

РАЗДЕЛ 3. МЕТОДИКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

3.1. Классификация задач принятия решений.

Под принятием решения понимается выбор одного или нескольких вариантов решения проблемы из некоторого исходного множества допустимых вариантов. Это множество будем называть множеством альтернатив X , а любое решение x из него – альтернативой, $x \in X$. Поэтому часто задачу принятия решений называют задачей выбора. Исходное множество альтернатив может быть правильно сформировано только на основе условий и ограничений со стороны внешних систем, которые затрагивает решаемая проблема. Если ЛПР не учитывает требования внешних систем, то множество альтернатив оказывается неполным, а выбор ограниченным, и хорошего решения получить не удастся. Последствием принятия решения назовем событие (исход), необходимость или возможность появления которого определяется данным решением. Соответственно говорят о необходимых или возможных последствиях. Под возможными последствиями, как правило, подразумеваются часто повторяющиеся и не противоречащие логике последствия. Полезно оценивать и случайные (неопределенные) последствия. В этом случае для оценки вероятности (возможности) их наступления используется теория вероятностей (например, распределение Пуассона для определения вероятности наступления редкого события) или теория нечетких множеств. Последствия должны определяться для всех систем, которые затрагивает данное решение. Необходимо учитывать, что любое решение вызывает как положительные, так и отрицательные последствия.

На принятие решения влияет система предпочтений, определяемая как совокупность правил, устанавливающих приоритеты при выборе из множества альтернатив. Решением называется подмножество множества альтернатив, образованное на основе системы предпочтений. Это подмножество может

содержать одну или несколько альтернатив или может быть пустым, если не удастся выполнить все требования. Лицо, принимающее решение (ЛПР) – субъект, задающий приоритеты, в интересах которого принимается решение. Как правило, ЛПР стремится получить наилучшее (оптимальное, удовлетворительное), с его точки зрения, решение. Под наилучшим решением мы будем понимать решение, множество отрицательных последствий которого минимально по сравнению с другими альтернативами. Выбор решения зависит от информации, имеющейся у ЛПР о данной предметной области, т.е. о множестве альтернатив и состоянии окружающей среды, а также от того, как он устанавливает приоритеты, т.е. от его стиля мышления, стратегии поведения. Например, один любит рисковать, другой чрезмерно осторожничают, третий предпочитает “золотую середину” и т.п. Таким образом, ЛПР обладает некоторой свободой выбора. Однако если он не учитывает особенности решаемой проблемы, ее влияние на внешние системы, то полученное решение может сильно расходиться с реальностью и привести к значительным отрицательным последствиям.

Задачи принятия решений могут различаться типом исхода, структурой предпочтений, количеством оценочных критериев, моделью оптимизации и т.п.

В общем случае задача принятия решения представима кортежем следующего вида:

$$\Sigma = \langle X, I, S, K \rangle,$$

где X – множество альтернатив; I – уровень информации; S – метод получения решения; K – множество критериев оценки альтернатив.

Множество альтернатив зависит от имеющейся базы знаний, новизны задачи, типа проблемной ситуации. Метод получения решения зависит от имеющейся информации о задаче и включает способ выбора альтернатив, определяемый структурой предпочтений ЛПР, и метод принятия решений, обуславливающий способ агрегирования критериев. В частности, способ выбора альтернатив может предусматривать поиск наилучшего решения, удовлетворительного решения, наиболее предпочтительной альтернативы, эффективной (недоминируемой) альтернативы, возможной альтернативы, наиболее типичной альтернативы и т.п. Метод принятия решений включает такие подходы, как векторная оптимизация, использование функции полезности, интерактивное программирование и т.п. Множество критериев определяется требованиями внешних систем, степенью детализации задачи и требуемым качеством ее решения. Наиболее существенным фактором является информационная среда задачи.

В зависимости от уровня исходной информации в теории принятия решений применяются традиционно два подхода: классический и поведенческий. *При классическом подходе* каждый вариант решения x оценивается некоторой неотрицательной действительной функцией выигрыша $g(x)$. Оптимальный вариант выбирается по максимуму функции $g(x)$: $x^* = \arg \max_{x \in X} g(x)$.

Этот подход хорошо работает в детерминированной среде и условиях риска. В условиях неопределенности и нечеткости более предпочтителен *поведенческий подход*, при котором множество последствий каждого варианта $s(x)$ сравнивается с множеством допустимых последствий при решении данной проблемы $s_0(x)$. Выбираются такие решения, для которых множество их последствий принадлежит множеству допустимых последствий: $x^* = \{x : s(x) \subset s_0(x)\}$. Множество допустимых последствий формирует ЛПР, исходя из условий и ограничений задачи.

Процесс принятия решений целесообразно рассматривать как систему, состоящую из некоторого набора типовых подсистем (этапов) и их элементов (процедур, действий, операций), взаимодействующих между собой, число и состав которых может варьироваться в зависимости от условий и типа решаемой задачи (класса задач). Входным элементом системы принятия решений (СПР) является информация о проблемной области (исходная информация), выходным – множество допустимых (оптимальных) решений (их реализаций). В дальнейшем мы будем отождествлять принятие решения и его реализацию.

Основными неформальными элементами СПР являются формирование множества альтернатив, оценивание альтернатив и выбор оптимальных (в определенном смысле) вариантов решения. Эти элементы рассмотрены в последующих разделах.

3.2. Модели принятия решений

Под моделью принятия решений понимается процедура оценивания, помогающая делать выбор между вариантами. Основная трудность при этом возникает из-за наличия большого числа противоречивых критериев, а также их несоизмеримости. Классификация моделей может быть проведена по ряду признаков. По числу целей (способу описания объекта) различают одно- и многоцелевые модели, в зависимости от проблемной ситуации (области применения) возможны следующие типы моделей: модели компромиссов, оптимизационные модели, диагностические модели и т.п.

К одноцелевым (однокритериальным) моделям относятся модели “прибыль – издержки” и “эффективность – затраты”. К многоцелевым (многокритериальным) моделям – многомерные функции полезности и априорные модели сравнения вариантов, основанные на обработке экспертной информации, которые различаются схемами агрегирования исходных (локальных, частных) целей и критериев.

Модели компромиссов описывают способы взвешивания и оценки замен в средствах и целях и особенно существенны для сложных систем, содержащих взаимозависимые подсистемы. Обычно выделяется два типа моделей: модели, описывающие компромиссы между взаимно замещающими системами, когда одна система может быть замещена другой с точки зрения достижения целей

общей системы; модели, относящиеся к компромиссам между взаимно дополнительными системами, когда одна из них дополняет (усиливает или ослабляет) другую. *Оптимизационные модели* в зависимости от постановки задачи и степени ее формализации включают дифференциальное исчисление, метод множителей Лагранжа, методы линейного программирования, целевое программирование, динамическое программирование, квадратичное и нелинейное программирование и т.п. *Диагностические модели* устанавливают способы систематического поиска неисправностей при нарушении нормальной работы системы и базируются на использовании методов распознавания образов, таксономии и классификации.

Одноцелевые модели. В этих моделях каждая альтернатива оценивается одним критерием, поэтому их называют также однокритериальными. Из одноцелевых моделей наиболее часто используются модели двух типов: “прибыль – издержки” и “эффективность – затраты”. Применение модели “прибыль – издержки” связано с расчетом одного экономического критерия, так называемого коэффициента стоимости c , выражающего разность или отношение между прибылью и издержками, эффективностью и затратами, входом и выходом системы и т.д. В общем случае модель “прибыль – издержки” имеет вид

$$c(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) - \sum_{k=1}^m b_k(x), \quad (3.2.1)$$

где $c(x)$ – коэффициент стоимости альтернативы x ; первая сумма учитывает общую прибыль для данного варианта по всем элементам положительного воздействия; вторая сумма учитывает общие издержки по всем элементам отрицательного воздействия на достижение заданной цели. В (3.2.1) коэффициент стоимости равен разности прибыли и издержек; в некоторых случаях удобно определять его как отношение прибыли к издержкам, при этом первая сумма делится на вторую. Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg \max_{x \in X} c(x), \quad (3.2.2)$$

т.е. наилучшим считается решение, для которого коэффициент стоимости максимален на множестве альтернатив (читается « x^* равно аргмаксимум по x из X $c(x)$ »).

При использовании модели “эффективность – затраты” сравнение проводится между степенью достижения целей и затратами. Эта модель может быть представлена в виде

$$I(x) = (a(x) - a_0) / b(x), \quad (3.2.3)$$

где $I(x)$ – индекс эффективности затрат для альтернативы (варианта решения) x , $(a(x) - a_0)$ – разность между результатами (степенью достижения цели) после и до осуществления варианта x ; $b(x)$ – суммарные затраты на вариант x . Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg \max_{x \in X} I(x), \quad (3.2.4)$$

т.е. наилучшим считается решение, для которого индекс эффективности затрат максимален на множестве альтернатив.

Для того, чтобы расчеты по этим моделям были надежными (достоверными), нужно учитывать как можно больше составляющих прибыли и издержек для первой модели или эффекта и затрат для второй модели. Рассмотренные модели, хотя и являются упрощенными, обладают большой степенью общности и применимы к решению разнотипных задач выбора. Кроме того, они используются для нахождения компромиссов, когда решение формируется под воздействием конкурирующих факторов. Проиллюстрируем их применение на двух примерах.

Пример 1. Пусть имеется производственное предприятие (фирма, завод, фабрика и т.п.), выпускающее продукцию. Требуется определить оптимальный уровень затрат на контроль продукции. Выберем в качестве меры эффективности – точность (качество) контроля (ось абсцисс на рис. 3). По оси ординат будем откладывать затраты (издержки). Тогда если точность контроля сделать очень высокой, то возрастут прямые издержки, связанные с затратами на контроль (кривая 1); если же точность контроля сделать чересчур низкой, то возрастут косвенные издержки, связанные с возвратом продукции, гарантийным ремонтом, потерей престижа и т.п. (кривая 2). Сложение кривых 1 и 2 дает кривую 3. Наилучшее решение по точности контроля соответствует абсциссе минимума кривой 3, а наилучшее решение по суммарным затратам – ординате минимума этой кривой.

Пример 2. Пусть имеется предприятие сферы массового обслуживания (мастерская, комбинат бытового обслуживания, магазин и т.п.). Требуется определить оптимальный уровень качества обслуживания. Отложим по оси ординат затраты, а по оси абсцисс – критерий качества обслуживания, например время обслуживания. Рассуждения проводятся аналогично. Если качество сделать очень высоким (малое время обслуживания), то сильно увеличатся прямые издержки, связанные с затратами на обслуживание (кривая 1), если же сделать его слишком низким (большое время обслуживания), то возрастут косвенные издержки, связанные с рекламациями, потерей времени клиентами и соответственно снижением дохода (кривая 2). Наилучшие решения по качеству обслуживания и суммарным затратам соответствуют координатам минимума кривой 3.

Таким образом, если учитывать только прямые издержки или только косвенные, то разумного решения получить не удастся, и лишь учет обоих типов издержек приводит к правильному решению.

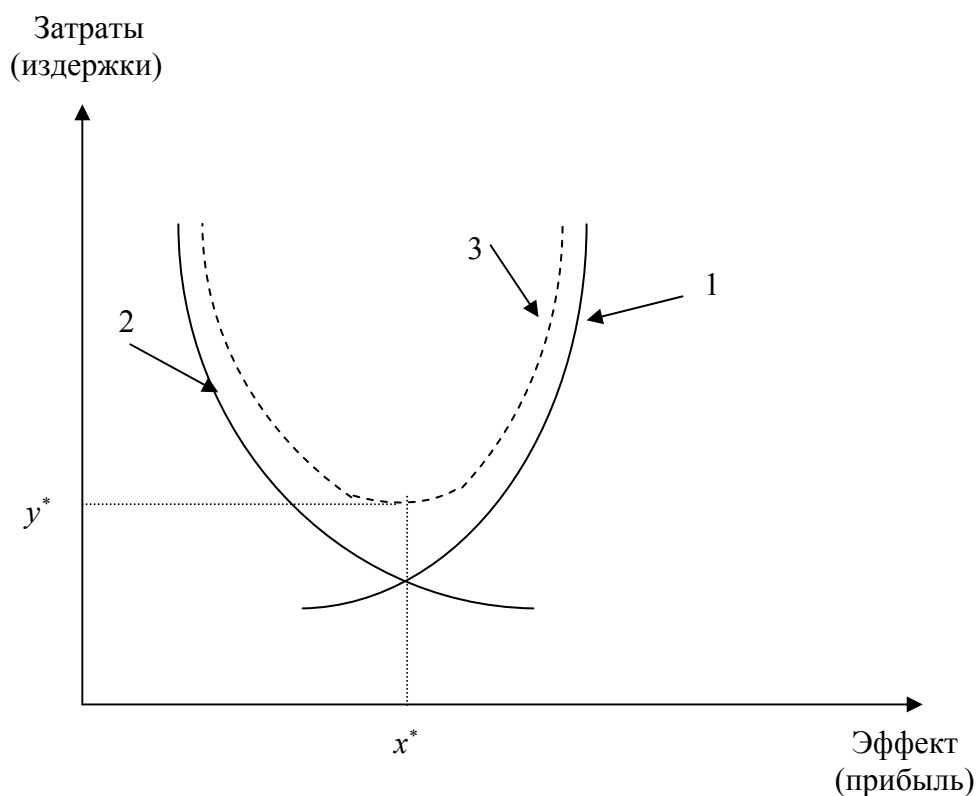


Рис. 1. Применение одноцелевых моделей

Многоцелевые модели. В этих моделях каждая альтернатива оценивается множеством критериев, поэтому они называются также многокритериальными. К наиболее известным многокритериальным моделям относятся многомерные функции полезности, модели многомерного шкалирования, метод анализа иерархий (метод собственных значений).

Из многомерных моделей наиболее часто используются аддитивные и мультипликативные многомерные функции полезности. Функцией полезности (ценности) называется скалярная функция U , устанавливающая отношение порядка на множестве вариантов

$$U(K_1, \dots, K_n) > U(K'_1, \dots, K'_n) \Leftrightarrow (K_1, \dots, K_n) \succ (K'_1, \dots, K'_n), \quad (3.2.5)$$

где $\succ$ — символ “более предпочтителен, чем”; $(K_1, \dots, K_n)$ — точка пространства последствий (критериального пространства). Обобщенная форма аддитивной модели полезности имеет вид

$$U_a(x) = \sum_{i=1}^n p_i \hat{U}_i(x), \quad (3.2.6)$$

где $U_a(x)$ — функция полезности варианта x ; p_i — вес фактора (критерия) i ; $\hat{U}_i(x)$ — оценка полезности варианта x по критерию i .

Обобщенная форма мультипликативной функции полезности имеет вид

$$U_M(x) = \prod_{i=1}^n p_i \hat{U}_i(x). \quad (3.2.7)$$

Оценки $\hat{U}_i(x)$, как правило, получаются экспертным путем, но могут задаваться и аналитически применением подходящей аппроксимирующей функции. Аддитивная функция слабо чувствительна к изменению свойств с малыми весами (малыми оценками полезности); мультипликативная, наоборот, сильно зависит от изменения свойств с малыми значениями оценок полезности. В теории принятия решений доказывается, что функция полезности имеет аддитивный вид, если факторы, входящие в модель, аддитивно независимы. Функция полезности имеет мультипликативную форму, если факторы взаимно независимы по полезности. Первое требование означает фактически уверенность эксперта в том, что модель является линейной по факторам, а второе – что модель содержит взаимодействия факторов различных порядков. На практике обычно веса p_i нормализуют так, что обе формы представления оказываются эквивалентными (могут быть преобразованы друг в друга).

Многомерные модели сравнения вариантов различаются подходами к установлению весов факторов и подфакторов и схемами их агрегирования.

Стандартная процедура сравнения вариантов по многим факторам включает формулирование задачи, выбор факторов и подфакторов, построение дерева решений, назначение весов факторам и их нормализацию, назначение весов подфакторам и нормализацию весов, подсчет показателей (баллов) по всем факторам для каждого варианта, получение взвешенных оценок и суммарного числового выражения полезности для каждого варианта решения. Основные неформальные шаги в этом алгоритме – выбор факторов и подфакторов, построение дерева решений и назначение весов факторам и подфакторам.

3.3. Методы решения многокритериальных задач выбора

Многокритериальная задача выбора формулируется в следующем виде. Дано множество допустимых альтернатив, каждая из которых оценивается множеством критериев. Требуется определить наилучшую альтернативу. При ее решении основная трудность состоит в неоднозначности выбора наилучшего решения. Для ее устранения используются две группы методов. В методах первой группы стремятся сократить число критериев, для чего вводят дополнительные предположения, относящиеся к процедуре ранжирования критериев и сравнения альтернатив. В методах второй группы стремятся сократить число альтернатив в исходном множестве, исключив заведомо плохие альтернативы.

К методам первой группы относятся метод свертки, метод главного критерия, метод пороговых критериев, метод расстояния. Следует отметить, что строгое обоснование этих методов отсутствует и их применение определяется условиями задачи и предпочтением ЛПР.

Метод свертки состоит в замене исходных критериев (их называют также локальными или частными) K_j одним общим критерием K . Эта операция называется сверткой или агрегированием частных критериев. Метод целесообразно применять, если по условиям задачи частные критерии можно расположить по убыванию важности так, что важность каждой пары соседних критериев различается не сильно, либо, если альтернативы имеют существенно различающиеся оценки по разным критериям. Наиболее часто используются аддитивная, мультипликативная и максиминная свертки.

Аддитивная свертка (от англ. addition – сложение) имеет вид

$$K(x) = \sum_{j=1}^n a_j K_j(x), \quad (3.3.1)$$

где $K(x)$ – общий критерий для альтернативы $x \in X$, показывающий ее пригодность для достижения цели; $\{K_j(x)\}_1^n$ – набор исходных критериев; n – число исходных критериев; a_j – относительный вес (важность) частного критерия K_j . Для весов выполняется условие нормировки $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, которое необходимо, чтобы результаты, полученные в разных условиях, были сопоставимы. Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg \max_{x \in X} K(x), \quad (3.3.2)$$

т.е. наилучшим считается решение, которому соответствует максимум общего критерия на множестве альтернатив.

Мультипликативная свертка (от англ. multiplication – умножение) применяется в двух формах:

$$K(x) = \prod_{j=1}^n K_j^{a_j}(x), \quad (3.3.3)$$

или

$$K(x) = \prod_{j=1}^n a_j K_j(x), \quad (3.3.4)$$

где Π – знак произведения. Первая из этих форм используется гораздо чаще, чем вторая. Наилучшее решение определяется выражением

$$x^* = \arg \max_{x \in X} K(x). \quad (3.3.5)$$

Максиминная свертка (выбор по наихудшему критерию) имеет вид

$$K(x) = \min_j a_j K_j(x). \quad (3.3.6)$$

Эта свертка учитывает критерий, имеющий наименьшее значение. Иногда при ее применении полагают, что веса критериев близки друг к другу, либо все критерии имеют одинаковую важность, т.е. $a_j = \text{const}(j) = 1/n$. В этом случае она называется сверткой без учета веса критериев и принимает вид

$$K(x) = \min_j K_j(x), \quad (3.3.7)$$

причем множитель $1/n$ не имеет значения, так как сравнение альтернатив выполняется в шкале порядка. Наилучшее решение определяется выражением (5.3.5). Подставив в (5.3.5) выражение (5.3.6), получим

$$x^* = \arg \max_{x \in X} \min_j a_j K_j, \quad (3.3.8)$$

поэтому эту свертку называют по основным операциям максминной. Использование того или иного типа свертки отражает представление ЛПР о стратегии (способе достижения целей).

Метод пороговых критериев часто применяется в задачах обеспечения (удовлетворения), например при планировании и проектировании, когда ограничения задаются в виде

$$K_j(x) \geq K_{j0}; j = 1, \dots, n, \quad (3.3.9)$$

где $K_{j0}(x)$ – пороговые значения критериев. Их совокупность обычно характеризует некоторый аналог (базовый уровень). образуем свертку $K(x) = \min_j (K_j(x) / K_{j0})$,

$$(3.3.10)$$

тогда наилучшее решение определяется выражением вида (3.3.5).

Метод главного критерия. Если исходной информации достаточно, чтобы из множества исходных критериев $K_j(x)$ выделить главный (основной) $K_0(x)$, т.е. такой, который значительно превосходит по важности все другие критерии (на практике в три и более раз), то наилучшее решение определяется в виде

$$x^* = \arg \max_{x \in X} K_0(x), \quad (3.3.11)$$

при дополнительных условиях $K_j(x) \geq K_{j\text{порог}}$ для всех остальных критериев, т.е. их значения должны быть не меньше некоторых пороговых значений.

Метод расстояния состоит во введении метрики (расстояния) в пространстве критериев. Пусть исходной информации достаточно, чтобы определить “идеальное” (эталонное) решение, соответствующее точке абсолютного максимума в пространстве критериев. Обозначим ее, как $x_0(K_{01}, \dots, K_{0n})$. Отметим, что идеальное решение на практике не достижимо и определяется лишь теоретически. Введем для каждой альтернативы $x \in X$ расстояние до точки абсолютного максимума $d(x)$. Наилучшее решение определяется как наиболее близкое к идеальному

$$x^* = \arg \min_{x \in X} d(x). \quad (3.3.12)$$

В качестве меры расстояния используются различные функции, например, Махалобиса, Минковского. При использовании функции Минковского

$$d(x) = \left\{ \sum_{j=1}^n |K_j(x) - K_{0j}|^p \right\}^{1/p} \quad (3.3.13)$$

или с учетом веса критериев

$$d(x) = \left\{ \sum_{j=1}^n |a_j K_j(x) - a_j K_{0j}|^p \right\}^{1/p}. \quad (3.3.14)$$

При $p=1$ получаем расстояние Хемминга, при $p=2$ – евклидово расстояние, при $p=\infty$ – расстояние по максимальному различию, при $p=-\infty$ – расстояние по минимальному различию. Выбор параметра p зависит от условий задачи и предпочтений ЛПР. Отметим, что если в качестве идеального решения использовать не абсолютный максимум, а абсолютный минимум, то в выражении (5.3.12) операция $\min$ изменится на операцию $\max$. Обзор методов многокритериальной оптимизации можно найти в [1, 2, 6, 11, 12].

Построение множества Парето. Наряду с методами первой группы, использующими свертку в пространстве критериев, применяются методы второй группы, основанные на сужении множества альтернатив, в которых пытаются уменьшить число возможных вариантов решений, исключив заведомо плохие. Один из подходов, обладающий большой общностью, был предложен итальянским экономистом В.Парето в 1904 г. и называется методом, основанным на принципе Парето или, коротко, методом Парето. (Имеется и еще один метод Парето для оценки качества, но путаницы здесь не возникнет, так как мы его касаться не будем). Он применяется, когда число альтернатив велико и альтернативы имеют противоречивые оценки по разным критериям. В этом случае применение методов первой группы может привести к ненадежным решениям и необходим неформальный анализ множества альтернатив. Для уменьшения числа альтернатив исходного множества строят множество Парето, являющееся подмножеством исходного. Определим множество Парето в виде

$$x_\pi = \{x_\pi \in X : \forall x \in X, \forall i K_i(x_\pi) \geq K_i(x), \exists j K_j(x_\pi) > K_j(x)\}, \quad (3.3.15)$$

т.е. альтернатива принадлежит множеству Парето, если она не хуже других по всем критериям и хотя бы по одному критерию лучше. Альтернативы из множества Парето называются парето-решениями, эффективными или недоминируемыми (непревосходимыми) альтернативами. При решении многокритериальных задач используется принцип Парето, заключающийся в том, что наилучшее решение следует выбирать среди альтернатив, принадлежащих множеству Парето. Этот принцип выполняется в большинстве практических ситуаций, когда альтернативы оцениваются по противоречивым

критериям. Он позволяет сузить исходное множество альтернатив, причем окончательный выбор остается за ЛПР. Альтернативы, входящие в множество Парето, попарно не сравнимы друг с другом, т.е. по одним критериям лучше одна альтернатива, по другим другая и т.д., и их невозможно улучшить одновременно по всем критериям. Поэтому анализ множества Парето позволяет найти компромисс между противоречивыми требованиями и дает ЛПР возможность судить о том, какова “цена” увеличения одного из критериев и как это скажется на ухудшении остальных. Построение множества Парето является необходимым при решении многокритериальных задач выбора в системах (управление, проектирование промышленных и транспортных объектов и т.п.). Отметим еще одну важную особенность альтернатив из множества Парето: каждая из них представляет целый класс (группу) решений, превосходящих остальные по одному или нескольким критериям. Поясним это примером. Пусть имеется учебная группа (множество альтернатив), требуется выбрать наилучшего студента (альтернативу) по ряду критериев, например сообразительность, успеваемость, манера поведения, внешний вид, умение выражать свои мысли и т.п. Предположим, что студент x_1 – самый сообразительный, а по остальным критериям не выделяется. Студенты x_2, x_3, x_4, x_5 имеют высокие значения остальных критериев, так, что они в среднем превосходят x_1 , причем x_2 лучше всех по успеваемости, а по остальным критериям не хуже других студентов. Тогда x_1 обязательно попадает в множество Парето, так как он уникальный (единственный) по первому критерию, а от группы студентов $x_2 \dots x_5$ в Парето попадает один представитель – x_2 , хотя остальные студенты превосходят x_1 по нескольким критериям (число критериев здесь не имеет значения).

После того, как построено множество Парето, для определения наилучшего решения из оставшихся применяются в зависимости от условий задачи методы первой группы: метод свертки, метод главного критерия и т.п. либо графические методы, например метод диаграмм.

Решение многокритериальных задач выбора еще более усложняется, если изучаемая система взаимодействует с окружающей средой. В этом случае решение зависит от так называемых неконтролируемых параметров. Например, для измерительных систем это могут быть влияющие величины (температура, влажность, давление и т.п.), для транспортных – погода, состояние дороги и т.п. Неконтролируемые изменения состояния окружающей среды являются дополнительным источником неоднозначности выбора наилучшего решения. Рассмотрим две полярные стратегии выбора наилучшего решения, позволяющие получить обоснованные решения.

Стратегия, основанная на принципе наихудшей реакции окружающей среды (метод гарантированного результата). Метод применяется, когда среда ведет себя непредсказуемо или враждебно (природная среда, противник). В этом случае определить наилучшее решение не представляется возможным, так как

неизвестно поведение среды, но можно определить так называемое гарантированное решение, которое справедливо при любом состоянии среды. Обозначим α – неконтролируемый параметр, характеризующий состояние окружающей среды (он может быть векторным), $\alpha \in G_\alpha$, где G_α – некоторое множество, например интервал значений. Тогда, частные критерии K_j и общий критерий K будут зависеть от параметра α , т.е. $K_j = K_j(x, \alpha)$, $K = K(x, \alpha)$. Принцип наихудшей реакции среды распространяет схему выбора по наихудшему критерию (максиминную свертку) на случай влияния окружающей среды. Альтернатива выбирается из условия

$$x^* = \arg \max_{x \in X} \min_{\alpha \in G_\alpha} K(x, \alpha), \quad (3.3.16)$$

где $K(x, \alpha)$ – общий критерий, получаемый сверткой по исходным (частным) критериям. Решение, даваемое (3.3.16), называется гарантированным результатом, так как при любом значении параметра α гарантируется

получение критерия не меньшее, чем $\min_{\alpha \in G_\alpha} K(x, \alpha)$. Надежность такого решения равна 1, т.е. ЛПР не рискует, принимая его. Полученный результат может быть улучшен, если исходная информация позволяет сделать предположение о значении параметра α (состоянии среды), что связано с определенным риском, так как предположение может не оправдаться.

Подход, основанный на принципе равновесия (принципе Нэша). Часто действия окружающей среды являются целенаправленными, например, это имеет место для систем, включающих субъектов, причем каждая из систем стремится достичь своей цели. Случай несогласованности целей субъектов называется конфликтом. Такая ситуация характерна для теории игр. При анализе конфликтов со многими субъектами одна из важных проблем – это проблема коллективных решений, или компромисса. Для принятия решений в таких системах сохраняет свое значение принцип Парето. Эффективные альтернативы, принадлежащие множеству Парето, обладают тем свойством, что улучшить значение целевой функции (критерия) какого-либо субъекта можно только за счет других субъектов. Наряду с принципом Парето широко используется принцип равновесия, называемый также принципом устойчивости, или принципом Нэша. Этот принцип позволяет сузить множество альтернатив, когда речь идет о коллективном решении, принимаемом всеми взаимодействующими субъектами по договоренности, при этом каждый поступает частью своих интересов. Определим равновесное решение как такое, которое принимается всеми субъектами одновременно, по договоренности. Пусть имеется N субъектов, каждый из которых может выбирать свое решение (стратегию) $x^{(l)} \in X^{(l)}$ так, чтобы максимизировать свой критерий $K^{(l)}$. Значение критерия при этом зависит от выбора других субъектов, т.е. $K^{(l)} = K^{(l)}(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}, \dots, x^{(N)})$. Решение $x_0 = \{x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(l)}, \dots, x_0^{(N)}\}$ называется равновесным, если для любого l выполняется условие

$$K^{(l)}(x_0) = \max_{x^{(l)}} K^{(l)}(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(l-1)} x^{(l)}, x_0^{(l+1)}, \dots, x_0^{(N)}). \quad (3.3.17)$$

Равновесное решение можно назвать устойчивым, так как если субъект l отступит от своего равновесного решения, т.е. выберет стратегию $x^{(l)} \neq x_0^{(l)}$, то при условии, что остальные субъекты сохраняют свой выбор, он проиграет. Принцип Нэша как раз и состоит в том, что наилучшие решения принадлежат множеству равновесных решений. Однако следует отметить, что равновесные решения в общем случае не являются эффективными и наоборот. Например, если решение принимается всеми субъектами независимо, то их выбор вряд ли будет устойчивым. Кроме того, и при одновременном решении часть субъектов может выбрать иное решение (например, эффективное), что даст им преимущество перед остальными. Таким образом, метод равновесия эффективен при сужении множества альтернатив в закрытых системах, когда равновесные решения одновременно принадлежат множеству Парето. Это бывает весьма редко, так как большинство систем являются открытыми и для них эффективные альтернативы являются неустойчивыми, а устойчивые – неэффективными.

Рассмотренные выше методы основаны на критериальном описании задачи выбора, при котором каждая альтернатива представлена точкой в пространстве критериев. Помимо критериального описания оптимизационной задачи используется также *теоретико-множественное описание*, оперирующее понятиями функции выбора и бинарного отношения. Функцией выбора на множестве альтернатив X называется оператор C , т.е. функция с областью определения X и областью значений 2^X , устанавливающая соответствие между множеством X и множеством всех его подмножеств 2^X , удовлетворяющий соотношению $C(X) \subseteq X$. Отсюда следует, что функция выбора не расширяет множество альтернатив.

Рассмотрим примеры функций выбора, у которых $X \subset R^n$, где R^n – n -мерное критериальное пространство. Предполагается, что множеству альтернатив соответствует эквивалентное описание в критериальном (факторном) пространстве.

Функция выбора по Парето определяется в виде

$$C^\pi(X) = \{x \in X : \forall y \in X : x \neq y \exists i K_i(x) > K_i(y)\}, \quad (3.3.18)$$

т.е. альтернатива x выбирается, если любая другая альтернатива y из множества X имеет хотя бы по одному критерию значение меньше чем x .

Функция локально-экстремального выбора записывается в виде

$$C^{лэ}(X) = \{x \in X : \exists i \forall y \in X : K_i(x) \geq K_i(y)\}, \quad (3.3.19)$$

т.е. альтернатива x выбирается, если она имеет максимальное значение хотя бы по одному критерию. Очевидно, что $C^{лэ}(X) \subseteq C^\pi(X)$.

Функция оптимального выбора имеет вид

$$C^o(X) = \left\{ x \in X : x^* = \arg \max_{x \in X} u(x) \right\}, \quad (3.3.20)$$

где $u : x \rightarrow R^1$ интерпретируется как функция полезности. Если $X \in R^n$; $u(x)$ – выпуклая функция от x , обладающая свойством $u\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{u(x)+u(y)}{2}$ при любых $x \neq y$, то $C^o(X) \subseteq C^\pi(X)$.

Обычно выбор осуществляется на основании информации о попарных сравнениях объектов (альтернатив), формализуемой введением понятия бинарного отношения. Пусть X – исходное множество. Подмножество $R \in X \times X$ называется бинарным отношением и записывается в виде $(x, y) \in R$ или xRy , где $x, y \in X$.

При решении задачи выбора используется аппроксимация отношения на исходном множестве альтернатив другим отношением, основанным на ряде предположений о характере предпочтений. При этом аппроксимирующее отношение может быть как менее сильным (когда исходное множество недостаточно представительно), так и более сильным (когда исходное множество слишком велико). В первом случае ряд ограничений снимается, во втором случае – вводятся дополнительные ограничения. Наиболее типичный случай сильной аппроксимации, когда отношение задается изотонной функцией, т.е. сохраняющей расстояние. В этом случае задача выбора сводится к задаче поиска экстремума функции.

Существенное значение при решении многокритериальной задачи имеет обеспечение необходимых свойств аппроксимирующего отношения, что связано с выбором меры различия в факторном пространстве. Обычно используются такие свойства бинарных отношений как *транзитивность*, *рефлексивность*, *симметричность*, что позволяет ввести меру расстояния. Бинарное отношение транзитивно, если из xRy и yRz следует, что xRz . Примерами транзитивных отношений являются отношения строгого порядка (больше, меньше, хуже и т.п.); примером нетранзитивных отношений являются отношения сходства или несходства. Отношение R рефлексивно, если для всякого $x \in X$: xRx . Если же ни для одного x это не выполняется, то отношение называется антирефлексивным. Примерами рефлексивного отношения являются отношения нестрогого порядка (не больше, чем; не меньше, чем; не лучше, чем и т.п.), подобия, сходства, а примером антирефлексивного отношения – строгий порядок. Если для $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$, то бинарное отношение называется симметричным. Если условие не выполняется ни для какой пары $(x, y), x \neq y$, то отношение антисимметрично. Примерами симметричного отношения являются отношения подобия, сходства, а несимметричного – строгий порядок. Отношение Парето, определенное выше, транзитивное, антирефлексивное и антисимметричное. Полезным свойством отношения является *цикличность*, облегчающая построение транзитивного замыкания отношения, которое само не является транзитивным, и введение

подходящей меры расстояния. Отношение R называется k -циклическим, если $R^k = R$.

Человеко-машинные методы принятия решений. Эти методы, называемые также интерактивными ЧМ-процедурами, не требуют изначально фиксированного определения схемы выбора наилучшего решения и применяются, когда важно сохранить всю имеющуюся информацию, например, если неизвестно явное выражение для функции полезности, имеется большое число критериев, схема агрегирования которых не ясна, и т.п. В ЧМ-процедурах ЛПР может непосредственно влиять на поиск решения в режиме диалога с ЭВМ. Они используют метод направленного перебора и различаются способом последовательной свертки информации в процессе получения удовлетворительного (субоптимального) решения. Различают процедуры, основанные на сужении множества допустимых решений, сужении множества весовых векторов, сужении множества критериев и методы одномерного поиска. Большинство ЧМ-процедур разработано для решения задач линейного программирования.

Существует значительное число модификаций ЧМ-процедур. Основными условиями при выборе той или иной процедуры являются имеющаяся у ЛПР информация о задаче и требования к точности решения.

3.4. Методы поиска решения

Если решение задачи неизвестно или неоднозначно, например, отсутствуют аналоги или его трудно определить в явном виде, то применяются методы поиска (вывода) решения. Большинство этих методов основано на стратегиях полного перебора, имплицитного (неявного, неполного) перебора или сокращенного (направленного) перебора на основе эвристик (эвристический поиск). Стратегия *полного перебора* используется при отсутствии достаточной априорной информации о задаче и сравнительно небольшой мощности множества альтернатив (до 10^3 элементов при ручном счете и до 10^9 – на ЭВМ). *Имплицитный перебор* включает большую группу градиентных методов, например симплекс-метод, метод минимальной стоимости (“жадный” алгоритм), динамическое программирование, $(\alpha - \beta)$ -метод, метод ветвей и границ и т.п. Все они основаны на рассмотрении на каждом шаге поиска не всего пространства задачи, а некоторого его фрагмента, определяемого симметрией задачи. *Эвристические методы* основаны на моделировании эвристик – качественно-ситуационных способов решения задач. Эвристики – это пошаговые процедуры, которые за конечное число шагов обеспечивают удовлетворительное решение задачи путем сокращения возможных вариантов при поиске решения и использования направленного перебора. Эвристические методы применяются для решения слабо структурированных, плохо формализуемых задач, которые не могут быть описаны числовой моделью и характеризуются неточностью, неполнотой, неоднозначностью, неясностью

информации. Их применение также целесообразно при жестких ресурсных ограничениях (действия в экстремальных или неизвестных ситуациях). Эвристический поиск включает системный анализ задачи; выявление ограничений, влияющих на результат (как внешних, так и внутренних); анализ возможности получения результата простыми средствами; определение особенностей, ограничений и “узких мест”, требующих использования дополнительных средств, и путей их уменьшения; моделирование задачи и возможных ситуаций для получения наилучшего решения. Эвристический поиск базируется на использовании ряда общих подходов, применяемых человеком в процессе решения задач при генерировании вариантов решений, их сравнении и выборе оптимального решения. *Метод аналогии* (прецедента) является наиболее общим и может предусматривать аналогию в целях и критериях, структуре и функциях, условиях функционирования, в результатах и их оценке, способах описания и моделях. *Метод упрощения* применяется, когда прямая аналогия затруднена из-за сложности проблемы и заключается в снятии ряда условий и ограничений, повышении “симметрии” задачи. *Метод агрегирования* (ассоциации, погружения) дополняет предыдущий и предусматривает применение концептуального аппарата более высокого уровня, что позволяет рассматривать решаемую задачу как часть более общей (такой подход характерен для решения так называемых некорректных задач).

Основные методы поиска решения можно разделить на три группы. Первую группу составляют *стратегии поиска по состояниям*. Исходная информация представляется в виде пространства ситуаций, описываемого как состояние системы и окружающей среды. Алгоритм поиска состоит в поиске пути $\{l\}$, ведущего из начального состояния в одно из конечных (целевых состояний) $S_0 \rightarrow \{S_k\}$. К этой группе относятся методы поиска “в ширину”, поиска “в глубину”, $(\alpha - \beta)$ -метод, метод ветвей и границ, метод кратчайшего пути, методы прямого и обратного поиска, а также градиентные методы, например, метод минимальной стоимости, метод динамического программирования, метод векторной оптимизации, интерактивные ЧМ-методы.

Вторую группу составляют *стратегии поиска по задачам*. Исходная информация представляется как задача σ и множество элементов решения (подзадач) σ_{ij} , где j – число уровней решения; i – число элементов на j -м уровне. Алгоритм поиска состоит в сведении исходной задачи к более простым задачам, пока не будут получены элементарные задачи $\sigma \rightarrow \bigcup_i \bigcap_j \sigma_{ij}$. К этой группе относятся метод ключевых операторов, метод общего решателя задач и другие.

Третью группу составляют методы, использующие логический вывод. Исходная информация представляется в виде описания состояний в рамках некоторой формальной системы, включающей алфавит, аксиомы и правила вывода. Путем логического вывода проверяется, можно ли получить конечное

состояние σ_k из начального состояния σ_0 . К этой группе относятся дедуктивный метод, метод продукций и ряд других.

Разработаны различные модификации методов поиска с целью повышения их эффективности, а также комплексные целевые стратегии поиска общего характера, моделирующие процесс рассуждения человека. Рассмотренные схемы допускают обобщение на нечеткий случай путем объединения стратегий поиска по состояниям и по задачам, что повышает гибкость стратегии поиска в различной информационной среде.

В заключение рассмотрим применение некоторых из перечисленных методов поиска решения. Методы перебора не требуют особого комментария. Из множества допустимых альтернатив выбирается произвольная альтернатива. Если она удовлетворяет критериям, то решение получено, если же нет, то берется следующая альтернатива и т.д. Решением считается альтернатива, которая удовлетворяет критериям задачи. Если же таких альтернатив несколько, то выбирается та из них, которая имеет наилучшие значения критериев.

Среди градиентных методов широкое распространение получил так называемый «жадный» алгоритм, в котором решения выбираются в соответствии со значением оценочной функции (функции стоимости). Он приводит к решению в тех случаях, когда задачу можно свести к определению пересечения двух семейств подмножеств, принадлежащих к не зависящим друг от друга частям одного и того же множества.

Рассмотрим пример. Имеется схема автотранспортных перевозок между пунктами, представленная в виде графа, где пункты пронумерованы цифрами от 1 до 10 (рис. 2). Требуется найти дерево, имеющее минимальную сумму расстояний. В качестве оценочной функции использована стоимость перевозки, пропорциональная расстоянию (на графе указаны расстояния в километрах).

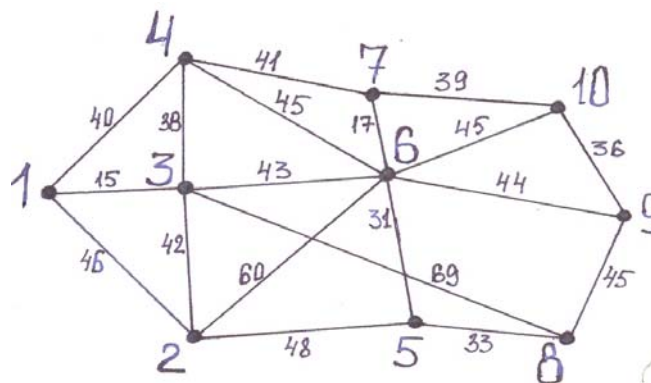


Рис. 2. Граф системы автотранспортных перевозок

Для решения задачи расположим ребра-пути в порядке возрастания стоимости. Имеем 1-3, 6-7, 5-6, 5-8, 9-10, 3-4, 7-10, 1-4, 4-7, 2-3, 3-6, 6-9, 8-9, 1-2, 2-5, 2-6, 3-8. Алгоритм работает следующим образом. Начиная с наименьшего пути, включаем последовательно ребра, имеющие меньшую стоимость из оставшихся и не образующие цикла с уже включенными ребрами. Получаем решение 1-3, 6-7, 5-6, 5-8, 9-10, 3-4 и 7-10. Следующее по стоимости ребро 1-4 исключается, так как оно образует цикл с уже включенными ребрами 1-3 и 3-4. Далее добавляются ребра 4-7 и 2-3. Видно, что все вершины достигнуты и дерево минимальной стоимости построено. Этот же метод применим и при другой интерпретации величин и отношений между ними, например аналогично можно рассмотреть схему телефонных соединений, каналов связи и т.п.

Из эвристических методов рассмотрим генетический алгоритм, который моделируют законы развития живых систем: отбор наиболее приспособленного, наследование полезных признаков и изменчивость. Этот алгоритм был предложен Дж. Холландом в его теории адаптации и состоит из следующих шагов:

- случайным образом создать начальную популяцию из N объектов (структур, вариантов решения и т.п.);
- вычислить для каждого объекта показатель его работы. Если их среднее значение достаточно высокое, то прервать вычисления и считать эти объекты итоговым результатом;
- для каждого объекта подсчитать вероятность его выбора

$$\text{вероятность} = \frac{\text{показатель работы}}{\text{сумму показателей}};$$
- применяя генетические операторы, создать следующую популяцию объектов в соответствии с вычисленной вероятностью выбора;
- повторить процедуру, начиная со второго шага.

В качестве генетических операторов используются кроссинговер (перекрест, переход), изменение (мутация) и перестановка (инверсия). Оператор кроссинговера (перекреста) является основным для создания новых структур. Он берет две структуры, случайным образом выбирает точку разрыва (место разделения компонент) на этих структурах и меняет местами последовательности компонент, находящиеся справа от точки разрыва. Например, если две структуры a_1, a_2, a_3, a_4 и a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 перекрещиваются между второй и третьей позициями, то новыми структурами будут a_1, a_2, a'_3, a'_4 и a'_1, a'_2, a_3, a_4 . Оператор кроссинговера работает с имеющимися в текущий момент структурными популяциями. Для учета и внесения новой информации в имеющуюся популяцию используется оператор мутации, который произвольным образом изменяет одну или несколько компонент выбранной структуры. Вероятность его применения очень мала, и его наличие обеспечивает достижимость всех точек в пространстве поиска. Оператор инверсии изменяет характер связи между компонентами структуры. Он берет

одну структуру, случайным образом выбирает на ней две точки разрыва и располагает в обратном порядке элементы, находящиеся между этими точками. Например, инверсия структуры a_1, a_2, a_3, a_4 с точками разрыва между первым и вторым и между третьим и четвертым элементами дает новую структуру a_1, a_3, a_2, a_4 . Оператор мутации не влияет на выбор структур и применяется, когда не удастся построить хорошую популяцию. Оператор кроссинговера эффективно влияет на структуры, содержащие большое число элементов, оператор мутации наоборот более эффективен для малых структур.

Рассмотрим в качестве примера, иллюстрирующего действие генетического алгоритма, задачу синтеза. Пусть требуется разработать новую перспективную модель, например автомобиль повышенной проходимости. Модель конструируется из, примерно, $N = 1000$ элементов, т.е. множество разнотипных элементов конструктора состоит из 1000 единиц. Каждый вариант оценивается по n критериям, например, $n \cong 100$. Общая база знаний о предметной области насчитывает около 10000 вариантов, которые могут отличаться числом и составом элементов. Будем считать, что критерии предварительно ранжированы по важности, причем самыми важными являются функциональные критерии (группа 1), затем идут технико-экономические критерии (группа 2), эргономические (группа 3) и специальные (группа 4). Внутри групп предварительное ранжирование не проводится. Эти же группы критериев применяются и для оценки отдельных элементов конструктора. Таким образом, каждый вариант (и элемент) представлен упорядоченным набором критериев (показателей) $\langle K_1, K_2, \dots, K_n \rangle$, где $n \cong 100$. В этом наборе могут быть пропуски (нулевые позиции), т.е. не обязательно все критерии используются для оценки всех вариантов (элементов). Примем, что вес каждого варианта (элемента) определяется отношением числа критериев с максимальным значением к общему числу критериев. Элементы конструктора могут варьироваться (добавляться и удаляться). Нужно определить наилучшее решение. Конечно, такая задача может быть решена методом перебора, однако это потребует больших затрат времени. Кроме того, если учесть, что множество элементов конструктора может пополняться, то трудоемкость задачи еще более возрастает. Выбор решения зависит также от соответствия (адекватности) условий задачи применяемому методу выбора. Влияет на результат соотношение весов критериев и пополнение множества альтернатив (элементов).

Применим для поиска решения генетический алгоритм. Необходимо определить конкретный механизм отбора наилучшего, а также способы накопления полезных признаков применительно к решаемой задаче. Правила игры здесь задает ЛПР, устанавливая приоритеты, определяющие необходимость применения генетических операций кроссинговера, изменения и перестановки. Сделаем пояснения относительно этих операций.

Операция кроссинговера в основном будет применяться при отборе вариантов. Наряду с традиционным перекрещиванием дополним ее операциями

пересечения и объединения множеств-популяций, как предельными случаями операции кроссинговера.

Операция пересечения применяется к двум вариантам неодинаковой размерности, когда у одного из них отсутствует часть элементов (неполная размерность), причем заполненные позиции совпадают. Операция объединения применяется, когда оба варианта имеют неполную размерность (часть позиций – нулевые позиции), причем заполненные позиции дополняют друг друга.

Операция изменения в основном будет применяться для отбора методов получения решения. Ее использование связано с непригодностью рассматриваемого метода и необходимостью его модификации. Операция перестановки (инверсии) будет применяться при изменении предпочтений ЛПР в оценке вариантов (элементов), например, если критерий (элемент), стоящий на первой позиции, перестал играть доминирующую роль и его нужно заменить.

В данной задаче, говоря языком биологии, популяция состоит из 10000 вариантов решений, каждый из которых оценивается по n критериям, например, $n = 100$. В действительности на элементном уровне приходится решать несколько задач разной размерности: на уровне подсистем $N \cong 10$, на уровне составляющих подсистем – модулей $N \cong 100$ и на уровне элементов $N \cong 1000$, но в нашем случае это не имеет значения.

Для отбора вариантов используем метод Парето. Определяются варианты, имеющие максимальные оценки хотя бы по одному критерию. Затем они сравниваются между собой. Варианты, которые не сравнимы друг с другом, остаются, остальные отбрасываются. Образуется новая популяция с оставшимися вариантами (множество 1). Это множество пополняется за счет операций кроссинговера и изменения, применяемых к элементам структуры вариантов. Пополненное множество принимается за исходное, и из его вариантов выделяется множество Парето (множество 2). После этого сравниваются варианты множеств 1 и 2. Если возможно сокращение то оно выполняется, и оставшиеся варианты образуют новое множество 3. Оно опять пополняется, и процедура повторяется до тех пор, пока не перестанет улучшаться (расширяться) множество Парето. Для выбора наилучшего решения необходимо к полученному множеству Парето применить методы первой группы, например метод свертки, метод главного критерия, метод пороговых критериев, метод расстояния и т.п.

Для отбора методов к популяции, элементами которой являются разновидности методов, применяется генетический алгоритм. Метод считается применимым, если его информационные запросы I_M соответствуют условиям задачи I_0 , т.е. $I_M \subseteq I_0$. Выделяются элементы метода и элементы условий задачи. У каждого метода имеются особые запросы (условия применимости), которые должны содержаться в условиях задачи. Операция кроссинговера при отборе методов мало пригодна, хотя и может использоваться для получения комбинаций методов. Так как «популяция» методов малочисленна (несколько

десятков методов), то основной для их трансформации и выбора является операция изменения (мутации), которая применяется, если не выполнены информационные запросы метода. Тогда этот метод отбрасывается (трансформируется) и заменяется другим, пока условия применимости какого-то метода не совпадут с условиями задачи. При этом метод представляется в виде совокупности элементов, составляющих информационный запрос метода (условия применимости). Если имеется много методов, для которых выполнены условия применимости, то исследуется структура методов, и они трансформируются с помощью операций изменения и кроссинговера. Определяется пересечение методов по элементам информационного запроса. Те условия, которые являются общими для методов, образуют типовые элементы (ядро) запроса. Ядро запроса проверяется на соответствие условиям задачи. Если соответствие отсутствует, то применяется операция изменения и происходит их замена другими. Методы ранжируются по их соответствию условиям задачи, точнее, по числу особых условий их применения (по типовым элементам запроса). Например, для метода аддитивной свертки важность критериев должна плавно убывать, для применения метода главного критерия один из критериев должен быть значительно важнее остальных, для метода пороговых критериев должны быть заданы пороговые значения критериев, для метода расстояния должно быть известно «идеальное» решение и т.п. Предварительное ранжирование методов осуществляет ЛПР по ряду критериев, которые учитывают предпочтения ЛПР, степень соответствия условиям задачи (информационный запрос), точность, сложность, надежность, время и т.п. (общее число критериев $n \cong 10$). Вес метода определяется отношением числа критериев с максимальным (наилучшим) значением к общему числу критериев при прочих равных условиях, т.е. при соответствии информационного запроса метода условиям задачи (этот критерий является основным). Остальная процедура выбора предпочтительного метода осуществляется аналогично отбору вариантов, изложенному выше. Для повышения достоверности расчетов часто целесообразно применять несколько методов с близкими оценками, поэтому наряду с кроссинговером, изменением и перестановкой следует использовать операцию объединения, которая позволяет получать комбинированные методы выбора вариантов. Об использовании операции пересечения было сказано выше.

Проведенное рассмотрение позволяет определить принципиальные условия применения генетического алгоритма к решению задачи синтеза, конкретные расчеты, хотя и трудоемки, не представляют особых затруднений.

Список использованных источников

1. *Антонов, А. В.* Системный анализ [Текст] : учебник для вузов / А. В. Антонов. – 2-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2006. – 454 с.
2. *Волкова, В. Н.* Теория систем и системный анализ [Текст] : учебник для бакалавров / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 616 с.
3. *Воронов, Ю.Е.* Основы системного анализа: учебное пособие [Электронный ресурс]: / Ю.Е. Воронов. – Электрон. издан. – Кемерово: ГУ КузГТУ, 2011.
4. *Горохов, А.В.* Основы системного анализа: учебное пособие . [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.В. Горохов, И.В. Петухов. – Электрон. дан. – Йошкар-Ола : ПГТУ, 2016. – 107 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92407> – Загл. с экрана.
5. *Мухин, В.И.* следование систем управления : учебник для вузов / В.И. Мухин – М. : Изд-во «Экзамен», 2003. – 384 с.
6. *Реброва, И. А.* Теория планирования эксперимента [Электронный ресурс] : учебное пособие: / И. А. Реброва ; СибАДИ, кафедра "Автоматизация производственных процессов и электротехника". – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd104.pdf>. – Загл. с экрана.