

5.5. ЛР-1. Задания и методические указания по выполнению лабораторных работ

Модуль 1 «Математическое программирование и принятие решений»

Задачи линейного программирования

Каждая задача линейного программирования (ЛП), называемая *прямой* или *исходной*, тесно связана с другой задачей, ее называют *двойственной*.

Математические модели этих задач имеют следующий вид.

<i>прямая задача:</i>	<i>двойственная задача:</i>
$Z \max = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i$ $\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_i \leq b_j$ $x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$	$Z'_{\min} = \sum_{j=1}^m b_j y_j$ $\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot y_j \geq c_i,$ $y_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, m)$

Экономическая формулировка задач.

Прямая задача: сколько и какой продукции $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции c_i , объемом имеющихся ресурсов $b_j (j = 1, 2, \dots, m)$ и нормах расхода ресурсов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном виде.

Двойственная задача: какова должна быть оценка единицы каждого ресурса $y_j (j = 1, 2, \dots, m)$, чтобы при заданных b_j, c_i и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы. В этой задаче y_1, y_2, y_3 – предельные оценки стоимости единицы каждого ресурса, целевая функция – оценка стоимости всех ресурсов, а каждое ограничение есть условие, что оценка ресурсов, идущих на производство продукции x_1, x_2, x_3 , не менее чем цена единицы продукции.

Правила построения двойственной задачи по имеемой прямой задаче:

- 1) Если прямая задача решается на максимум, то двойственная задача решается на минимум; если прямая задача решается на минимум, то двойственная на максимум;
- 2) В задаче на максимум ограничения неравенства имеют вид $\leq$, а в задаче на минимум $\geq$;
- 3) Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, в другой модели ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;
- 4) Матрица системы ограничений двойственной задачей получается из матрицы из матрицы систем ограничений прямой задачи транспонированием (коэффициенты в столбцах ограничений становятся коэффициентами в строках ограничений);
- 5) Свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи и наоборот;
- 6) Если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, в противном случае – как ограничение равенство;
- 7) Если какое либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

Задание 1. Решите прямую задачу ЛП: расчет потребных ресурсов для оптимального плана производства. Используя функцию «Поиск решения» найдите оптимальное решение следующей задачи планирования производства продукции.

Производственная фирма выпускает три типа продукции - А, В и С.

Для производства продукции используются следующие типы сырья: a, b, c, d . Суточные запасы сырья составляют 21, 45, 27 и 29 тонн, соответственно. Расходы сырья на 1 тонну продуктов приведены в таблице 1.

Сырье	Расход сырья на тонну продукции, т			Максимально возможный запас, т
	А	В	С	
a	1	1	1	21
b	2	3	1	45
c	2	1	1	27
d	1	2	1	29

Оптовые цены одной тонны продукции А равны 3000 руб., для продукции В – 2000 руб., продукции С – 1500 руб. Какое количество продукции каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Фирме необходимо спланировать объем производства продукции так, чтобы максимизировать доход от реализации продукции. Введем переменные: x_A - суточный объем производства продукции А, x_B - суточный объем производства продукции В и x_C - суточный объем производства продукции С.

Суммарный суточный доход от производства продукции равна $z = 3000 x_A + 2000 x_B + 1500 x_C$. Целью фирмы является определение среди всех допустимых значений x_A , x_B и x_C таких, которые максимизируют суточный доход, т.е. целевую функцию Z .

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на x_A , x_B и x_C .

Объем производства продукции не может быть отрицательным, следовательно: $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$ и $x_C \geq 0$.

Расход сырья для производства продукции не может превосходить максимально возможный запас сырья, следовательно:

для сырья a : $x_A + x_B + x_C \leq 21$;

для сырья b : $2 x_A + 3 x_B + x_C \leq 45$;

для сырья c : $2 x_A + x_B + x_C \leq 27$;

для сырья d : $x_A + 2 x_B + x_C \leq 29$.

Кроме того, ограничения на величину спроса на продукцию таковы:

Математическая модель задачи имеет следующий вид.

Целевая функция $z = 3000 x_A + 2000 x_B + 1500 x_C \rightarrow \max$.

При ограничениях: $x_A \geq 0$; $x_B \geq 0$; $x_C \geq 0$;

$x_A + x_B + x_C \leq 21$;

$2 x_A + 3 x_B + x_C \leq 45$;

$2 x_A + x_B + x_C \leq 27$;

$x_A + 2 x_B + x_C \leq 29$;

$x_A \geq 0, x_B \geq 0$ и $x_C \geq 0$.

Задание 2. Сформулируйте и решите двойственную задачу ЛП из предыдущего задания, используя функцию «Поиск решения».

Задание 3. Решение целочисленной задачи ЛП: минимизация дисбаланса на линиях сборки. Промышленная фирма производит изделие, состоящие из двух узлов вида 1,

одного узла вида 2 и четырех узлов вида 3. Эти узлы изготавливаются на двух заводах. Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску узлов неодинакова. Производительность заводов по выпуску каждого из узлов и максимальный суммарный недельный ресурс времени заводов для производства представлены в таблице:

Номер завода	Максимальный фонд времени за рабочую неделю (в часах)	Производительность		
		1-й узел	2-й узел	3-й узел
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Найти максимальный выпуск изделий при соблюдении жестких ограничений на комплектность сборки.

Решение: В качестве неизвестных (управляемых) переменных x_{ij} задачи логично выбрать недельный фонд времени (в часах), выделяемый заводом номер i для изготовления сборочного узла номер j . Тогда объемы производства всякого из трех комплектующих узлов будут равны:

$$\text{узел 1: } 8x_{11} + 6x_{21}$$

$$\text{узел 2: } 5x_{12} + 12x_{22}$$

$$\text{узел 3: } 10x_{13} + 4x_{23}$$

Так как в окончательной сборке изделий каждый из сборочных узлов представлен по условию задачи в пропорции 2:1:4, то число изделий должно быть равно минимальному из количеств трех узлов, каждое из которых предварительно надо разделить на его коэффициент применяемости в сборке.

Математически это можно выразить следующим образом:

$$\text{Min}[(8x_{11} + 6x_{21})/2; (5x_{12} + 12x_{22}); (10x_{13} + 4x_{23})/4]$$

Ограничения на недельный фонд рабочего времени, которым располагают заводы, можно записать следующим образом:

$$\text{завод 1} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$

$$\text{завод 2} \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80$$

На основании формул математическую модель можно записать так:

$$\text{Max}\{\text{Min}[(8x_{11} + 6x_{21})/2; (5x_{12} + 12x_{22}); (10x_{13} + 4x_{23})/4]\}$$

Для преобразования модели в линейную вводим следующие неравенства:

$$8x_{11} + 6x_{21} \geq 2y$$

$$5x_{12} + 12x_{22} \geq y$$

$$10x_{13} + 4x_{23} \geq 4y$$

Окончательную математическую модель можно записать в виде:

найти Max Y при ограничениях

$$8x_{11} + 6x_{21} - 2y \geq 0$$

$$5x_{12} + 12x_{22} - y \geq 0$$

$$10x_{13} + 4x_{23} - 4y \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y \geq 0$$

а также целочисленных неизвестных x_{ij} и y .

Ответ для контроля правильности решения: минимальное количество узлов – 223.

Задание 4. Решение общей транспортной задачи ЛП

К наиболее распространенному типу экономических задач относятся транспортные задачи, которые возникают при составлении оптимального плана перевозок грузов от пунктов производства в пункты потребления.

Модели транспортных задач бывают двух видов: закрытые и открытые. В транспортных задачах *закрытых моделей* полностью исчерпываются запасы и полностью удовлетворяются потребности, то есть суммарная потребность всех потребителей равняется суммарным запасам всех поставщиков. В *открытой модели* транспортной задачи общие потребности и запасы не равны друг другу.

Составление закрытой математической модели транспортной задачи рассматривается на простейшем примере. Предположим, три хлебозавода за сутки вырабатывают хлеб определённого сорта в количестве: 1-й – 4 т, 2-й – 7 т, 3-й – 4 т. Эти хлебозаводы снабжают пять магазинов, продающих ежедневно по 3 т каждый. Расстояния от хлебозавода до магазинов (в км) различны и показаны в таблице 1.

Хлебозаводы-поставщики	Расстояния от хлебозавода до магазинов-потребителей				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	6	5	8	7	6
P_2	4	7	6	5	8
P_3	8	6	7	9	10

Задача состоит в том, чтобы распределить вырабатываемый заводами хлеб между магазинами и при перевозках получить наименьшую транспортную работу (в ткм).

В задаче имеется 15 возможных путей доставки хлеба от каждого завода к каждому магазину. Эти пути перевозки хлеба позволяют получить несколько допустимых планов, по которым будет обеспечена потребность магазинов в хлебе, но одни из них будут иметь большую транспортную работу, другие – меньшую. Перед нами стоит задача составить такой план перевозок, при котором транспортная работа была бы наименьшей.

Чтобы построить математическую модель, описывающую взаимосвязи между производителями и потребителями хлеба введем обозначения. Неизвестное количество перевозимого хлеба от заводов к магазинам обозначается через x с подстрочными индексами. Индексы показывают координаты неизвестной, т.е. номер строки и номер столбца таблицы, на пересечении которых находится данное неизвестное.

Хлебозаводы-поставщики	Магазины-потребители					Объемы производства (запасы), т
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	
P_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	4
P_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	7
P_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	4
Потребности, т	3	3	3	3	3	15

В таблице представлены принятые нами объемы производства хлеба каждым заводом, подробности в хлебе каждого магазина и 15 неизвестных, которые должны показывать количества перевозимого хлеба от заводов и магазинов.

В таблице объем производства каждого завода должен быть равен сумме переменных, находящихся в строке каждого завода. В математической форме это будет выражаться так:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 4,$$

$$\begin{aligned}x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}&=7, \\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}&=4.\end{aligned}\quad (1)$$

Аналогично сумма перемешённых в каждом столбце должна равняться потребностям соответствующих магазинов:

$$\begin{aligned}x_{11}+x_{21}+x_{31}&=3, \\x_{12}+x_{22}+x_{32}&=3, \\x_{13}+x_{31}+x_{33}&=3, \\x_{14}+x_{24}+x_{34}&=3, \\x_{15}+x_{25}+x_{35}&=3.\end{aligned}\quad (2)$$

Используя переменные, которые показывают количество поставляемого магазинам хлеба, и расстояния между заводами и магазинами, в математической форме можно выразить работу по перевозке хлеба (в ткм):

$$F=6x_{11}+5x_{12}+8x_{13}+7x_{14}+6x_{15}+4x_{21}+7x_{22}+6x_{23}+5x_{24}+8x_{25}+8x_{31}+6x_{32}+7x_{33}+9x_{34}+10x_{35}=\min \quad (3)$$

При этом считается, что все неизвестные, содержащиеся в уравнениях (1), (2), (3), могут быть выражены только положительными или нулевыми числами. Неизвестные не могут выражаться отрицательными числами, так как это означало бы отрицательную перевозку – от потребителя к поставщику.

Это математическое условие выражается в форме следующих неравенства:

$$\begin{aligned}x_{11}\geq 0; x_{12}\geq 0; x_{13}\geq 0; x_{14}\geq 0; x_{15}\geq 0; x_{21}\geq 0; x_{22}\geq 0; x_{23}\geq 0; \\x_{24}\geq 0; x_{25}\geq 0; x_{31}\geq 0; x_{32}\geq 0; x_{33}\geq 0; x_{34}\geq 0; x_{35}\geq 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Следовательно, задача состоит в определении таких значений неизвестных, удовлетворяющих равенства (1), (2) и неравенствам (4), при которых объем транспортной работы, выраженный равенствам (3), становится минимальным.

5.6. ЛР-2. Задания и методические указания по выполнению лабораторных работ

Модуль 2 «Системы массового обслуживания и графы»

1. Принятие решений в условиях полной определенности

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть представлены таблицами, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из стратегий при строго заданных внешних условиях. Принятие решений может производиться по одному из критериев (однокритериальные задачи) или по нескольким критериям (многокритериальные задачи).

Выбор решения по одному критерию, как правило, не вызывает затруднений. Что же касается выбора решения по нескольким критериям, то для этого следует создать функцию $F_i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ монотонно зависящую от критериев $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. Данная операция называется *процедурой (методом) свертывания критериев*.

Существует несколько методов свертывания, в том числе: метод аддитивной оптимизации; метод последовательных уступок и др.

Метод аддитивной оптимизации

Пусть

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \times a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

характеризует аддитивный критерий оптимальности, где величины λ_j являются весовыми коэффициентами, которые определяют в количественной форме степень предпочтения (важность) j – го критерия оптимальности по сравнению с другими критериями. Более важному критерию приписывается больший вес, при этом:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Обобщенная функция цели (1) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- 1) частные (локальные) критерии количественно соизмеримы по важности, т.е. каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j , которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;
- 2) частные критерии являются однородными (имеют одинаковую размерность).

Если локальные критерии неоднородны, то требуется провести их нормализацию, т.е. привести к единому, безразмерному масштабу измерения. Одним из вариантов нормализации рассмотрен ниже.

1. Вначале определяются максимум и минимум каждому локального критерия, т.е.

$$a_j^+ = \max_{i=1, m} a_{ij}, \quad a_j^- = \min_{i=1, m} a_{ij}.$$

2. Выделяется группа критериев a_j , $j = \overline{1, l}$, которые максимизируются при решении задачи, и группа критериев a_j , $j = \overline{l+1, n}$, которые минимизируются при решении задачи.

3. Если исходная задача на максимум, то для критериев, которые максимизируются, нормализованные критерии определяются по формулам

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (2)$$

а для критериев, которые минимизируются, нормализованные критерии определяются по формулам

$$a_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{l+1, n}, \quad \text{или} \quad a_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = \overline{l+1, n}. \quad (3)$$

4. Рассчитывается оптимальный вариант (стратегия), обеспечивающий максимальное значение целевой функции

$$F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \times a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

5. Если исходная задача на минимум, то для критериев, которые максимизируются, нормализованные критерии определяются по формулам:

$$a_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1, l}, \quad \text{или} \quad a_{ij} = 1 - \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (4)$$

а для критериев, которые минимизируются, нормализованные критерии определяются по формулам:

$$a_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{l+1, n}, \quad \text{или} \quad a_{ij} = 1 - \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = \overline{l+1, n}. \quad (5)$$

6. Рассчитывается оптимальный вариант (стратегия), обеспечивающий минимальное значение целевой функции

$$F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \times a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Задание 1. (Для нечетных номеров студентов в журнале группы). В условиях полной определенности необходимо выбрать модель самолета на базе имеющихся частных критериев, представленных в таблице.

Модель самолета	Мощность двигателя, усл. ед.	Крейсерская скорость, км/ч	Дальность полета, км	Эксплуатационный по-толок, м	Цена, ден. ед.	Запас топлива, л	Вес пустого самолета, т,	Вес без топлива, т	Макс. Взлетная масса, т	Макс. Посадочная масса, т
ИЛ - 86	52000	950	13800	12000	5	113950	111	130	215	175
ИЛ – 62	44000	850	8800	12000	1,35	105000	71,6	94,6	165	105
ТУ – 154	31500	950	5200	10900	1,1	47000	54,8	74	100	80
ТУ – 204	32280	850	3700	12600	14	24000	58,3	79,3	94,6	88
ТУ – 134	13860	880	2020	10100	0,9	13200	29,7	33	47,6	43
А – 302	22640	900	4900	11275	19,2	23860	41,8	61	73,5	64,5
А – 330	65680	925	11900	11890	118	139090	119	165,1	230	177
А – 340	61740	925	13800	12000	103	140000	123	170	257	182
Боинг - 737	23860	925	5370	12500	54	26035	41,4	61,6	78,2	65,3
Боинг - 747	109960	940	13300	10700	182	215900	181	243	394	285
Весовой коэффициент	0,15	0,1	0,05	0,1	0,1	0,15	0,05	0,1	0,1	0,1

Задание 2. (Для четных номеров студентов в журнале группы). Риэлтерская фирма предлагает квартиры в строящихся домах города, оценивая их по 11 параметрам, см. таблицу. Необходимо выбрать квартиру из предлагаемого списка с учетом заданных весов.

Квартира	Общая площадь, м ²	Полезная площадь, м ²	Район, усл. ед.	Налич. телефона	Число балконов, шт.	Степень готовности, усл. ед.	Стоимость квартиры, ден. ед.	Количество комнат, шт.	Вид из окон, усл. ед.	Этаж
1	77	45	6	0	1	5	80000	1	7	4
2	80	65	8	1	1	6	100000	1	8	5
3	140	70	10	1	2	8	160000	3	10	6
4	40	32	7	0	1	10	30000	1	7	5
5	65	40	5	1	1	6	45000	1	2	4
6	62	41	4	0	1	7	40000	1	4	6

7	80	60	7	1	2	6	110000	2	5	5
Весовой коэффициент	0,1	0,05	0,2	0,05	0,02	0,05	0,3	0,1	0,05	0,08

Методические рекомендации

Принятие решений в условиях неопределенности

Здесь и далее будем использовать понятие *природы* из теории игр. Природа может находиться в одном из множеств возможных состояний, которое может быть как конечным, так и бесконечным. Будем считать, что множество состояний S_i конечно ($i = \overline{1, n}$) или, по крайней мере, количество состояний можно пронумеровать. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения.

Будем считать, что множество управленческих решений (планов) R_j также конечно и равно m .

Допустим, каждому действию R_j и возможному состоянию природы S_i соответствует результат (исход) V_{ji} , определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе j -го действия и реализации i -го состояния.

В ряде случаев в качестве результатов рассматривается матрица рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ связаны с элементами матрицы полезности (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji} = V_i - V_{ji}, \quad (7)$$

где $V_i = \max V_{ji}$ - максимальный элемент в столбце i матрицы полезности.

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ следует определять по формуле:

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i, \quad (8)$$

где $V_i = \min V_{ji}$ - минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Для принятия решения в условиях неопределенности используют ряд критериев, среди которых: критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица и др.

1. Критерий Вальда (минимаксный или максиминный критерий)

Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j . Тем самым выбранные варианты полностью исключают риск, т.е. принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. К тому же данный критерий не требует знания вероятностей состояний S_i .

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *минимаксный критерий*:

$$Z = \min_j \max_i \{V_{ij}\} \quad (9)$$

Таким образом, для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов $\|V_{ji}\|$ найти сначала наибольший элемент, а затем среди них выбрать наименьший.

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий:

$$Z = \max_j \min_i \{V_{ij}\} \quad (10)$$

2. Критерий Сэвиджа

Он использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$, элементы которой можно рассчитать по формуле (5.1.9), и рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j , при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$Z = \min_j \max_i \{r_{ij}\}$$

4. Критерий Гурвица

Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α - коэффициент доверия.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами $(1-\alpha)$ и α , где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если в исходной задаче матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет выигрыш, прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \max_j [\alpha \max_i V_{ji} + (1-\alpha) \min_i V_{ji}]. \quad (11)$$

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет затраты (потери), то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \min_j [\alpha \min_i V_{ji} + (1-\alpha) \max_i V_{ji}]. \quad (12)$$

Если $\alpha = 0$, получим критерий Вальда, а если $\alpha = 1$, то приходим к решающему правилу вида $\max_j \max_i V_{ji}$.

Задание 3. (Для нечетных номеров студентов в журнале группы). Автомобильная компания планирует вопрос о поставке автомобилей на рынок. Составлена смета расходов на закупку автомобилей в квартал и рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения автолюбителей. В зависимости от принятого решения – покупки автомобилей в квартал и величины прогнозируемого спроса на автомобили составлена следующая таблица ежегодных финансовых результатов компании (доход, тыс. усл. ед.). Оценку проведите с использованием всех рассмотренных в разделе критериев. При использовании критерия Гурвица сделайте расчеты при следующих значениях $\alpha = 0,3$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,7$.

Количество авто- машин, продавае- мых в квартал, шт.	Оценка прогнозируемой величины спроса					
	10	20	30	40	50	60
20	200	250	200	150	300	280
30	210	240	240	180	250	270
40	190	300	210	200	250	330
50	170	320	150	170	200	290
60	150	180	120	160	210	230

Задание 4. (Для четных номеров студентов в журнале группы) На конкурс выставлено пять проектов строительства административного здания районного города ($R_i, i = \overline{1,5}$). Четырьмя рабочими группами проведена экспертиза этих проектов, результаты которых представлены в таблице. Требуется выбрать лучший проект, используя критерии, перечисленные в разделе.

При использовании критерия Гурвица сделайте расчеты при следующих значениях $\alpha = 0,3$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,7$.

Варианты про- екта	Характеристики проекта (состояние природы)			
	1	2	3	4
R_1	18	25	21	21
R_2	30	22	24	25
R_3	16	28	23	24
R_4	25	30	25	22
R_5	28	27	20	19

5.7. Т(п)-1.Тесты письменные

Модуль 1 «Математическое программирование и принятие решений»

1. Каким образом формулируется задача целочисленного программирования?

А) Если решение плана $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором линейная функция $Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ принимает только положительные значения при некоторых ограничениях.

Б) Если при котором линейная функция $Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ принимает только отрицательные значения при некоторых ограничениях.

В) Если решение плана $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором линейная функция

$Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ принимает максимальное или минимальное значение при некоторых ограничениях.

Г) Если решение плана $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором линейная функция $Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ равна 0.

2. Какими методами решаются задачи целочисленного программирования?

- В) Решения, сходящиеся только для специальных систем уравнений.
 Г) Область допустимых решений (ОДР) системы ограничений задачи.
7. Что представляет собой управление операций в целом?
 А) Действия, позволяющие свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных.
 Б) Процесс вычисления по итерационным формулам.
 В) Множество допустимых решений (планов), некоторым способом, разбивающиеся на подмножества, каждое из которых этим же способом снова разбивается на подмножества.
Г) Совокупность всех шаговых управлений.
8. Какова суть основного метода динамического программирования, разработанного американским математиком Р.Беллманом?
 А) Совокупность всех шаговых управлений представляет собой управление операцией в целом.
Б) Каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце каждого шага.
 В) При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничения – неравенств, задача может быть решена графическим методом без требований целочисленных переменных.
 Г) В ряде экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, элементы решения должны выражаться в целых числах.
9. Что означает величина $f_m(i)$ в формуле $f_m(i) = \max \{ f_m(\text{стоимость шага}) + f_{m+1}(\text{новое состояние перед шагом } m+1) \}$?
А) Есть максимальная прибыль завершения задачи из состояния i , если предположить, что на шаге m , система находится в состоянии i .
 Б) Система, представляющая собой линейную систему с матрицей.
 В) Представляет собой состояние системы на i -м шаге.
 Г) Представляет собой выигрыш за операцию.
10. С какого шага начинается задача динамического программирования?
 А) Задача динамического программирования начинается решаться с начала, т.е. с первого шага.
 Б) Задача динамического программирования начинается решаться с середины задачи.
В) Задача динамического программирования начинается решаться с конца, т.е. с последнего шага.
 Г) Задача динамического программирования начинается решаться с метода введения новых переменных.
11. Вставьте пропущенное слово:
- наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.
А) Линейное программирование
 В) динамическое программирование
 С) нелинейное программирование
12. Математической моделью экономической задачи называется:
 А) Математическое выражение целевой функции
 В) Ограничения целевой функции
С) Математическое выражение целевой функции и ее ограничения
13. Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется:
 А) отрезок $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

В) вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n,)$, удовлетворяющий системе ограничений.

С) интервал $X = (x_1, x_2, \dots, x_n,)$, удовлетворяющий системе ограничений.

14. Оптимальное решение задачи линейного программирования- это

А) неотрицательные значения целевой функции

В) Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего наименьшего значения

С) Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения

15. Вставьте пропущенное слово:

Математическая модель задачи ЛП

каноническая

ответ: неканоническая

16. Какая модель задачи называется канонической

А) Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные X_j неотрицательные

В) Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные X_j положительные

С) Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные X_j равны нулю

17. Постановка двойственной задачи звучит следующим образом:

А) сколько и какой продукции $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции C_i , объемом имеющихся ресурсов $b_j (j=1, 2, \dots, m)$ и нормах расхода ресурсов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном виде.

В) какова должна быть оценка единицы каждого ресурса $y_j (j=1, 2, \dots, m)$, чтобы при заданных b_j, c_i и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы.

С) какова должна быть оценка единицы каждого ресурса $y_j (j=1, 2, \dots, m)$, чтобы при заданных b_j, c_i и a_{ij} максимизировать общую оценку прибыли на все ресурсы.

18. Какое из следующих правил построения двойственной задачи по имеемой прямой задаче лишнее:

А) Если прямая задача решается на максимум, то двойственная задача решается на минимум; если прямая задача решается на минимум то двойственная на максимум;

В) В задаче на максимум ограничения неравенства имеют вид $-\leq$, а в задаче на минимум $-\geq$;

Г) Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, в другой модели ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

Д) Матрица системы ограничений двойственной задачей получается из матрицы из матрицы систем ограничений прямой задачи транспонированием;

Е) Если какое либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности налагается;

Ж) Свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи и наоборот;

З) Если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, в противном случае – как ограничение равенство;

И) Если какое либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается;

19. Дайте определение первой теоремы двойственности:

А) Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых

функций совпадают $Z(X)=Z'(Y)$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

В) Для того чтобы план X^* и Y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - C_i \right) = 0$$

$$y_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* - b_j \right) = 0$$

С) Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи линейного программирования, т.е.

$$dz(x^*) / db_j = y_j^*, (j = 1, 2, \dots, m)$$

В последнем выражении дифференциалы заменим приращениями. Тогда получим выражение:

$$\Delta Z(x^*) = y_j^* \cdot \Delta b_j,$$

если $\Delta b_j = 1$, тогда $\Delta Z(x^*) = y_j^*$,

20. Формулировка какой из теорем двойственности приведена ниже:

Для того чтобы план X^* и Y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - C_i \right) = 0$$

$$y_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* - b_j \right) = 0$$

А) третьей

В) первой

С) **второй**

21. Как другими словами называются условия второй теоремы двойственности?

А) **условиями дополняющей нежесткости**

В) условиями дополняющей достаточности

С) условиями дополняющей условности

22. Вставьте пропущенное слово:

Способы решение задач линейного программирования

.....  геометрический

Ответ: симплексный

23. Расставьте в правильном порядке алгоритм решения задачи линейного программирования геометрическим способом:

А) Находим область допустимых решений (ОДР) системы ограничений математической модели

Б) Линию целевой функции (линия уровня) перемещаем по направлению нормали для задач на максимум целевой функции и в противоположном направлении - для задач на минимум ЦФ.

В) Строим прямую целевой функции и показываем направление наискорейшего ее изменения (нормаль-*gradL*).

Г) Строим координатные оси $X_1 O X_2$ и с учетом коэффициентов математической модели выбираем масштаб.

Д) Находим координаты точки экстремума и значение ЦФ в ней.

Ответ: 1-г, 2-а, 3-в, 4-б, 5-д

24. Симплексный метод- это:

А) метод максимизации прибыли

Б) **метод последовательного улучшения плана**

С) метод пошагового регулирования

25. Расставьте в правильном порядке алгоритм решения задачи линейного программирования симплексным методом:

А) Построить новую симплекс-таблицу-второй шаг.

Б) Проверяем таблицу второго шага на оптимальность.

В) Построить начальную симплекс-таблицу исходя из стандартного вида.

Г) Вычислить разрешающую строку и ведущий элемент (Почленно разделить столбец свободных членов на элементы разрешающего столбца, за исключением строки ЦФ. Выбрать наименьшее из частных. Эта строка будет разрешающей. Ведущий элемент будет на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.).

Д) Математическую модель задачи привести к каноническому виду.

Е) Найти разрешающий столбец. В строке коэффициентов ЦФ найти значение с самым маленьким отрицательным числом. Этот столбец и будет разрешающим.

Ответ: 1-д,2-в,3-е,4-г,5-а,6-б

5.8. Т(п)-1.Тесты письменные

Модуль 2 «Системы массового обслуживания и графы»

1. К какому методу относится данная формула?

а) Метод последовательных уступок

б) метод односторонней оптимизации

с) Критерий Лапласа

д) Критерий Вальда

2. По какой формуле рассчитывается оптимальный вариант (стратегия), обеспечивающий максимальное значение целевой функции

а) $a_j^+ = \max_{i=1,m} a_{ij}, \quad a_j^- = \min_{i=1,m} a_{ij}.$

б) $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1,l},$

с) $F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \times a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}.$

д) $a_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-},$

3. К какому критерию относятся данные формулы

$$\max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji} \right\}, \max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ji} \right\}.$$

а) Критерий Лапласа

б) Критерий Вальда

с) Критерий Сэвиджа

д) нет правильных ответов

4. К какому критерию относится данная формула $Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}.$

- a) Критерий Сэвиджа
- b) Критерий Вальда
- c) Критерий Лапласа
- d) Критерий Геймеера**

5. К какому критерию относится данная формула $Z = \min_i [\gamma \sum_{j=1}^n V_{ji} q_j + (1-\gamma) \min_j V_{ji}]$,

- a) Критерий Ходжа-Лемана**
- b) Критерий Сэвиджа
- c) Критерий Лапласа
- d) Критерий Геймеера

6. Какую формулу расчёта имеет Критерий произведений?

- a) $Z = \max_j \prod_i V_{ji}$.**
- b) $t = \left| \min_i \min_j \{V_{ji}\} \right| + 1$
- c) $Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}$.
- d) $\max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji} \right\}$.

7. К какому критерию относятся данная формула $Z = \max_j [\alpha \max_i V_{ji} + (1-\alpha) \min_i V_{ji}]$.

- a) Критерий Ходжа-Лемана
- b) Критерий Сэвиджа
- c) Критерий Лапласа
- d) Критерий Гурвица**

8. Как звучит формулировка критерия Вальда?

- a) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .**
- b) Данный критерий опирается на принцип наибольшего риска и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .
- c) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наихудших из наихудших стратегий R_j .
- d) Все варианты не верны

9. Укажите верную формулировку критерия BL (MM) – критерий

- a) Данный критерий является объединением критериев Лапласа и минимакса. Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом: матрица решений $\|V_{ji}\|$ дополняется тремя столбцами и т.д**
- b) Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех V_{ji} . При этом $Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}$.
- c) Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α - коэффициент доверия
- d) Нет верных вариантов.

10. Формулировка критерия Гурвица

- а) Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1 - \alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α - коэффициент доверия
- б) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .
- в) Этот критерий опирается одновременно на минимаксный критерий (критерий Вальда) и критерий Лапласа. С помощью параметра γ выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей.
- г) Нет верных вариантов.

11. К какому методу относится данная формула?

- а) Метод последовательных уступок
- б) метод односторонней оптимизации
- в) Критерий Лапласа
- г) Критерий Вальда

12. По какой формуле рассчитывается оптимальный вариант (стратегия), обеспечивающий максимальное значение целевой функции

г) $a_j^+ = \max_{i=1, m} a_{ij}, \quad a_j^- = \min_{i=1, m} a_{ij}.$

в) $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = \overline{1, l},$

г) $F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \times a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$

г) $a_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-},$

13. К какому критерию относятся данные формулы

$$\max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji} \right\}, \max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ji} \right\}.$$

- а) Критерий Лапласа**
- б) Критерий Вальда
- в) Критерий Сэвиджа
- г) нет правильных ответов

14. К какому критерию относится данная формула $Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}.$

- а) Критерий Сэвиджа
- б) Критерий Вальда
- в) Критерий Лапласа
- г) Критерий Геймеера**

15. К какому критерию относится данная формула $Z = \min_i [\gamma \sum_{j=1}^n V_{ji} q_j + (1 - \gamma) \min_j V_{ji}],$

- а) Критерий Ходжа-Лемана**
- б) Критерий Сэвиджа
- в) Критерий Лапласа
- г) Критерий Геймеера

16. Какую формулу расчёта имеет Критерий произведений?

$$\underline{e)} \quad Z = \max_j \prod_i V_{ji}.$$

$$\underline{f)} \quad t = \left| \min_i \min_j \{V_{ji}\} \right| + 1$$

$$\underline{g)} \quad Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}.$$

$$\max_{R_j} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{ji} \right\}.$$

h)

17. К какому критерию относятся данная формула $Z = \max_j [\alpha \max_i V_{ji} + (1 - \alpha) \min_i V_{ji}]$.

a) Критерий Ходжа-Лемана

b) Критерий Сэвиджа

c) Критерий Лапласа

d) Критерий Гурвица

18. Как звучит формулировка критерия Вальда?

e) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .

f) Данный критерий опирается на принцип наибольшего риска и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .

g) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наихудших из наихудших стратегий R_j .

h) Все варианты не верны

19. Укажите верную формулировку критерия BL (MM) – критерий

e) Данный критерий является объединением критериев Лапласа и минимакса. Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом: матрица решений $\|V_{ji}\|$ дополняется тремя столбцами и т.д

f) Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех V_{ji} . При этом $Z = \max_i \min_j \{V_{ji} q_j\}$.

g) Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1 - \alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α - коэффициент доверия

h) Нет верных вариантов.

20. Формулировка критерия Гурвица

e) Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1 - \alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью α , где α - коэффициент доверия

f) Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .

g) Этот критерий опирается одновременно на минимаксный критерий (критерий Вальда) и критерий Лапласа. С помощью параметра γ выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей.

h) Нет верных вариантов.