

РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

2.1. Методы построения моделей систем

Центральным понятием системного анализа является понятие системы. При описании процедуры проведения системного анализа было отмечено, что одной из составных частей этого процесса является формализация описания системы, т.е. построение ее модели. Понятие модели системы играет важную роль в проведении системных исследований любой направленности. Модели являются всегда упрощенным описанием системы.

Модель системы – это отображение реальной системы (оригинала), имеющее определенное объективное соответствие ей и позволяющее прогнозировать и исследовать её функциональные характеристики, т.е. характеристики, определяющие взаимодействие системы с внешней средой.

При составлении модели отражают отдельные стороны функционирования системы, т.е. то специфичное, что направлено на решение поставленной целевой установки общей задачи системного анализа. Сходство двух объектов с точки зрения выполнения каких-либо функций, целей или задач позволяет утверждать, что между ними существует отношение оригинала и модели. В задачах системного исследования первоочередной интерес представляет сходство поведения модели и объекта, выраженное на каком-либо формальном языке и изучаемое путем преобразований соответствующих формул или высказываний. Так приходим к понятию математической модели, являющейся основой аналитических исследований и имитационных экспериментов на ЭВМ. Математические модели можно классифицировать таким же образом, как это было сделано в случае классификации систем. Остановимся на описании классов, имеющих принципиально различный характер в подходе к построению моделей, а именно, охарактеризуем следующие типы моделей: детерминированные, вероятностные и игровые модели.

Детерминированные модели описывают поведение систем с позиций полной определенности состояний системы в настоящем и будущем. Примерами таких моделей являются описания физических закономерностей, формулы, описывающие динамические процессы в системах, программы обработки деталей и т.д. Детерминированный

подход находит применение при решении задач планирования транспортных перевозок, при составлении расписаний, планировании и распределении ресурсов, в задачах материально-технического плана и т.д.

Вероятностные модели описывают поведение системы в условиях воздействия случайных факторов. Следовательно, такие модели оценивают будущие состояния системы с позиций вероятностей реализации тех или иных событий. Примерами вероятностных моделей являются описание времени ожидания, модели расчета надёжности системы, модели определения риска от наступления нежелательного события и пр.

Игровые модели дают возможность изучать конфликтные ситуации, в которых каждая из конфликтующих сторон придерживается своих взглядов, и характер поведения каждой из них диктуется личными интересами. Примерами таких систем являются отношения двух или нескольких производителей одинакового товара. Их поведение на рынке обусловлено интересами каждой из сторон. Как правило, эти отношения имеют характер конкурентной борьбы.

Широкое применение математических моделей в задачах системного анализа обусловлено универсальностью подхода к анализу как систем в целом, так и явлений и процессов, происходящих в них, способностью отразить все разнообразие закономерностей их развития и поведения.

Математическая модель – приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математическая модель может быть представлена аналитически, графически или в табличной форме.

Математической моделью динамической системы принято называть совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе, т.е. её движение.

При этом в зависимости от используемых символов различают *аналитические* и *графоаналитические* модели. Аналитические модели строятся с помощью буквенных символов, в то время как графоаналитические допускают применение графических обозначений.

В зависимости от используемых операторов модели делят на *временные* и *частотные*. К временным моделям относятся те, у которых аргументом является время. Это дифференциальные и разностные уравнения, записанные в явном виде или в операторной фор-

ме. Частотные модели предусматривают использование операторов, аргументом которых является частота соответствующего сигнала, т. е. операторы Лапласа, Фурье и т. д.

При применении математического моделирования появляется возможность проведения глубокого анализа задачи, обнаружения ошибок и корректировки исходных постулатов. При этом затраты на проведение исследований существенно меньше по сравнению с аналогичными исследованиями на реальных объектах. Если к тому же учесть, что ряд исследований на реальных объектах провести нет возможности либо по причине невозможности их реализации, либо ввиду больших материальных затрат, либо ввиду нежелательных последствий в результате исследований, то становится понятным, что исследование на математических моделях является чуть ли не единственным способом решения поставленных задач.

При составлении моделей проявляются знания, опыт, интуиция и квалификация системных аналитиков. Создание модели требует четких представлений о роли моделируемых систем в решении поставленной задачи системного анализа, об их особенностях, о предполагаемом использовании результатов системных исследований.

Модель «чёрного ящика»

Наиболее простой, грубой формой описания системы является представление ее в виде «чёрного ящика» (рис. 2.1), которое имеет следующие особенности. Во-первых, такое представление не раскрывает внутренней структуры, внутреннего устройства системы. Оно лишь выделяет систему из окружающей среды, подчеркивает её целостное единство. Во-вторых, такое представление говорит также о том, что система хотя и является обособленной, выделенной из среды, но, тем не менее, она не является изолированной от неё.



Рис. 2.1. Условное обозначение объекта исследования в виде «черного ящика»

Любая система работает на какого-либо внешнего потребителя. Иными словами система связана со средой и с помощью этих связей воздействует на среду. Таким образом, можно заключить, что у системы есть *выходы*. Выходы системы отражают её целевое предназначение. С другой стороны, система является средством, с помощью которого достигаются те или иные цели. Следовательно, должны существовать возможности воздействия на систему, управления системой. Эти связи направлены из среды в сторону системы. Такие воздействия называются *входами* системы. В данном представлении задаются только связи модели с внешней средой в виде входных и выходных воздействий.

Одной из главных задач системного анализа является получение модели объекта, описывающей в количественной форме взаимосвязи между *входными* ($x_1, x_2, \dots, x_n$) и *выходными* ($y_1, y_2, \dots, y_m$) параметрами объекта. Входные параметры, которые могут быть изменены, называют *факторами*. Для каждого фактора до измерения устанавливается область определения, которая может быть непрерывной или дискретной. Часто непрерывная область определения искусственно дискретизируется. Текущее значение фактора при эксперименте называется *уровнем фактора*.

Число измерений каждого выходного параметра y определяется из количества факторов n_x и количества уровней факторов p_n :

$$N_y = (p_n)^{n_x}. \quad (2.1)$$

Модель «чёрного ящика» является начальным этапом изучения сложных систем. На первых этапах проведения системных исследований необходимо задать, сформировать множество входных и выходных параметров системы. Задача формирования множества параметров применительно к рассмотрению сложных систем сама по себе является непростой задачей. Сложная система имеет множественные и разнообразные связи с внешней средой. Чтобы избежать ошибки на этом этапе, необходимо сформулировать одно правило, гласящее, что в модель следует отбирать только те входы и выходы, которые отражают целевое назначение модели. Дело в том, что реальная система взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов. Задача системного аналитика при построении модели состоит в том, чтобы из бесчисленного множества связей отобрать конечное их число для включения в список входов и выходов. Критерием отбора является существенность той или иной связи по отношению к цели, ради достижения которой строится модель.

Модель состава системы

В том случае, когда системного аналитика интересуют вопросы внутреннего устройства системы, модели «чёрного ящика» оказываются недостаточно. Для решения данного вопроса необходимо разрабатывать более детальные, более развитые модели. Одной из разновидностей таких моделей, раскрывающей внутреннее содержание системы, является *модель состава системы*. В зависимости от цели, для решения которой строится модель, один и тот же объект может быть определен и в качестве элемента, и в качестве подсистемы.

Рассмотрим пример, поясняющий данную мысль. Перед системным аналитиком сформулирована цель – проведение расчета характеристик надежности системы управления и защиты энергоблока атомной станции. Предположим, что систему можно разбить на подсистемы, подсистемы на блоки, а блоки, в свою очередь, на элементы. В данной системе был выделен ряд подсистем: автоматического регулирования, ручного регулирования, аварийной защиты, аварийной и предупредительной сигнализации и т.д. В структуре каждой подсистемы можно выделить блоки: блок питания, датчик (счетчик нейтронов), устройство отображения информации, вторичные приборы, исполнительные механизмы и т.д. В свою очередь, в каждом из блоков выделяют электронные (транзисторы, диоды, конденсаторы, сопротивления), электромеханические (реле, лентопротяжные механизмы) элементы, кабели, тросы и пр. Задача аналитика состоит в выработке решения, на каком уровне разбиения объектов необходимо остановиться. Здесь требуется вернуться к цели и наметить пути ее достижения.

К реализации сформулированной цели можно подойти с разных позиций. Рассмотрим первый возможный подход. Система, для которой проводится анализ надежности, длительное время находилась в эксплуатации; имеется представительная статистика поведения объектов системы в процессе ее функционирования. В результате анализа надежности ставится задача максимально использовать опыт эксплуатации, так как именно в процессе эксплуатации реализуются свойства системы, и поэтому результаты расчета, полученные на основании статистической информации, наиболее реально отражают объективные закономерности. При анализе эксплуатационной информации выяснилось, что в службах предприятия на каждый блок имеются паспорта, в которых отмечается вся история поведения блока. Таким образом, делается вывод о том, что в процессе обработки информации можно получить характеристики надежности блоков и

далее, используя эту информацию в качестве исходной, проводить дальнейшие расчеты надежности системы. Следовательно, при построении модели состава системы в качестве первичного элемента достаточно ограничиться блоками, для которых рассчитывается исходная информация.

Другой возможный случай. Система, для которой проводится анализ надежности, в эксплуатации не находилась. В качестве исходной информации для проведения расчетов имеется справочная информация об интенсивностях отказов элементов типа транзисторов, диодов, конденсаторов, сопротивлений, реле, лентопротяжных механизмов и т.д. В этом случае делается вывод о том, что при составлении модели состава системы необходимо проводить декомпозицию каждого блока на составляющие элементы. Полученная таким образом модель будет более детальной.

Таким образом, в зависимости от цели исследования, постановки задачи по достижению данной цели и исходной информации, имеющейся для решения задачи, одну и ту же систему следует представлять в виде различных частей, различных иерархий. Далее следует отметить, что условным является также разбиение на подсистемы. В той же системе управления и защиты одни и те же элементы, в зависимости от решаемой задачи, могут быть отнесены к разным подсистемам, т.е. границы между подсистемами условны.

И еще одна особенность, которую необходимо рассматривать при составлении модели состава системы, - это неоднозначность границ между системой и окружающей средой. При работе системы управления и защиты для ее нормального штатного функционирования необходимо задать соответствующие программы: какой уровень мощности считать номинальным, какие отклонения от данного уровня являются допустимыми, а какие требуют вмешательства системы, на какие ситуации следует реагировать как на аварийные и осуществлять при этом глушение реакторной установки. Данные программы формируются внешними по отношению к технической системе органами. Включать их в состав системы или нет, также зависит от цели, для решения которой строится модель состава системы.

Подводя итог, можно отметить, что границы между системой и внешней средой определяются целями построения модели и не имеют абсолютного характера. Таким образом, модель состава ограничивается снизу теми объектами, которые приняты в качестве элементов, а сверху – границей системы, определяемой целями анализа.

Модель структуры системы

Следующий тип модели, который еще глубже характеризует внутреннюю композицию системы, называется *моделью структуры системы*. Модели данного типа наряду с характеристикой состава системы отражают взаимосвязи между объектами системы: элементами, частями, компонентами и подсистемами. Таким образом, модель структуры системы является дальнейшим развитием модели состава. Для того чтобы отразить структуру системы, недостаточно перечислить её состав; необходимо установить между элементами определенные связи, отношения.

Отношения между элементами могут быть самыми разнообразными. Однако можно попытаться их классифицировать и по возможности перечислить. Трудность состоит в том, что заранее не известно, какие отношения реально существуют, и является ли их число конечным. Задача аналитика заключается в следующем: из множества реально существующих отношений между объектами, вовлеченными в систему, отобрать наиболее существенные. Критерием существенности отношений должна выступать опять же цель, для достижения которой строится модель. Таким образом, модель структуры является очередным шагом в развитии модели систем, описывающей существенные связи между элементами.

Развивая модели описания системы от модели «чёрного ящика» до модели структуры, приходим к описанию системы в виде структурной схемы. Структурная схема отражает, как правило, статическое состояние системы. В ней указываются все существенные с точки зрения выполнения поставленной цели элементы системы, все связи между элементами внутри системы и связи с окружающей средой – то, что названо входами и выходами. Для изображения структурной схемы абстрагируются от содержательной стороны схемы, оставив в рассматриваемой модели только общее для каждой схемы. В результате получается модель, в которой отмечено только наличие элементов и связей между ними. Для такого представления используют изображение в виде графа. Если связи в схеме направленные, они изображаются стрелками, и тогда граф будет направленным или ориентированным. Если направление связей не обозначается, граф называется неориентированным.

Таким образом, еще раз отметим, что структурная схема системы является наиболее подробной моделью, отражающей статическое состояние системы. Однако для решения задач системного анализа статические структуры имеют важное, но, как правило, вспомогательное значение. Большинство задач системного анализа связано с изучением либо характеристик системы, либо с прогнозированием развития системы во времени, либо с анализом возможных траекторий развития, т.е. с изучением динамики системы, её динамического поведения. В этом случае появляется необходимость построения новых моделей – динамических.

Динамические модели систем

Динамические модели отражают поведение систем, описывают происходящие с течением времени изменения, последовательность операций, действий, причинно-следственные связи. Системы, в которых происходят какие-либо изменения со временем, называются *динамическими*, а модели, отображающие эти изменения, – *динамическими моделями систем*.

Говоря о динамике систем, следует остановиться на двух типах динамических процессов – это функционирование и развитие. Под функционированием понимают процессы, которые происходят в системе, стабильно реализующей фиксированную цель. Развитием называют изменения, происходящие с системой при смене её целей. Характерной чертой развития является то обстоятельство, что изменение цели, как правило, с неизбежностью приводит к изменению всей системы. Это касается либо изменения структуры, либо изменения состава системы, иногда приходится проводить коренную перестройку системы. Таким образом, при построении динамических моделей на первом шаге анализируют тип отображаемого изменения системы, который хотят описать. Далее приступают к анализу происходящих изменений с целью более конкретного отображения динамики анализируемых процессов. На этом этапе вычленяют части, этапы происходящего процесса, рассматривают их взаимосвязь.

Было отмечено, что в модели «чёрного ящика» характер зависимости или вид функционала не исследуется. Решение этого вопроса является задачей настоящего этапа.

Для построения математической модели динамического поведения системы вводится понятие *состояния системы*. Состояние системы есть некоторая внутренняя характеристика системы, значе-

ние которой в настоящий момент времени определяет значение выходной величины. Состояние можно рассматривать как некий информационный объект, необходимый для предсказания влияния настоящего на будущее. Состояние есть множество Z . Конкретизируя множества X , Y и Z , а также отображения множества входов и состояний на множество выходов, можно перейти к моделям «*вход-состояние-выход*». Такой способ описания является ключевой особенностью *метода пространства состояний*.

Пространство состояний динамической системы – n -мерное пространство, каждой точке которого однозначно соответствует определённое состояние рассматриваемой динамической системы в некоторых обобщённых координатах. Каждому процессу изменения состояния системы (её движению в этих координатах) соответствует определённая траектория перемещения изображающей точки в пространстве [Щербаков, В. С. Теория автоматического управления. Линейные непрерывные системы].

Задача, стоящая перед исследователями при построении динамических моделей, – выяснение условий физической реализуемости теоретических моделей. Для обеспечения физической реализуемости требуется проводить тщательный анализ конкретных ограничений, которые приходится накладывать на модель.

Декомпозиция

Основной операцией анализа является представление целого в виде частей. При решении задач системных исследований объектами анализа являются системы и цели, для достижения которых они проводятся. В результате анализа решаемые системой задачи разбиваются на подзадачи, системы на подсистемы, цели на подцели. Этот процесс разбиения продолжается до тех пор, пока не удастся представить соответствующий объект анализа в виде совокупности элементарных компонентов. Операция разложения целого на части называется *декомпозицией*. Обычно объект системного анализа сложен, слабо структурирован, плохо формализован, поэтому операция декомпозиции представляет собой также плохо формализованный процесс, сложный для выполнения. Обычно декомпозицию проводят высококвалифицированные эксперты, имеющие богатый опыт работы в данной области.

Задача системного аналитика при построении модели системы заключается в разделении сложной системы на подсистемы. Аналогично целевая функция объекта должна быть представлена в виде

последовательности подцелей, задач, функций, операций, выполнение которых ведет к достижению глобальной цели системного исследования. Далее желательно каждой подсистеме поставить в соответствие некоторую подцель (задачу, функцию, операцию) и наоборот. В этом и заключается смысл декомпозиции. Необходимость таких действий обусловлена тем, что для отдельных подсистем объекта существенно проще предложить математическое описание, чем для всего объекта. В дальнейшем математическое описание объекта строится как совокупность математических описаний подсистем. Таким образом, декомпозиция – один из основных подходов к разработке математических моделей сложных систем. Однако проведение декомпозиции существенно зависит от вида объекта, для которого разрабатывается математическая модель.

Декомпозицию в технических системах проводят таким образом, чтобы функционирование каждого элементарного объекта, полученного в результате декомпозиции, определялось одной физической, физико-химической или какой-либо другой закономерностью, и, следовательно, описывалось одним уравнением.

Алгоритм декомпозиции включает следующие шаги:

- определение объекта анализа и его изучение;
- определение цели (целей) анализа;
- построение модели системы в виде фрейма;
- проверка элементов уровня по критериям однородности, существенности, независимости;
- проверка числа уровней на достаточность;
- проверка схемы на пригодность для достижения цели анализа.

При выделении элементов одного уровня используются следующие критерии:

- существенность, что означает выбор существенных (необходимых) для данного уровня (цели анализа) элементов;
- однородность, что означает выбор элементов, имеющих одинаковую важность (общность) для данного уровня (цели анализа);
- независимость, что означает взаимную независимость элементов одного уровня.

Проверка однородности элементов данного уровня может быть проведена на последующих нижних уровнях анализа, при этом число элементов на более низком уровне, замыкающихся на элемент более высокого уровня, должно не сильно различаться для всех элементов более высокого уровня. При определении числа уровней и их про-

верке на достаточность существенным является то, насколько возрастает полезная информация об объекте, необходимая для достижения цели анализа, и насколько она точна и достоверна. Число уровней определяется компромиссом между полнотой достижения цели анализа и требуемыми для этого ресурсами.

При проведении декомпозиции требуется соблюдать правило, которое гласит, что необходимо сопоставление модели объекта с моделью цели и наоборот, т.е., например, при рассмотрении целей системного анализа проводится сопоставление объекта анализа, - цели развития системы - с соответствующей моделью системы. Тогда операция декомпозиции представляется как выделение в структуре целей элементарных функций, которые соответствуют элементам модели системы. Иными словами, строится дерево целей, в котором цель разбивается на подцели, подцели на функции, функции на операции и т.д. При этом отмечается, что цель соответствует модели системы.

При проведении декомпозиции имеется еще один вопрос, который требует проведения дополнительных исследований, - это взаимоотношение между полнотой и простотой модели. Иными словами вопрос состоит в следующем - до какой степени детализации следует проводить процесс декомпозиции. Ответ на этот вопрос весьма существенен. С одной стороны, чем более подробно проведена декомпозиция, чем на более мелкие объекты разбивается система, тем детальнее получается ее модель, тем более тонкие эффекты и особенности системы она может отразить и учесть. Но, с другой стороны, чем больше элементов представлено в структуре системы, тем больше взаимосвязей требуется учесть при объединении моделей объектов в модель системы, поскольку модель системы не является простой суммой моделей элементарных составляющих. Далее при слишком подробном представлении системы математическая модель системы содержит слишком большое количество математических операторов, отражающих модели элементов, а следовательно, такая модель трудно реализуема. Еще один фактор, ограничивающий детализацию представления системы, - наличие информации о параметрах и коэффициентах модели для ее идентификации, т.е. при слишком детальном разбиении системы может оказаться, что для описания представленных компонентов не имеется информации о параметрах, необходимых для включения в модель. Таким образом, для каждой конкретной системы, каждой задачи и цели исследования существует

некоторая разумная степень декомпозиции, переступать которую нецелесообразно.

Агрегирование

Операцией, противоположной декомпозиции, является *агрегирование* – объединение частей в целое. Операция декомпозиции применяется на этапе анализа системы. Цель декомпозиции – представить систему в виде иерархической структуры, т.е. разбить её на подсистемы, их, в свою очередь, на части, далее выделить блоки, блоки представить в виде элементов и т.д. Аналогичные действия производят с целями, выделяют подцели, далее задачи, функции, операции. Затем для выделенных элементарных компонентов строят математические модели. Далее начинается операция сбора моделей компонентов системы в единую модель. Эта операция и есть агрегирование. Цель агрегирования – составление модели систем из моделей составляющих компонентов. Если декомпозиция системы осуществляется сверху вниз, то агрегирование идет снизу вверх.

Будучи объединенными, взаимодействующие элементы образуют систему, которая обладает не только внешней целостностью, обособленностью от окружающей среды, но и внутренним единством. Проявлением внутренней целостности системы является наличие у системы новых свойств, которые отсутствовали у отдельных элементов. Система не является только лишь объединением элементов, она представляет собой нечто большее. Система в результате ее создания приобретает такие свойства, которых нет ни у одного из ее элементов или частей. Естественно, что эти свойства появляются у системы ни вдруг, ниоткуда. Система обязана появлением качественно новых свойств благодаря наличию конкретных связей между конкретными элементами. Задача агрегирования заключается в том, чтобы сформировать модель системы из моделей элементов и не упустить при этом тех свойств, которые получаются при объединении элементов. Поскольку модель есть лишь слепок системы, ее отражение, то в ней должны быть реализованы хотя бы основные свойства, выражающие целевую направленность данной модели.

Как и в случае декомпозиции, техника агрегирования основана на использовании определенных моделей исследуемой системы. Именно избранные модели жестко определяют, какие части должны войти в состав модели и как они должны быть связаны между собой. Разные постановки задач приводят к разным целям агрегирования и,

следовательно, к необходимости использования разных моделей. Так при построении модели надежности не используется информация о стоимости того или иного блока, не принимаются во внимание стоимостные модели. Если ставится задача оптимизации структуры с использованием стоимостных критериев, то используются модели надежности и стоимости, но игнорируются, скажем, модели физических процессов, протекающих в блоках. Таким образом, тип окончательного агрегата определяется постановкой задачи и общей целью проводимого исследования. Отметим, что агрегатом называется результат выполнения операции агрегирования, т.е. модель, получаемая в ходе агрегирования. Точно также техника построения агрегата определяется условиями и целями агрегирования. В общем виде агрегирование определяют как установление отношений на заданном множестве элементов.

Объектом системных исследований являются большие или сложные системы широкой прикладной направленности. Системный анализ применяется для решения задач исследования технических, социотехнических, социальных, природных систем, т.е. объектом анализа может быть и технологический процесс, и экологическая ситуация обширной территории, и технико-экономическое развитие промышленного объекта, и социально-психологические исследования внутри коллектива. Естественно, что приходится наблюдать и описывать разнообразные процессы и структуры в ходе проведения исследований. Количество таких процессов очень многообразно и требует для своего описания применения разнообразных моделей. Здесь следует отметить одно важное обстоятельство. Конечная модель системы должна давать полное представление о системе с точки зрения поставленной цели исследования. Только совместное описание в терминах нескольких качественно различающихся языков позволяет охарактеризовать явление с достаточной полнотой.

Например, при проектировании АСУ ТП систему необходимо описывать в виде структурной схемы её элементов, в виде функциональной схемы решаемых задач, в виде организационной схемы, в которой отражается связь данной системы с верхним и нижним уровнями управления, роль системы в принятии управленческих решений. Далее необходимо в виде схемы отразить информационные потоки, циркулирующие в системе и прочие особенности. Если не будет представлена хотя бы одна из схем, описание системы утратит

свою целостность. Здесь приходится опять сталкиваться с проблемой полноты описания и возможной минимизацией описания явления. Причем, говоря о процессе агрегирования, необходимо заметить, что неполнота описания становится почти недопустимой. При неполноте описания речь может идти вообще не о том предмете, который имеется в виду. С другой стороны, переопределение связано с большими затратами. Таким образом, для создания агрегата необходимо привлечение качественно различных языков описания системы, причем число языков должно быть минимально, но в необходимом количестве для реализации заданной цели. Перечислив языки, на основании которых строится модель системы, тем самым определяется тип системы, фиксируется понимание природы системы.

2.2. Методы эксперимента

В основе любого исследования лежит эксперимент. Для построения модели объекта необходима информация о нем. Средством получения информации являются наблюдения за объектом исследования. Наблюдения могут проводиться как с помощью пассивных способов их организации (то, что в философии называется простое созерцание), так и в процессе специально организованных исследований.

Отношение между экспериментом и моделью такое же, как между курицей и яйцом, - нельзя определить, что было «в самом начале». Эксперимент с некоторым объектом проводится с целью уточнения его модели. С другой стороны, постановка эксперимента определяется имеющейся до опыта моделью. Противоречия в данном высказывании нет, так как в ходе проведения эксперимента исследователь получает новую информацию, позволяющую усовершенствовать модель, развивать и усложнять ее, т.е. в модели появляются новые составляющие, отражающие более полно процессы, явления и эффекты взаимодействия, которые ранее не были учтены в модели.

Термин «эксперимент» обычно используется при:

- 1) целенаправленном наблюдении исследуемого явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий;
- 2) преднамеренных действиях или операциях, предпринятых с целью установления неизвестных причин, их проверки или иллю-

страции;

3) воспроизведении объекта познания, организации особых условий его существования;

4) наблюдении развития явления в естественных для него условиях.

Общей чертой в характеристике эксперимента является то, что он определяется как осмысленная деятельность человека, связанная с различными целями, средствами и объектами познания. Наиболее общей целью проведения экспериментов является получение новой информации об изучаемом явлении (процессе, объекте). Обобщенно эксперимент определяется как форма познания объективной действительности. Он является одним из основных способов научного исследования наряду с теоретическим мышлением, наблюдением, математическими расчетами и др. Отличительной особенностью эксперимента является использование при его проведении специальных средств исследования, позволяющих исследователю осуществлять вмешательство в явления и процессы внешнего мира, воспроизводить ход процесса, планомерно изменять различные условия в целях получения искомого результата. Эксперимент характеризуется определенной направленностью и организованностью, что сводит к минимуму элемент случайности, неожиданности, хотя полностью его не исключает.

Таким образом, *эксперимент* – это совокупность действий исследователя, осуществляемая посредством материальных средств исследования с целью получения новой информации об изучаемом объекте (процессе, явлении) путем построения информационных (описательных) моделей, характеризующих различные его стороны и проявления.

Основные элементы эксперимента:

1) экспериментатор и его деятельность как познающего субъекта;

2) объект экспериментального исследования;

3) средства экспериментального исследования.

Различают пассивный и активный эксперименты. Пассивный эксперимент подразумевает сбор исходного статистического материала в режиме нормальной эксплуатации объекта наблюдения. Активный эксперимент ставится по заранее составленному плану с использованием методов планирования эксперимента. При этом предусматривается одновременное изменение всех параметров, влияющих

на процесс, что приводит к сокращению общего числа опытов. Для проведения активного эксперимента требуются специальные установки. Примерами таких установок могут служить термобарокамеры, вибростенды, аэродинамические трубы и пр. Эксперимент может быть управляемым и неуправляемым. Одним из основных принципов организации научных экспериментальных исследований является стремление к изоляции изучаемого объекта от влияния окружающей среды, т.е. проведение контролируемого активного эксперимента. В таком эксперименте независимые переменные могут варьироваться по желанию исследователя, а влияние внешних переменных исключается. Управляемый эксперимент предполагает управляемость объекта исследований, которая определяется возможностью перевода объекта с наперед заданной точностью в любое из различных состояний, в котором он находится в течение требуемого промежутка времени. При этом под состоянием объекта понимается все множество значений его характеристик и соотношений между ними, присущих ему в данный момент времени. В неуправляемом эксперименте наблюдатель пассивно фиксирует спонтанно протекающие процессы.

Различают также контролируемый и неконтролируемый эксперименты. В контролируемом эксперименте независимые переменные, воздействующие на объект исследования и называемые факторами, могут быть измерены с достаточно высокой точностью. Неконтролируемый эксперимент характеризуется тем, что исследователь предполагает воздействие некоторых факторов внешней среды, но у него нет технической возможности произвести количественные измерения уровней воздействующих факторов.

В реальных условиях любой, даже самым тщательным образом организованный, эксперимент обладает свойствами неуправляемого и неконтролируемого эксперимента. Никакая исследовательская установка не может быть полностью изолирована от воздействия факторов внешней среды. Часть этих факторов может быть измерена, но сами факторы будут неуправляемы, другая же часть факторов не подлежит измерению и, таким образом, является неконтролируемой. К неконтролируемым факторам, как правило, относятся такие, как уровень солнечной радиации, естественный радиоактивный фон и магнитное поле Земли и т.п. Данные факторы при проведении активных экспериментов, как правило, не учитываются.

Наличие неуправляемых и неконтролируемых факторов может привести к нарушению воспроизводимости результатов эксперимента в сериях – повторениях. *Воспроизводимость опыта* – одно из главных требований, предъявляемых при организации экспериментальных исследований. Воспроизводимость означает, что в ходе проведения эксперимента различия в выходных результатах опытов, проводимых в условиях воздействия одних и тех же факторов на одних и тех же уровнях, обусловлены случайными факторами: погрешностью приборов, ошибками измерения, дрейфом параметров в экспериментальной установке. Если различия в выходных результатах велики и не объяснимы случайными воздействиями, это означает, что имеет место влияние неучитываемого фактора, которое ведет к нарушению воспроизводимости эксперимента. Если неуправляемые факторы оказывают влияние на результат, получаемый в ходе эксперимента, то эксперимент будет активно-пассивным.

Рассмотрим примеры экспериментальных исследований. Для отработки радиоэлектронной аппаратуры, эксплуатируемой на движущихся объектах в специальных условиях (например, в условиях Крайнего Севера, пустынях, на высокогорье, на летательных аппаратах, морских судах при повышенной влажности и пр.), проводят эксперименты данной аппаратуры в термобарокамерах с установленными в них вибростендами. При обычных условиях внешней среды установки такого типа можно достаточно хорошо изолировать от влияния внешних факторов. Эксперимент в данном случае будет активным. Но, если в ходе проведения эксперимента случится землетрясение, то естественная вибрация Земли наложится на вибрацию, моделируемую вибростендом, и это приведет к нарушению воспроизводимости результатов эксперимента.

Другой пример с физическими экспериментами, проводимыми на ускорителях или исследовательских реакторах. К нарушению воспроизводимости таких экспериментов могут привести резкие всплески солнечной активности. В данном случае происходит наложение активности внешних источников на активность объектов исследования.

Несмотря на большое разнообразие научно-технических экспериментов, отличающихся по физической природе, используемым техническим средствам и объему задач исследований, можно выделить их некоторые общие свойства.

1. Процесс экспериментальных исследований обязательно связан с непосредственным участием человека-исследователя и диктуется его интересами. Исследователь формулирует постановку задачи системного анализа, определяет план его проведения, разрабатывает алгоритм обработки результатов исследования и принимает решение о дальнейших действиях, т.е. человек определяет ход системных исследований на каждом из этапов его проведения.

2. Специфической особенностью экспериментов любой разновидности является наличие неопределенности, обусловленной уровнем априорной информации об исследуемом объекте и степенью ее достоверности. Основной целью проведения экспериментов является получение новых знаний, новой информации и соответственно понижение степени неопределенности.

3. Результаты каждого эксперимента всегда имеют некоторый элемент неопределенности, который вносится ограниченностью экспериментального материала. Его оценка проводится путем статистического анализа результатов наблюдений. Если целью эксперимента является построение модели исследуемого процесса, то выполнение этой цели достигается с определенной точностью. Таким образом, всегда имеется элемент неопределенности в формировании результата эксперимента, обусловленный случайностью исследуемых процессов, объектов или явлений и ограниченностью числа опытов.

4. Любой научно-технический эксперимент ведет к определенным действиям исследователя - принятию решения по продолжению или прекращению исследований - и заканчивается представлением результатов, формулировкой выводов, выдачей рекомендаций. Процесс принятия решений в экспериментальных исследованиях не удастся полностью формализовать даже в самых простых ситуациях.

5. Сложность объекта исследования определяется числом различных состояний, в которых он может находиться. Сложность объекта характеризуется уровнем его организации, степенью детерминированности. Какими бы сложными ни были те или иные эксперименты, по форме организации они мало различаются и включают в себя этапы планирования эксперимента, его проведение и анализ результатов.

6. Общий принцип организации экспериментальных исследований - системный подход. Элементами такой организации должны стать планирование эксперимента, исключение или учет случайных

воздействий окружающей среды, анализ получаемых результатов с оценкой ошибок и их совокупного влияния, проверка приемлемости результатов и их интерпретация, представление полученных данных в упорядоченном и наглядном виде. Повышению эффективности именно этих сторон процесса экспериментальных исследований должна способствовать его автоматизация.

Отметим, что современная теория системного анализа трактует понятие эксперимента несколько шире классического, предусматривающего лишь количественные, однозначные измерения. Выделяют следующие черты эксперимента.

1. Имеются наблюдаемые явления, в принципе не допускающие числовой меры, но которые можно фиксировать в «качественных», «слабых» шкалах. Результаты таких экспериментов, однако, можно учитывать в моделях, получая качественные, но вполне научные выводы.

2. Неотъемлемым природным свойством некоторых наблюдений признана их расплывчатость. Тем не менее, таким наблюдениям придана строгая математическая форма и разработан формальный аппарат работы с ними.

3. Погрешности измерений являются неотъемлемым естественным свойством самого процесса измерения, обусловленным наличием неопределенностей, шумами аппаратуры, квантованием измеряемых сигналов.

4. Широкое распространение получили статистические измерения, т.е. оценивание функционалов распределений вероятностей по реализации случайного процесса.

Путем обработки результатов наблюдений, фиксируемых в ходе проведения эксперимента, генерируется информация для включения в модель с целью ее усовершенствования. Таким образом производится перевод модели на более высокий качественный уровень.

Классификация экспериментальных исследований

Эксперименты, описываемые совокупностью однотипных свойств, целесообразно объединить в некоторые классы. В системном анализе приняты следующие обобщенные классификационные признаки: структура эксперимента; стадия научных исследований, к которым относится эксперимент; организация эксперимента; постановка задачи; способ проведения эксперимента.

В качестве первого уровня классификации рассмотрим *качественный и количественный эксперименты*. Качественный эксперимент – более простой вид экспериментов. Его цель – установление только факта существования явления. Качественный эксперимент реже обставляется сложными измерительными системами и системами обработки данных. Но кажущаяся простота качественного эксперимента пропадает, если изучаемое явление или процесс является стохастическим (случайным). Стохастичность может быть вызвана, во-первых, тем, что уровень шумов, на фоне которых измеряется полезный сигнал, одного порядка или даже выше значения самого сигнала. Во-вторых, стохастичность может лежать в основе самого процесса. Количественный эксперимент встречается чаще, чем качественный. Требуется для своего проведения более сложное оборудование. Задачей измерительного или количественного эксперимента является установление количественных связей между параметрами, описывающими состояние системы.

Следующий уровень – разделение экспериментов по их структуре на *натурные, модельные и модельно-кибернетические (машинные)*. В натурном эксперименте средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с объектом исследования, в модельном эксперименте – не с самим объектом, а с его моделью. При этом модель играет двойную роль. Во-первых, она является непосредственно объектом экспериментального исследования. Во-вторых, по отношению к подлинному изучаемому объекту или процессу модель выступает в качестве средства экспериментального исследования. Модельнокибернетический эксперимент является разновидностью модельного, при котором соответствующие характеристики изучаемого объекта исследуются с помощью модели на ЭВМ.

Эксперименты на моделях можно, в свою очередь, подразделить на *масштабное, аналоговое, полунатурное и математическое моделирование*.

Масштабное моделирование. Этот вид экспериментальных исследований один из самых старых. Чтобы качественно или количественно изучить явление, делали его модель (уменьшенную копию). Примером масштабного моделирования может служить изучение поведения гидротехнических сооружений, потоков жидкости в трубопроводах, устойчивости судов при воздействии на них течений различной направленности. Достоинством данного вида моделирования

является изучение явлений и процессов в натуре. Недостаток масштабного моделирования состоит в том, что геометрическое подобие не обеспечивает подобия явления.

Аналоговое моделирование. Следующий тип моделирования-исследования, проводимые на аналоговых моделях. Если различные явления описываются одними и теми же уравнениями, то можно одно из явлений выбрать за основу модели, а остальные выражать через него. Модельным выбирается то явление или процесс, в котором можно легче и точнее произвести измерения. Так как лучше всего разработаны измерения электрических величин, то и модели стараются выполнить на электросхемах (моделирование на аналоговых вычислительных машинах).

Полунатурное моделирование. Полунатурное моделирование чаще всего применяется при исследовании систем автоматического или полуавтоматического регулирования или управления. Примером может служить исследование характеристик самолетов на специальных стендах по обработке навыков в управлении объектом, скажем, автопилот. На основе полунатурного моделирования создаются различные тренажеры.

Математическое моделирование. Если удастся выразить весь моделируемый процесс в форме математических уравнений и отношений, то проблема может облегчиться тем, что эти математические уравнения и отношения исследуются на ЭВМ. В этом случае экспериментатор уже сам распоряжается планом проведения эксперимента: какие параметры и как надо варьировать, а какие стабилизировать. Эксперимент ведется в строгих рамках принятых допущений и введенных в рассмотрение параметров. Составляя математическую модель нужно стремиться оставлять для рассмотрения лишь наиболее существенные параметры, делать математическое описание процесса как можно проще.

Следующий уровень предполагает деление экспериментов согласно стадиям проведения научных исследований. Здесь можно выделить *лабораторные, стендовые и промышленные эксперименты*.

К лабораторным относятся эксперименты по изучению общих закономерностей различных явлений и процессов, по проверке научных гипотез и теорий. Лабораторный эксперимент характеризуется небольшим числом измерительных и управляющих каналов, малыми

энергетическими затратами экспериментальной установки, немногочисленным штатом обслуживающего персонала.

При лабораторном эксперименте велика роль самого экспериментатора. Установка для экспериментального исследования, как правило, создается им самим и находится в его подчинении на все время исследования. Этот фактор определяет и сравнительно низкий коэффициент ее загрузки, так как часть времени она простаивает (в период анализа полученных результатов или перемонтажа и наладки оборудования).

Стендовые исследования проводят при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте с определенными физическими, химическими и другими свойствами. При стендовых исследованиях на основе сведений, полученных на стадии лабораторных экспериментов, уточняются характеристики объекта, его поведение при варьировании факторов, воздействующих на объект, определяются оптимальные условия функционирования объекта исследования. По результатам стендовых испытаний судят о различных наработках при расчетах или проектировании объекта, изделия или технического процесса. Также в ходе стендовых исследований вырабатываются рекомендации относительно серийного выпуска изделия и условий его эксплуатации.

Разновидностью стендовых исследований является сложный исследовательский эксперимент. Ускорители, реакторы, химические колонны - примеры сложных экспериментальных установок для исследовательского эксперимента.

Промышленный эксперимент проводят при создании нового изделия или организации технологического процесса по данным лабораторных или стендовых исследований, при оптимизации технологического процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции. Этот вид эксперимента по своему принципу является как бы зеркальным отображением математического моделирования. В математическом моделировании экспериментальным инструментом является ЭВМ. На ней по составленным уравнениям и значениям параметров, выбранных в качестве определяющих и полученных из измерительного эксперимента, воспроизводится исследуемый процесс. В промышленном эксперименте экспериментальная установка (например, аэродинамическая труба, прочностной стенд и т.п.) применяется для сложного измерительного

эксперимента. В нем тип исследуемого процесса и уравнения, его описывающие, известны. Но сам процесс настолько сложен, что произвести его математическое моделирование при современном уровне средств вычислительной техники оказывается невозможным. С появлением более мощных ЭВМ часть наиболее простых промышленных экспериментов заменяется математическим моделированием.

Информативность промышленного эксперимента, как правило, велика, что в сочетании со сложностью обработки данных делает его чрезвычайно трудоемким. Промышленный эксперимент может быть модельным, полунатурным и натурным.

Следующий признак классификации учитывает организацию экспериментов. По данному классификационному признаку выделяют *обычные (рутинные), специальные (технические), уникальные и смешанные эксперименты*, проводимые в стационарных условиях или на подвижных объектах. Наиболее часто встречаются обычные эксперименты. Такие эксперименты выполняются по стандартным методикам с использованием сравнительно простого локального экспериментального оборудования.

Технические эксперименты связаны с созданием и исследованием различных приборов и аппаратов.

Уникальные эксперименты проводятся на сложном дорогостоящем экспериментальном оборудовании (типа ядерного реактора, синхрофазотрона, аэродинамической трубы). Такие эксперименты отличаются большими объемами экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследуемых процессов, широким диапазоном изменения характеристик объектов исследования.

Смешанный эксперимент обладает особенностями разных типов экспериментов. Названные разновидности экспериментов организуются как в стационарных условиях, так и на подвижных объектах (морских, авиационных, космических, наземных).

Следующий уровень классификации экспериментальных исследований по признаку, определяемому их частными целями, или по типу моделей определенного вида, восстанавливаемых по результатам исследований. Говорят также, что данный уровень классификации осуществляется по постановке задачи определения вида модели.

В отдельных случаях экспериментатора могут интересовать установление наличия связей между некоторыми переменными объекта исследования, вида взаимосвязей между ними, конкретных аналити-

ческих зависимостей, количественно описывающих объект исследования, уточнение вида и параметров этих аналитических зависимостей. Проведение эксперимента приводит к понижению степени неопределенности в априорно известной модели исследуемого объекта. Постановка задачи конкретного экспериментального исследования определяется уровнем сложности исследуемого объекта, количеством и качеством априорной информации об объекте, т.е. степенью его изученности, особыми условиями существования объекта, например, подверженностью случайным неконтролируемым внешним воздействиям, наличием дрейфа характеристик и т.д. и требуемой степенью детализации его описания. Эти общие принципы постановки задачи рассматриваются как составные элементы признака классификации.

В постановке задачи можно выделить ее характеристики, достаточно общие и вместе с тем выражающие наиболее существенные отличия данной постановки от других. На основе таких характеристик формируются классы экспериментов. Критерием формирования определенного класса экспериментов на данном уровне схемы классификации будем считать существование некоторого набора методов, позволяющих решить задачу с учетом существенных характеристик ее постановки.

На данном уровне классификации можно выделить следующие классы.

1. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования при наличии неоднородностей разного вида.
2. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования при взаимосвязанных входных переменных.
3. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования при наличии у него «памяти», т.е. свойства сохранять последствие.
4. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования при выяснении механизма явлений.
5. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования, описывающей локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при наличии временного дрейфа параметров.
6. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования, описывающей локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности

при отсутствии временного дрейфа параметров.

7. Эксперименты по нахождению модели объекта исследования, описывающей степень влияния входных переменных на выходные переменные.

8. Эксперименты по нахождению математической модели объекта исследования, позволяющей преобразовать набор переменных объекта исследования.

9. Эксперименты по нахождению математической модели объекта исследования, прогнозирующей его поведение.

10. Эксперименты по нахождению моделей классификации объектов исследования и проверки степени соответствия экспериментальных данных определенным известным моделям.

Наконец, последний уровень схемы классификации делит эксперименты по способу их проведения, определяющему характер взаимодействия системы автоматизации с объектом исследований. С этой точки зрения различают *пассивный, активный с программным управлением, активный с обратной связью, активно-пассивный эксперименты*.

Характеристика активного и пассивного экспериментов дана ранее. Активный эксперимент с программным управлением проводится по заранее разработанному плану. В соответствии с этим планом исследователь воздействует на факторы, влияние которых исследуется, переводя их с одного уровня на другой согласно плану эксперимента. При этом изменение функции отклика, отражая реакцию исследуемого объекта на управляющие воздействия, позволяет выяснить природу происходящих в объекте исследования процессов. В случае активного эксперимента с обратной связью система автоматизации интерпретирует результаты на каждом шаге эксперимента и выбирает оптимальную стратегию управления им. Активно-пассивный эксперимент характеризуется тем, что при его проведении часть факторов просто контролируется, а по другой части осуществляется управление.

2.3. Анализ экспериментальных данных

Результаты любого эксперимента фиксируют в той или иной форме, затем их используют с целью обработки. Операции сбора и обработки в одних случаях могут быть совмещены во времени, в

других случаях обработка экспериментальных данных является самостоятельным этапом. Практически совмещенными во времени сбор и обработка данных являются в автоматизированных системах управления научными исследованиями и комплексными испытаниями, проводимыми в реальном масштабе времени. Отдельным этапом работ обработка данных выступает при проведении учебных экспериментов, на этапе обобщения результатов научных исследований, при проведении системного анализа.

Методы обработки экспериментальной информации зависят от того, какова модель, для уточнения которой проводится эксперимент. Фактически обработка экспериментальных данных - это преобразование информации к виду, удобному для использования, перевод результатов наблюдений с языка измерений на язык уточняемой модели. Модель, в свою очередь, может принадлежать к одному из двух типов: классификационным или числовым моделям. Тип моделей зависит от знаний об объекте, для которого строится модель. Знания могут быть как первоначальными, приближенными, так и достаточно полными, хорошо структурированными, хотя и требующими уточнения. Классификационная модель носит качественный характер, хотя в ней могут участвовать и количественные переменные. Например, классифицируют состояние объекта «работоспособен - неработоспособен» по результатам численных измерений параметров.

Числовые модели отличаются от классификационных рядом особенностей:

- 1) целевые признаки x_0 измеряются в числовых шкалах;
- 2) числа x_0 представляют собой функционалы или функции признаков переменных, которые не обязательно имеют числовые выражения;
- 3) в числовых моделях переменные могут зависеть от времени.

Если в задаче классификации для получения экспериментальной информации необходимо организовывать наблюдения за группой однотипных объектов, то в задаче построения числовых моделей в качестве первичной информации могут присутствовать результаты длительных наблюдений за одним объектом или небольшой по объему группой однотипных объектов. Числовые модели могут задавать связь между переменными как в виде параметрических, так и в виде непараметрических зависимостей. Типичными задачами для число-

вых моделей являются задачи косвенных измерений и поиска экстремума.

В задаче косвенных измерений (или как ее еще называют задачей оценки параметров) требуется по результатам наблюдений $\{x_{i,j}\}$ оценить параметр x_0 . В отличие от задачи классификации x_0 измеряется не в номинальной шкале, а в числовой. Если статистические данные $\{x_{i,j}\}$ представляют собой результаты наблюдения до некоторого момента времени t_0 , а x_0 требуется оценить для момента $t > t_0$, то задача оценивания называется *прогнозированием*.

Задача поиска экстремума состоит в организации наблюдений за исследуемым процессом таким образом, чтобы по результатам наблюдений $\{x_{i,j}(t_k)\}, (t_k) = t_0 + k\Delta t, k = 0, 1, 2, \dots$ можно было получить экстремальное значение целевого признака x_0 . Задачи такого рода решаются с помощью методов планирования эксперимента.

Вероятностное описание событий и процессов

Экспериментальные исследования проводят с целью получения новых сведений об объекте анализа. Экспериментальные данные необходимы для того, чтобы устранить неопределенность в знаниях об объекте, для которого производится построение модели. Основной причиной неопределенности является случайность явлений и процессов, происходящих в объектах исследования. Совершенно очевидно, что в природе нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы в той или иной степени элементы случайности. Как бы точно и тщательно ни были бы фиксированы условия проведения эксперимента, невозможно достигнуть того, чтобы при повторении опыта результаты полностью и в точности совпадали. Случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому закономерному явлению. В ряде практических задач этими случайными элементами можно пренебречь, предполагая, что в данных условиях проведения наблюдений явление протекает вполне определенным образом. При этом из множества воздействующих на процесс факторов выделяют самые главные, влиянием остальных факторов пренебрегают. В других исследованиях исход опыта зависит от большого количества факторов, к тому же на исход эксперимента влияют не только сами факторы, но и их сочетание, их взаимодействие. В результате приходим к необходимости изучения случайных явлений, исследованию закономерностей и выяснению причин возникновения случайностей в наблюдаемом явлении. При рассмотрении результатов отдельных экспери-

ментов бывает трудно обнаружить какие-либо устойчивые закономерности. Однако, если рассмотреть последовательность большого числа однородных экспериментов, можно обнаружить некоторые интересные свойства, а именно: если индивидуальные результаты опытов ведут себя непредсказуемо, то средние результаты обнаруживают устойчивость.

Случайность можно определить как вид неопределенности, подчиняющейся некоторой закономерности, которая выражается распределением вероятностей. Зная распределение вероятностей, можно ответить на следующие вопросы: в каком интервале находятся возможные значения случайной величины, каково наиболее вероятное значение случайной величины, каково рассеивание реализовавшихся случайных величин, какова связь между разными реализациями и т.д. Но для того, чтобы определить закон или плотность распределения случайной величины, необходима информация об исследуемом объекте. В основе проведения любых расчетов лежат исходные данные, результаты наблюдений случайной величины или случайного процесса. Измерения случайных величин и процессов по существу есть измерение выходного параметра, характеризующего определенные свойства объекта исследования. На основании таких измерений решаются вопросы восстановления вида и параметров законов распределения, вычисление коэффициентов регрессии и корреляции, восстановление спектральных плотностей и тому подобные расчеты.

Следует отметить, что результаты наблюдений за функционированием сложных систем, каковые являются, в первую очередь, объектом системного анализа, имеют ряд специфических особенностей, приводящих к необходимости применения и разработки неклассических методов анализа. Остановимся на рассмотрении данных особенностей.

Большая размерность массива данных. Для построения модели сложной системы требуется проводить наблюдения за большой группой выходных параметров, причем некоторые параметры могут характеризоваться рядом признаков. Существенным является также необходимость учета фактора времени, т.е. фиксация изменения свойств объекта в зависимости от времени жизни системы. Современные методы организации баз данных на ЭВМ способны решать задачи сбора и хранения данных, но тем не менее проблема размерности все-таки остается.

Разнотипность данных. Разные признаки могут измеряться в различных шкалах. Здесь возникает проблема согласования данных.

Зашумленность данных. Наблюдаемая величина отличается от истинного значения параметра на некоторую случайную величину. Примерами таких зашумляющих факторов могут служить дрейф нуля измерительного прибора, погрешности приборов, наличие помех в каналах передачи информации и т.п. Статистические свойства помех могут не зависеть от измеряемой величины, тогда помехи можно рассматривать как аддитивный шум. В противном случае имеет место неаддитивная или зависящая помеха. Различные варианты зашумленности должны по-разному учитываться при разработке алгоритмов обработки данных.

Отклонения от предположений, искажения результатов. Приступая к обработке данных, аналитик всегда исходит из определенных предположений о природе величин, подлежащих обработке. Любой способ обработки дает результаты надлежащего качества только в том случае, когда обрабатываемые данные отвечают заложенным в алгоритм обработки предположениям. Во-первых, большинство наблюдаемых параметров имеет характер непрерывных величин, но при обработке неизбежно округление данных, что может привести к искажениям результатов. Далее - измерительный прибор может обладать нелинейной характеристикой и если это не учитывается в алгоритме обработки, то итоговые данные будут также иметь искажения. Чтобы повысить качество выводов, получаемых при обработке данных, необходимо обеспечить соответствие свойств данных и требований к алгоритмам их обработки.

Наличие пропущенных значений. Данная ситуация имеет место в том случае, когда часть наблюдений не доводится до реализации наблюдаемого признака. Примерами таких ситуаций могут служить эксперименты по определению надежности группы однотипных изделий. Современные изделия обладают достаточно высоким уровнем надежности и даже длительные по времени наблюдения за их функционированием не приводят к отказам всей совокупности изделий. В результате выборка данных будет иметь характер цензурированной выборки, в которой для части изделий имеется информация о времени их отказа, для другой же части такой информации нет. Другим примером могут служить социологические исследования, которые допускают либо отсутствие определенных сведений об опрашиваемых.

мых субъектах, предполагают возможность неконкретного ответа на вопросы (типа «не знаю»).

Отмеченные особенности поступающей для обработки статистической информации накладывают определенные ограничения на выбор методов и предъявляют требования к разработке специальных алгоритмов её обработки.

Характеристика и классификация статистической информации

Классическая схема обработки результатов наблюдений, состоит в предположении, что в каждом испытании реализуется наблюдаемый признак. Такая схема является идеализацией реально проводимых исследований. В реальной жизни, в особенности при проведении обследования функционирующих объектов, информация, поступающая на обработку, крайне ограничена. Например, при эксплуатации объектов их стараются не доводить до отказа. Более того, на предприятии, как правило, существует система предупредительных профилактических мероприятий, суть которых заключается в том, чтобы не допустить возникновения отказов изделий в процессе их функционирования. При проведении исследований в медицине у части больных за время наблюдения исследуемый признак может не реализоваться. Так, если анализируется воздействие некоторого препарата на состояние больного и фиксируется время, в течение которого наступает выздоровление, то у одних пациентов процесс выздоровления может пойти быстро, у других медленнее, а у некоторой части за время наблюдения он может не наступить. Возможно, он реализуется в дальнейшем, но вывод о результатах исследования формируется в данный момент времени и часть наблюдений, таким образом, является не доведенной до конца. Но, несмотря на то, что для части объектов исследования не доведены до конца, в них содержится полезная информация, которую необходимо использовать при обработке результатов наблюдений. Данные, для которых имеется неопределенность в наблюдениях за реализацией исследуемого признака, называются *цензурированными данными*.

Цензурирование - это процесс возникновения неопределенности момента реализации признака объекта (в теории надежности момента отказа), причем интервал неопределенности считается известным. Интервалом неопределенности называется интервал времени, внутри которого произошла либо произойдет реализация наблюдаемого при-

знака объекта, при этом точное значение времени реализации признака объекта неизвестно.

Оценивание показателей систем и достоверности

При решении вопросов построения моделей систем особую актуальность имеет задача формирования исходной информации о параметрах элементов, входящих в состав системы. От точности и достоверности исходной информации зависит достоверность оценок анализируемых характеристик систем, точность расчетов по оптимизации стратегий функционирования и правил их обслуживания, решение проблем, связанных с прогнозированием поведения системы в будущем, и другие вопросы. При формировании исходной информации о параметрах элементов, как правило, за основу берется информация, получаемая в ходе проведения обследования систем и изучения опыта ее эксплуатации. Иными словами за основу берется информация о поведении комплектующих элементов системы в процессе ее функционирования.

Анализ исходных показателей элементов, узлов, составных частей системы, который производят на этапах эксплуатации, испытаний, конструкторских разработок систем, выполняется в целях решения следующих вопросов:

- 1) определения фактических значений исследуемых характеристик комплектующих элементов системы в условиях их реальной эксплуатации;
- 2) выявления взаимосвязи изучаемых характеристик элементов системы и условий их эксплуатации, анализа влияния на исследуемые показатели внешних воздействий;
- 3) прогнозирования поведения вновь создаваемого оборудования или измененной структуры системы.

Таким образом, для решения указанных задач, в первую очередь, необходимо организовать контроль за поведением оборудования в реальных условиях его эксплуатации. В дальнейшем информация, получаемая в процессе эксплуатации объектов, используется для построения моделей систем, в отношении которых проводится анализ.

При проведении экспериментальных исследований большую роль играет информация, полученная в результате наблюдений за объектами, поведение которых имеет вероятностную природу. Изучение таких систем осуществляется по результатам реализации вы-

ходных параметров, являющихся случайными величинами или величинами, имеющими стохастическую составляющую.

Наиболее общей характеристикой, описывающей поведение одномерной случайной величины, является ее плотность распределения $f(t)$. Зная плотность распределения случайной величины, можно однозначно определить такие характеристики, как вероятность реализации некоторого события, интенсивность наступления события, среднее время между реализациями событий и пр.

Таким образом, зная плотность или функцию распределения случайной величины, можно перейти к определению характеристик сложной системы. На практике функция распределения бывает неизвестна. Её приходится восстанавливать по статистическим данным реализации случайной величины. Поскольку статистика о результатах наблюдений всегда присутствует в ограниченном виде, восстановление функции распределения возможно с некоторой долей достоверности. Зачастую неизвестный закон распределения случайной величины не подлежит описанию, а аппроксимируется известным типовым законом распределения.

На сегодняшний день подбор типового закона распределения под полученные экспериментальные данные осуществляется с помощью параметрических критериев, позволяющих с помощью определенных расчетов сделать вывод о близости выборки к проверяемому закону распределения (Реброва И.А. Планирование эксперимента).

2.4. Методы анализа экспериментальных данных

Дисперсионный анализ данных

Методы *дисперсионного, корреляционного и регрессионного* анализов являются последовательными ступенями при исследовании связей между случайными величинами.

Методами дисперсионного анализа устанавливается наличие влияния заданного фактора на изучаемый процесс (на выходную переменную процесса) за счёт статистической обработки наблюдаемой совокупности выборочных данных. Корреляционный анализ позволяет оценить силу такой связи, а методами регрессионного анализа строится математическая модель и оценивается адекватность модели.

Дисперсионный анализ (ANOVA)– метод в математической статистике, направленный на поиск зависимостей в экспериментальных данных путём исследования значимости различий в средних значениях. Метод разработан Р. Фишером для анализа результатов экспериментальных исследований сложных систем.

Дисперсионный анализ является статистическим методом анализа результатов наблюдений случайной величины (*отклика*), зависящей от различных одновременно действующих независимых переменных (*факторов*), с целью оценки их влияния на исследуемую случайную величину.

Влияние различных факторов на изучаемую случайную величину (например, влияние технологического способа изготовления или режима нагрузки на долговечность технического изделия) приводит к изменению значений статистических характеристик этой величины: математического ожидания, дисперсии или моментов более высокого порядка. С помощью дисперсионного анализа устанавливаются изменения дисперсии результатов эксперимента при изменении уровней изучаемого фактора. Если дисперсии будут отличаться значимо, то следует вывод о значимом влиянии фактора на среднее значение наблюдаемой случайной величины.

То есть дисперсионный анализ позволяет исследовать различие между группами данных, определять, носят ли эти расхождения случайный характер или вызваны конкретными обстоятельствами. При выполнении эксперимента в разных условиях дисперсионный анализ поможет определить, насколько влияют внешние факторы на измерения, или отклонения носят случайный характер. Если на производ-

стве для улучшения качества продукции изменяют режим процессов, то дисперсионный анализ позволяет оценить результаты воздействия данного фактора.

Классические методы дисперсионного анализа основываются на следующих предпосылках: распределение исходных случайных величин нормально; дисперсии экспериментальных данных одинаковы для всех условий эксперимента (т.е. для каждого уровня фактора).

Т.е. проведение дисперсионного анализа возможно при соблюдении следующих требований для каждого уровня фактора:

- 1) наблюдения независимы и проводятся в одинаковых условиях;
- 2) измеряемая случайная величина имеет нормальный закон распределения с постоянной для всех уровней фактора дисперсией σ^2 .

Сущность метода состоит в разделении общей дисперсии на две части, одна из которых обусловлена случайной ошибкой (то есть внутригрупповой изменчивостью), а вторая связана с различием средних значений, и проверке гипотез о значимости влияния этих факторов на случайную величину. Сравнивая компоненты дисперсии друг с другом с помощью F -критерия Фишера, можно определить, какая доля общей вариативности случайной величины обусловлена действием регулируемых факторов.

Основной целью сравнения компонентов дисперсии друг с другом посредством F -критерия Фишера является проверка нулевой гипотезы H_0 : «Средние величины (мат. ожидания) случайной величины на всех уровнях фактора одинаковы» $m_1 = m_2 = \dots = m_k$.

Принципиальный алгоритм дисперсионного анализа включает несколько основных этапов:

- установление основных источников варьирования результативного признака и определение объемов вариации (сумм квадратов отклонений) по источникам её образования;
- определение числа степеней свободы, соответствующих компонентам общей вариации;
- вычисления дисперсий как отношений соответствующих объемов вариации к их числу степеней свободы;
- анализ соотношения между дисперсиями;
- оценка достоверности разницы между средними и формулирование выводов.

Указанный алгоритм сохраняется как при простых моделях дисперсионного анализа, когда данные группируются по одному признаку, так и при сложных моделях, когда данные группируются

по двумя и большим числом признаков. Однако с увеличением числа групповых признаков усложняется процесс разложение общей вариации по источникам ее образования.

В зависимости от типа и количества переменных различают:

- однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ (одна или несколько независимых переменных);
- одномерный и многомерный дисперсионный анализ (одна или несколько зависимых переменных);
- дисперсионный анализ с повторными измерениями (для зависимых выборок);
- дисперсионный анализ с постоянными факторами, случайными факторами, и смешанные модели с факторами обоих типов.

Однофакторный дисперсионный анализ

Предположим, что анализируется влияние на случайную величину X фактора A , изучаемого в k группах ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_k$). В каждой группе A_i проведены n наблюдений ($x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$), $i = \text{const}$ случайной величины X (табл. 1). Следовательно, во всех k группах фактора A произведены $N = k \times n$ наблюдений.

Таблица 1

Экспериментальные данные

Номер наблюдения	Группы фактора A					
	A_1	A_2	...	A_i	...	A_k
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{k1}
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{k2}
...	...	...	...	...	...	...
j	x_{1j}	x_{2j}	...	x_{ij}	...	x_{kj}
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{in}	...	x_{kn}

Рассмотрим оценки различных дисперсий, возникающие при анализе таблицы результатов наблюдений.

Для оценки вариации данных, характеризующей изменение данных внутри одной группы A_i , вводится понятие оценки *групповой дисперсии*:

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad i = \text{const} \quad (2.2)$$

где среднее значение отклика по i -й группе:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = \text{const.} \quad (2.3)$$

Для оценки вариации данных, характеризующей рассеяние рассматриваемой случайной величины вне влияния фактора A , вводится понятие оценки *средней внутригрупповой дисперсии*:

$$S_0^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_i^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]. \quad (2.4)$$

Для оценки вариации данных, характеризующей влияние фактора, положенного в основу группы A_i , на общую выборку вводится понятие оценки *межгрупповой дисперсии*:

$$S_A^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_0)^2, \quad (2.5)$$

где общее среднее значение отклика по всем наблюдениям:

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}. \quad (2.6)$$

Общая дисперсия выборки может быть представлена в виде суммы межгрупповой дисперсии (дисперсии вариантов) и средней внутригрупповой дисперсии (дисперсии ошибок):

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_0, \quad (2.7)$$

а дисперсионное отношение имеет вид:

$$F = \frac{\sigma_A}{\sigma_0} = \frac{S_A^2}{S_0^2}. \quad (2.8)$$

Если фактор, положенный в основу группировки, не оказывает влияния на вариацию изучаемой случайной величины, то средняя внутригрупповая дисперсия будет отражать влияние прочих факторов, которые определяют вариацию внутри групп, и поэтому дисперсионное отношение будет близко к единице или отличаться от неё в силу присутствия случайных колебаний.

Проверка влияния фактора A на изменение математических ожиданий может быть сведена к сравнению межгрупповой и средней внутригрупповой дисперсии, оценками которых являются соответственно S_A^2 и S_0^2 . Влияние фактора A признается значимым для мате-

математических ожиданий случайной величины, если значимо дисперсионное отношение F . Дисперсионное отношение признается значимым с доверительной вероятностью α , если

$$F = \frac{S_A^2}{S_0^2} > F_\alpha(d.f_1; d.f_2), \quad (2.9)$$

где $F_\alpha(d.f_1; d.f_2)$ – квантиль F распределения с $d.f_1$ и $d.f_2$ степенями свободы, определяемый таблично (табл. 2.1).

Для проверки значимости результата (т.е. случайности или неслучайности отклонения математических ожиданий) учитывается число степеней свободы $d.f$. Оценка *групповой дисперсии* имеет число степеней свободы $d.f_i = (n - 1)$, оценка *межгрупповой дисперсии* имеет число степеней свободы $d.f_1 = (k - 1)$, а оценка *средней внутригрупповой дисперсии* имеет число степеней свободы $d.f_2 = k(n - 1) = (N - k)$.

Таблица 2.1

Значения критерия Фишера (F- критерия) *

$d.f_2$	$d.f_1$									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,557	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,744	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,197	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,811
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

*Значения приведены для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

Корреляционный анализ данных

Исследователя нередко интересует, как связаны между собой две или большее количество переменных в одной или нескольких изучаемых выборках. Если эти переменные стохастичны, а анализ осуществляется по выборке из генеральной совокупности, то данная область исследований относится к задачам статистического исследования зависимостей, которые включают в себя корреляционный, регрессионный, дисперсионный, ковариационный анализ и анализ таблиц сопряженности.

Термин «корреляция» (от лат. correlatio – соотношение, связь, зависимость) появился в XIX в. благодаря работам английского математика Карла Пирсона (Pearson) (1857–1936) и английского антрополога и психолога Френсиса Гальтона (Galton) (1882–1911).

Корреляция или *корреляционная зависимость* – статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми). При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин. Т.е. корреляционная связь – это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого признака.

Корреляционный анализ – метод обработки статистических данных, с помощью которого измеряется теснота связи между двумя или более переменными. С его помощью определяют необходимость включения тех или иных факторов в уравнение множественной регрессии, а также оценивают полученное уравнение регрессии на соответствие выявленным связям.

Цель корреляционного анализа – обеспечить получение некоторой информации об одной переменной с помощью другой переменной. В случаях, когда возможно достижение цели, говорят, что переменные коррелируют.

Корреляционная связь, в отличие от функциональной, показывает лишь тенденцию изменения одной величины под действием другой, следовательно, на основании корреляции можно утверждать лишь о степени связи между переменными, но не о существовании функциональной зависимости между ними.

Задачи корреляционного анализа сводятся следующим исследованиям:

- установление направления (положительное или отрицательное) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками;
- измерение её тесноты (силы);
- проверка уровня значимости полученных данных.

Проведение корреляционного анализа возможно при соблюдении следующих требований:

- 1) наблюдения независимы и однородны;
- 2) наличие достаточного количества наблюдений для изучения (число наблюдений должно не менее чем в 5 - 6 раз превышать число факторов).
- 3) измеряемая случайная величина имеет нормальный закон распределения (для линейной корреляции).

Чтобы оценить зависимость между переменными, нужно знать как величину корреляции, так и её значимость. Уровень значимости, вычисленный для каждой корреляции, представляет собой главный источник информации о надежности корреляции. Значимость определенного коэффициента корреляции зависит от объема выборок. Критерий значимости основывается на предположении, что распределение остатков (т. е. отклонений наблюдений от регрессионной прямой) для зависимой переменной Y является нормальным (с постоянной дисперсией для всех значений независимой переменной X).

Корреляционные связи различаются *по форме, направлению и степени связи (тесноте)*. По форме корреляционная связь может быть прямолинейной или криволинейной. По направлению корреляционная связь может быть положительной ("прямой") и отрицательной ("обратной"). При положительной прямолинейной корреляции более высоким значениям одного признака соответствуют более высокие значения другого, а более низким значениям одного признака – низкие значения другого. При отрицательной корреляции соотношения обратные.

Степень, сила или теснота корреляционной связи определяется по величине *коэффициента корреляции*. Сила связи не зависит от ее направленности и определяется по абсолютному значению коэффициента корреляции. Максимальное возможное абсолютное значение коэффициента корреляции $r = 1,00$; минимальное $r = 0,00$.

Общая классификация корреляционных связей (по Ивантер Э.В., Коросову А.В., 1992):

сильная, или **тесная** при коэффициенте корреляции $r > 0,70$;

средняя при $0,50 < r < 0,69$;

умеренная при $0,30 < r < 0,49$;

слабая при $0,20 < r < 0,29$;

очень слабая при $r < 0,19$.

При исследовании корреляции используются *графический* и *аналитический* подходы.

Графический анализ начинается с построения *корреляционного поля*. *Корреляционное поле* (или *диаграмма рассеяния*) является графической зависимостью между результатами измерений двух признаков. Для ее построения исходные данные наносят на график, отображая каждую пару значений (X_i, Y_i) в виде точки с координатами x_i и y_i в прямоугольной системе координат. Визуальный анализ корреляционного поля позволяет сделать предположение о форме и направлении взаимосвязи двух исследуемых показателей.

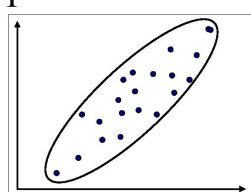


Рис 2.2, а. Линейная статистическая связь

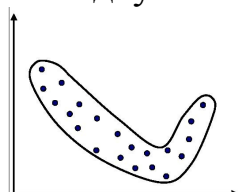


Рис 2.2, б. Нелинейная статистическая связь

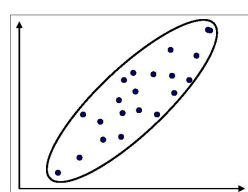


Рис 2.2, в. Положительная направленность

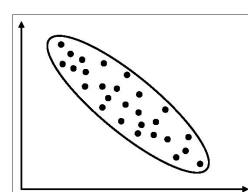


Рис 2.2, г. Отрицательная направленность

Вид корреляционного поля так же дает приближенное представление о величине коэффициента корреляции (рис. 2.3).

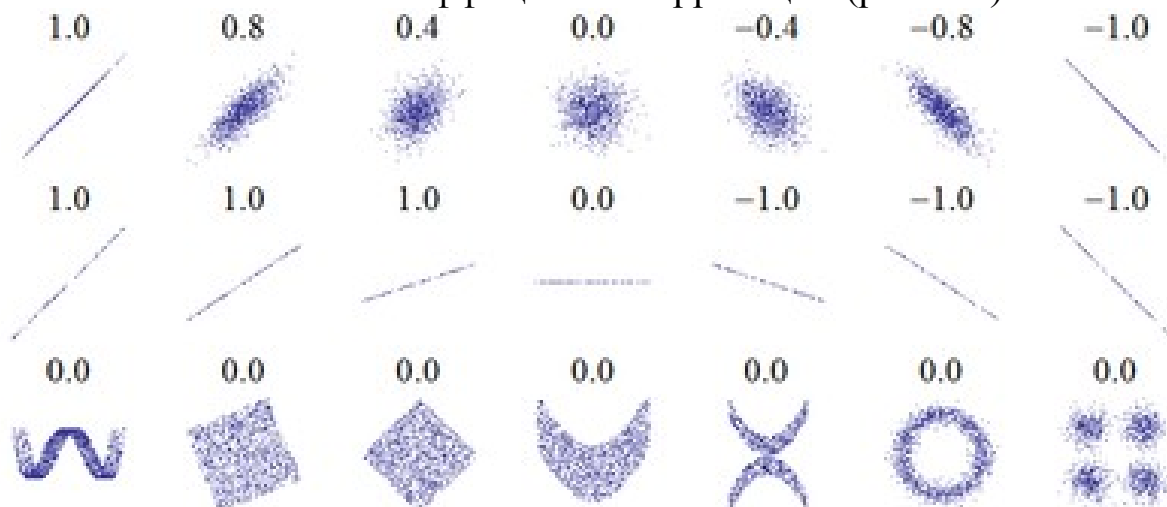


Рис.2.3. Коэффициенты корреляции при различной форме корреляционного поля

Важной характеристикой совместного распределения двух случайных величин является *ковариация* (или *корреляционный момент*).

Коэффициент ковариации представляет собой математическое ожидание произведения отклонений величин от их мат. ожиданий

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}. \quad (2.10)$$

Если рассматриваемые величины независимы, то коэффициент ковариации равен нулю. В случае же линейной связи между величинами коэффициент ковариации отличен от нуля.

Метод вычисления коэффициента корреляции зависит от вида шкалы, к которой относятся переменные. Так, для измерения переменных с интервальной и количественной шкалами необходимо использовать коэффициент корреляции Пирсона. Если по меньшей мере одна из двух переменных имеет порядковую шкалу, либо не является нормально распределённой, необходимо использовать ранговую корреляцию Спирмена или τ -корреляцию Кендалла.

Линейная корреляция

Коэффициент корреляции Пирсона (Браве-Пирсона) применим в том случае, если измерение значений исследуемых признаков производятся в шкале отношений или интервалов и форма зависимости является линейной. Коэффициент корреляции характеризует только линейную взаимосвязь (степень её тесноты). Линейная взаимосвязь двух случайных величин состоит в том, что при увеличении одной случайной величины другая случайная величина имеет тенденцию возрастать (убывать) по линейному закону.

Условия применения: метрическая шкала переменных (только количественное выражение), нормальное распределение переменных, прямолинейная связь, отсутствие дисперсионных выбросов.

Коэффициент корреляции Пирсона равен отношению ковариации двух переменных к произведению их средних квадратических отклонений:

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]}}. \quad (2.11)$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, как и все выборочные характеристики, является случайной величиной и при повторении измерений может принимать другие значения. Поэтому для независимых случайных величин, для которых генеральный коэффициент корреляции ρ равен нулю, выборочный коэффициент r может заметно отличаться от нуля, и наоборот. В связи с этим всегда возникает важная практическая задача, заключающаяся в проверке значимости выборочного коэффициента корреляции.

Нулевая гипотеза H_0 заключается в отсутствии линейной корреляционной связи между исследуемыми переменными в генеральной совокупности: $\rho = 0$. Альтернативной гипотезой H_1 является утверждение о том, что генеральный коэффициент корреляции ρ отличен от нуля: $\rho \neq 0$.

Проверка нулевой гипотезы осуществляется с помощью критерия Стьюдента и заключается в вычислении величины t , которая затем сравнивается с критическими значениями $t_{\alpha}(d.f)$ для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $d.f = n - 2$.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (2.12)$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона значительно (существенно) отличается от нуля, если эмпирическое значение t попадает в критическую область критерия, то есть если $t > t_{0,05}(n - 2)$.

Ранговая корреляция

Использование коэффициента линейной корреляции Пирсона в случае, когда о законе распределения и о типе измерительной шкалы отсутствует сколько-нибудь надежная информация, может привести к существенным ошибкам.

В системных исследованиях экспериментальных данных часто возникает потребность анализа связи между переменными, которые не могут быть измерены в интервальной или реляционных шкалах, но тем не менее поддаются упорядочению и могут быть проранжированы по степени убывания или возрастания признака. Для определения тесноты связи между признаками, измеренными в порядковых шкалах, или когда двумерная выборка (X_i, Y_i) относится к произвольному непрерывному распределению, применяются методы ранговой корреляции. К ним относятся: коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

Методы ранговой корреляции могут быть использованы для определения тесноты связи не только между количественными переменными, но и между качественными признаками при условии, что их значения можно упорядочить и проранжировать.

Условия применения: метрическая или ранговая шкала (признаки представлены не только количественными, но и атрибутивными значениями), признаки имеют открытые варианты (например, температура до 60 °С и др.), связь между переменными монотонна (не меняет знак), равенство размаха двух переменных.

Ранг наблюдения – это тот номер, который получит наблюдение в совокупности всех данных – после их упорядочения по определенному правилу (например, от меньших величин к большим).

Процедура перехода от совокупности наблюдений к последовательности их рангов называется ранжированием, а результат ранжирования называют *ранжировкой*.

Суть ранжирования состоит в том, что каждая из двух совокупностей располагается в виде вариационного ряда с присвоением каждому члену ряда соответствующего порядкового номера (ранга), выраженного натуральным числом. Одинаковым значениям ряда присваивают среднее ранговое число.

Алгоритм ранжирования:

- составить два ряда из парных сопоставляемых признаков, обозначив первый и второй ряд соответственно X и Y . При этом представить первый ряд признака в убывающем или возрастающем порядке;
- числовые значения второго ряда расположить напротив тех значений первого ряда, которым они соответствуют;
- величину признака в каждом из сравниваемых рядов заменить порядковым номером (рангом). Рангами, или номерами, обозначают места показателей (значения) первого и второго рядов. При этом числовым значениям второго признака ранги должны присваиваться в том же порядке, какой был принят при раздаче их величинам первого признака. При одинаковых величинах признака в ряду ранги следует определять как среднее число из суммы порядковых номеров этих величин.

Ранжирование приводит к тому, что значения этих рядов приобретают одинаковый минимум = 1 (минимальный ранг) и максимум, равный количеству значений (максимальный, последний ранг = n , т.е. максимальному количеству случаев в выборке).

Для расчета коэффициента ранговой корреляции Спирмена r_S используется формула:

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (2.13)$$

где 6 – постоянный коэффициент, d_i – разность рангов для каждой i -той пары величин, n – число наблюдений (объем выборки).

Коэффициент корреляции Спирмена r_S подтверждает присутствие монотонно-возрастающей или убывающей зависимости (не обязательно линейной). Он, как и коэффициент линейной корреляции Пирсона r , изменяется от -1 до $+1$, однако значение коэффициента r_S всегда меньше значения коэффициента r .

Проверка нулевой гипотезы об отсутствии статистически значимой связи можно проверить на основании t -критерия Стьюдента, который заключается в вычислении величины t_S , которая затем сравнивается с критическими значениями $t_{S\alpha}(d, f)$ для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $d, f = n - 2$.

$$t_S = \frac{r_S \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}}. \quad (2.14)$$

Значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена значимо (существенно) отличается от нуля, если эмпирическое значение t_S попадает в критическую область критерия, то есть если $t_S > t_{S0,05}(n-2)$.

Пример расчета рангового коэффициента корреляции Спирмена

Задача: на основании наблюдений за развивающимся сайтом и изменением его средневзвешенной позиции по основным запросам в поисковой системе необходимо проверить, можно ли говорить о линейной зависимости между позицией сайта и числом посетителей. Исходные данные: x (число посетителей в сутки), y (усредненная позиция сайта в поисковой системе).

Каждый из элементов признаков (x и y) ранжируется в порядке возрастания значений, в результате получают ранги N_x и N_y .

Результаты ранжирования представлены в таблице:

n	x	N_x	y	N_y	разность рангов	d^2
---	-----	-------	-----	-------	-----------------	-------

					$d = N_x - N_y$	
1	500	4	5,4	6	-2	4
2	790	5	4,2	5	0	0
3	870	6	4,0	4	2	4
4	1500	7	3,4	3	4	16
5	2300	8	2,5	2	6	36
6	5600	9	1,0	1	8	64
7	100	3	6,1	7	-4	16
8	20	2	8,2	8	-6	36
9	5	1	14,6	9	-8	64

Кроме рангов, в таблице рассчитаны разность рангов и квадрат разности рангов пары соответствующих элементов x и y .

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 240}{9(9^2 - 1)} = -1$$

Значение коэффициента корреляции Спирмена можно оценить на основании t -критерия Стьюдента:

$$t_{эмп} = \rho \times \frac{\sqrt{n-2}}{1-\rho^2} = \infty > t_{крит},$$

Следовательно, нулевая гипотеза об отсутствии корреляционной зависимости между выборками отвергается. Обратная связь между числом посетителей сайта и его позицией в поисковой системе является статистически значимой.

Множественная корреляция

Предположим, что анализируется степень тесноты линейной связи случайной величины X , изучаемой в k группах. В каждой группе проведены n наблюдений $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$, $i = \text{const}$ случайной величины. Следовательно, во всех k группах фактора A произведены $N = k \times n$ наблюдений. Выборка представляется в виде матрицы X , состоящей из результатов n наблюдений за каждым из k элементов случайного вектора:

$$X = \begin{matrix} & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{k1} \\ & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{k2} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & x_{1j} & x_{2j} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{kj} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{in} & \dots & x_{kn} \end{matrix}$$

Размерность этой матрицы $n \times k$: n строк, k столбцов.

По этим данным можно построить:

- ковариационную матрицу:

$$\text{cov} = \begin{matrix} & \text{cov}_{11} & \text{cov}_{21} & \dots & \text{cov}_{i1} & \dots & \text{cov}_{k1} \\ & \text{cov}_{12} & \text{cov}_{22} & \dots & \text{cov}_{i2} & \dots & \text{cov}_{k2} \\ \text{cov} = & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \text{cov}_{1i} & \text{cov}_{2i} & \dots & \text{cov}_{ii} & \dots & \text{cov}_{ki} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \text{cov}_{1n} & \text{cov}_{2n} & \dots & \text{cov}_{in} & \dots & \text{cov}_{kn} \end{matrix}$$

- корреляционную матрицу – симметричную с единичными диагональными элементами. Нondiagonalные элементы этой матрицы – это выборочные коэффициенты парной корреляции

$$R = \begin{matrix} & 1 & r_{21} & \dots & r_{i1} & \dots & r_{k1} \\ & r_{12} & 1 & \dots & r_{i2} & \dots & r_{k2} \\ R = & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & r_{1j} & r_{2j} & \dots & 1 & \dots & r_{kj} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{in} & \dots & 1 \end{matrix}$$

Регрессионный анализ данных

Известно, что в общем случае зависимость между величинами может быть представлена таблично, графически и аналитически. Табличная форма позволяет определить значение выходной величины для заданных значений входных, но не дает представления о характере зависимости. Графическая форма создает наглядность представления зависимости, позволяет визуально оценить ее характер. Аналитическая форма позволяет исследовать зависимость методами математического анализа, т.е. определить значения максимума, минимума, точек перегиба и т.д. Получение аналитической зависимости желательно при разработке расчетных методик и необходимо при создании расчетных программ на ЭВМ. Эта форма представления зависимости наиболее универсальна, из нее можно получить табличную и графическую.

Термин «регрессия» был введен Фрэнсисом Гальтоном в конце 19-го века. Гальтон обнаружил, что дети родителей с высоким или низким ростом обычно не наследуют выдающийся рост и назвал этот феномен «регрессия к посредственности». Сначала этот термин использовался исключительно в биологическом смысле. После работ Карла Пирсона этот термин стали использовать и в статистике.

Регрессионный анализ – статистический метод исследования влияния одной или нескольких независимых переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ на зависимую переменную Y . Независимые переменные иначе называют *регрессорами* или *предикторами*, а зависимые переменные – *критериальными*. В регрессионном анализе, в отличие от корреляционного, только выходные величины Y являются случайными. Входные величины X должны быть неслучайными и некоррелированными между собой.

Аналитические зависимости, полученные по данным эксперимента путем регрессионного анализа называются *эмпирическими* или *аппроксимирующими*. Необходимо иметь в виду, что если теоретические формулы, полученные на основе знания законов процесса, могут быть использованы при произвольных значениях аргументов, то эмпирические являются приближенными и могут применяться лишь в определенных условиях и в ограниченных интервалах аргументов. Один и тот же процесс может быть описан несколькими различными эмпирическими формулами.

Основополагающие допущения классического регрессионного анализа включают в себя:

- выборка является представителем прогнозирования логического вывода;
- ошибка является случайной величиной со средним значением нуля, который является условным на объясняющих переменных;
- независимые переменные измеряются без ошибок;
- независимые переменные (предикторы) линейно независимы, то есть не представляется возможным выразить любой предсказатель в виде линейной комбинации остальных;
- ошибки являются некоррелированными, то есть ковариационная матрица ошибок диагоналей и каждый ненулевой элемент являются дисперсией ошибки;
- дисперсия ошибки постоянна по наблюдениям.

Задачи регрессионного анализа:

- установления формы зависимости между переменными;
- определение функции регрессии;
- прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Последовательность этапов регрессионного анализа:

1. формулировка задачи. На этом этапе формируются предварительные гипотезы о зависимости исследуемых явлений.
2. определение зависимых и независимых (объясняющих) переменных.
3. сбор статистических данных. Данные должны быть собраны для каждой из переменных, включенных в регрессионную модель.
4. формулировка гипотезы о форме связи (простая или множественная, линейная или нелинейная).
5. определение функции регрессии (заключается в расчете численных значений параметров уравнения регрессии)
6. оценка точности регрессионного анализа.
7. интерпретация полученных результатов. Полученные результаты регрессионного анализа сравниваются с предварительными гипотезами.
8. прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной внутри и снаружи интервала исходных данных.

Гипотеза о зависимости исследуемых независимых переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ на зависимую переменную Y формируется в результате предположения или экспериментальных наблюдений.

Определение зависимых и независимых переменных. В регрессионный анализ не рекомендуется включать факторы, слабо связанные с показателем, но тесно связанные с другими факторами. Не включают в уравнение и факторы, функционально связанные друг с другом (для них коэффициент корреляции равен 1). Включение таких факторов приводит к вырождению системы уравнений для оценок коэффициентов регрессии и к неопределенности решения.

Формулировка гипотезы о форме связи является неформализованной процедурой. Здесь многое зависит от опыта исследователя. Уже отмечалось, что один и тот же процесс может быть описан различными эмпирическими зависимостями. На практике при выборе вида уравнения обычно руководствуются следующим. По данным эксперимента первоначально строят графическую зависимость. Ее сравнивают с различными кривыми, уравнения которых известны, и останавливаются на наиболее вероятной.

Характер и форма зависимости между переменными могут обрывать следующие разновидности регрессии:

- положительная линейная регрессия (выражается в равномерном росте функции);
- положительная равноускоренно возрастающая регрессия;
- положительная равнозамедленно возрастающая регрессия;
- отрицательная линейная регрессия (выражается в равномерном падении функции);
- отрицательная равноускоренно убывающая регрессия;
- отрицательная равнозамедленно убывающая регрессия.

Однако описанные разновидности обычно встречаются не в чистом виде, а в сочетании друг с другом. В таком случае говорят о комбинированных формах регрессии. При выборе формулы нет необходимости ориентироваться на сложные зависимости. Ценность формулы определяется не сложностью, а той погрешностью, которая допускается при ее применении.

Для выбора вида функциональной зависимости можно рекомендовать следующий подход:

- в пространстве параметров графически отображают точки со значениями показателя. При большом количестве параметров можно строить точки применительно к каждому из них, получая двумерные распределения значений;
- по расположению точек и на основе анализа сущности взаимосвязи показателя и параметров объекта делают заключение о примерном виде регрессии или её возможных вариантах;

$$\frac{\partial F(b_0, b_1, \dots, b_m)}{\partial b_i} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - f_i(x_i, b_0, b_1, \dots, b_m)] f'_{b_i}(x_i, b_0, b_1, \dots, b_m). \quad (2.17)$$

Решение системы уравнений относительно $b_0, b_1, \dots, b_m$ дает искомые наилучшие значения параметров уравнения регрессии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n [y_i - f_i(x_i, b_0, b_1, ..., b_m)] f'_{b_1}(x_i, b_0, b_1, ..., b_m) = 0; \\ \\ \sum_{i=1}^n [y_i - f_i(x_i, b_0, b_1, ..., b_m)] f'_{b_m}(x_i, b_0, b_1, ..., b_m) = 0. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Рассмотрим случай поиска линейной однофакторной зависимости вида $y = b_0 + b_1x$.

Функция $F(b_0, b_1, \dots, b_m)$ в данном случае есть функция двух переменных: b_0 и b_1 . Согласно формуле (2.15):

$$F(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

Функция будет иметь минимум, если её частные производные по обоим переменным будут равны нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial F(b_0, b_1)}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)] = 0; \\ \frac{\partial F(b_0, b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)](-x_i) = 0. \end{cases}$$

Преобразовав выражения, получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i ; \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i . \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения коэффициентов регрессии.

В практике математической обработки опытных данных широко используются нелинейные формулы, достаточно просто преобразуемые к линейному виду. К ним относятся параболические и степенные зависимости. Распространенная в гидравлическом эксперименте параболическая зависимость вида $y = b_0 + b_1x^2$ приводится к линейному виду подстановкой $z = x^2$. Коэффициенты полученного линейного уравнения $y = b_0 + b_1z$ находятся по описанной методике.

Степенные зависимости вида

$$y = C \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_m^{b_m}$$

приводятся к полиномиальному виду путем логарифмирования:

$$\ln y = \ln C + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_m \ln x_m$$

Обозначив $b_0 = \ln C$ – свободный член полинома, и прологарифмировав значения факторов и параметра, можем применить метод наименьших квадратов для поиска значений $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$.

Для анализа общего качества уравнения линейной регрессии используется обычно коэффициент детерминации R^2 , который получается посредством простого возведения в квадрат коэффициента корреляции r . Коэффициент детерминации показывает, в какой мере изменчивость величины Y объясняется поведением величины X . Например, если коэффициент корреляции совокупных данных равняется 0,8, то коэффициент детерминации $R^2 = 0,8^2 = 0,64$ или 64%. Это значение говорит о том, что 64% вариации (изменчивости) величины Y объясняется изменением независимых переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$. Остальная часть (36%) вариации Y объясняется другими причинами.

Коэффициент детерминации R^2 вычисляется по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (2.19)$$

где $\bar{y}$ – среднее значение выборки численных значений функции.

При значении $R^2 \geq 0,7$ имеется высокая степень связи выявленного уравнения регрессии с найденными экспериментальными данными. Модели с коэффициентом детерминации выше 80 % можно признать достаточно хорошими (коэффициент корреляции превышает 90 %). Значение коэффициента детерминации 1 означает функциональную зависимость между переменными.

Так как в большинстве случаев уравнение регрессии приходится строить на основе выборочных данных, то возникает вопрос об адекватности построения уравнения данным генеральной совокупности. Для этого проводится проверка статистической значимости коэффициента детерминации R^2 на основе F -критерия Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (2.20)$$

где n – число наблюдений, m – число факторов в уравнении регрессии.

Коэффициент детерминации R^2 признается значимым с доверительной вероятностью α , если

$$F > F_{\alpha}(d.f_1; d.f_2), \quad (2.21)$$

где $F_{\alpha}(d.f_1; d.f_2)$ – квантиль F распределения с $d.f_1 = m$ и $d.f_2 = n - m - 1$ степенями свободы, определяемый таблично (табл. 2.1).

Оценка неизвестных значений зависимой переменной сводится к решению задачи одного из типов:

- оценка значений зависимой переменной внутри рассматриваемого интервала исходных данных, т.е. пропущенных значений; при этом решается задача интерполяции;
- оценка будущих значений зависимой переменной, т.е. нахождение значений вне заданного интервала исходных данных; при этом решается задача экстраполяции.

Уравнение регрессии является всего лишь хорошим аналитическим описанием имеющихся данных, а не законом, описывающим взаимосвязи параметров и показателя. Это уравнение применяют для расчета значений показателя в заданном диапазоне изменения параметров. Оно ограничено пригодно для расчета вне этого диапазона, т.е. его можно применять для решения задач интерполяции и в ограниченной степени для экстраполяции.

Главной причиной неточности прогноза является не столько неопределенность экстраполяции линии регрессии, сколько значительная вариация показателя за счет неучтенных в модели факторов. Ограничением возможности прогнозирования служит условие стабильности неучтенных в модели параметров и характера влияния учтенных факторов модели. Если резко меняется внешняя среда, то составленное уравнение регрессии потеряет свой смысл. Прогноз, полученный подстановкой в уравнение регрессии ожидаемого значения параметра, является точечным. Вероятность реализации такого прогноза ничтожно мала. Целесообразно определить доверительный интервал прогноза. Для индивидуальных значений показателя интервал должен учитывать ошибки в положении линии регрессии и отклонения индивидуальных значений от этой линии.