

Лабораторная работа № 1

РАСЧЕТ ЭНТРОПИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ СООБЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ

Цель работы: научиться оценивать энтропию системы для принятия решений.

Понятие и определение энтропии

Термодинамическая энтропия. Понятие энтропии впервые введено в 1865 г. Рудольфом Клаузиусом. Он определил изменение энтропии термодинамической системы при обратимом процессе как отношение общего количества тепла к величине абсолютной температуры.

Например, при температуре 0°C, вода может находиться в жидком состоянии и при незначительном внешнем воздействии начинает быстро превращаться в лед, выделяя при этом некоторое количество теплоты. При этом температура вещества так и остается 0°C. Изменяется состояние вещества, сопровождающееся выделением тепла, вследствие изменения структуры.

Рудольф Клаузиус дал этой величине термин «энтропия», происходящее от др.-греч. *ἐντροπία* — поворот, превращение, изменение. Такое представление (изменение энтропии) не определяет полностью саму энтропию. Эта формулировка применима только для изотермического процесса.

Статистическая энтропия: принцип Больцмана. В 1877 г. Л. Больцман установил связь энтропии с вероятностью определенного состояния. Затем эту связь М. Планк представил в виде формулы:

$$S = k \times \ln M,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, а M — число возможных микросостояний (способов), с помощью которых можно перейти в данное макроскопическое состояние.

Согласно определению, *энтропия является функцией состояния*, т.е. она не зависит от способа достижения этого состояния, а определяется его параметрами. Так как M может быть только натуральным числом, то энтропия Больцмана должна быть *неотрицательной*.

Энтропия как мера беспорядка [1–3]. M можно рассматривать как меру беспорядка в системе. Поэтому энтропию представляют числом микросостояний, приходящихся на данное макро-состояние.

Например, наиболее вероятным состоянием распределение молекул идеального газа будет равномерное распределение. Оно соответствует максимуму энтропии.

Информационная энтропия. Это мера неопределённости или непредсказуемости информации, неопределённость появления какого-либо символа первичного алфавита.

Энтропия — это количество информации, приходящейся на одно элементарное сообщение источника, вырабатывающего статистически независимые сообщения. Величина, противоположная энтропии, именуется нег-энтропией или, реже, экстропией.

Информационная двоичная энтропия для независимых случайных событий x с n возможными состояниями (с соответствующей вероятностью $p_i, i=\overline{1, n}$) рассчитывается по формуле:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p(i) \log_2 p(i).$$

Эта величина также называется *средней энтропией сообщения*. Энтропия события x является суммой с противоположным знаком всех произведений относительных частот появления события i , умноженных на их двоичные логарифмы.

Определение по Шеннону. Клод Шеннон утверждал: «Прирост информации равен утраченной неопределённости» и сформулировал требования к её измерению:

- мера непрерывна;
- в случае, если все варианты (например, буквы) равновероятны, то увеличение количества вариантов (букв) увеличивает значение энтропии;
- значение энтропии конечного результата должно являться суммой энтропий промежуточных результатов.

От количества n возможных состояний случайной величины X зависит единица измерения количества информации и энтропии: бит, нат, трит или хартли. От основания логарифма зависит числовая величина единицы измерения количества информации и энтропии.

Сведем в табл. 1 виды энтропии и их определения.

Таблица 1

Виды энтропии

Вид	Определение
Термодинамическая энтропия	термодинамическая функция, характеризующая меру необратимой диссипации энергии в ней
Информационная энтропия	в теории информации мера неопределённости источника сообщений, определяемая вероятностями появления тех или иных символов при их передаче; в статистической физике характеризует вероятность осуществления некоторого макроскопического состояния системы; в математической статистике — мера неопределённости распределения вероятностей
Дифференциальная энтропия	формальное обобщение понятия энтропии для непрерывных распределений
Энтропия динамической системы	в теории динамических систем мера хаотичности в поведении траекторий системы
Энтропия отражения	часть информации о дискретной системе, которая не воспроизводится при отражении системы через совокупность своих частей
Энтропия в теории управления	мера неопределённости состояния или поведения системы в данных условиях

Математические свойства энтропии

1. Неотрицательность: $H(X) \geq 0$.

2. Ограниченность:

$$H(X) = -E(\log_2 p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i f(g_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i g_i\right) = \log_2 n$$

3. Если X, Y независимы, то $H(X \times Y) = H(X) + H(Y)$.

4. Энтропия — выпуклая вверх функция распределения вероятностей элементов.

5. Если X, Y имеют одинаковое распределение вероятностей элементов, то $H(X) = H(Y)$.

Задание

В табл. 2 представлены данные о системе передачи трех сообщений. В качестве компонентов системы приняты информационные разделы. Указаны вероятности появления разделов каждого сообщения. Под p_i понимается вероятность нахождения системы в данном состоянии — передачи i -го раздела.

1. Рассчитать энтропию для структуры системы. Вычисления выполнить по формуле расчета информационной энтропии Шеннона

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p(i) \log p(i).$$

Таблица 2

Данные для расчета энтропии

№ п/п	Компоненты системы	Распределение вероятностей компонентов сообщения			Энтропия		
		Сооб- щение 1	Сообще- ние 2	Сообще- ние 3	H1	H2	H3
1	Интеграция	0,64	0,112	0,6			
2	Содержание	0,1	0,111	0,05			
3	Сроки	0,04	0,111	0,05			
4	Стоимость	0,04	0,111	0,05			
5	Трудовые ре- сурсы	0,05	0,111	0,05			
6	Риски	0,06	0,111	0,05			
7	Качество	0,02	0,111	0,05			
8	Коммуникации	0,02	0,111	0,05			
9	Закупки	0,03	0,111	0,05			
Сумма		1	1	1	?	?	?

2. В таблице следует провести расчет энтропии приема информационного сообщения для трех вариантов с распределениями вероятностей передаваемых разделов с вероятностями p_i . Для первого случая выделена доминанта (передаваемый раздел имеет наибольшую вероятность передачи), при этом остальные имеют соизмеримые вероятности. Во втором представлено равномерное распределение. В третьем выделена доминанта для одного объекта системы, все остальные пренебрежимо малы.

3. Обосновать выбор самого предсказуемого процесса получения информационного сообщения.

4. Результаты оформить в виде отчета в Word.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое энтропия?
2. Как рассчитать энтропию события?
3. Перечислите свойства энтропии.
4. Что такое нег-энтропия?
5. Какова разница между анти-энтропией и нег-энтропией?
6. Зачем нужно вычислять энтропию для системы управления?

Лабораторная работа № 2

РАСЧЕТ ЭНТРОПИИ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ

Цель работы: освоить метод оценки энтропии системы с управлением: энтропии управления, полной энтропии системы, остаточной энтропии и относительных показателей упорядоченности.

Понятие свободы системы

Свобода — энтропия управляющей подсистемы в заданных условиях среды. Расчет данного показателя применим для анализа любой дискретной кибернетической системы, отражает способность системы достигать цель управления. Недостаток характеристики — отсутствие учета влияния условий среды на управляемую подсистему.

Показатели энтропии делятся на абсолютные (бит) и относительные (бит/бит). Первая группа показателей применима к дискретным системам. Они отражают разнообразие реакций системы на управляющее действие, свободу управления, при этом не оценивают управляемость системой [1–3].

Вторая группа показателей характеризуют степень управляемости. Они могут использоваться для проверки выполнения Закона необходимого разнообразия Эшби: «Разнообразие управления должно быть не меньше разнообразия управляемой системы».

Методические указания по расчету показателей

1. Для расчета энтропии управляющего действия $HR(Y=i)$, $i=\overline{1,4}$ применяют формулу Шеннона для вероятностей, стоящих в i -ой строке.
2. Для расчета энтропии управляющей системы используют столбец Y .
3. Для расчета полной энтропии, прежде всего, элементы каждой строки главной матрицы умножают на элемент из столбца Y соответствующей строки. Затем считают энтропию по всей преобразованной матрице.
4. Остаточная энтропия равна разнице между полной и энтропией управления.
5. Относительные показатели рассчитывают по правилу, указанному в п. 1.2 задания.

Задание

1. Пусть Y_i , $i=\overline{1,4}$ — управляющая переменная; R_j , $j=\overline{1,4}$ — управляемая переменная. Состояние системы I : все управляющие действия Y_i возможны (табл. 3).

Таблица 3

Состояние среды I

Управляющие действия Y	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды I)	1	2	3	4
1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
2	0,25				1
3	0,25		0,5		0,5
4	0,25	0,25	0,25	0,5	
Всего	1				

1.1. Оценить энтропии управляющих действий $HR(Y=1)$, $HR(Y=2)$, $HR(Y=3)$, $HR(Y=4)$.

1.2. Оценить полную энтропию системы H , энтропию управления H_Y , остаточную энтропию HR , относительные показатели H_Y/H , HR/H , $H_Y/(H - H_Y)$.

1.3. Сделать выводы об управляемости системы и о выполнении закона необходимого разнообразия.

2. Повторить расчет для состояния среды II: исключаются управляющие воздействия 3 и 4 (табл. 4).

Таблица 4

Состояние среды II

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды II)	1	2	3	4
1	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25
2	0,5				1
3 нет					
4 нет					
Всего	1				

3. Повторить расчет для состояния среды III: исключаются управляющие воздействия 1 и 2 (табл. 5).

Таблица 5

Состояние среды III

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды III)	1	2	3	4
1 нет					
2 нет					

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды III)	1	2	3	4
3	0,5		0,5		0,5
4	0,5	0,25	0,25	0,5	
Всего	1				

4. Оценить показатели состояния среды IV: исключаются управляющие воздействия 2 и 3 (табл. 6).

Таблица 6

Состояние среды IV

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управл. действия (состояние среды IV)	1	2	3	4
1	0,5				
нет					
3 нет					
4	0,5		0,5		0,5
Всего	1				

5. Повторить расчет для состояния среды V: исключаются управляющие воздействия 2 и 3 (табл. 7).

Таблица 7

Состояние среды V

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды V)	1	2	3	4
1 нет					
2	0,5				1
3	0,5		0,5		0,5
4 нет					
Всего	1				

6. Оценить показатели состояния среды VI: свобода управления отсутствует, $Y = 1$ (табл. 8).

Таблица 8

Состояние среды VI

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды VI)	1	2	3	4
1	1	0,25	0,25	0,25	0,25

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды VI)	1	2	3	4
2 нет					
3 нет					
4 нет					
Всего	1				

7. Повторить расчет для состояния среды VII: свобода управления отсутствует, $Y = 2$ (табл. 9).

Таблица 9

Состояние среды VII

№ управляющего действия Y_i	Вероятность выбора управляющего действия (состояние среды VII)	1	2	3	4
1 нет					
2	1				1
3 нет					
4 нет					
Всего	1				

8. Сделать выводы. Оформить отчет в Word.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое информационная энтропия?
2. Какое содержание несет категории «Свобода»?
3. Какой смысл несут относительные показатели энтропии?
4. Что означает энтропия управления?
5. Что означает полная энтропия?
6. Какой показатель можно использовать для проверки выполнения закона необходимого разнообразия?

Лабораторная работа № 3

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРТИЗЫ

Цель работы: освоить методику проверки гипотезы о согласованности суждений экспертов с помощью методов ранговой корреляции Спирмена, Кендалла, метода конкордации.

Методы расчета ранговой корреляции

Ранговая корреляция

В системном анализе часто возникает необходимость провести исследование наличия/отсутствия связи между переменными, которые не измерены в интервальной или относительной шкалах, но могут быть упорядочены, ранжированы по степени убывания или возрастания признака.

Для установления тесноты связи между сравниваемыми признаками [4–8], измеренными в порядковых шкалах, применяются показатели ранговой корреляции, к которым относятся

- коэффициент ранговой корреляции Спирмена;
- коэффициент ранговой корреляции Кендалла;
- коэффициент конкордации.

Первые два способа используются для определения тесноты связи только между двумя величинами, третий — для установления статистической связи между несколькими признаками.

По методу *Спирмена* вычисляется коэффициент линейной корреляции. Если закон распределения и тип измерительной шкалы не известны, результаты и выводы могут привести к существенным ошибкам.

Методы ранговой корреляции могут быть использованы для определения тесноты связи не только между количественными переменными, но и качественными при условии, если их значения можно ранжировать и упорядочить. Кроме того, методы можно использовать применительно к признакам, измеренным в интервальных и реляционных шкалах, но их эффективность не высока.

Решение задачи состоит из нескольких шагов.

1. Формулируется гипотеза H_0 : «*Выборки X и Y , отражающие мнения экспертов, не зависимы*».

2. Каждая последовательность превращается в вариационный ряд с присвоением ее членам порядкового номера (ранга) — натурального числа.

Одинаковым значениям ряда присваиваются среднее ранговое число. Например, если два одинаковых элемента располагаются на 4-м и 5-м местах, остальные значения ряда не повторяются, их ранги будут равными 4,5 каждый. Сравнимые признаки должны быть ранжированы в одинаковом направлении: по возрастанию или по убыванию.

3. Составляется таблица по следующему правилу: в первую и вторую строки записываются ранги последовательностей. Третья заполняется построчно

значениями разностей рангов. Последнюю строку заполняют квадратами чисел из предыдущей строки. В итоговой клетке последней строки подсчитывается сумма.

4. Полученный результат подставляется в формулу Спирмена:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{(n^3 - n) - 0,5(T_x + T_y)}, \quad T = \sum_{k=1}^l (t_k^3 - t_k).$$

T_x, T_y — поправки по столбцам, имеющим одинаковые ранги, t — количество одинаковых рангов в столбце (могут встретиться, например, в X ранги, равные 1,5 два раза, 6,5 — три раза. Тогда $T_x = 2^3 - 2 + 3^3 - 3 = 30$); n — объем выборок.

5. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена является линейным, принимает значения на отрезке $[-1; 1]$.

6. Для выборки, меньшей 30 значений, расчетный коэффициент сравнивается с табличными с разными уровнями значимости: α (0,05 и 0,01). Значения критических уровней берутся из табл. 10.

Таблица 10

Критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена

n	α		n	α		n	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
7	0,745	0,893	15	0,518	0,654	23	0,415	0,531
8	0,690	0,857	16	0,500	0,632	24	0,406	0,520
9	0,663	0,817	17	0,485	0,615	25	0,398	0,510
10	0,636	0,782	18	0,472	0,598	26	0,389	0,500
11	0,609	0,754	19	0,458	0,582	27	0,383	0,491
12	0,580	0,727	20	0,445	0,568	28	0,375	0,483
13	0,555	0,698	21	0,435	0,555	29	0,368	0,474
14	0,534	0,675	22	0,424	0,543	30	0,362	0,466

Критическая область — область отклонения гипотезы H_0 — на числовой оси расположена справа от максимального значения. Промежуток между критическими точками соответствует неопределенному выводу: с одной стороны, расчетное значение критерия меньше критического с уровнем значимости $\alpha = 0,01$, с другой, больше критической точки при $\alpha = 0,05$.

7. Для получения ответа на поставленный вопрос: «Подтверждается ли предположение о том, что мнения экспертов не зависимы (нулевая гипотеза H_0), т.е. действительно ли расчетный критерий значимо не отличается от нуля?» при многочисленной выборке (не меньше 30), вместо коэффициента r_s необходимо определить значение коэффициента Стьюдента по формуле

$$|t| = \frac{|r_s|}{\sqrt{1 - r_s^2}} \sqrt{n - 2}.$$

8. Затем данное число следует сравнить с критическим из специальной таблицы критических точек с параметрами: числом степеней свободы $(n - 2)$ и уровнем значимости α (можно воспользоваться функцией из категории «Статистические» в мастере функций Excel).

9. Если значение $|t|$ меньше критического из таблицы, значит, гипотезу H_0 нет оснований отклонить. Для подтверждения вывода следует провести проверку с двумя значениями уровня значимости α (0,05 и 0,01).

Рассмотрим пример для ранжированных значений из табл. 11.

Таблица 11

Исходные данные экспертизы

Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
Эксперт Б	3	4	8	7	5	3	1	10	5	1

Построим табл. 12 с расчетом суммы квадратов разностей рангов.

Таблица 12

Расчет множителя для оценивания ранговой корреляции

Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2	Сумма
Эксперт Б	3	4	8	7	5	3	1	10	5	1	
$R_{\text{Эксперт А}}$	1	4	9	6,5	6,5	5	2,5	10	8	2,5	
$R_{\text{Эксперт Б}}$	3,5	5	9	8	6,5	3,5	1,5	10	6,5	1,5	
Разность	-2,5	-1	0	-1,5	0	1,5	1	0	1,5	1	
Квадрат разности	6,25	1	0	2,25	0	2,25	1	0	2,25	1	15

Рассчитаем значение r_s :

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 15}{1000 - 10 - 0,5 \times (8 - 2 + 8 - 2 + 8 - 2 + 8 - 2 + 8 - 2)} =$$

$$= 1 - \frac{90}{990 - 15} \approx 0,908.$$

Найдем в табл. 10 два значения критических точек для $n=10$, $\alpha_1=0,05$, $\alpha_2=0,01$. Получим $r_s(8;0,05) = 0,690$, $r_s(8;0,01) = 0,857$. Отметим точки на оси и определим область размещения эмпирического значения. Точка 0,908 находится в области отклонения гипотезы H_0 (рис.1), значит, не может быть принята с двойным подтверждением. Следовательно, гипотеза о независимости суждений экспертов статистически не значима, т.е. отклоняется.

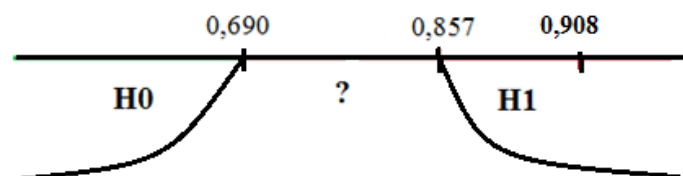


Рис. 1. Области размещения расчетного значения критерия

Решение по методу *Кендалла* имеет тот же смысл, что и по методу *Спирмена*. Расчетный показатель так же, как и *Спирмена*, лежит на отрезке $[-1; 1]$, но является более информативным. Алгоритм расчета следующий.

1. Заполняются столбцы 3–4 ранжированными рядами переменных (если есть одинаковые значения в ряду, присваивают среднее ранговое число), причем первая переменная должна быть упорядочена по возрастанию рангов (самому лучшему по критерию ранжирования присваивается ранг, равный 1).

2. Рассчитывается коэффициент корреляции *Кендалла* τ по формуле:

$$\tau = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} R_i}{n(n-1)} - 1.$$

R_i — число рангов во втором вариационном ряду, которые больше, чем данное ранговое число, расположенных ниже него.

3. Проверяется гипотеза о значимости коэффициента ранговой корреляции *Кендалла*. То есть необходимо сравнить расчетное абсолютное значение коэффициента «тау»:

$$\tau_a(n) = z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n+1)}}$$

с критическими значениями для $\alpha_1=0,05$, $\alpha_2=0,01$.

4. Для n — объема выборки, равного 10, — квантили нормированного нормального распределения $z_{1-\alpha/2}$ равны, 1,960 и 2,576 для $\alpha_1=0,05$, $\alpha_2=0,01$, соответственно. Полученные числа: $\tau_{0,05}(n)$ и $\tau_{0,01}(n)$, сравнить с рассчитанным по формуле критерием. Принцип выбора варианта решения аналогичен принципу по методу *Спирмена*: если расчетное число меньше минимального критического, то нет оснований отклонять гипотезу H_0 и считать суждения экспертов независимыми.

В примере с данными табл. 11 расчетная табл. 13 включает следующие значения.

Таблица 13

Расчет множителя для коэффициента *Кендалла*

№	A	B	R_A	R_B	R
8	8	10	1	1	9
3	7	8	2	2	8
9	6	5	3	4,5	5
4	5	7	4,5	3	6
5	5	5	4,5	4,5	5
6	4	3	6	7,5	2
2	3	4	7	6	3
7	2	1	8,5	9,5	0
10	2	1	8,5	9,5	0
1	1	3	10	7,5	0
Сумма					38

Значение коэффициента τ в формуле:

$$\tau = \frac{4 \times 38}{10 \times (10-1)} - 1 = 0,689;$$

$$\tau_{0,05}(10) = 1,96 \sqrt{\frac{2(2 \times 10 + 5)}{9 \times 10(10+1)}} = 0,099;$$

$$\tau_{0,01}(10) = 2,576 \sqrt{\frac{2(2 \times 10 + 5)}{9 \times 10(10+1)}} = 0,130.$$

На рис. 2. видно, расчетное значение «тау» попадает в критическую область $H1$, следовательно, нет оснований принимать гипотезу о независимости суждений, т.е. предположение $H0$ не подтверждено.

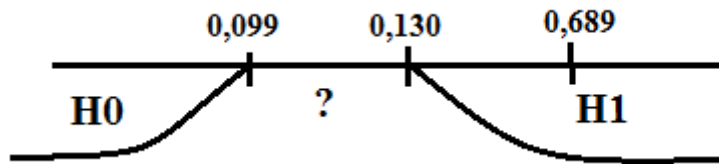


Рис. 2. Области размещения расчетного значения критерия

Коэффициент конкордации Кэндалла рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^n D_i^2}{m^2(n^3 - n)},$$

n — количество оцениваемых элементов в каждом наборе (выборке), m — количество ранговых последовательностей (экспертов),

$$D_i = d_i - \bar{d}, \quad d_i = \sum_{j=1}^m R_{ij}, \quad \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i,$$

R_{ij} — i -й ранг j -го эксперта.

Величина коэффициента конкордации W , в отличие от коэффициента корреляции, заключена в интервале $[0; 1]$.

Коэффициент конкордации равен 1, если все ранговые последовательности полностью совпадают. При полной противоположности мнений экспертов значение коэффициента конкордации равно 0 (при этом коэффициент корреляции равен -1).

Если значения рангов у одного эксперта повторяются, расчетная формула для коэффициента конкордации принимает вид:

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^n D_i^2}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j},$$

$$T_j = \sum_{k=1}^l (t_k^3 - t_k).$$

Проверка гипотезы H_0 — «коэффициент конкордации W значимо не отличается от 0», т.е. мнения экспертов не согласованы, при альтернативной гипотезе $H_1: W \neq 0$ (мнения экспертов согласованы) при количестве оцениваемых объектов n (не менее 7) — проводится с использованием критерия Пирсона «хи-квадрат». Расчетное значение

$$\chi^2 = m(n-1)W$$

сравнивается с критическим (табличным) $\chi_{\alpha}^2(n-1)$.

Если выполняется условие

$$\chi^2 > \chi_{0,01}^2(n-1),$$

есть основание отклонить H_0 .¹

Рассмотрим пример. Представлены оценки пяти экспертов десяти объектов. Данные экспертизы размещены в табл. 14. Требуется проверить независимость суждений специалистов, участвующих в данной проверке, применяя расчет показателя конкордации.

Таблица 14

Исходные данные экспертизы

Объекты (n)	Эксперты (m)				
	А	Б	В	Г	Д
1	1	3	1	4	2
2	4	2	3	5	1
3	2	1	4	3	3
4	10	9	8	9	7
5	7	8	7	8	9
6	3	4	2	1	4
7	5	3	5	6	5
8	8	6	9	10	8
9	9	10	10	2	10
10	6	5	6	7	6

Решение

1. Составим таблицу 15 и обработаем исходные данные.

Таблица 15

Расчет множителя для оценивания коэффициента конкордации

Объекты (n)	Эксперты (m)					Сумма рангов	D_i	D_i^2
	А	Б	В	Г	Д			
1	1	3	1	4	2	11	−16,1	259,21
2	4	2	3	5	1	15	−12,1	146,41
3	2	1	4	3	3	13	−14,1	198,81
4	10	9	8	9	7	43	15,9	252,81
5	7	8	7	8	9	39	11,9	141,61
6	3	4	2	1	4	14	−13,1	171,61
7	5	3	5	6	5	24	−3,1	9,61

¹ Для малого, меньше семи, числа участвующих в экспертизе объектов коэффициент конкордации не применяется.

Объекты (<i>n</i>)	Эксперты (<i>m</i>)					Сумма рангов	<i>D_i</i>	<i>D_i</i> ²
	А	Б	В	Г	Д			
8	8	6	9	10	8	41	13,9	193,21
9	9	10	10	2	10	41	13,9	193,21
10	6	5	6	7	6	30	2,9	8,41
Среднее						27,1		1574,9

2. Вычислим коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12 \times 1574,9}{25 \times (1000 - 100)} = 0,7636.$$

3. Вычислим эмпирическое значение Хи-квадрат:

$$\chi^2 = 5 \times 9 \times 0,7636 = 34,36145.$$

Сравним полученное число с критическими точками для $\alpha_1=0,05$, $\alpha_2=0,01$, числом степеней свободы $n-1=9$. $\chi^2(0,01;9) = 16,91898$; $\chi^2(0,05;9) = 21,66599$. Эмпирическое значение превысило критические, т.е. попало в критическую область — область гипотезы *H1*, следовательно, отклоняя гипотезу о независимости суждений экспертов, подтверждаем согласованность мнений.

Задание

1. Для ранжирования по важности целей обследуемого проекта привлечены эксперты *А* и *Б*. Варианты результатов экспертиз сведены в табл. 16.
2. Ранги могут повторяться.
3. Методом ранговой корреляции необходимо проверить гипотезу о согласованности оценок экспертов. Для решения задачи использовать методы Спирмена и Кендалла.
4. Расчеты проводить в Excel. Сравнить результаты решения, сделать выводы.
5. Использовать исходные данные с результатами экспертизы семи специалистов для расчета показателя конкордации (табл. 17) и проверить гипотезу о несогласованности их суждений.
6. Оформить отчет в Word.

Таблица 16

Варианты результатов экспертиз

Вариант	Цели	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀
1	Эксперт <i>А</i>	3	5	1	8	7	10	9	2	4	6
	Эксперт <i>Б</i>	5	1	2	6	8	9	10	3	4	7
2	Эксперт <i>А</i>	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
	Эксперт <i>Б</i>	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
3	Эксперт <i>А</i>	1	3	5	2	4	7	9	10	8	6
	Эксперт <i>Б</i>	6	7	8	2	4	3	10	9	5	1
4	Эксперт <i>А</i>	1	3	5	4	5	7	2	8	6	2
	Эксперт <i>Б</i>	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
5	Эксперт <i>А</i>	1	3	5	2	4	7	9	10	8	6
	Эксперт <i>Б</i>	3	7	8	2	4	6	10	9	5	1
6	Эксперт <i>А</i>	4	3	7	10	5	4	2	8	6	2

Вариант	Цели	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀
	Эксперт Б	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
7	Эксперт А	1	10	7	5	9	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
8	Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	9	5	7	5	3	1	10	5	1
9	Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
10	Эксперт А	1	3	7	9	5	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	5	10	5	3	1	6	5	1
11	Эксперт А	2	3	7	5	5	4	3	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	5	7	5	3	1	6	5	1
12	Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	6	5	7	5	3	1	10	5	1
13	Эксперт А	1	2	7	5	5	4	3	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	5	7	3	5	1	6	5	1
14	Эксперт А	1	3	6	5	5	4	2	8	7	2
	Эксперт Б	3	2	5	7	4	3	1	6	5	1
15	Эксперт А	1	3	7	5	5	4	2	8	6	2
	Эксперт Б	3	4	8	7	5	3	1	10	5	1

Таблица 17

Исходные данные для расчета коэффициента конкордации

Объекты (n)	Эксперты (m)						
	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
1	2	3	1	3	2	3	3
2	1	2	3	2	1	2	2
3	3	1	4	1	3	1	1
4	7	9	8	7	7	7	8
5	8	8	7	9	9	8	7
6	4	4	2	4	4	5	5
7	5	3	5	5	5	4	4
8	6	6	9	8	8	6	6
9	9	10	10	10	10	10	9
10	10	5	6	6	6	9	10

Вопросы для самопроверки

1. Что такое корреляция?
2. Для чего применяются расчёты ранговой корреляции Спирмена, Кендалла?
3. Что означает коэффициента конкордации, равный 0?
4. Как расставить ранги одинаковым элементам выборки?

Лабораторная работа № 4

МОДЕЛЬ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО СОВЕТЧИКА (МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ)

Цель работы: освоить методику выбора решения при сравнении альтернатив с помощью метод анализа иерархий.

Описание МАИ

МАИ — математический прием системного подхода к принятию решения, позволяющий в интерактивном режиме найти альтернативу, согласованную с пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению. Метод разработан Томасом Л. Саати в 1970 г., широко используется на практике [9, 10].

Достоинство МАИ — универсальность. Недостаток — необходимость получения большого объема экспертной информации. Метод применяется лицом, принимающим решение, при выборе наилучшего варианта из множества рассматриваемых альтернатив. Для осуществления выбора необходимо рассмотреть несколько вариантов, задать критерий, по которому определяется самое подходящее решение. Кроме того, устанавливаются условия, в которых решается задача, и причины, влияющие на выбор.

Для постановки задачи устанавливается множество альтернатив (вариантов решений) и совокупность критериев отбора. Требуется определить наилучшее решение.

Этапы применения метода анализа иерархий

1. Предварительное ранжирование критериев в порядке убывания значимости.

2. Попарное сравнение критериев по важности по десятибалльной шкале с составлением соответствующей таблицы. Элементом таблицы a_{ij} является интенсивность проявления элемента иерархии i относительно элемента иерархии j . При проведении попарных сравнений ставятся следующие вопросы при сравнении элементов: «Какой важнее или имеет большее воздействие, или более вероятен, или предпочтительнее?»

Формируется матрица. В процессе ее заполнения, если элемент i важнее элемента j , то клетку (i, j) заполняют целым числом, а клетку (j, i) — обратным числом автоматически. Попарное сравнение проходит не только с критериями, но и с альтернативами по критериям в отдельности. Определяется вектор приоритетов, в сумме составляющий единицу, оцениваются индекс согласованности, отношение согласованности (ОС). Величина ОС не должна превышать 10 %. В некоторых случаях допускают отклонение не более 20 %.

Работа может быть выполнена двумя вариантами: с помощью табличных расчетов или с использованием специальной программы «Интеллектуальный советчик».

Пример расчета вектора приоритетов с помощью программы «Интеллектуальный советчик»

Программа реализована в среде Borland C++Builder 6. Для использования программы и успешного решения поставленной задач выбора решения необходимо следовать инструкции.

Данная программа не требует дополнительной настройки. Необходимо скопировать файл «Интеллектуальный советчик.exe» в личную папку, затем запустить программу.

В первом диалоговом окне (рис. 3), выполнить следующие действия:

- ввести цель;
- выбрать необходимое количества альтернатив;
- ввести альтернативы;
- выбрать количество характеристик;
- ввести характеристики.

Рис. 3. Окно ввода альтернатив

Результат представлен на рис. 4.

Интеллектуальный советчик

Ввод информации

Пожалуйста, введите цель: Выбор программного средства

Введите количество альтернатив: 3

№	пожалуйста, введите альтернативы...
1	1С:Предприятие
2	Парус
3	Галактика

Введите количество характеристик: 7

№	пожалуйста, введите характеристик...
1	Функциональность
2	Сроки внедрения
3	Бюджет
4	Интегрированность
5	Открытость
6	Предпочтительность
7	Гарантированность

Справка Далее Выход

Рис. 4. Результат ввода данных

Кнопка «Далее» закрывает текущее окно и размещает на экране следующее, возврат в предыдущие окна не предусмотрен. Заккрытие программы осуществляется кнопкой «Выход».

Во втором окне (рис. 5) следует провести сравнительный анализ (попарное сравнение) указанных характеристик, по которым осуществляется выбор варианта (альтернативы).

Интеллектуальный советчик

Сравнение характеристик

Пожалуйста, оцените по 10 бальной шкале следующие характеристики:

	Функцион	Сроки в	Бюджет	Интегрир	Открытос	Предпоч	Гаранти
Функцион	1	9	7	4	5	5	9
Сроки в	0,111	1	0,333	0,167	0,200	0,143	0,500
Бюджет	0,143	3	1	0,500	0,500	0,200	3
Интегрир	0,250	6	2	1	5	3	7
Открытос	0,200	5	2	0,200	1	0,500	4
Предпоч	0,200	7	5	0,333	2	1	5
Гаранти	0,111	2	0,333	0,143	0,250	0,200	1

Справка Назад Далее Выход

Рис. 5. Сравнение характеристик

При заполнении клеток таблицы используется вспомогательное окно ввода оценки (рис. 6).

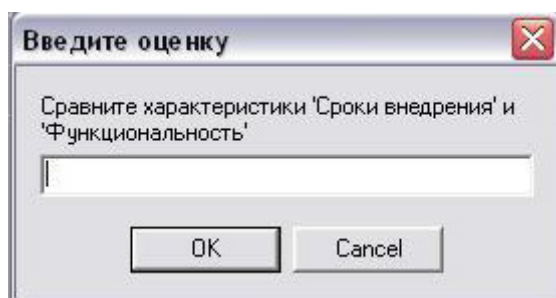


Рис. 6. Окно для ввода оценки

Для продолжения работы программы следует нажать на кнопку «Далее». Если рассчитанное отношение согласованности на основании сравнений характеристик по степени важности превышает норму (более 10%), система сигнализирует о не достаточной согласованности предпочтений пользователя. То есть программа предупреждает об ошибке (рис. 7), дает возможность исправить оценки характеристик. Если отношение согласованности не превысит норму, то результаты работы программы будут приняты для дальнейших вычислений.

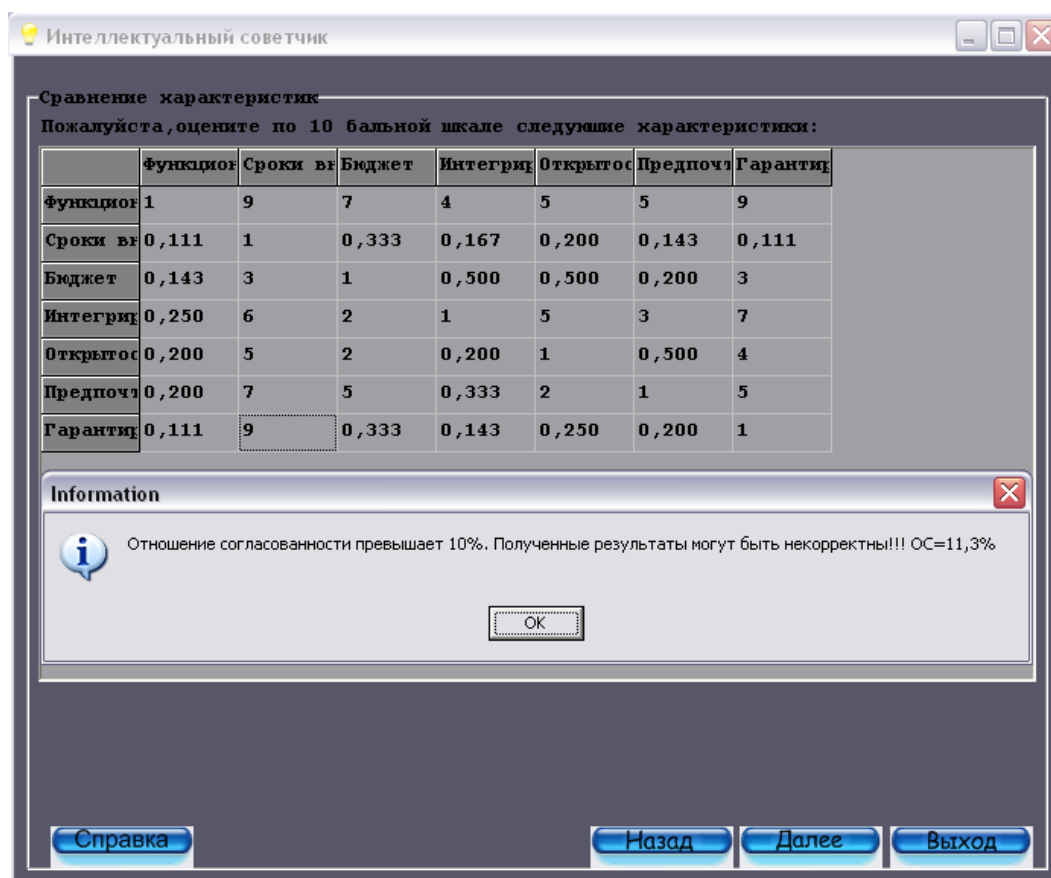


Рис. 7. Предупреждение о несогласованности оценок

На следующем этапе работы программы (нажать кнопку «Далее») осуществляется оценка альтернатив относительно характеристик. Ввод оценок проводится таким же способом, как и в предыдущем окне (рис. 8).

Интеллектуальный советчик

Сравнение альтернатив относительно характеристик
Пожалуйста, оцените по 10 бальной шкале следующие характеристики:

Функциональность	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	0,125	0,111
Парус	8	1	0,500
Галактика	9	2	1

Предпочтительность	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	0,250	0,143
Парус	4	1	0,333
Галактика	7	3	1

Сроки внедрения	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	5	7
Парус	0,200	1	3
Галактика	0,143	0,333	1

Гарантированность	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	0,500	0,500
Парус	2	1	1,000
Галактика	2	1	1

Бюджет	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	5	6
Парус	0,200	1	2
Галактика	0,167	0,500	1

Интегрированность	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	0,143	0,200
Парус	7	1	2
Галактика	5	0,500	1

Открытость	IC: Предг	Парус	Галактик
IC: Предприятие	1	0,200	0,200
Парус	5	1	0,500
Галактика	5	2	1

Справка **Назад** **Далее** **Выход**

Рис. 8. Попарное сравнение альтернатив по каждой характеристике

На последнем этапе пользователю выдается результат обработки данных (рис. 9).

Интеллектуальный советчик

Результат

Глобальные приоритеты относительно альтернатив

Альтернативы	Приоритет
IC: Предприятие	0,128
Парус	0,378
Галактика	0,494

Вывод

Наиболее предпочтительный для вас вариант: Галактика

Выход

Рис. 9. Вывод результата

Задание

1. Ознакомиться с инструкцией.
2. Запустить программу «Интеллектуальный советчик».
3. Выполнить все этапы решения.
4. Оценить результат. Сделать выводы.
5. Оформить отчет с иллюстрациями по шагам. Экранные иллюстрации копировать с помощью клавиши «PrintScreen» непосредственно после заполнения очередной формы.

Вопросы для самопроверки

1. Суть метода анализа иерархий.
2. Перечислите этапы и процедуры МАИ.
3. Каковы оценки результатов МАИ?
4. В чем состоит проблема принятия решений?