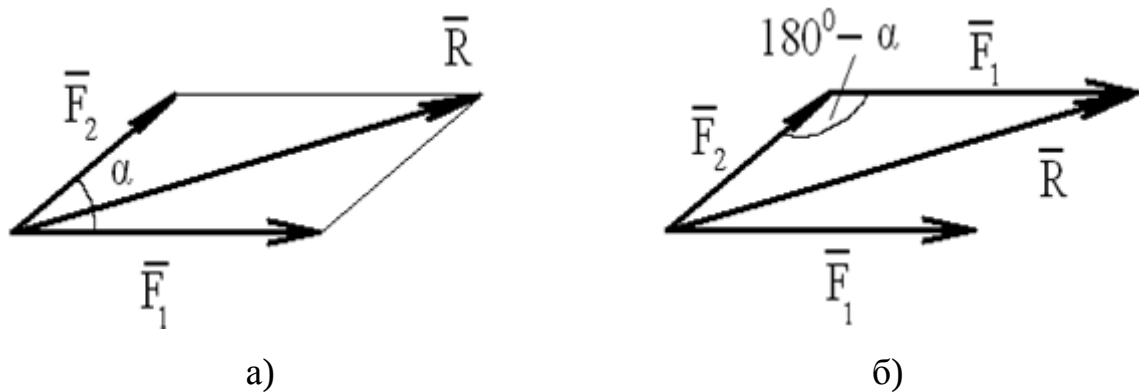


Рис. 2.1. Сложение двух сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Модуль равнодействующей можно определить по теореме косинусов:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

2. Геометрическая сумма *трех сходящихся сил*, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (рис. 2.2).

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3; \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

В справедливости полученной формулы можно убедиться, применяя последовательно правило параллелограмма.

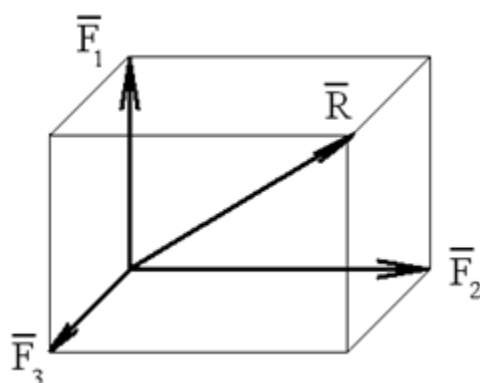


Рис. 2.2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости

3. Геометрическая сумма *любой системы сходящихся сил* определяется либо последовательным сложением по правилу параллелограмма, либо построением силового многоугольника. Для нахождения равнодействующей вторым способом откладываем из произвольной точки последовательно векторы сил, при этом соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор равнодействующей (рис. 2.3).

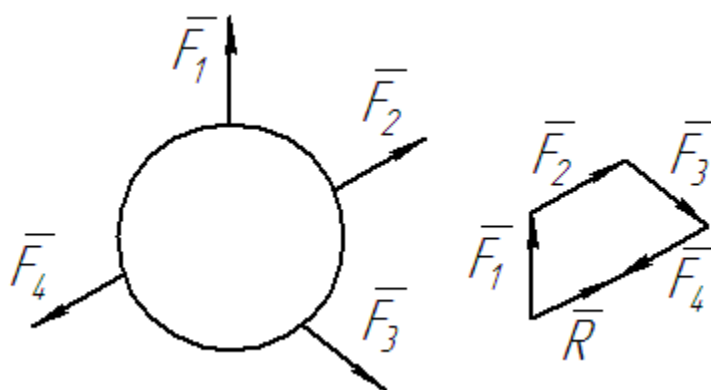


Рис. 2.3. Сложение системы сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 \text{ или } \bar{R} = \sum \bar{F}_k$$

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке. Применяя правило параллелограмма, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в точке их пересечения.

2.2. Теорема о трех силах

Если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 2.4).

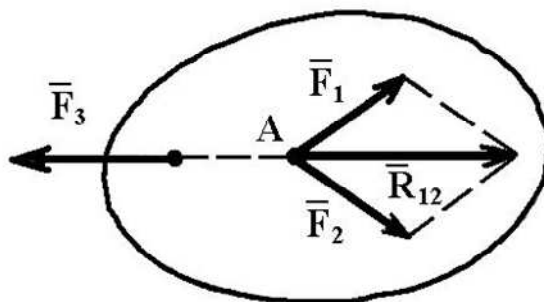


Рис. 2.4. Равновесие тела под действием трех сил

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_{12}$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_3, \vec{R}_{12})$$

Система двух сил находится в равновесии только тогда, когда эти силы направлены вдоль одной прямой, то есть линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку А.

Доказательство. Пусть имеем систему трех сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$, две из которых $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются в точке А. Равнодействующая сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определится как их геометрическая сумма: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_{12}$. Таким образом, система трех сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ свелась к эквивалентной системе двух сил $(\vec{F}_3, \vec{R}_{12})$, находящихся в равновесии. Согласно аксиоме 1, эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения. Следовательно, линия действия силы $\vec{F}_3$ должна проходить через точку А. Таким образом, линии действия трех сил пересекутся в одной точке.

Задача. Два трактора, идущих по берегам прямого канала с постоянной скоростью, тянут баржу при помощи двух канатов (рис.2.5). Силы натяжения канатов равны 80 кН и 96 кН, угол между ними 60° . Найти сопротивление воды,

испытываемое баржей при её движении, и углы α и β , которые должны составлять канаты с берегами канала, если баржа движется параллельно берегам.

Решение

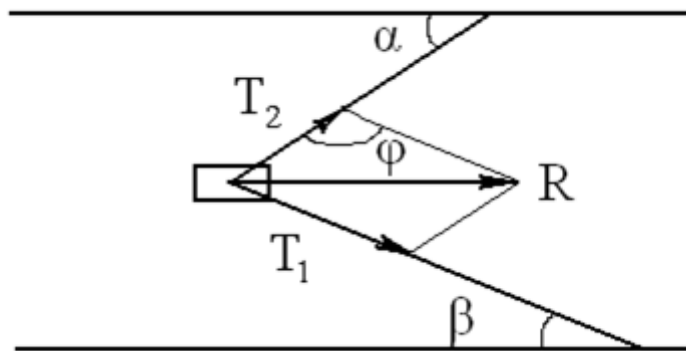


Рис. 2.5. Расчетная схема

$$R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos 60^\circ} = \sqrt{96^2 + 80^2 + 2 \cdot 96 \cdot 80 \cdot 0,5} = 153 \text{ кН.}$$

$$\angle \varphi = \frac{360^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin \varphi} = \frac{T_1}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \frac{T_1 \sin 120^\circ}{R} = \frac{96 \sin 120^\circ}{153} = 0,543$$

$$\alpha \approx 33^\circ \quad \beta = 60^\circ - 33^\circ = 27^\circ$$

Ответ: $R = 153 \text{ кН}$; $\alpha = 33^\circ$; $\beta = 27^\circ$.

2.3. Разложение силы на сходящиеся составляющие

Разложить данную силу на несколько составляющих значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение при определенных условиях. Рассмотрим 2 наиболее важных частных случая.

1. Разложение силы по двум заданным направлениям (рис. 2.6).

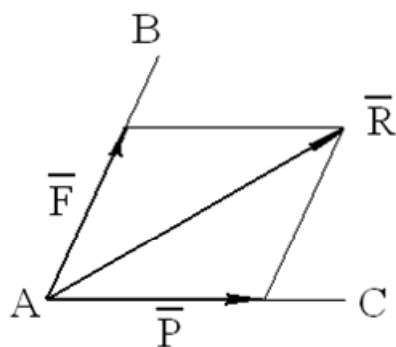


Рис. 2.6. Разложение сил по заданным направлениям

Для такого разложения силы необходимо построить параллелограмм, у которого равнодействующая будет являться диагональю, а стороны будут параллельны прямым AB и AC . Для решения задачи проводим через начало и конец силы $\vec{R}$ прямые, параллельные AB и AC . Силы $\vec{F}$ и $\vec{P}$ и будут искомыми составляющими. Тогда $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P}$. Можно построить также силовой треугольник.

2. Разложение силы на две с заданными численными значениями.

Из начала и конца вектора AB проводим 2 дуги радиусами, равными в выбранном масштабе заданным значениям сил (рис. 2.7). Эти дуги пересекутся в точках C и D .

Соединим точки A , C и D и получим векторы AC и AD . Относительно каждого вектора строим параллелограмм, считая вектор равнодействующей диагональю.

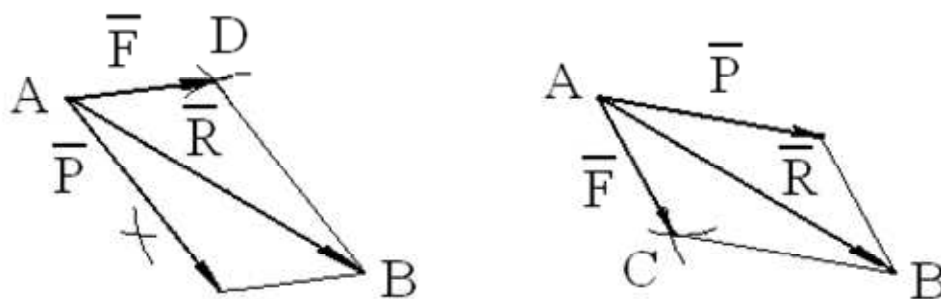


Рис. 2.7. Разложение сил с заданными численными значениями

Задача. Груз весом 6000 Н подвешен симметрично на двух одинаковых металлических стержнях, угол между которыми 30° (рис. 2.8). Какова сила, растягивающая стержень?

Решение

Реакция стержней направлена вдоль стержней. Раскладываем силу тяжести по двум направлениям и получаем 2 силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$, причем в силу симметрии $T_1 = T_2 = T$.

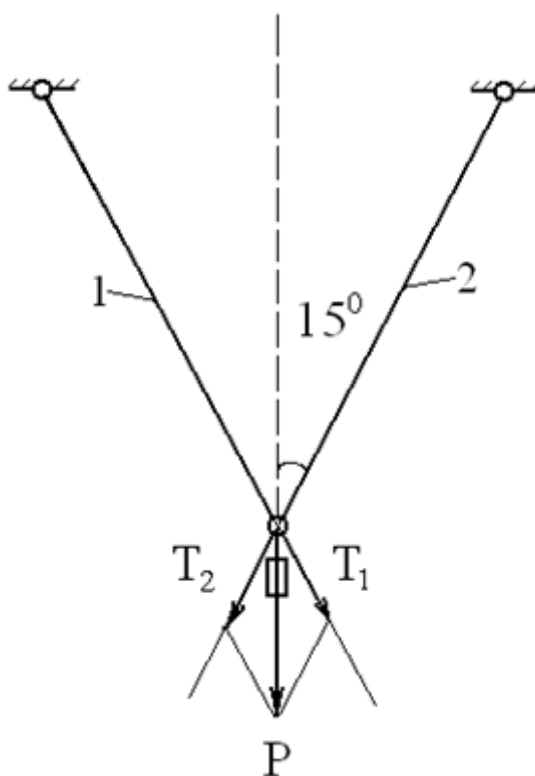


Рис. 2.8. Расчетная схема

Численно получим:

$$P = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos 30^\circ} = T\sqrt{2 \cdot (1 + \cos 30^\circ)}$$

$$T = \frac{P}{\sqrt{2 \cdot (1 + \cos 30^\circ)}} = \frac{6000}{\sqrt{2 \cdot (1 + 0,866)}} = 3105,8 \text{ Н}$$

Ответ: $T = 3105,8 \text{ Н}$.

2.4. Проекция вектора на ось и на плоскость

Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы на ту же ось.

Из определения следует, что проекция данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны между собой (рис. 2.9).

Проекция считается положительной, если переход от ее начала к концу совпадает с заданным положительным направлением оси, и отрицательной - если с противоположным.

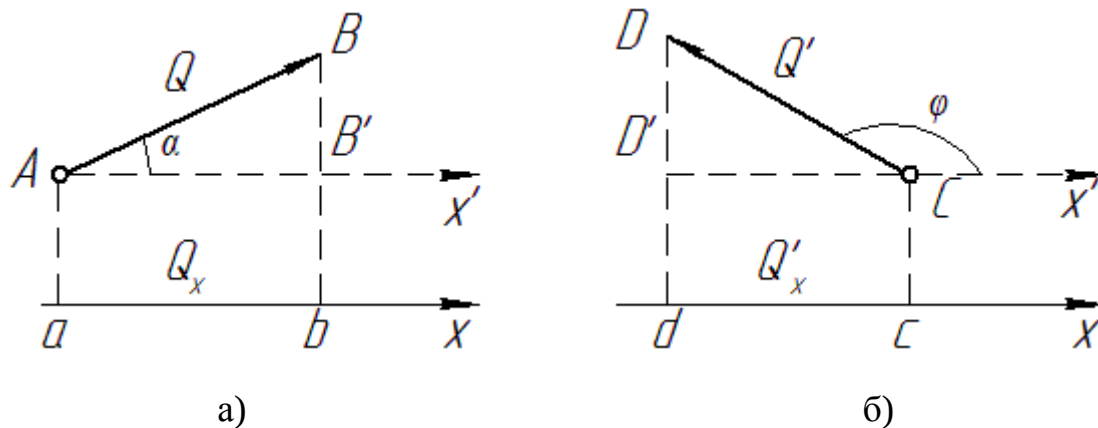


Рис. 2.9. Проекция вектора на ось

Проекцию вектора на ось принято обозначать теми же буквами, указывая нижним индексом ось проекций. Из рис. 2.9, а и б имеем:

$$Q_x = ab = AB' = Q \cos \alpha,$$

$$Q'_x = -cd = -CD = Q \cos \varphi$$

Проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением оси проекций:

$$Q_x = Q \cos(Q, x)$$

Проекция будет положительной, если направление вектора составляет с положительным направлением оси острый угол, и отрицательной - если тупой.

Проекцией вектора на плоскость называют вектор, заключенный между проекциями на эту плоскость начала и конца данного вектора.

Для нахождения проекции вектора на ось, не лежащую с ним в одной плоскости, удобно спроецировать сначала вектор на плоскость, в которой лежит эта ось, а затем уже проекцию вектора на плоскость на данную ось (рис. 2.10).

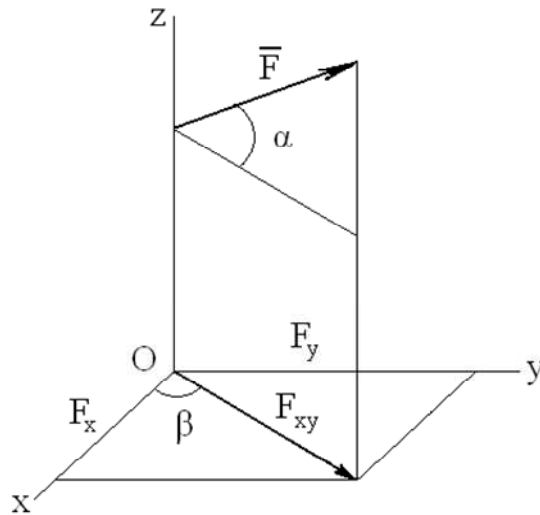


Рис. 2.10. Проекция вектора на плоскость

$$F_{xy} = F \cos \alpha$$

$$F_x = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$F_y = F_{xy} \sin \beta = F \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

Для решения задач бывает удобно задавать силу её проекциями:

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases}$$

Зная проекции вектора на оси прямоугольной декартовой системы координат, легко найти и модуль, и направление вектора

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на три любые взаимно перпендикулярные оси.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Углы α , β и γ – соответственно углы между вектором силы и осями координат.

Их значения можно определить по значениям направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F};$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

2.5. Аналитический способ сложения сил

В теоретической механике используется известная из векторной алгебры теорема о равенстве проекции суммы векторов на любую ось сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Теорема. Проекция геометрической суммы сил (их равнодействующей) на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось (рис. 2.11).

Доказательство. Пусть мы имеем силовой многоугольник $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{R}$.

Спроецируем все силы на ось x .

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3;$$

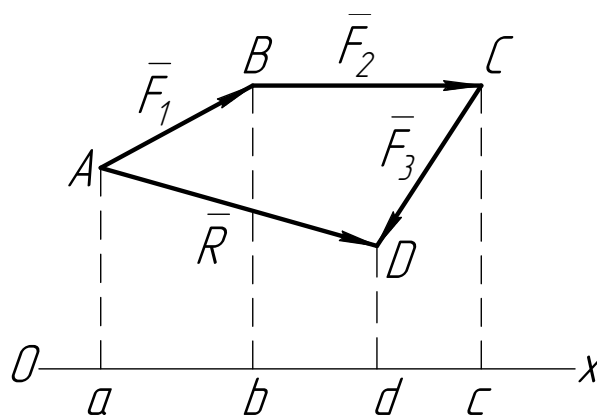


Рис. 2.11. Проекция равнодействующей на ось

$$R_x = ad; \quad F_{1x} = ab; \quad F_{2x} = bc; \quad F_{3x} = -cd$$

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = ab + bc - cd = ad = R_x$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

Задача. Определить равнодействующую системы сходящихся сил, если известно, что $F = 17 \text{ Н}$, $P = 24 \text{ Н}$, $T = 10 \text{ Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $\psi = 60^\circ$ (рис.2.12).

Решение

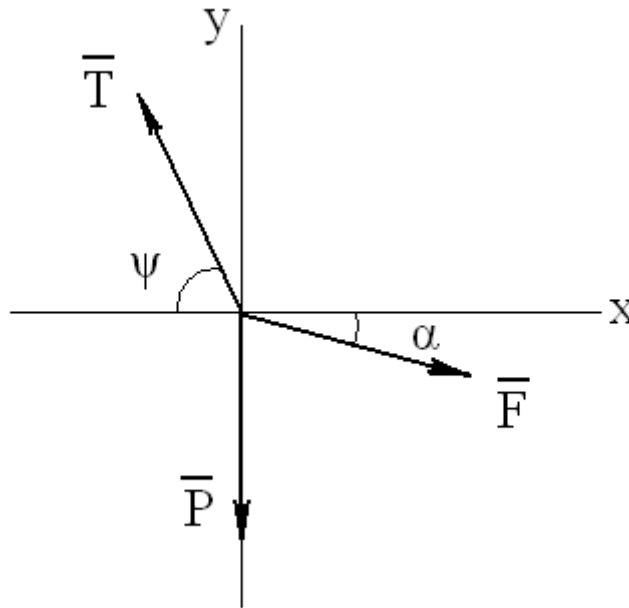


Рис. 2.12. Расчетная схема

$$R_x = \sum F_{kx} = F \cos \alpha - T \cos \psi = 17 \cdot \cos 30^\circ - 10 \cdot \cos 60^\circ = 9,7 \text{ Н}$$

$$R_y = \sum F_{ky} = T \sin \psi - F \sin \alpha - P = 10 \cdot \sin 60^\circ - 17 \cdot \sin 30^\circ - 24 = -23,8 \text{ Н}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{9,7^2 + (-23,8)^2} = 25,7 \text{ Н}$$

Ответ: $R = 25,7 \text{ Н}$.

2.6. Условия равновесия системы сходящихся сил

Всякая система сходящихся сил может быть заменена равнодействующей, равной ее главному вектору. Если система сходящихся сил находится в равновесии, то ее равнодействующая (а, следовательно, и ее главный вектор) должна равняться нулю.

Для того чтобы система сходящихся сил была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

1. Условие равновесия в аналитической форме.

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0.$$

Равнодействующая может равняться нулю только в том случае, если будет равняться нулю каждое из подкоренных слагаемых. Но проекция равнодействующей на ось равна сумме проекций слагаемых сил на ту же ось, например: $R_x = \sum F_{kx}$. Тогда уравнения равновесия примут вид:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия плоской системы сходящихся сил могут быть составлены только два уравнения равновесия.

2. Условие равновесия в геометрической форме.

Так как равнодействующая системы сходящихся сил является замыкающей стороной силового многоугольника, то для равновесия необходимо, чтобы многоугольник был замкнутым.

2.7. Системы статически определимые и статически неопределимые

При решении задач о равновесии несвободного твердого тела реакции наложенных связей являются величинами, заранее неизвестными. Число этих неизвестных зависит от числа и характера наложенных связей. Соответствующая задача статики может быть решена только в том случае, когда для неё число неизвестных реакций не превышает числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Такие задачи называются *статически определенными*, а системы тел, для которых это имеет место - *статически определенными системами*. В противном случае механическая система

называется *статически неопределимой*, а соответствующая задача - *статически неопределенной*.

Примером статически неопределимой системы может служить груз, подвешенный на трех тросах, расположенных в одной плоскости (рис. 2.13, а).

Число неизвестных реакций связей здесь - три, а уравнений равновесия всего два, это уравнения:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0$$

Статическая неопределимость появляется из-за наложения дополнительных связей. Если один из тросов убрать, то система становится статически определимой (рис. 2.13,б).

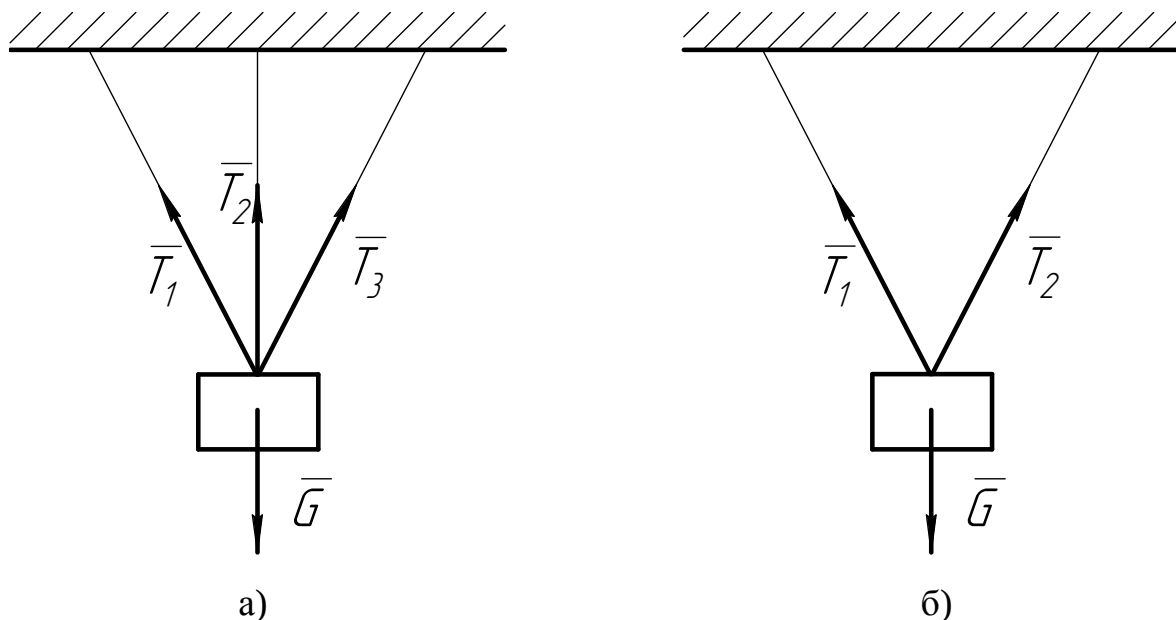


Рис. 2.13. Статически определимые (а) и статически неопределимые (б) системы

Если нити нерастяжимы, то отбросив нить, равновесие тела не нарушится. С точки зрения абсолютно твердого тела, одна из трех нитей лишняя. В случае же реальных нитей под действием веса груза точка подвеса несколько опустится (иначе, чем при наличии только двух нитей) и каждая из трех нитей получит соответствующее удлинение.

Статически неопределимые системы изучаются в курсе сопротивления материалов и в строительной механике, где для их расчетов применяются дополнительные уравнения, в которых учитываются деформации тел.

2.8. Система взаимосвязанных (сочлененных) тел

Систему, состоящую из нескольких тел, свободно опирающихся друг на друга или соединенных между собой подвижными соединениями (шарниры, тросы и др.), называют *системой сочлененных тел*.

Силы, действующие на такую систему тел, подразделяют на внешние и внутренние. *Внешними* называют силы, с которыми на тело рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему. *Внутренними* называют силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

Если система сочлененных тел находится в равновесии, то, следовательно, в равновесии находится и каждое из тел, входящих в эту систему.

Для решения задачи систему тел расчленяют по местам их соединения, что позволяет составлять уравнения равновесия для каждого из тел системы в отдельности. При этом внутренние силы системы для каждого отдельно взятого тела переходят в разряд внешних.

2.9. Момент силы относительно центра (точки)

Под действием силы твердое тело наряду с поступательным перемещением может совершать вращение вокруг того или иного центра. Вращательный эффект действия силы характеризуется её моментом.

Допустим, что сила $\vec{F}$, приложенная в точке А, стремится повернуть тело вокруг центра О (рис. 2.14). Тогда *моментом силы $\vec{F}$ относительно точки О* называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Плечом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется длина перпендикуляра h , опущенного из центра O на линию действия силы $\vec{F}$.

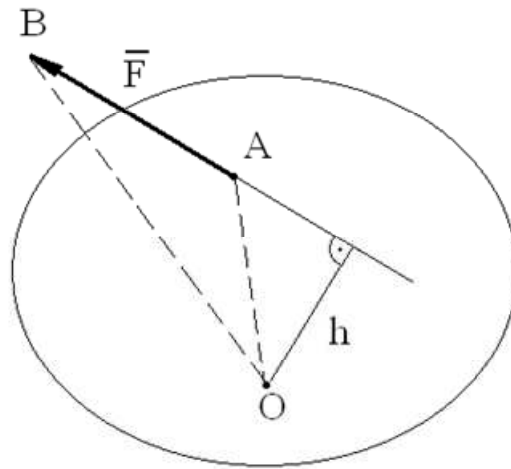


Рис. 2.14. Момент силы относительно центра (точки)

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O будем обозначать символом $M_O(\vec{F})$. Следовательно,

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

Момент силы относительно точки – величина векторная. Вектор момента лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, в которой расположена сила, а его направление определяют по правилу правого винта. Численная величина момента силы может иметь положительное и отрицательное значения. В теоретической механике принято считать, что момент положителен, когда сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицателен – если по ходу часовой стрелки.

Измеряется момент силы в Н·м.

Момент силы имеет следующие свойства:

- 1) не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии её действия;
- 2) равен нулю, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр вращения.

3. Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB.

$$F \cdot h = 2S_{\triangle OAB}$$

2.10. Теорема Вариньона

Теорема. Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

Доказательство. Рассмотрим систему сил, сходящихся в точке A (рис. 2.15). Выберем произвольный центр O и проведем через него ось, перпендикулярную линии OA . Положительное направление оси Ox выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра O .

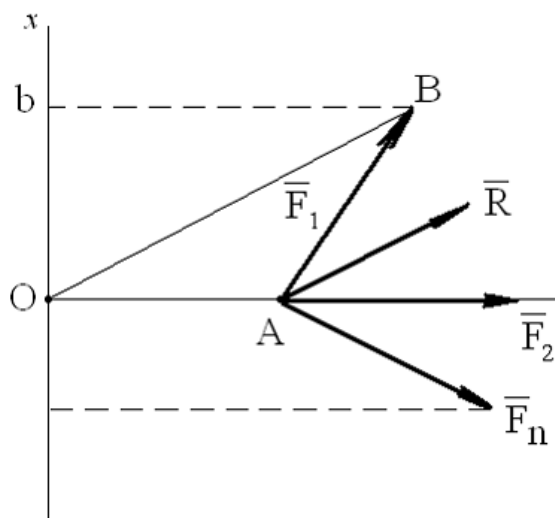


Рис. 2.15. Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Для доказательства теоремы найдем соответствующее выражение момента силы F_1 относительно точки O :

$$M_O(\overline{F_1}) = 2 \text{пл.} \triangle OAB = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot Ob = OA \cdot Ob;$$

$$Ob = F_{1x} \rightarrow M_O(F_1) = OA \cdot F_{1x}$$

Аналогично вычисляем моменты остальных сил.

По теореме о проекции суммы сил на ось, получим: $R_x = \sum F_{kx}$. Умножим обе части уравнения на OA :

$$R_x \cdot OA = \sum F_{kx} \cdot OA;$$

$$M_O(\bar{R}) = \sum M_O(\bar{F}_k).$$

Мы доказали теорему, носящую имя французского ученого П.Вариньона¹, для случая плоской системы сил. Она справедлива и для произвольной пространственной системы сил, однако в этом случае момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

2.11. Уравнения моментов для сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил относительно двух любых центров была равна нулю; при этом линия действия равнодействующей не должна лежать на одной прямой с этими центрами.

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0.$$

Аналитические условия равновесия можно выразить не только через проекции этих сил, но и через их моменты. Докажем достаточность этих условий (рис. 2.16).

По теореме Вариньона $M_O(\bar{R}) = \sum M_O(\bar{F}_k)$, что возможно или когда $\bar{R} = 0$, или когда линия действия силы $\bar{R}$ проходит через точки A и B одновременно. Но в нашем случае это невозможно, так как равнодействующая сходящихся сил должна проходить через точку O , а прямая AB через точку O не проходит.

¹Пьер Вариньон (1664-1722) — французский математик и механик. Установил условия равновесия тел на наклонной плоскости. В математике ввел десятичные дроби и отрицательные корни уравнений геометрической статики, окончательно оформленной Пуансо. Вариньон впервые дал общее решение задачи сложения параллельных сил, ввел силовой многоугольник и установил свойство силы как скользящего вектора.

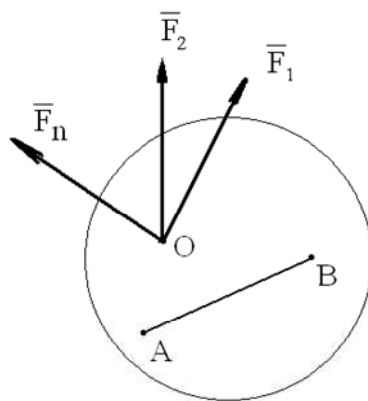


Рис. 2.16. Условия равновесия

Следовательно, равнодействующая $\vec{R} = 0$, то есть система сил действительно находится в равновесии.

Задача. Стержень АВ прикреплен к опоре шарниром А и нагружен двумя грузами Р и Q. $AC = AB = a$ (рис. 2.17). При каком значении силы R_A и угла α система будет в равновесии?

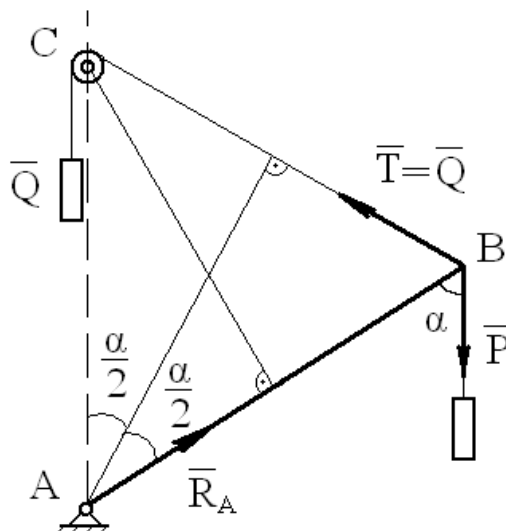


Рис. 2.17. Расчетная схема

Решение

$$\sum M_A = 0$$

$$-P \cdot a \sin \alpha + T \cdot a \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \rightarrow \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sum M_C = 0$$

$$R_A \cdot a \sin \alpha - P \cdot a \sin \alpha = 0 \rightarrow R_A$$

3. Параллельные силы

3.1. Сложение двух параллельных сил

Система сил, линии действия которых параллельны и лежат в одной плоскости, называется *плоской системой параллельных сил*.

Возможны два случая сложения двух параллельных сил:

- 1) силы направлены в одну сторону;
- 2) силы направлены противоположно друг другу.

1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Пусть необходимо сложить силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, приложенные в точках A и B .

Приложим в этих же точках две уравновешенные силы $\bar{T}_1 = -\bar{T}_2$ и сложим их с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ по правилу параллелограмма. Полученные силы $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ перенесем в точку O , в которой пересекаются линии действия этих сил, и разложим на первоначальные составляющие (рис. 3.1).

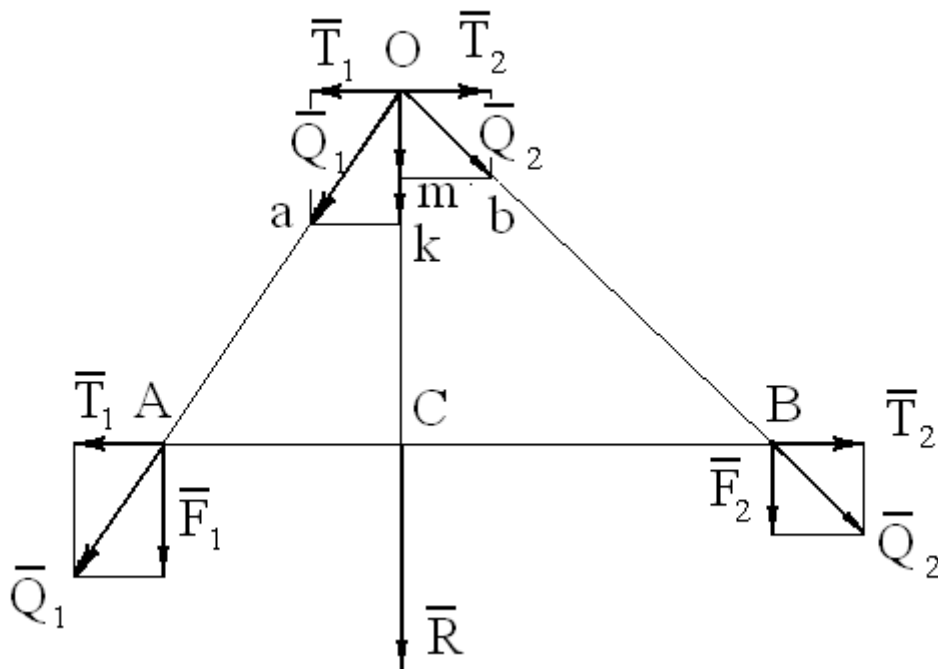


Рис. 3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Уравновешенную систему сил $\bar{T}_1 = -\bar{T}_2$ можно отбросить, тогда останутся две силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2$, равнодействующая которых

$$R = F_1 + F_2.$$

Для определения точки приложения равнодействующей рассмотрим подобие треугольников AOC , aOk , BOC и bOm :

$$\frac{AC}{OC} = \frac{T_1}{F_1}; \quad \frac{BC}{OC} = \frac{T_2}{F_2}$$

откуда получаем

$$AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$$

или

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

Таким образом, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам и направленную в ту же сторону, причем ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.

2. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

Пусть система сил состоит из двух противоположно направленных параллельных сил F_1 и F_2 , приложенных в точках A и B (рис. 3.2), и при этом $F_1 > F_2$.

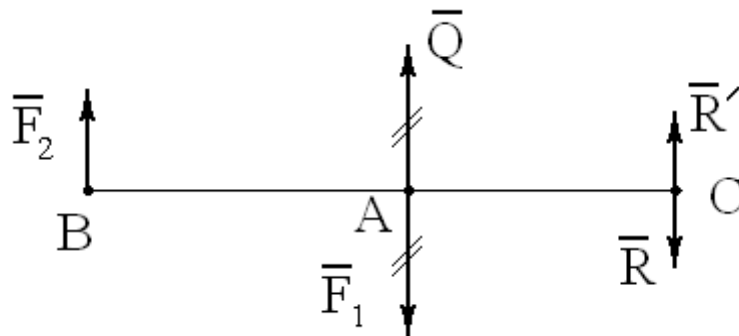


Рис. 3.2. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

Возьмем на продолжении линии AB точку C и приложим в ней уравновешенные силы R, R' , параллельные заданным, при этом

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

$$Q = F_2 + R'$$

Силы F_1 и Q , как уравновешенные, можно отбросить. Таким образом, исходная система сил оказывается эквивалентной одной силе - равнодействующей R .

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, параллельна им и направлена в сторону большей из них. Линия действия равнодействующей лежит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

3.2. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело.

Пара сил не имеет равнодействующей. Система сил, образующих пару, не является уравновешенной, что прямо следует из аксиомы 1 (разд. 1.2). Плоскость, проходящая через линии действия сил, называется плоскостью действия пары. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары d называется *плечом пары* (рис.3.3).

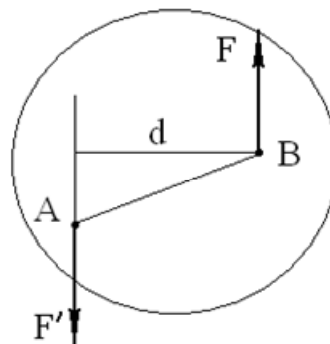


Рис. 3.3. Момент пары

Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному движению, которое зависит:

- от модуля сил пары и длины её плеча;
- положения плоскости действия пары;
- направления поворота в этой плоскости.

Пара сил характеризуется величиной момента. *Моментом пары* называется величина, равная произведению модуля одной из сил пары на её плечо.

$$M = \pm F \cdot d$$

Момент пары – величина векторная; вектор момента пары лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости действия пары и направляется по правилу правого винта (рис. 3.4).

Момент пары может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$

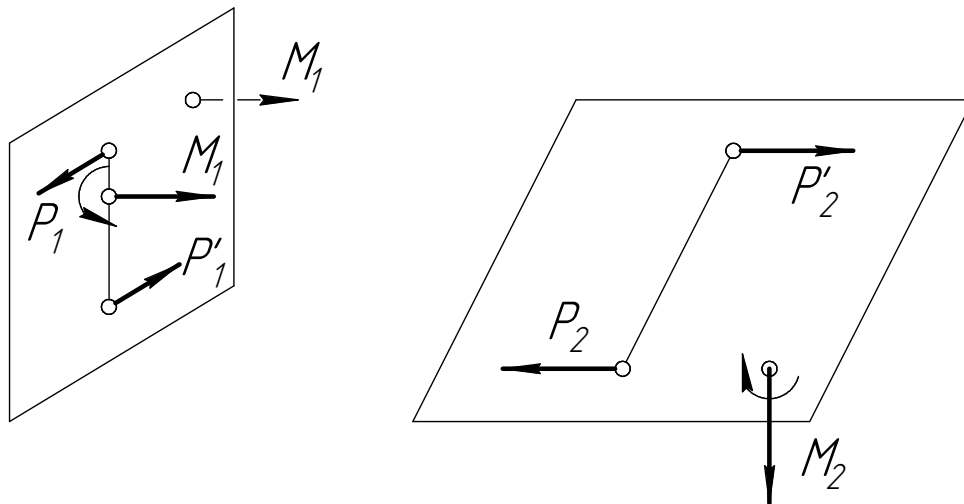


Рис. 3.4. Определение направления вектора момента пары

Момент пары — вектор свободный, он не связан с какой-либо точкой или линией действия, что ясно из приведенной ниже теоремы.

Теорема. Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра, лежащего в плоскости её действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.

Доказательство. Рассмотрим сумму моментов сил F и F' пары относительно произвольной точки пространства O (рис. 3.5):

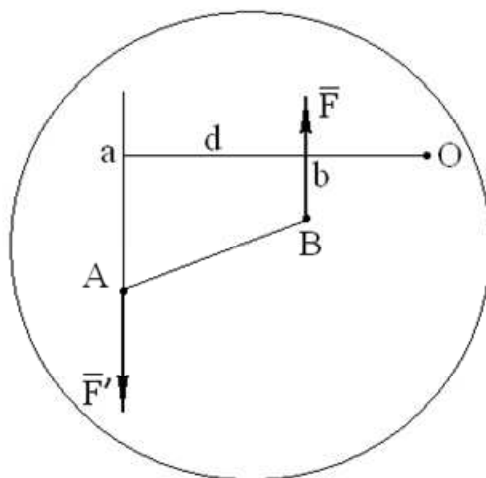


Рис. 3.5. Сумма моментов сил относительно центра

$$M_O = -F \cdot Ob + F' \cdot Oa = F \cdot (Oa - Ob) = F \cdot (ab + bO - Ob) = F \cdot d$$

Полученная величина действительно не зависит от выбора точки O .

3.3. Теорема об эквивалентности пар

Теорема 1. Всякую пару, не изменяя ее действия на абсолютно твердое тело, можно заменить другой парой, расположенной как угодно в той же плоскости и имеющей одинаковое с данной парой направление вращения и равный по абсолютной величине момент.

Доказательство. Пусть на тело действует пара сил $(\bar{F}, \bar{F}_1)$ с плечом d_1 . Проведем параллельные прямые AC и BD до пересечения с линиями действия сил $(\bar{F}, \bar{F}_1)$. Разложим силы $(\bar{F}, \bar{F}_1)$ на направления AB , AC и BD , тогда силы $(\bar{Q}, \bar{Q}_1)$ уравниваются. В результате пара сил $(\bar{F}, \bar{F}_1)$ заменяется парой $(\bar{P}, \bar{P}_1)$ с плечом d_2 (рис. 3.6).

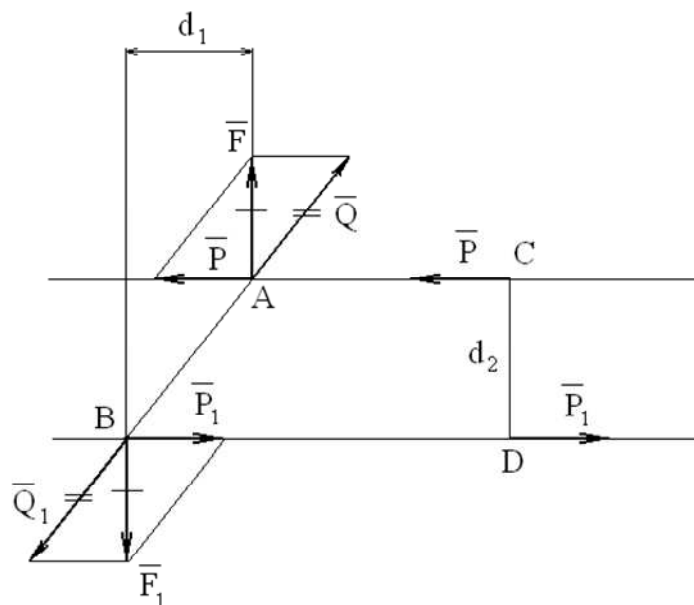


Рис. 3.6. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Так как сила $\vec{F}$ является равнодействующей сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, то по теореме Вариньона:

$$M_B(\vec{F}) = M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{Q});$$

$$M_B(\vec{F}) = F \cdot d_1; \quad M_B(\vec{P}) = P \cdot d_2; \quad M_B(\vec{Q}) = 0$$

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2$$

Выводы:

1. Данную пару, не изменяя её действия на тело, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары.
2. У данной пары можно произвольно менять модули сил и длину плеча, сохраняя неизменным её момент.

Таким образом, две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

Теорема 2. Не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия данной пары.

Доказательство. Пусть на тело действует пара сил $(\vec{F}, \vec{F}_1)$ (рис.

3.7). Проведем плоскость II параллельно плоскости I и обозначим 4 силы:

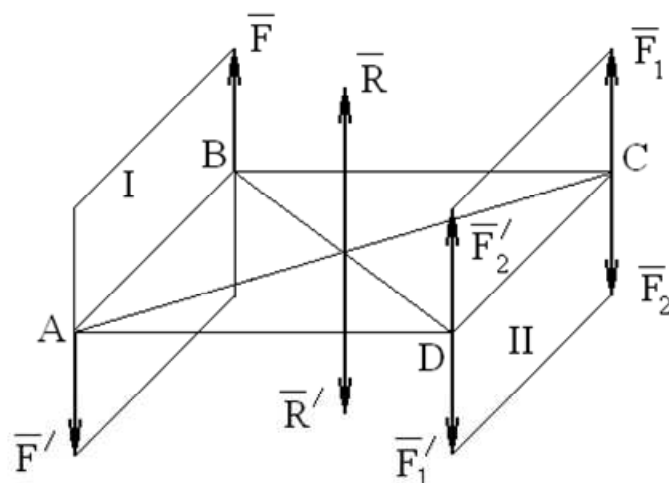


Рис. 3.7. Действие пары сил на твердое тело

$$F_1 = F_2 = F; \quad F'_1 = F'_2 = F'$$

тогда ABCD – параллелограмм.

$$F' + F_2 = R';$$

$$F + F'_2 = R$$

(R, R') – уравновешенная система сил. В результате пара (F, F') заменяется такой же парой (F_1, F'_1) , но лежащей в плоскости II.

Поскольку ни величина модуля силы, ни величина плеча значения не имеют (требуется лишь их произведение), то на схемах обычное обозначение пары (в заданной плоскости) дается просто круговой стрелкой.

Приведенные утверждения, позволяющие преобразовывать и переносить пару, сохраняя неизменным вектор ее момента, показывают, что момент пары есть вектор свободный. Он может быть перенесен параллельно в любую точку тела.

3.4. Сложение пар. Условие равновесия системы пар

Приведенная ниже теорема говорит о том, как складывать пары сил, т. е. как найти одну пару, эквивалентную системе пар.

1. Плоская система пар.

Теорема. Система пар, действующих на твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство. Пусть на тело действуют три пары с моментами M_1, M_2, M_3 (рис. 3.8).

На основании теоремы об эквивалентности пар мы можем заменить эти пары тремя парами $(P_1, P'_1), (P_2, P'_2), (P_3, P'_3)$, имеющими общее плечо d . Сложив отдельно силы в соответствующих точках, получим:

$$R = R' = P_1 + P_2 + P_3,$$

в результате чего получится одна пара (R, R') .

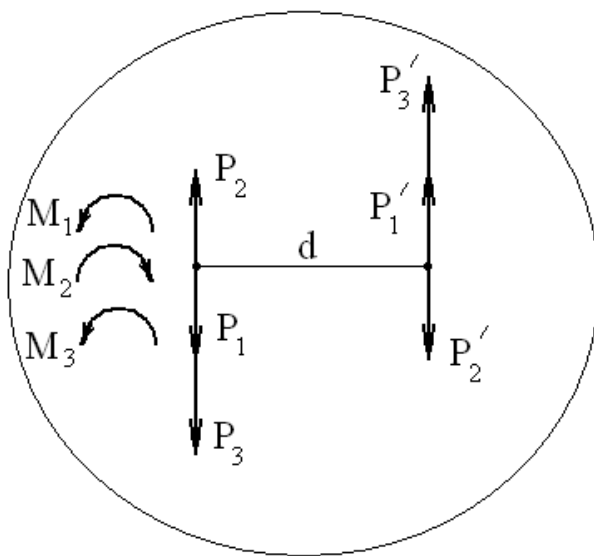


Рис. 3.8. Действие системы пар на тело, лежащих в одной плоскости

$$M = R \cdot d = P_1 \cdot d - P_2 \cdot d + P_3 \cdot d = M_1 - M_2 + M_3$$

Для случая трех пар теорема доказана. Система, состоящая из n пар моментами $M_1, M_2 \dots M_n$, заменится одной парой с моментом:

$$M = \sum \bar{M}_k$$

Из доказанной теоремы вытекает, что для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар была равна нулю.

Условие равновесия плоской системы пар $\sum M_k = 0$.

2. Пространственная система пар.

Теорема. Система пар, действующих на твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Пара, действие которой на тело эквивалентно действию всех данных пар, называется результирующей.

Доказательство. Рассмотрим сначала сложение двух пар (F_1, F_1') и (F_2, F_2') , лежащих в пересекающихся плоскостях I и II с моментами M_1 и M_2 (рис. 3.9). На линии пересечения плоскостей возьмем отрезок $AB = d$, который примем за плечо, и приведем обе данные пары к этому плечу.

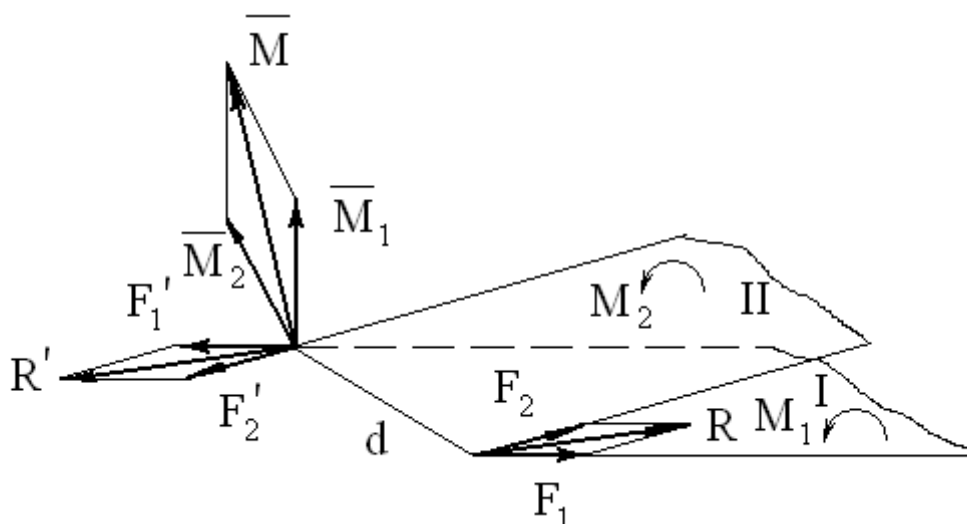


Рис. 3.9. Действие на тело нескольких пар, лежащих в произвольных плоскостях

Тогда: $M_1 = F_1 \cdot d$; $M_2 = F_2 \cdot d$. Изобразим векторы моментов этих пар.

Заменяем силы F_1 и F_2 равнодействующей $|R| = |R'|$, тогда

$$M = \bar{R} \times \bar{d} = \bar{F}_1 \times \bar{d} + \bar{F}_2 \times \bar{d} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$

Таким образом, момент M результирующей пары равен геометрической сумме моментов составляющих пар, т.е. изображается по модулю и по направлению диагональю параллелограмма, построенного на моментах составляющих пар.

Если на тело действуют n пар с моментами $M_1, M_2, \dots, M_n$, тогда $M = \sum \bar{M}_k$. Если слагаемые векторы не лежат в одной плоскости, то подсчет удобнее вести аналитически. Из теоремы о проекции суммы векторов на ось можно записать:

$$M_x = \sum \bar{M}_{kx}; \quad M_y = \sum \bar{M}_{ky}; \quad M_z = \sum \bar{M}_{kz}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Условия равновесия пар сил:

$$\sum M_{kx} = 0; \quad \sum M_{ky} = 0; \quad \sum M_{kz} = 0$$

Таким образом, моменты пар складываются аналогично тому, как складываются сходящиеся силы. Для двух пар сложение моментов будет по правилу параллелограмма или треугольника моментов. Для нескольких пар - по правилу, аналогичному правилу силового многоугольника, - правилу *многоугольника моментов*. Сумма моментов будет замыкающей стороной этого многоугольника (рис. 3.10).

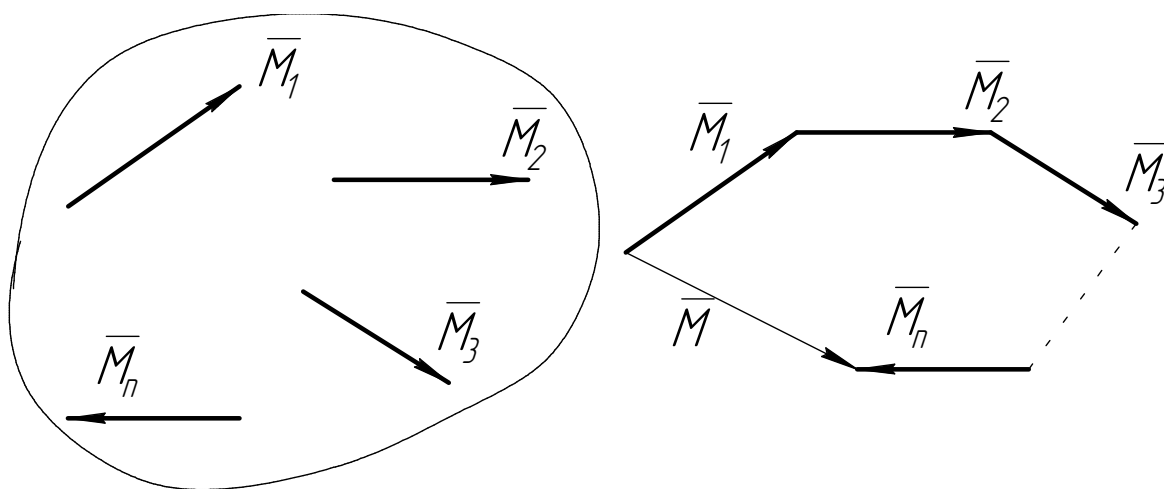


Рис. 3.10. Сложение моментов пар

4. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

4.1. Теорема о параллельном переносе силы

Теорема Пуансо². Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится.

Доказательство. Пусть на твердое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке А (рис. 4.1). Если в точке В приложить две уравновешенные силы $\vec{F}'$, $\vec{F}''$ такие, что $F = F' = -F''$, то действие силы $\vec{F}$ на твердое тело не изменится. Полученная система трех сил представляет собой силу $F' = F$ и пару (F, F'') с моментом $M = F \cdot AB = M_B(F)$.

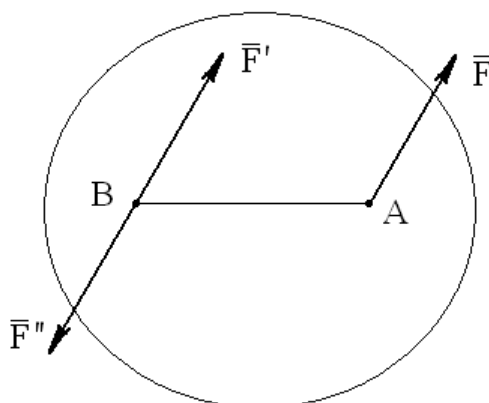


Рис. 4.1. Теорема Пуансо

4.2. Приведение плоской системы сил к данному центру

Систему сил, лежащую в одной плоскости, можно привести к одной точке, которая называется центром приведения.

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $F_1, F_2 \dots F_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O ,

² Луи Пуансо (1777—1859) — французский математик и механик, автор геометрической статики (1803). Ввел в механику понятия момента силы, пары сил, разработал теорию пар и метод приведения системы сил. Многое сделал в кинематике и динамике.

которую назовем центром приведения, и перенесем все силы параллельно самим себе в центр O (рис. 4.2)

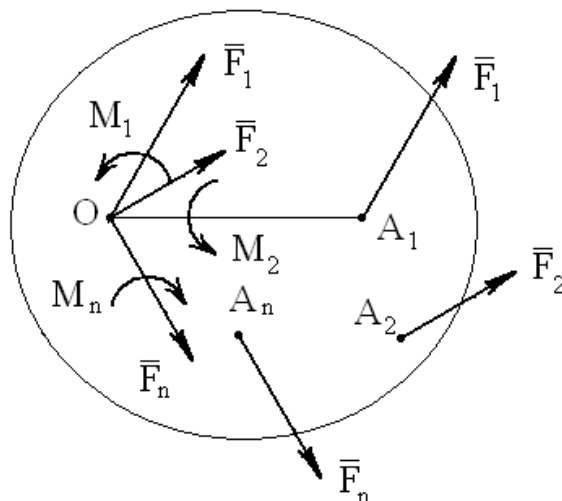


Рис. 4.2. Приведение системы сил к точке

В результате на тело будут действовать силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и система пар с моментами:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_O(\bar{F}_1), & M_2 &= M_O(\bar{F}_2), \\ M_n &= M_O(\bar{F}_n) \end{aligned}$$

Систему сил можно заменить одной силой, приложенной в той же точке, а систему пар – одной парой, лежащей в той же плоскости:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \quad M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k)$$

Величина, равная геометрической сумме всех сил системы называется главным вектором системы. Величина, равная геометрической сумме всех моментов сил системы относительно центра называется главным моментом системы относительно заданного центра. Заметим, что сила $\bar{R}$ не является равнодействующей, так как она заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Вычисление главного вектора и главного момента, а также определение их направлений в плоскости носит название приведения системы сил к простейшему виду.

Из доказанной теоремы следует, что две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы $\bar{R}$ и одинаковые главные моменты $\bar{M}_O$ относительно некоторой точки, эквивалентны друг другу.

Таким образом, произвольная система сил полностью определяется двумя векторными величинами: главным вектором и главным моментом относительно некоторой точки:

1) если для данной системы сил и главный вектор и главный момент равны нулю $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$, то она находится в равновесии.

2) если в данной системе сил главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$, то система сил заменяется одной только силой, т. е. имеет равнодействующую.

3) если для данной системы сил $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, то она приводится к одной паре с моментом $\bar{M}_O = \sum M_O(\bar{F}_k)$. В этом случае величина $\bar{M}_O$ не будет зависеть от выбора центра O .

4.3. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Основная форма условий равновесия

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_O = 0$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad R_x = \sum \bar{F}_{kx} = 0 \quad R_y = \sum \bar{F}_{ky} = 0$$

$$\bar{M}_O = \sum M_O(\bar{F}_k)$$

Следовательно, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_O(\bar{F}_k) = 0$$

2. Вторая форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-либо двух центров A и B и сумма их проекций на ось, не перпендикулярную к прямой AB , были равны нулю:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum F_{kx} = 0$$

Если $\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \sum M_B(\bar{F}_k) = 0$, тогда система не может находиться в равновесии, а иметь равнодействующую $\bar{R}$, проходящую через точки A и B . Но по третьему условию $\sum F_{kx} = 0$, так как ось проведена не перпендикулярно линии AB , то последнее условие может быть выполнено когда $R = 0$.

3. Третья форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно любых трех центров, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum M_C(\bar{F}_k) = 0$$

Для плоской системы сил во всех случаях получаются три условия равновесия. Основными считаются первые условия, так как в этом случае никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не накладывается.

5. Примеры решения задач

5.1. Определение реакций опор (плоская система сил)

Определить реакции связей ломаного стержня ACB , изображенного на рисунке 5.1, а. В точке D закреплён канат, переброшенный через блок K и несущий на конце тело весом P .

Дано: $P = 4$ кН, $M = 6$ кН·м, $q = 3$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $AC = BD = 2$ м, $CD = 1$ м.

Требуется определить реакции в опорах A , B .

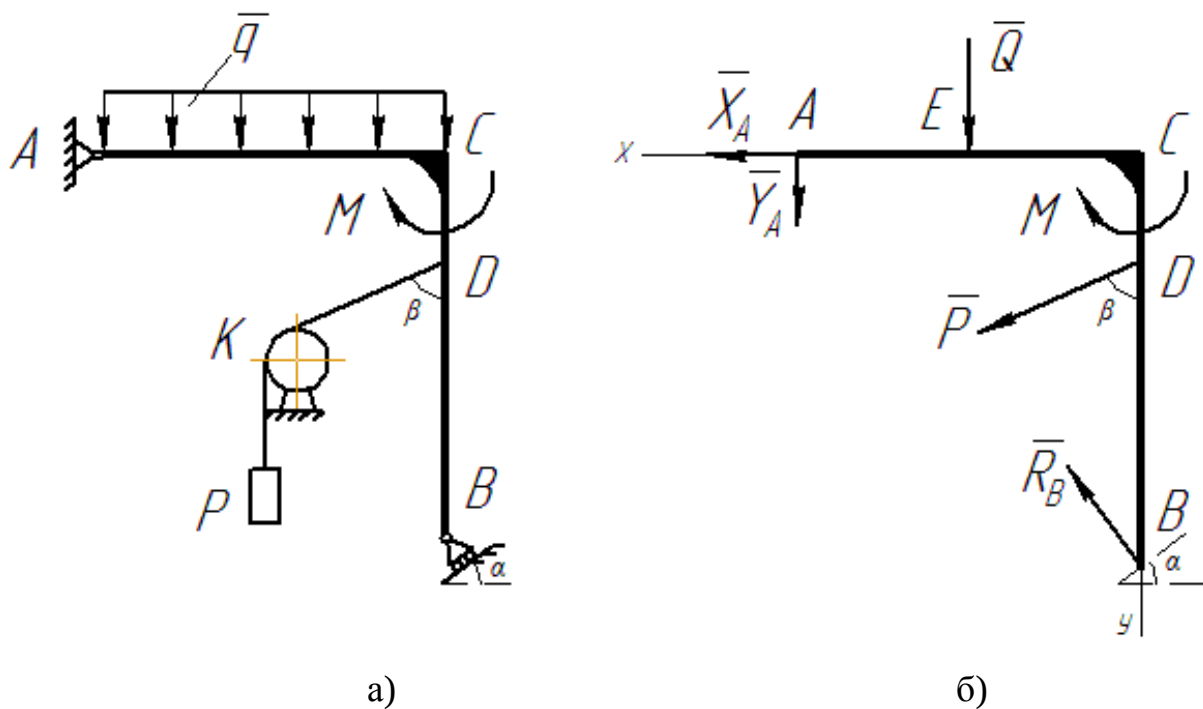


Рис. 5.1. Расчетная схема

Решение.

Изображаем ломаный стержень без связей (рис 5.1, б). Стержень нагружен сосредоточенной силой $\bar{P}$, парой сил с моментом M , равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q , которую заменяем сосредоточенной силой $\bar{Q}$ (равнодействующей), приложенной в середине AC .

$$Q = q \cdot AC = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН.}$$

В точке A стержень закреплён неподвижным цилиндрическим шарниром. Реакцию шарнира представляем составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, направленными параллельно выбранным координатным осям. Направление составляющих произвольное.

В точке B стержень опирается на опору на катках. Реакция $\bar{R}_B$ перпендикулярна поверхности, по которой может перемещаться каток, и направлена от поверхности.

На тело действует плоская произвольная система сил, для которой достаточно трёх условий равновесия.

Искомых величин тоже три: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$, т.е. задача статически определима.

Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_A(\bar{F}_k) = 0$$

При вычислении моментов силы R_B и P воспользуемся теоремой Вариньона:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Q \cdot AE - M - P \sin \beta \cdot CD - P \cos \beta \cdot AC - R_B \cdot \sin \alpha BC + R_B \cos \alpha \cdot AC = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{Q \cdot 0,5 \cdot AC + P \sin \beta \cdot CD + P \cos \beta \cdot AC + M}{AC \cdot \cos \alpha - BC \sin \alpha} = \\ &= \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 2 + 4 \cdot 0,86 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2 + 6}{2 \cdot 0,86 - 3 \cdot 0,5} = 88,36 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$X_A + P \sin \beta + R_B \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$X_A = -P \sin \beta - R_B \sin \alpha = -4 \cdot 0,86 - 88,36 \cdot 0,5 = -47,60 \text{ кН}.$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$Q + Y_A + P \cos \beta - R_B \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$Y_A = R_B \cos \alpha - Q - P \cos \beta = 88,36 \cdot 0,86 - 6 - 4 \cdot 0,5 = 67,98 \text{ кН.}$$

Составляем проверочное уравнение моментов относительно точки D. В это уравнение войдут все определяемые величины:

$$\begin{aligned} \sum M_D(\bar{F}_k) &= X_A \cdot DC + Q \cdot 0,5 AC - M - R_B \cdot \sin \alpha BD + Y_A \cdot AC = \\ &= -47,62 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 0,5 - 6 - 88,36 \cdot 0,5 \cdot 2 + 67,98 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Задача решена верно.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{47,6^2 + 67,98^2} = 83 \text{ кН.}$$

Ответ: $R_A = 83 \text{ кН}$, $R_B = 88,36 \text{ кН}$. Знак «минус» у составляющей $\bar{X}_A$ означает, что направление этой составляющей реакции шарнира А противоположно показанному на рисунке 5.1б.

5.2. Определение реакций опор составной конструкции

Угольник АЕС, конец которого имеет в точке А неподвижный шарнир, соединен шарнирно с балкой в точке С, а в точке D невесомый стержень DD' (рис. 5.2). У балки ВС в точке В опора - гладкая поверхность. На раму действуют распределенная нагрузка интенсивности $q = 10 \text{ кН/м}$, пара сил с моментом $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$, сосредоточенные силы $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$. При расчете принять $a = 0,4 \text{ м}$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Требуется определить реакции в опорах А, В, С, D.

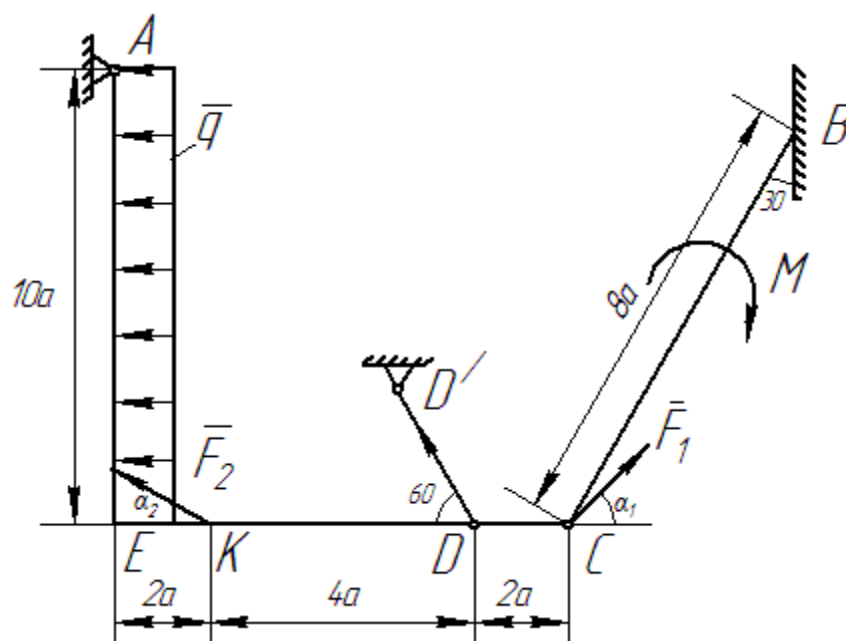


Рис. 5.2. Расчетная схема

Решение

Для определения опорных реакций в точках А и В заменим неподвижные шарниры силами $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D$. Получили один раз статически неопределимую систему (число неизвестных на единицу больше числа уравнений равновесия). Для раскрытия статической неопределимости расчленим систему в точке С и рассмотрим равновесие каждой части отдельно (рис. 5.3, 5.4).

Рассмотрим равновесие балки СВ (рис.5.3).

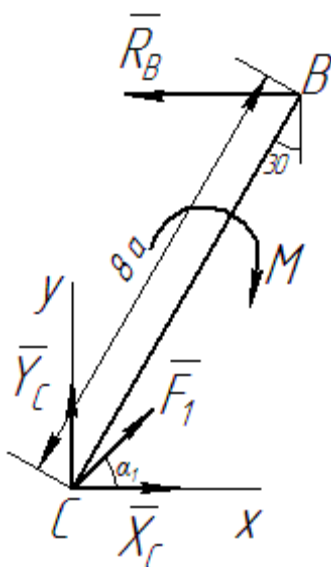


Рис. 5.3. Расчетная схема

Получили произвольную плоскую систему сил, для которой составим три уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_C(\bar{F}_k) = 0$$

При вычислении момента силы $\bar{R}_B$ раскладываем ее на составляющие $\bar{R}_{Bx}$, $\bar{R}_{By}$, и применяем теорему Вариньона:

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-M + R_B \cdot 8a \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{M}{8a \cdot \cos 30^\circ} = \frac{40}{8 \cdot 0,4 \cdot 0,866} = 14,43 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$X_C + F_1 \cos \alpha_1 - R_B = 0,$$

откуда

$$X_C = R_B - F_1 \cos \alpha_1 = 14,43 - 10 \cdot 0,707 = 7,36 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$Y_C + F_1 \sin \alpha_1 = 0,$$

откуда

$$Y_C = -F_1 \sin \alpha_1 = -10 \cdot 0,707 = -7,07 \text{ кН.}$$

Рассмотрим равновесие угольника АЕС (рис.5.4).

$$Q = q \cdot 8a = 10 \cdot 8 \cdot 0,4 = 32 \text{ кН.}$$

Для этой плоской системы сил составим три уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_A(\bar{F}_k) = 0.$$

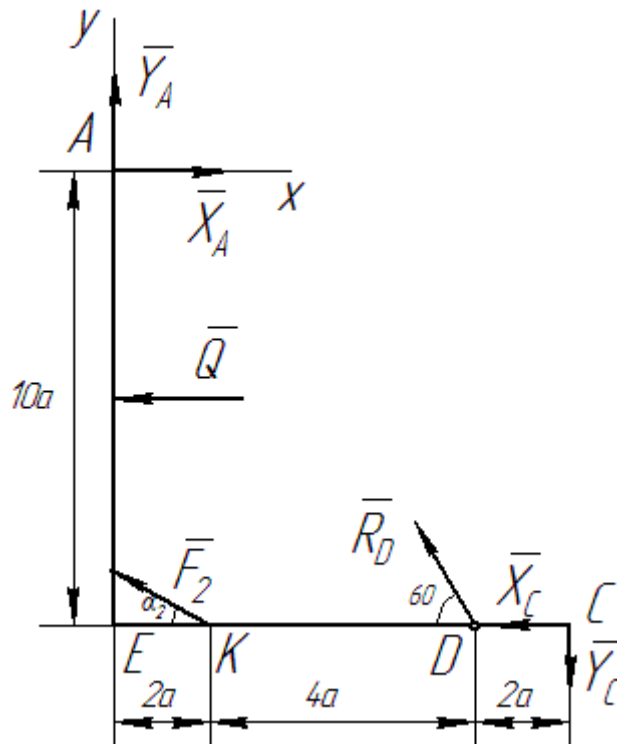


Рис. 5.4. Расчетная схема угольника

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-Q \cdot \frac{10a}{2} - F_2 \cos \alpha_2 \cdot 10a + F_2 \sin \alpha_2 \cdot 2a - R_D \cos 60^\circ \cdot 10a + \\ + R_D \sin 60^\circ \cdot 6a - Y_C \cdot 8a - X_C \cdot 10a = 0,$$

$$R_D = 16849 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$X_A - Q - F_2 \cos \alpha_2 - R_D \cos 60^\circ - X_C = 0,$$

$$X_A = 899,13 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$Y_A + F_2 \sin \alpha_2 + R_D \sin 60^\circ - Y_C = 0,$$

$$Y_A = -1476,19 \text{ кН.}$$

Ответ: $X_A = 899,13$ кН, $Y_A = -1476,19$ кН, $R_D = 16849$ кН, $R_B = 14,43$ кН.

Знаки «минус» указывают, что силы направлены противоположно направлениям, показанным на рисунках.

6. Произвольная пространственная система сил

6.1. Момент силы относительно оси

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 6.1). Пусть на тело действует сила $\vec{F}$.

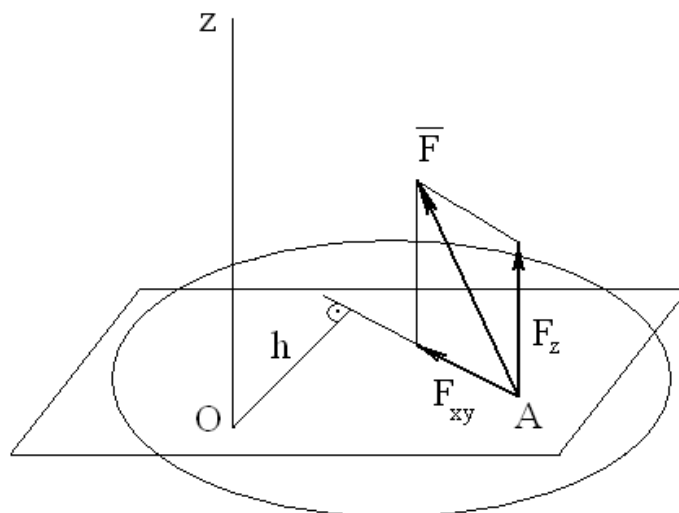


Рис. 6.1. Момент силы относительно оси

Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную оси z и обозначим буквой O точку пересечения оси с плоскостью. Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие. Сила F_z не может повернуть тело вокруг оси Oz , а сила $\vec{F}_{xy}$ образует момент: $M_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_{xy})$, но момент силы F_{xy} относительно оси Oz равен моменту той же силы относительно точки O :

$$M_z(\vec{F}_{xy}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

В результате приходим к следующему определению: *моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью*. Знак момента определяем аналогично плоской системе сил, однако смотреть на схему необходимо навстречу оси.

Частные случаи.

1. Если сила параллельна оси, то её момент относительно оси равен нулю.
2. Если линия действия силы пересекает ось, то её момент относительно оси равен нулю.
3. Если сила перпендикулярна оси, то её момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

6.2. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси

Теорема. Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Доказательство. Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\vec{F}$ (рис. 6.2). Проведем какую-нибудь ось z и возьмем на ней произвольную точку O .

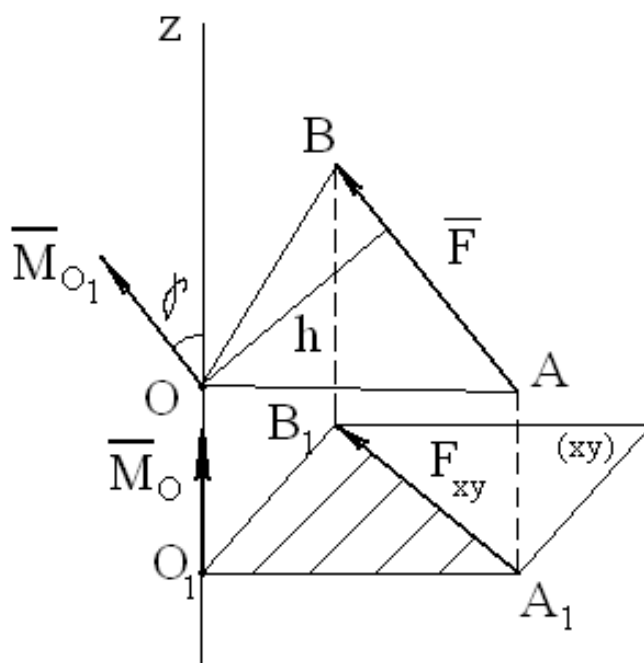


Рис. 6.2. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O равен:

$$M_O = F \cdot h = 2 \text{пл.} \Delta OAB$$

Через любую точку проведем плоскость π , перпендикулярную оси Oz . Спроецируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость и получим:

$$M_z(\vec{F}) = M_{O_1}(\vec{F}_{xy}) = 2 \text{пл.} \Delta O_1 A_1 B_1$$

Но треугольник $O_1 A_1 B_1$ – проекция треугольника OAB в плоскость π . Угол между ними равен углу между векторами моментов. Тогда:

$$\text{пл.} \Delta OAB = \text{пл.} \Delta O_1 A_1 B_1 \cdot \cos \gamma$$

Умножим обе части уравнения на 2 и получим:

$$2 \text{пл.} \Delta OAB = 2 \text{пл.} \Delta O_1 A_1 B_1 \cdot \cos \gamma$$

$$M_z = M_O \cos \gamma$$

Теорема доказана.

6.3. Приведение пространственной системы сил к данному центру

Если на тело действуют несколько сил, расположенных в пространстве, то аналогично плоской системе сил, их можно перенести параллельно самим себе в заданную точку O , прибавив при этом соответствующие пары сил. В результате получим систему сходящихся сил, которую можно заменить одной силой, и систему пар, которые можно привести к одной паре.

Любая система сил, действующих на твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения, и одной парой с моментом M_O , равным главному моменту системы относительно центра O .

Векторы R и M_O обычно определяют аналитически по их проекциям на оси координат:

$$R_x = \sum \vec{F}_{kx}; \quad R_y = \sum \vec{F}_{ky}; \quad R_z = \sum \vec{F}_{kz};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$M_x = \sum M_x(\bar{F}_k); \quad M_y = \sum M_y(\bar{F}_k); \quad M_z = \sum M_z(\bar{F}_k);$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Определение величины главного вектора и главного момента носит название приведения системы сил к простейшему виду.

Частные случаи приведения:

1) если $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$, то система сил находится в равновесии (эквивалентна нулю);

2) если $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$, то система сил приводится к паре, в этом случае величина главного момента не зависит от выбора центра O ;

3) если $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$, то система приводится к равнодействующей, проходящей через центр O ;

4) если $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$, но $\bar{R} \perp \bar{M}_O$, тогда сила оказывается параллельной плоскости действия пары. Сделаем следующее: 1) перенесем пару на параллельную плоскость, содержащую линию действия силы; 2) расположим пару так, чтобы одна из ее сил (R'') была приложена в точке O (рис. 6.3) и направлена против силы модулю силы R : $R' = R'' = R$, при этом плечо пары будет равно $OO' = M_O/R$. Тогда уравновешенную систему сил R и R'' можно исключить. Исходная система сил оказывается эквивалентной одной силе R , т. е. имеет равнодействующую (равную, конечно, главному вектору);

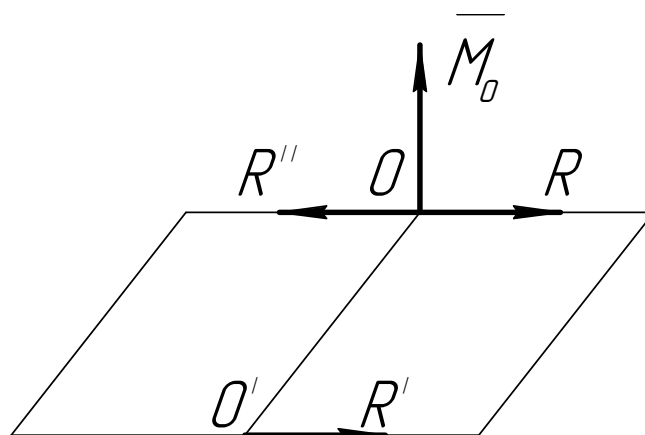


Рис. 6.3. Система сил приводится к равнодействующей не проходящей через центр O

5) если $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$, но $\bar{R} \parallel \bar{M}_O$, такая система сил не может быть более упрощена. Она называется *динамическим или силовым винтом*, а линия действия силы R называется *центральной осью системы сил*. Правый и левый динамические винты показаны на рис. 6.4. Динамические винты образуют, например, те силы, которые действуют при закручивании или выкручивании шурупов.

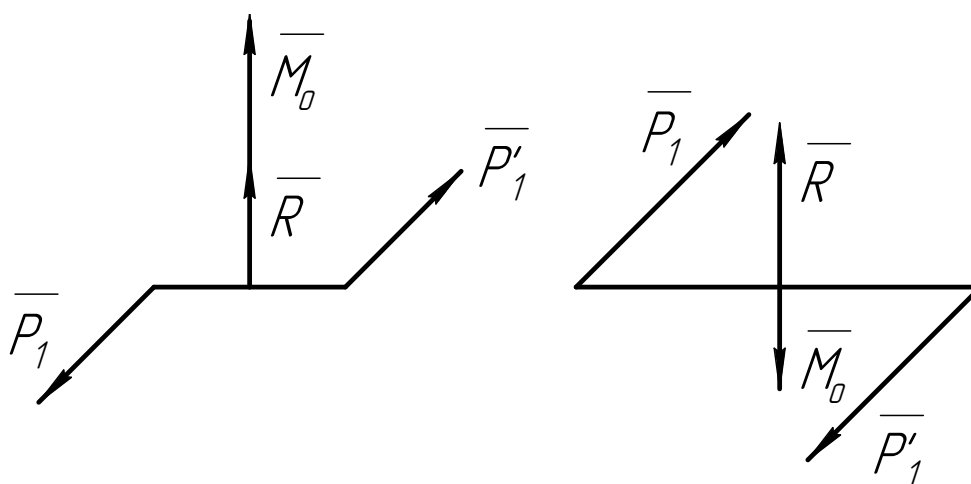


Рис. 6.4. Правый и левый динамические винты

6.4. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольная пространственная система сил заменяется одной силой и одной парой, но сила и пара не могут уравновесить друг друга. Следовательно, для уравновешенности системы сил требуется, чтобы не было ни силы, ни пары. Отсюда и получаются приведенные ниже условия уравновешенности произвольной пространственной системы сил.

1. В векторной форме:

главный вектор системы сил и главный момент системы сил относительно некоторой точки должны быть равны нулю:

$$\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$$

2. В геометрической форме:

силовой многоугольник и многоугольник моментов должны быть замкнуты.

3. В аналитической форме:

для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил были равны нулю. Но они могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат.

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси координат и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

$$\begin{array}{ll} \sum F_{kx} = 0 & \sum M_x(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 & \sum M_y(\bar{F}_k) = 0 \\ \sum F_{kz} = 0 & \sum M_z(\bar{F}_k) = 0 \end{array}$$

7. Пример решения задач

7.1. Определение реакций опор (пространственная система сил)

Жёсткая конструкция, состоящая из двух одинаковых квадратных плит (ABB_1A_1) и (BB_1DD_1), закреплена в точке B сферическим шарниром, в точке A цилиндрическим шарниром и удерживается в равновесии стержнем CE . К конструкции приложены активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, силы тяжести плит $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ (рис.7.1, а).

Дано: $F_1 = F_2 = 2$ кН, $P_1 = P_2 = 4$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $F_1 \perp B_y$, $CE \perp B_y$, $F_2 \parallel B_y$.

Определить реакции связей.

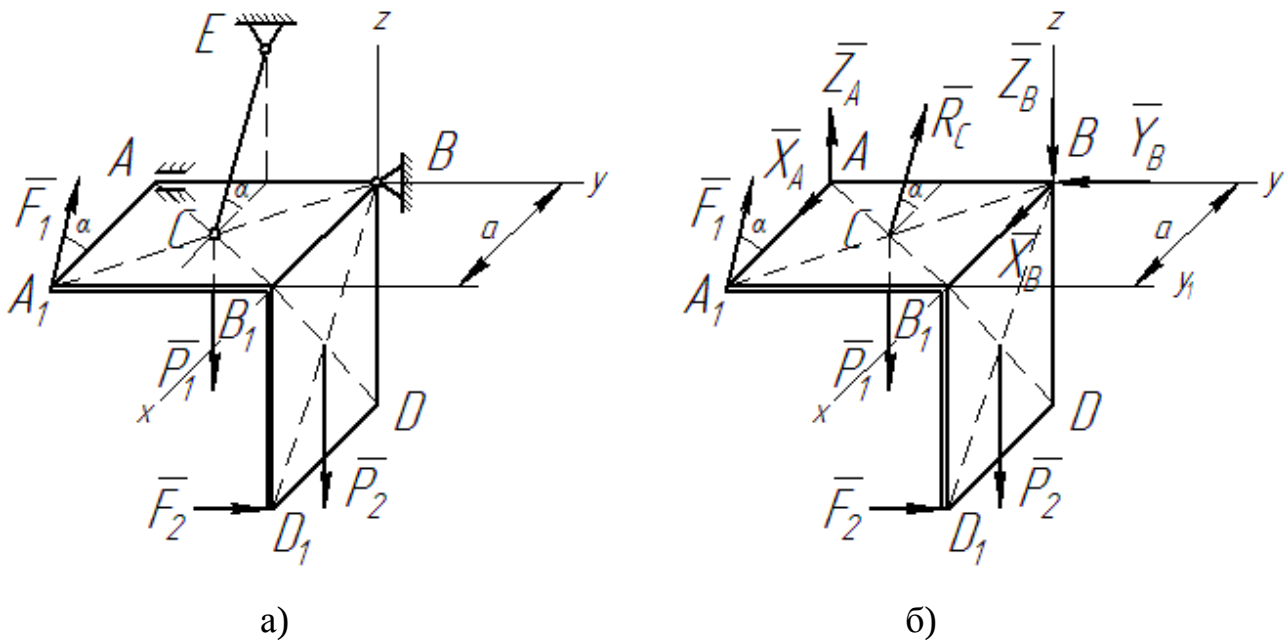


Рис. 7.1. Расчётная схема

Решение.

Рассматривается равновесие жёсткой конструкции $ABDD_1B_1A_1$. Конструкция нагружена силами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$. На конструкцию наложены связи: в точке A цилиндрический шарнир - реакции X_A , Y_A , в точке B сферический шарнир - реакции X_B , Y_B , Z_B , в точке C стержневая связь - реакция $\vec{R}_C$ направлена по стержню.

В задаче шесть неизвестных величин. На конструкцию действует произвольная пространственная система сил (рис. 7.1, б), для которой возможно составить шесть уравнений равновесия, т.е. задача статически определимая. Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0 & \sum M_x(\bar{F}_k) &= 0 \\ \sum F_{ky} &= 0 & \sum M_y(\bar{F}_k) &= 0 \\ \sum F_{kz} &= 0 & \sum M_z(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$X_A + X_B - F_1 \cos \alpha - R_C \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-Y_B + F_2 = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0;$$

$$Z_A - Z_B + R_C \sin \alpha - P_1 - P_2 + F_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_x = 0;$$

$$F_2 \cdot a + P_1 \cdot 0,5a - R_C \sin \alpha \cdot 0,5a - Z_A \cdot a = 0,$$

$$\sum M_y = 0;$$

$$-R_C \sin \alpha \cdot 0,5a - F_1 \sin \alpha \cdot a + P_1 \cdot 0,5a + P_2 \cdot 0,5a = 0,$$

$$\sum M_z = 0;$$

$$X_A \cdot a - F_1 \cos \alpha \cdot a - R_C \cos \alpha \cdot 0,5a + F_2 \cdot a = 0.$$

Из второго уравнения определяется Y_B :

$$Y_B = F_2 = 2 \text{ кН.}$$

Из пятого уравнения определяется R_C :

$$R_C = \frac{P_1 \cdot 0,5a + P_2 \cdot 0,5a - F_1 \sin \alpha}{0,5 \sin \alpha} = \frac{0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 4 - 2 \cdot 0,866}{0,5 \cdot 0,866} = 5,24 \text{ кН.}$$

Из четвертого уравнения определяется Z_A :

$$Z_A = F_2 + P_1 \cdot 0,5 - R_C \sin \alpha \cdot 0,5 - F_1 \sin \alpha = 2 + 4 \cdot 0,5 - 5,24 \cdot 0,5 \cdot 0,866 = 0.$$

Из шестого уравнения определяется X_A :

$$X_A = F_1 \cos \alpha + R_C \cos \alpha \cdot 0,5 - F_2 = 2 \cdot 0,5 + 5,238 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 2 = 0,31 \text{ кН.}$$

Из третьего уравнения определяется Z_B :

$$\begin{aligned} Z_B &= Z_A + R_C \sin \alpha - P_1 - P_2 + F_1 \sin \alpha = \\ &= 0,536 + 5,24 \cdot 0,866 - 4 - 4 + 2 \cdot 0,866 = -1,73 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из первого уравнения определяется X_B :

$$X_B = F_1 \cos \alpha + R_C \cos \alpha - X_A = 2 \cdot 0,5 + 5,24 \cdot 0,5 - 0,31 = 3,31 \text{ кН.}$$

Можно составить несколько проверочных уравнений, т.е. записать суммы моментов всех сил относительно других осей.

Например, запишем сумму моментов относительно оси y_1 :

$$\begin{aligned} \sum M_{y_1} &= -P_1 \cdot 0,5a - P_2 \cdot 0,5a - Z_B \cdot a + R_C \sin \alpha \cdot 0,5a + Z_A \cdot a = \\ &= -4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5 - (-1,73) + 5,24 \cdot 0,5 \cdot 0,866 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $X_A = 0,31 \text{ кН}$, $X_B = 3,31 \text{ кН}$, $Z_A = 0$, $Y_B = 2 \text{ кН}$, $Z_B = -1,73 \text{ кН}$, $R_C = 5,24 \text{ кН}$.

Знак «минус» составляющей $\bar{Z}_B$ означает, что её реальное направление будет противоположным показанному на рисунке 7.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диевский В. А. Теоретическая механика: учебное пособие/ В. А. Диевский.- 4-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 336 с. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212258>.
2. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики: учебное пособие для вузов / Н. Н. Бухгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, [б. г.]. - Часть 1: Основной курс теоретической механики — 2021. — 448 с. - Текст электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/169804>.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. - 14-е изд., стер.- Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 672 с. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/322469>