

*Приложение к Методическим рекомендациям
по организации самостоятельной работы обучающихся
по программам высшего образования
в ФГБОУ ВО «Астраханский государственный
технический университет»*



**Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания,
науки и инноваций сертифицирована DQS
по международному стандарту ISO 9001:2015**

Институт информационных технологий и коммуникаций

Кафедра Высшая и Прикладная Математика

НАЗВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИКА

Методические указания для практических работ

Для обучающихся по направлению

08.03.01 Строительство

профиля (направленности, специализации)

«Промышленное и гражданское строительство»

АСТРАХАНЬ – 2021

Автор: к.т.н., доцент Терновая Г.Н.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Ильясова А.К.

Методические указания для практических работ по дисциплины
(модулю) **«Математика»** утверждены на заседании кафедры **«Высшая и Прикладная
Математика»** 24.06.2021 г., протокол № 5.

I курс 1 семестр

1. Элементы линейной алгебры.

1. 1. Матрицы. Действия над матрицами.

Пример 1.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C той же размерности, каждый член которой равен произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A .

$C = \lambda \cdot A$, где $C_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 2.

$$-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A размерности $(m \times n)$ на матрицу B размерности $(n \times p)$ называется матрица C $(m \times p)$, каждый член которой равен сумме парных произведений элементов i -ой строки первой матрицы на элементы j -го столбца второй матрицы.

$$A \cdot B = C, \text{ где } C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Пример 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

$$\text{Найти матрицы } 2A - 3B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 4 & -14 & 2 \\ -2 & 10 & 8 \end{pmatrix}, -3 \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -9 & 0 & 6 \\ 12 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -5 & -14 & 8 \\ 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.

$$\text{Найти } A^2, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 - 3 & -15 + 6 \\ 5 + 2 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.

$$\text{Найти } A^2 - 5E \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 1 + 8 & -3 - 2 + 6 & 6 - 1 + 8 \\ -1 & 4 + 3 & 2 + 4 \\ -3 - 4 & 1 + 6 + 12 & -2 + 3 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 13 \\ -1 & 7 & 6 \\ -7 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
2A^2 & \left(\begin{vmatrix} 14 & 2 & 2 \\ 2 & 14 & 12 \\ -14 & 38 & 34 \end{vmatrix} \right) - 5E = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \\
2A^2 - 5E & \left(\begin{vmatrix} 9 & 2 & 26 \\ 2 & 9 & 12 \\ -14 & 38 & 29 \end{vmatrix} \right) \\
& = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 26 \\ 2 & 9 & 12 \\ -14 & 38 & 29 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 Определители и их свойства.

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) = -10 + 21 = 11.$$

Пример 2. вычислить определители третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. I способ

$$\begin{aligned}
\text{По формуле (2)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= 3 \cdot 13 - 1 \cdot (-23) - 2 \cdot 2 = 58.
\end{aligned}$$

II способ. Используя свойство 3, преобразуем определитель следующим образом. Сначала умножим первую строку на 3 и сложим со второй, результат запишем во второй строке. Затем первую строку умножим на 2 и сложим с третьей, результат запишем в третьей строке.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 14 & 0 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Теперь разложим определитель по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 14 & 0 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = -(-98 + 40) = 58.$$

1.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3, \end{cases} \quad (1)$$

Тройка чисел (x_1, x_2, x_3) называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо x_1, x_2, x_3 все три уравнения обращаются в верные тождества.

Назовем определитель составленный из коэффициентов при неизвестных главным и обозначим Δ . Таким

$$\text{образом, } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определители $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ при неизвестных получаются из главного путем замены соответствующего столбца коэффициентов при x_1, x_2, x_3 на столбец свободных членов, т.е.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если главный определитель системы (1) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}. \quad (2)$$

Формулы (2) называются формулами Крамера.

Пример 1.

Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ y + 2z = 13 \end{cases}$$

Решение.

Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 30 - 66 = -36$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 33 - 60 = -27$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 23 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} = 3 - 48 = -45.$$

По формулам (2) находим $x = \frac{-36}{-9} = 4$, $y = \frac{-27}{-9} = 3$, $z = \frac{-45}{-9} = 5$.

Ответ: (4;3;5).

Если определитель системы $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 не равен нулю, то система не имеет решений.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесчисленное множество решений.

Пример 2.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ 3x - 3y + 6z = 3. \end{cases}$$

Решение.

Данная система имеет определители $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него третье уравнение, получим невозможное равенство $0 = 3$.

Следовательно, система не имеет решений.

Пример 3.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 1, \\ 7x + 7y + 3z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Данная система имеет определители $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$.

Рассмотрим подсистему, состоящую из двух первых уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 3y = z \\ 2x - y = 1 - 3z \end{cases}$$

Решим последнюю систему по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \Delta \neq 0,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} z & 3 \\ 1-3z & -1 \end{vmatrix} = -z - 3 + 9z = 8z - 3,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & 1-3z \end{vmatrix} = 1 - 3z - 2z = 1 - 5z.$$

Пусть $z = t$, тогда $x = \frac{8t - 3}{-7}$, $y = \frac{1 - 5t}{-7}$.

Таким образом, система имеет множество решений: $x = \frac{3 - 8t}{7}$, $y = \frac{5t - 1}{7}$, $z = t$, $t \in R$.

Однородная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Если ее главный определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Если главный определитель $\Delta = 0$, то однородная система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 4.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -34 \\ 0 & -7 & 8 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & -34 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 238 = -190.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Пример 5.

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Решение:

Находим главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, система имеет ненулевое решение.

Составим подсистему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = -z, \\ 3x + 6y = -5z. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3, \quad 3 \neq 0,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -5z & 6 \end{vmatrix} = -6z + 5z = -z,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 3 & -5z \end{vmatrix} = -5z + 3z = -2z.$$

По формулам (2) находим $x = -\frac{z}{3} = \frac{-z}{3}$, $y = \frac{-2z}{3} = -\frac{2}{3}z$.

Система имеет множество решений $x = \frac{t}{3}$; $y = -\frac{2}{3}t$; $z = t$.

1.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Покажем этот метод на примерах.

Пример 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований преобразуем ее к диагональному виду (элементы под главной диагональю равны нулю)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim$$

Умножим первую строку на (-2) и сложим со второй; затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} (8) \\ (-3) \end{matrix}$$

Умножим вторую строку на $-\frac{8}{3}$ и сложим с третьей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Теперь для полученной матрицы составим систему уравнений и решим ее

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_3 = -3$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$.

Пример 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right)$ [поменяем местами

первую и третью строки] $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right)$ [умножим первую строку

на (-8) и сложим со второй, затем умножим первую строку на (-2) и

сложим с третьей] $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 8 & 0 \\ -70 & 0 & -65 & 8 \\ -14 & 0 & -13 & -2 \end{array} \right)$ [умножим третью строку на (-5)

и сложим со второй] $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 8 & 0 \\ -14 & 0 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array} \right)$. Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0, \\ 14x_1 + 13x_3 = 2, \\ 1 \quad 3 \end{cases}$$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 18$, где последнее уравнение не выполняется ни при каких значениях x_1, x_2, x_3 . Следовательно, система уравнений несовместна.

Задания

Вычислить определители

$$1. \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; 2. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; 3. \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & 5 \end{vmatrix}; 4. \begin{vmatrix} \log_3 6 & \log_3 2 \\ \log_3 2 & \log_3 6 \end{vmatrix};$$

$$5. \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{vmatrix}; 6. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}; 7. \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}; 8. \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 8 & 7 \end{vmatrix};$$

$$9. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}; 10. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}; 11. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$12. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}; 13. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; 14. \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ b & 3 & 1 & 4 \\ c & 0 & 1 & 2 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$15. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Решить уравнения:

$$16. \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ x & 1 & x \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4; 17. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & x \\ x & 0 & 5 \end{vmatrix} = -8; 18. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & x & -2 \\ x & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0;$$

$$20. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; 21. \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решить неравенства:

$$22. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; 23. \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Выполнить действия:

$$24. A \cdot B - 3B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$25. 7E - A \cdot B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$26. 3A - 5C + 4E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$27. \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$28. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 1 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$29. A \cdot B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$30. -5A + 2B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$31. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1^2 + x_3^3 = -1. \end{cases} \quad 32. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1^2 + x_2 + 2x_3^3 = -5. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3^3 = -1. \end{cases} \quad 34. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 16, \\ x_1^2 - 5x_2 - x_3^3 = 10. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$36. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases} \quad 37. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases} \quad 39. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
40. \begin{cases} 9x_1 - x_2 + 2x_3 = -11, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & \quad 41. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \\
42. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases} & \quad 43. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11. \end{cases} \\
44. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases} &
\end{aligned}$$

Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \quad 45. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \\
46. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases} & \quad 47. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Задания для индивидуальной работы

Вариант № 0

1. Выполнить действия: $2A + B^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} > -1$.

3. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Элементы векторной алгебры

Пример 1.

Вектор $\vec{a}$, длина которого равна 6, образует с осью OX угол 60° , с осью OY – угол 135° , с осью OZ – угол 90° . Найти проекции вектора a на данные оси.

Решение.

$$a_x = \text{пр}_x a = |\vec{a}| \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$a_y = \text{пр}_{OY} a = |\vec{a}| \cdot \cos 135^\circ = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3\sqrt{2},$$

$$a_z = \text{пр}_{OZ} a = |\vec{a}| \cdot \cos 90^\circ = 6 \cdot 0 = 0.$$

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

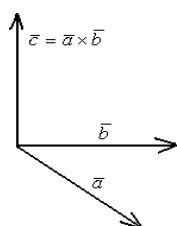
Пример 2.

Найти угол между двумя векторами $\vec{a} = i - j + 4k$ и $\vec{b} = i + 2j - 2k$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{По формуле } \cos \alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ найдем } \cos \alpha = \frac{1 - 2 - 8}{\sqrt{1+1+16} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \\ &= \frac{-9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ отсюда } \alpha = 135^\circ. \end{aligned}$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом:



1) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов a и b на синус угла между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что смотря из его конца кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.

Пример 3.

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках

$A(2;3;-1)$, $B(5;6;3)$, $C(7;1;0)$.

Решение.

Рассмотрим векторы $\vec{AB} = (3;3;4)$ и $\vec{AC} = (5;-2;1)$. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, т.е.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\text{Найдем } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11i + 17j - 21k.$$

$$\text{Таким образом, } |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{11^2 + 17^2 + 21^2} = \sqrt{851}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{851} \text{ (кв.ед).}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

Пример 4.

Показать, что векторы $\vec{a} = 7i - 3j + 2k$, $\vec{b} = 3i - 7j + 8k$ и

$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

Решение: Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

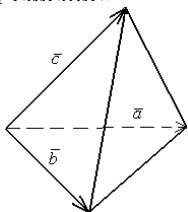
$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 1 + 3(-5) + 2 \cdot 4 = 0$$

Так как смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Пример 5. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (-1; 1; 2)$

Решение



Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, т.е. $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}}$.

Найдем $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 5 - 1 = -30.$$

Таким образом $V_{\text{пар-да}} = 30$ (куб.ед), $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$ (куб.ед).

3. Элементы аналитической геометрии

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -3)$ и $B(5; 1)$.

Решение: По формуле (3в)

$$\frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2}, \quad \frac{y+3}{4} = \frac{x-2}{3},$$

$$3(y+3) = 4(x-2), \quad 3y+9 = 4x-8.$$

$4x - 3y - 17$ – общее уравнение прямой.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 5)$ параллельно прямой $7x - 3y + 1 = 0$.

Решение: По формуле (1б)

$$(y-5) = k_2(x+2)$$

Угловой коэффициент прямой $7x - 3y + 1 = 0$ $k_1 = \frac{7}{3}$. Прямые параллельны, поэтому их угловые

коэффициенты равны: $k_1 = k_2 = \frac{7}{3}$. Таким образом, $y-5 = \frac{7}{3}(x+2)$, $3(y-5) = 7(x+2)$,

$3y - 15 = 7x + 14$, $7x - 3y + 29 = 0$ – уравнение искомой прямой.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; 3)$ перпендикулярно прямой $5x + 4y - 1 = 0$.

Решение: По формуле (1б)

$$y-3 = k_2(x-4)$$

Угловой коэффициент прямой $5x + 4y - 1 = 0$ $k_1 = -\frac{5}{4}$.

Прямые перпендикулярны, поэтому $k_1 \cdot k_2 = -1$, откуда $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{4}{5}$. Таким образом,
 $y - 3 = \frac{4}{5}(x - 4)$, $5(y - 3) = 4(x - 4)$, $5y - 15 = 4x - 16$, $4x - 5y - 1 = 0$ – уравнение искомой прямой.

Пример 4. Найти расстояние от точки $M(-3; 4)$ до прямой $6x - 8y + 1 = 0$.

Решение: По формуле (3и)

$$d = \frac{|6 \cdot (-3) - 8 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|-49|}{\sqrt{100}} = \frac{49}{10} = 4,9.$$

Пример 5. Найти угол между прямыми $y = 2x + 4$ и $y = -3x + 1$.

Решение: Угловые коэффициенты данных прямых $k_1 = 2$ и $k_2 = -3$. По формуле (3е).

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 + 3}{1 + 2 \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1, \operatorname{tg} \varphi = 1, \varphi = 45^\circ.$$

Пример 6. Даны вершины треугольника $A(2; 2)$, $B(-2; -8)$, $C(-6; -2)$. Найти точку пересечения медиан треугольника.

Решение: Найдем по формуле (2) координаты точки M , как середины отрезка BC .

$$x_M = \frac{-2 - 6}{2} = -4, \quad y_M = \frac{-8 - 2}{2} = -5.$$

Аналогично, координаты точки N .

$$x_N = \frac{2 - 6}{2} = -2, \quad y_N = \frac{2 - 2}{2} = 0.$$

Найдем по формуле (1в) уравнение медиан AM и BN .

$$(AM): \frac{y - 2}{-5 - 2} = \frac{x - 2}{-4 - 2}, \quad \frac{y - 2}{-7} = \frac{x - 2}{-6}, \quad -7x + 14 = -6y + 12, \quad 7x - 6y - 2 = 0.$$

Находим уравнение медианы BN . Так как точки $B(-2; -8)$ и $N(-2; 0)$ имеют одинаковые абсциссы, то BN параллельна оси OY , т.е. ее уравнение $x + 2 = 0$. Решив систему уравнений $\begin{cases} 7x - 6y = 2, \\ x + 2 = 0, \end{cases}$ находим $x = -2, y = -\frac{8}{3}$, т.е. точка пересечения медиан $Q(-2; -\frac{8}{3})$.

$$\begin{cases} 7x - 6y = 2, \\ x + 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 3 \\ 2; \\ 3 \end{matrix}$$

4. Уравнения плоскости

Пример 1. Составить уравнение плоскости проходящей через точку $M(3; -2; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; 3; -1)$.

Решение.

По формуле (4б)

$$2(x - 3) + 3(y + 2) - (z - 0) = 0, \quad 2x + 3y - z + 3 = 0 \text{ – уравнение плоскости.}$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки

$M_1(1; 2; 0)$, $M_2(1; -1; 2)$, $M_3(0; 1; -1)$.

Решение.

По формуле (4в)

$$(M_1 M_2 M_3): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1-1 & -1-2 & 2-0 \\ 0-1 & 1-2 & -1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) \cdot 5 - (y-2) \cdot (-1) + z \cdot (-3) = 0, \quad 5x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2;1;-3)$ параллельно плоскости $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Решение.

Для данной плоскости $2x - y + 3z + 1 = 0$ нормальный вектор $n = (2; -1; 3)$. Так как плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны, следовательно, $\bar{n} = (2; -1; 3)$ можно принять за нормальный вектор искомой плоскости.

По формуле (4б)

$$2(x - 2) - (y - 1) + 3(z + 3) = 0, \quad 2x - y + 3z + 6 = 0.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(2;-5;1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + 2y - z + 1 = 0$.

Решение.

Обозначим

$$\alpha_1: 2x - y + z - 1 = 0, \quad \bar{n}_1 = (2; -1; 1);$$

$$\alpha_2: x + 2y - z + 1 = 0, \quad \bar{n}_2 = (1; -2; -1);$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \bar{n} = (A, B, C).$$

По формуле (4б)

Уравнение плоскости α проходящей через точку $Q(2;-5;1)$.

$$A(x - 2) + B(y + 5) + C(z - 1) = 0$$

Так как плоскость $\alpha \perp \alpha_1$ и $\alpha \perp \alpha_2$, то $\bar{n} \perp \bar{n}_1$ и $\bar{n} \perp \bar{n}_2$.

Следовательно, $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.

$$\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} k =$$

$$= 3i + 3j - 3k, \quad \bar{n} = (3; 3; -3) \text{ или } \bar{n} = (1; 1; -1).$$

Таким образом, $x - 2 + y + 5 - z + 1 = 0$, $x + y - z + 4 = 0$.

Пример 5. Найти расстояние от точки $M(1;0;-2)$ до плоскости $2x - y + 2z - 4 = 0$.

Решение.

По формуле (4ж)

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2(-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Пример 6. Плоскости $2x - 3y - 2z - 4 = 0$ и $13x + 8y + z + 44 = 0$ перпендикулярны, т.к. условие (4е) $2 \cdot 13 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = 0$ выполняется.

Пример 3.13. Плоскости $5x - 3y + z - 3 = 0$ и $-10 - 6y + 2z + 1 = 0$ параллельны, т.к. условие (4д)

$$\frac{5}{-10} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \text{ выполняется.}$$

5. Уравнение прямой в пространстве

Пример 1. Прямая задана общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Найти канонические уравнения прямой.

Решение.

Используем формулу (5в).

Найдем координаты точки M . Пусть $z = 1$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 5y + 4z = 8. \end{cases}$$

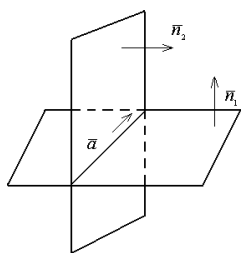
Решим систему методом алгебраического сложения

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \cdot (4) \\ 8x - 4y = -8, \\ 5x + 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x = 0, x = 0. \\ 5x + 4y = 8, \end{cases}$$

Итак, $x = 0, y = 2, z = 1$, т.е. $M(0; 2; 1)$

Найдем координаты направляющего вектора $\vec{a}$.

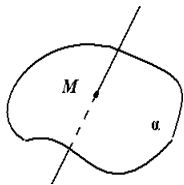
Так как $\vec{a} \perp \vec{n}_1$ и $\vec{a} \perp \vec{n}_2$, то $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} k = \\ &= -11i + 17j + 13k, \\ \vec{a} &= (-11, 17, 13) \end{aligned}$$

Таким образом, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$.

Пример 2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $x + 2y - z + 3 = 0$.



Решение.

Используя формулу (5г) запишем уравнение прямой в виде $x = t + 2, y = 3t, z = t + 1$.

Координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют и уравнению прямой и уравнению плоскости.

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 3t, \\ z = t + 1, \\ x + 2y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

$$t + 2 + 6t - t - 1 + 3 = 0, \quad 6t + 4 = 0, \quad t = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Получим } x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}, \quad y = -2, \quad z = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Итак, координаты точки } M \left(\frac{4}{3}; -2; \frac{1}{3} \right).$$

Пример 3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-5; 4; -3)$ перпендикулярно плоскости

$$2x - y + 3z + 5 = 0.$$

Решение.

$$\text{По формуле (5б) имеем } \frac{x+5}{l} = \frac{y-4}{m} = \frac{z+3}{n}.$$

Так как прямая перпендикулярна плоскости, то $\vec{a} \parallel \vec{n}$, следовательно, за координаты вектора $\vec{a}$ можно принять координаты вектора $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

$$\text{Таким образом, уравнение прямой } \frac{x+5}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{3}.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x + y + 3 = 0, \end{cases}$ и точку $M(2; 1; -3)$.

Решение: Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую:

$$x - y - z - 1 + \lambda(x + 2y + 3) = 0,$$

$$x - y - z - 1 + \lambda x + 2\lambda y + 3\lambda = 0, (1 + \lambda)x + (2\lambda - 1)y - z + (3\lambda - 1) = 0.$$

Точка $M(2; 1; -3)$ принадлежит плоскости и следовательно, удовлетворяет своими координатами уравнению плоскости. Подставим $M(2; 1; -3)$ в последнее уравнение пучка, получим

$$(1 + \lambda)2 + 2\lambda - 1 + 3 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$7\lambda + 3 = 0, \quad \lambda = -\frac{3}{7}.$$

Подставляя $\lambda = -\frac{3}{7}$ в уравнение пучка плоскостей, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{3}{7} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 - \frac{3}{7} \end{pmatrix} y - z + \begin{pmatrix} 9 \\ -1 - \frac{3}{7} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{4}{7}x - \frac{13}{7}y - z - \frac{16}{7} = 0 \text{ или } 4x - 13y - 7z - 16 = 0.$$

.

Пример 5. Найти расстояние от точки $M(2; 0; 3)$ до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

Решение: По формуле (5г) $d = \frac{|M_0 \vec{M} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$, где $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $M_0(1; -3; -2)$, $M(2; 0; 3)$,

$$\vec{M_0 M} = (1; 3; 5).$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

$$\vec{M_0 M} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} k = 14i + 7j - 7k,$$

тогда

$$|\vec{M_0 M} \times \vec{a}| = \sqrt{14^2 + 7^2 + 7^2} = \sqrt{196 + 49 + 49} = \sqrt{294}.$$

$$\text{Итак, } d = \frac{\sqrt{294}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21}.$$

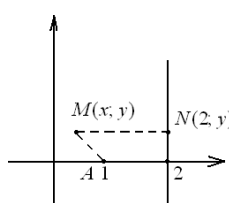
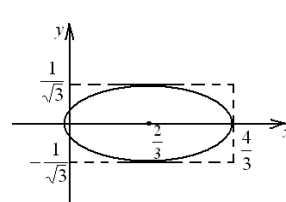
6. Кривые второго порядка

Пример 1. Даны точка $A(1; 0)$ и прямая $x = 2$. Составить уравнение линии, каждая точка $M(x; y)$ которой а) в два раза ближе к A , чем к прямой; б) в два раза дальше от A , чем от прямой; в) равноудалена от A и прямой.

Решение.

а) По условию задачи $2|AM| = |MN|$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, найдем $|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|MN| = \sqrt{(2-x)^2} = 2-x$. Составим уравнение $2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2-x$, возьмем обе части в квадрат $4((x-1)^2 + y^2) = (2-x)^2$, преобразуем: $4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 4 - 4x + x^2$, $3x^2 - 4x + 4y^2 = 0$, выделим полный квадрат $3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 4y^2 = \frac{4}{3}$,

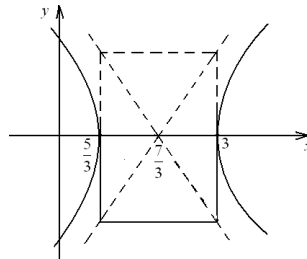



$$\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 - \text{уравнение эллипса с центром в точке } \left(\frac{2}{3}; 0\right) \text{ и}$$

длинами полуосей $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

б) По условию задачи $|AM| = 2|MN|$ Составим уравнение $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2(2-x)$. Преобразуем:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 16 - 16x + 4x^2, \\ \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 - y^2 &= \frac{4}{3}, \\ \frac{\left(x - \frac{7}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} &= 1 - \text{уравнение} \end{aligned}$$

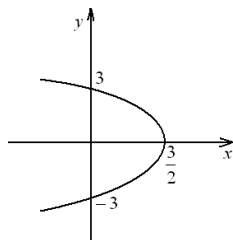


параболы с центром в точке

$\left(\frac{7}{3}; 0\right)$ и длинами $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

в) По условию задачи $|AM| = |MN|$. Уравнение имеет вид $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2-x$.

Преобразуем: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 - 4x + x^2$,
 $y^2 = -2x + 3, y^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ — уравнение параболы с вершиной $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.



Задания

- По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.
- По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из векторов: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.
- Вычислить модуль вектора $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.
- Вычислить модуль вектора $\vec{i} - 7\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$.
- На плоскости даны три единичных вектора $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$, так, что $(\vec{m}\vec{n}) = 30^\circ$, $(\vec{n}\vec{p}) = 60^\circ$. Построить вектор $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ и найти его длину.
- Даны точки $A(1; 2; -1)$ $B(0; -2; 5)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину.
- Определить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB} = (2; 0; 3)$, если координаты его конца $(-1; 1; 0)$.

- 8 Определить координаты конца вектора $\vec{a} = (2; 6; -9)$, если координаты начала совпадают с точкой $A(-5; -2; 1)$. Найти модуль вектора $\vec{a}$.
- 9 Вычислить длину и направляющие косинусы вектора $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$.
- 10 Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{c} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$.
- 11 Может ли вектор составлять с осями координат углы: 1) $120^\circ, 60^\circ, 45^\circ$; 2) $270^\circ, 60^\circ, 30^\circ$?
- 12 Если вектор составляет с осями Ox и Oy углы 60° и 120° , то какой угол он составляет с осью Oz ?
- 13 Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 5\sqrt{2}\vec{k}$. Найти угол, образуемый вектором $\vec{b} - \vec{a}$ с осью Oz .
- 14 При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярны?
- 15 Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.
- 16 На плоскости даны два вектора $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (2; 3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (10; 2)$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$.
- 17 Написать разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если эти векторы образуют базис:
- 1) $\vec{d} = (-5; -5; 5)$, $\vec{a} = (-2; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; -1)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$.
- 2) $\vec{d} = (-2; 4; 7)$, $\vec{a} = (0; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 2; 4)$.
- 18 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) a^2 ; 2) b^2 ; 3) $(a+b)^2$; 4) $(a-b)^2$;
- 5) $(3a-2b)(a+2b)$.
- 19 Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = (1; -2; -1)$, $\vec{b} = (1; -6; 0)$.
- 20 Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.
- 21 Даны векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Вычислить угол φ между медианой $\vec{OM}$ и стороной OA треугольника AOB .
- 22 Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$, при условии $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
- 23 Даны $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.
- 24 Векторы образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 25 Даны: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ и что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- 26 Даны точки $A(-2; 2; 1)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(1; 1; -3)$. Найти координаты векторных произведений 1) $|\vec{AB} \times \vec{BC}|$ 2) $|\vec{AC} + 3\vec{BC}| \times \vec{AB}$.
- 27 Даны координаты вершин треугольника $M(1; 1; 5)$, $N(0; -4; 3)$ и $P(8; -1; 4)$. Вычислить его площадь.
- 28 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-5; 11; 7)$, $\vec{b} = (0; 3; -1)$.
- 29 Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (-3; 1; -2)$ и $\vec{b} = (2; 8; 1)$.

30. Даны три вектора определить компланарны ли они: 1) $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$; 2) $\vec{a} = (1; 5; 1)$, $\vec{b} = (6; -1; 2)$, $\vec{c} = (4; 9; 0)$.
31. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$? 1) $\vec{a} = (1; 3; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 1)$; 2) $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (5; 5; 5)$, $\vec{c} = (0; -1; -2)$.
32. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.
33. Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.
34. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Если координаты его вершин имеют координаты: $A_1(-5; -4; 8)$, $A_2(6; 3; 7)$, $A_3(4; 1; -2)$, $A_4(2; 3; 1)$ и $\vec{c} = (3; -2; 1)$ лежат в одной плоскости.
35. Доказать, что векторы $\vec{a} = (-12; 6; 1)$, $\vec{b} = (15; -8; 0)$
36. Вычислить объем параллелепипеда, вершины которого находятся в точках $A(2; 5; -8)$, $B(-7; 0; -4)$, $C(0; -1; 0)$ и $D(10; -3; 5)$.
37. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(-1; 9; -11)$, $B(5; -3; -1)$, $O(0; 0; 0)$ и $D(-2; -1; -3)$.
38. На оси абсцисс найти точку, отстоящую на расстоянии $d = 10$ от точки $A(2; 6)$.
39. Даны три вершины параллелограмма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D .
40. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $M(2; 2)$ и $N(1; 5)$ разделен на три равные части.
41. Прямая проходит через точки $A(7; -3)$ и $B(23; -6)$. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.
42. Составить уравнение прямых, проходящих через точку $A(-4; 1)$ параллельно осям координат.
43. Написать уравнение линии, каждая точка которой отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5; 0)$.
44. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит $A(4; -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1; 6)$.
45. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от координатных осей.
46. Написать уравнение геометрического места точек плоскости, для которых отношение расстояний до точек $A(2; 3)$ и $B(-1; 2)$ равно $\frac{3}{4}$.
47. Написать уравнение геометрического места точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых до точек $A(-3; 3)$ и $B(4; 1)$ равна 31.
48. Определить угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый на Oy для каждой из прямых:
1) $3x - 6y + 4 = 0$; 2) $-7x + 4y - 2 = 0$; 3) $-y + 5 = 0$;
4) $2x - 9 = 0$; 5) $x - y = 0$
49. Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.
50. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$ и $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.
51. Даны середины сторон треугольника $A(2; 1)$, $B(5; 3)$ и $C(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.
52. Даны вершины треугольника $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$ и $M_3(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

53. Даны вершины треугольника $A(-2;1), B(1;-1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A .
54. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $x + y + 5 = 0$ и $x - 4y = 0$. Составить уравнения двух других сторон, если известна точка пересечения его диагоналей $O(2;-2)$.
55. Составить уравнения катетов прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(2;-1)$.
56. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;5)$ на одинаковых расстояниях от точек $N(-7;3)$ и $P(11;-15)$.
57. Определить угол между прямыми:
 1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 2) $x - 6y + 4 = 0$,
 $x + 3y - 8 = 0$; 3) $2x + 3y - 5 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$.
58. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Составить уравнения его сторон.
59. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4;3)$, а также уравнения биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$ и медианы $4x + 13y - 10 = 0$, проведенных из одной вершины.
60. Уравнение одной из сторон некоторого угла $2x - 9y - 3 = 0$, а уравнение биссектрисы $4x - y + 11 = 0$. Составить уравнение второй стороны угла.
61. Вычислить расстояния от начала координат O до точек: $M(4;-2;-4)$, $N(-4;12;6)$, $P(12;-4;3)$, $Q(12;16;-15)$ и MQ , PN .
62. Даны вершины треугольника: $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$ и $C(-5;0;2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .
63. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1;-1;2)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (-1;3;-1)$.
64. Даны две точки $A(3;-2;4)$, $B(0;1;-5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{AB}$.
65. Составить уравнение плоскости $M_1(1;-6;3)$, проходящей через точку параллельно двум векторам $\vec{l}_1 = (4;-1;-2)$ и $\vec{l}_2 = (1;2;1)$.
66. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1;5;-2)$, $M_2(0;-2;1)$ и параллельно вектору $\vec{l} = (-3;1;4)$.
67. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;0;7)$, $M_2(11;-3;9)$, $M_3(-2;-1;-1)$.
68. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и точку $M_0(2;0;1)$.
69. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$.
70. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{a} = (2;-1;-2)$.
71. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.
72. Из точки $M(-1;-1;4)$ опущен на плоскость перпендикуляр; его основание $N(2;1;3)$. Составить уравнение плоскости.

73. Определить пары параллельных и перпендикулярных плоскостей:
- 1) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$; 2) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z - 4 = 0$; 3) $x - 2y + 3z = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$;
 4) $5x - y + z - 2 = 0$, $10x - 2y + 2z + 3 = 0$.
74. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;5;-1)$ параллельно плоскости $3x + y - 5z - 8 = 0$.
75. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям:
 $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$
76. Составить уравнение плоскости, которая проходит:
- 1) через точку $M_0(-1;3;2)$ параллельно плоскости Oxy ;
 2) через точку $M_0(0;-1;1)$ параллельно плоскости Oxz ;
 3) через точку $M_0(-5;2;-1)$ параллельно плоскости Oyz ;
77. Составить уравнение плоскости, которая проходит:
- 1) через ось Ox и точку $M_0(4;-7;1)$;
 2) через ось Oy и точку $M_0(6;9;4)$;
 3) через ось Oz и точку $M_0(-1;1;2)$.
78. Найти угол между плоскостями 1) $5x - 3y + 2z + 5 = 0$, $3x + 3y - 3z - 8 = 0$;
 2) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $9x + 3y - 6z - 4 = 0$;
 3) $x - y + z\sqrt{2} - 5 = 0$, $x + y - z\sqrt{2} + 7 = 0$
79. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.
- 1) $M_0(3;2;0)$, $M_1(4;1;5)$, $M_2(2;-1;4)$;
 2) $M_0(-5;-1;0)$, $M_1(-5;1;-4)$, $M_2(-2;2;-3)$;
 3) $M_0(2;-4;-2)$, $M_1(-1;-3;-7)$, $M_2(-4;-1;-5)$.
80. Определить при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает: 1) Ox ; 2) Oy ; 3) Oz .
81. Составить канонические и параметрические уравнения прямых:
- 1) $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} 3x \\ 0 \end{cases}$
82. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\vec{s} = (1;-3;4)$.
83. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $A(2;-1;-1)$ и $B(3;3;-1)$.
84. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-5;3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.
85. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-3;5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$.

86. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -2; 4)$ перпендикулярно плоскости $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.
87. Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей.
- 1) $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$;
 - 3) $\begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$.
88. Найти точку пересечения прямой и плоскости.
- 1) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}$, $x + y + 2z - 9 = 0$.
 - 2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$, $x + 2y - z + 5 = 0$.
 - 3) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $x - y + 4z = 0$.
89. Найти координаты проекции точки P на плоскость:
- 1) $P(1; 0; 1)$, $4x + 6y + 4z - 25 = 0$.
 - 2) $P(-1; 0; -1)$, $2x + 6y - 2z + 11 = 0$.
 - 3) $P(0; -3; -2)$, $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
90. Найти координаты точки, симметричной точке P относительно заданной прямой.
- 1) $P(0; -1; 3)$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.
 - 2) $P(2; 1; -1)$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-1}$.
 - 3) $P(0; 2; 1)$, $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
91. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:
- 1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;
 - 2) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;
92. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .
- 1) $M_0(5; 12; 1)$, $M_1(0; 5; -3)$, $M_2(-4; 2; -1)$, $M_3(-4; 9; -8)$;
 - 2) $M_0(5; 8; 3)$, $M_1(10; 5; 6)$, $M_2(8; 7; 4)$, $M_3(7; 0; 1)$;
 - 3) $M_0(1; 3; 5)$, $M_1(-5; 5; 2)$, $M_2(7; -1; 8)$, $M_3(-3; 4; 3)$.
93. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:
- 1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 4$;
 - 2) центр окружности совпадает с точкой $C(2; -3)$ и ее радиус $R = 7$;
 - 3) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6; -8)$;
 - 4) окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$;
 - 5) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;
 - 6) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;
 - 7) окружность проходит через точки $C(1; -1)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;
 - 8) окружность проходит через три точки $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$.

94. Написать уравнения окружностей, касающихся трех прямых: $4x - 3y - 10 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$ и $3x - 4y - 15 = 0$.
95. Составить уравнение диаметра окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярно к прямой $5x + 2y - 13 = 0$.
96. Вычислить кратчайшее расстояние от точки $B(3;9)$ до окружности $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
97. Окружности заданы уравнениями в декартовых прямоугольных координатах 1) $x^2 + y^2 = x$; 2) $x^2 + y^2 = -3x$; 3) $x^2 + y^2 = 5y$; 4) $x^2 + y^2 = x + y$. Составить уравнения этих окружностей в полярных координатах, при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox , а полюс – с началом координат.
98. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
- его полуоси равны 5 и 2;
 - его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$;
 - его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$;
 - расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c = 4$;
 - его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
 - его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
 - расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
100. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.
101. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к эллипсу $3x + 10y - 25 = 0$ и его малая полуось $b = 2$.
102. Из точки $C(10; -8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Вычислить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
103. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
- ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
 - расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;
 - расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
 - ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 - уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;
 - расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$;

- 7) расстояние между директрисами $\frac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;
- 8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 9) уравнение асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.
104. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.
105. Найти точки пересечения прямой $2x - y - 10 = 0$ и гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.
106. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ параллельно прямой $2x + 4y - 5 = 0$ и вычислить расстояние между ними.
107. На гиперболе $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ найти точку M ближайшую к прямой $3x + 2y + 1 = 0$, и вычислить расстояние от этой точки до этой прямой.
108. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между ее вершинами виден из фокусов сопряженной гиперболы под углом в 60° .
109. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:
- 1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $A(9;6)$;
 - 2) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;3)$;
 - 3) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;1)$;
 - 4) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D(4;-8)$.
110. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2;-1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.
111. Определить точки пересечения прямой $3x - 2y + 6 = 0$ и параболы $y^2 = 6x$.
112. Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 36x$, проведенных из точки $A(2;9)$.

Задания для индивидуальной работы

Вариант №0

1. Даны координаты вершин треугольника $A(1;-1), B(2;-4), C(-7;0)$. Составить уравнения стороны $\overline{BC}$, высоты BH и медианы AM ; найти длину BC , высоты BH , угол $\angle A$.
2. В треугольной пирамиде $ABCD$ даны координаты вершин $A(-2;1;6), B(-4;3;6), C(-5;6;-1), D(1;1;1)$ ($x_4; y_4; z_4$). Найти: объем пирамиды; площадь грани ABC ; уравнение плоскости (ABC) ; уравнение ребра AD (канонические и общие); угол между ребром AD и плоскостью (ABC) ; уравнения и длину высоты DH , проведенной из вершины на грань (ABC) ; координаты пересечения высоты DH с гранью (ABC) .

4. Предел функции. Непрерывность.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{10x-1} = \frac{1}{2}$.

Решение. Рассмотрим абсолютную величину разности

$$|f(x) - b| = \left| \frac{5x+3}{10x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{10x+6-10x+1}{2(10x-1)} \right| = \frac{7}{2|10x-1|}.$$

Покажем, что выражение $\frac{7}{2|10x-1|}$ может быть меньше любого наперед заданного

положительного бесконечно малого числа ε . Для этого решим неравенство $\frac{7}{2|10x-1|} < \varepsilon$, откуда

$$|10x-1| > \frac{7}{2\varepsilon}.$$

Это неравенство выполняется при условии $10x-1 > \frac{7}{2\varepsilon}$ или $10x-1 < -\frac{7}{2\varepsilon}$. Решая два неравенства,

получим $x > \frac{1}{10} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right)$ или $x < \frac{1}{10} \left(1 - \frac{7}{2\varepsilon} \right)$. Следовательно, для $|x| > \frac{1}{10} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right)$ функция будет

отличаться от своего предела меньше чем на ε . Поэтому $\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{10x-1}$.

Найти пределы

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x}{x + 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x}{x + 1} = \left[\frac{(-2)^3 - 3(-2)}{(-2) + 1} = \frac{-8 + 6}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \right]$$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \left[\frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \right]$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрывается методом разложения числителя и знаменателя на линейные

множители с последующим сокращением дроби на множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \left[\text{так как } x \rightarrow 1 \text{ и } x \neq 1, \text{ то } x-1 \neq 0 \text{ и, следовательно,} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \left[\frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \right]$$

Пример 4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-2} - 2}{x^3 - 8}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-2} - 2}{x^3 - 8} = \left[\frac{\sqrt[3]{4-2} - 2}{4-8} = \frac{0}{0} \right]$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрывается методом умножения числителя и знаменателя на выражение

сопряженное числителю $\sqrt{3x-2} + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-2-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{(x^3-8)(\sqrt{3x-2}+2)} = \left[\text{в числителе применим формулу} \right]$$

разность квадратов, в знаменателе – разность кубов] =

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3x-2}+2)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3x-2}+2)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{3}{(x^2+2x+4)(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{3}{(4+4+4)(\sqrt{4}+2)} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

Пример 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 4}{6x^3 - x - 2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 4}{6x^3 - x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается методом деления числителя и знаменателя дроби на

наибольшую степень.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 4}{6x^3 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}}{6 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} =$$

$$\left[\text{если } x \rightarrow \infty, \text{ то } \frac{3}{x} \rightarrow 0, \frac{4}{x^3} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0, \frac{2}{x^3} \rightarrow 0 \right] = \frac{5}{6}$$

Пример 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 7}{5x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 7}{5x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{7}{x^4}}{\frac{5x^3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{x^4}}{\frac{5}{x}} = \left[\frac{3+0}{0} \right] = \infty.$$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 7}{5x^3 + 4x - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 7}{5x^3 + 4x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{5 + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \left[\frac{0}{5} \right] = 0.$$

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми функциями и обозначаются $\alpha \sim \beta$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \sin x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \arcsin x \sim x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad e^x - 1 \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \cdot \ln a} = 1, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \ln(1+x) \sim x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x \cdot \log_a e} = 1, \quad \log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e.$$

Пример 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}$.

Решение.

Так как $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$$

Пример 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение.

Так как $\operatorname{arctg}(x-2) \sim x-2$ при $x \rightarrow 2$ то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = -1.$$

Пусть функция $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$. Если при $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_0$) $f(x) \rightarrow 1$ и $\varphi(x) \rightarrow \infty$, то имеем неопределенность 1^∞ .

Для раскрытия неопределенности 1^∞ используются формулы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (2)$$

называемые вторым замечательным пределом.

Пример 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{3x+1}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида 1^∞ . Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы можно было применить формулу (1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-7}{x+4} \right)^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-7}{x+4} \right)^{\frac{-7}{x+4} \cdot \frac{(3x+1)(x+4)}{-7}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-7}{x+4} \right)^{\frac{x+4}{-7} \cdot \frac{3x+1}{1}} = e^{-21} = \frac{1}{e^{21}}$$

т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-7}{x+4} \right)^{\frac{x+4}{-7}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7(3x+1)}{x+4} = -21$.

Пример 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[8x]{1+8x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида 1^∞ . Применим формулу (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+8x)^{\frac{1}{8x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{8x} \right)^{\frac{1}{8x}} = e^1 = e.$$

Пример 12. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида 1^∞ . Применим формулу (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos 2x - 1))^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left[\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (-2\sin^2 x) \right)^{\frac{-2\sin^2 x}{2\sin^2 x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Пример 13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение.

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Обозначим $x = y + \frac{\pi}{2}$. Если $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{y \rightarrow 0} \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right)^{\operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2} \right)}$$

по формулам приведения

$$\sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) = \cos y, \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} y = \lim_{y \rightarrow 0} (\cos y)^{-\operatorname{ctg} y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (1 + \cos y - 1)^{-\operatorname{ctg} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + (-2\sin^2 \frac{y}{2}) \right)^{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{y}{2}} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{y}{2} \cdot \operatorname{ctg} y}{1}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2\sin^{\frac{y}{2}} \cdot \operatorname{ctg} y =$$

$$= \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{y}{2} \cdot \cos y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{y}{2} \cdot \cos y}{\frac{y}{2} \cdot \cos \frac{y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \cdot \cos y}{\cos \frac{y}{2}} = 0 \right] = e^0 = 1.$$

Пример 14. Доказать, что функция $y = \sin x$ – непрерывна.

Решение.

Функция $y = \sin x$ определена в интервале $(-\infty; +\infty)$. Дадим аргументу в произвольной точке x приращение Δx , тогда и функция получит приращение $\Delta y: y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

$$\text{Тогда } \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Известно, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x, \quad \cos x \leq 1.$$

Таким образом, имеем произведение функции бесконечно малой на ограниченную, т.е.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$. Следовательно $y = \sin x$ – непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$.

Пример 15. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Так как функции $y = \cos x$, $y = x^2 + 1$, $y = x$ непрерывны на интервале $(-\infty; +\infty)$, то они непрерывны и в указанных интервалах. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. Исследуем точки $x = 0$, $x = 1$ на непрерывность.

Проверим выполнимость условий для $x = 0$.

1) $f(0) = 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \cos x = \cos 0 = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 + 1) = 1$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

Все условия выполняются, следовательно, $x = 0$ – точка непрерывности.

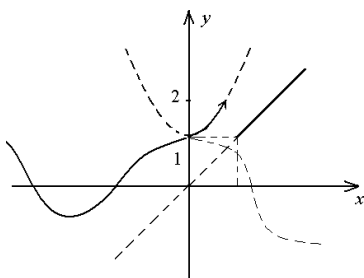
Проверим выполнимость условий для $x = 1$.

1) $f(1) = 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2$,

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x = 1$, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва I рода.

График функции имеет вид.



Пример 16. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби:

$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$. Очевидно, функция непрерывна при $x \neq 2$ и $x \neq 5$. Исследуем точки $x = 2$ и $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x-2)(x-5)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{(x-2)(x-5)} = -\infty.$$

Следовательно, $x = 2$ – точка разрыва II рода.

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{1}{(x-2)(x-5)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{1}{(x-2)(x-5)} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 5$ – точка разрыва II рода.

Пример 17. Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

Решение.

Элементарная функция $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ определена на всем множестве действительных чисел, кроме $x = -3$, следовательно, в этой точке функция имеет разрыв. Так как функция в точке $x = -3$ имеет предел: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$, то разрыв устранимый. Если эту функцию доопределить в точке $x = -3$, положив $f(-3) = -6$, то функция будет непрерывна на всем множестве действительных чисел.

Задания

4.1. Доказать, что

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x - 2} = \frac{5}{3};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{x^2 + 3} = -\frac{1}{2};$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1} = 0;$

г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 5} = -\frac{1}{4}.$

4.2. Доказать, что при $x \rightarrow \infty$

а) $\sqrt{1 + 4x} - 1 \sim 2x;$

в) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$

б) $\sqrt[3]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{3};$

г) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$

4.3. Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

4.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5x^2 - x^3}{4x + x - 7}$

4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$

4.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x}$

4.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2x)^3 + 8x^3}{x + x}$

4.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x - 2x + 5}$

4.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7x^3}{(2 - 3x)^3}$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}(x+2)}{x-4}.$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{n^2+2}.$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}.$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^4+8}}.$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt[3]{8x^3+x}}{\sqrt{x^5+5}}.$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}{1+\sqrt{x}}.$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+2}).$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}).$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}).$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}).$$

$$4.31. \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|.$$

$$4.33. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2x-x^2} - \frac{1-\sqrt[3]{x}}{x-1} \right).$$

$$4.35. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}} \right).$$

$$4.37. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x+2x+8}.$$

$$4.39. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{2x-9x+9}.$$

$$4.41. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

$$4.43. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x-1}.$$

$$4.45. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x+2}{x-4x+3}.$$

$$4.47. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}.$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{6n+2}{3n-4}}.$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{1+4+9+\dots+n^2}.$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}.$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{16x^4+1} + \sqrt{x^2+4}}{\sqrt[5]{x^5+2}}.$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{3n}{6n+5}.$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}.$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{x^2+x+2}).$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+1)} - x).$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x).$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2+5}).$$

$$4.32. \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1-\sqrt[3]{x}}{x-1} \right|.$$

$$4.34. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{x-1} - \frac{k}{x^3-1} \right).$$

$$4.36. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^3+3x^2-1-x}{1+x} \right|.$$

$$4.38. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}.$$

$$4.40. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-3x+2}.$$

$$4.42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2+x^3}.$$

$$4.44. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{x-2x+x}.$$

$$4.46. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-4x^2+4}{x-2x}.$$

$$4.48. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}.$$

$$4.49. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}.$$

$$4.51. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}.$$

$$4.53. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^5 + 2x^3 + x^2}{5x^3 - 6x^2}.$$

$$4.55. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

$$4.57. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}.$$

$$4.59. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}.$$

$$4.61. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x - 1}.$$

$$4.63. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}.$$

$$4.65. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 4x + 3}.$$

$$4.67. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8x^2 + 2}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$4.69. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x + 2}.$$

$$4.71. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}.$$

$$4.73. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x-6} - 1}{x - 7}.$$

$$4.75. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{6x-1} + \sqrt[3]{2x+1}}{7x}.$$

$$4.77. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}.$$

$$4.79. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}.$$

$$4.81. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$$

$$4.83. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2\sqrt{-x} - \sqrt{x+6}}{x - x - 6}.$$

$$4.85. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

$$4.87. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$4.50. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$4.52. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}.$$

$$4.54. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

$$4.56. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 17x + 15}{3x - x - 2}.$$

$$4.58. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 3}.$$

$$4.60. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 3}{5x + 3x - 3}.$$

$$4.62. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x - 1}.$$

$$4.64. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 8x^3}{6x^2 + 5x + 1}.$$

$$4.66. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}.$$

$$4.68. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2} - 2}{1 - x}.$$

$$4.70. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{-3x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$4.72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x-2}}{6x}.$$

$$4.74. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3} - 1}.$$

$$4.76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

$$4.78. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

$$4.80. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$$

$$4.82. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}.$$

$$4.84. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$4.86. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x^2 - 1}.$$

$$4.88. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x^2 - 1}.$$

$$4.89. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$4.91. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}.$$

$$4.93. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}.$$

$$4.95. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}.$$

$$4.97. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$4.99. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$$

$$4.101. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}.$$

$$4.103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\frac{\arcsin 3x}{\cos^{\frac{x}{2}} - \sin^{\frac{x}{2}}}}.$$

$$4.105. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\cos x}.$$

$$4.107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}.$$

$$4.109. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin \pi \cdot x}.$$

$$4.111. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x.$$

$$4.113. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$4.115. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{2^{\frac{1}{2-x}}}.$$

$$4.117. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2}.$$

$$4.119. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x.$$

$$4.121. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{3x}}.$$

$$4.123. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x+1}{x-1} \right|^x.$$

$$4.125. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{4x-1}{4x+3} \right|^{3x+2}.$$

$$4.127. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}}.$$

$$4.129. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}.$$

$$4.92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}.$$

$$4.94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$$

$$4.96. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}.$$

$$4.98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$$

$$4.100. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 7x}.$$

$$4.102. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$4.104. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1 + \cos \pi \cdot x}{x}.$$

$$4.106. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi \cdot x}{2}.$$

$$4.108. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}.$$

$$4.110. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}.$$

$$4.112. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

$$4.114. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$4.116. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$4.118. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$4.120. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.122. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x.$$

$$4.124. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x+7}{x+5} \right|^{2x+4}.$$

$$4.126. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3x}{3x+2} \right|^{x+3}.$$

$$4.128. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{2x}}.$$

$$4.130. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{2x+3}}{(x+2)^{2x+3}} \quad 4.131. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{x+1} \right| \quad 4.132. \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right|^{1-x} \\
& 4.133. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{1-x}} \quad 4.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \\
& 4.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2x} \quad 4.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - \sqrt{1+x}}{x} \\
& 4.137. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{3 \operatorname{tg}^2 x} \quad 4.138. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{3}{\sin x}} \\
& 4.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \ln(1+x) - 1}{x} \quad 4.140. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2-x}{3} \right)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{3}} \\
& 4.141. \lim_{x \rightarrow \infty} 2x(\ln(1+x) - \ln(2+x)) \quad 4.142. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\cos ex} \\
& 4.143. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x} \quad 4.144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x} \\
& 4.145. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} \quad 4.146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} \\
& 4.147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad 4.148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} \\
& 4.149. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad 4.150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x} - 1} \\
& 4.151. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad 4.152. \lim_{x \rightarrow \infty} y(a^{\frac{1}{x}} - 1) \\
& 4.153. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) \quad 4.154. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x+1) - \ln 2x) \\
& 4.155. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x} \quad 4.156. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \ln \cos x - 1}{\sin^2 x} \\
& 4.157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin 2x} \quad 4.158. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(x+1)} \\
& 4.159. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} \quad 4.160. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x} \\
& 4.161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)} \quad 4.162. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \\
& 4.163. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \sin x)^x \quad 4.164. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right)
\end{aligned}$$

4.165. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x=0$. Определить число $f(0)$, так чтобы функция $f(x)$ была непрерывна при $x=0$, если

а) $f(x) = \frac{1+x-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

в) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$;

г) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер разрыва в этих точках.

4.166. $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$.

4.167. $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$.

4.168. $f(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{1+x}$.

4.169. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

$$4.170. f(x) = 3 \sqrt[3]{\frac{-\cos \pi x}{4-x^2}}.$$

$$4.172. f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}.$$

$$4.174. f(x) = 5^{\frac{1-x}{x-2}}.$$

$$4.176. f(x) = \frac{5}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$4.178. f(x) = \frac{3}{4x^2 + x^3}.$$

$$4.180. f(x) = \begin{cases} 4|x|, & x < -2 \\ x, & -2 \leq x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$4.182. f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \leq -2 \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 3, & \\ 12 - x^2, & x > 2 \end{cases}.$$

$$4.171. f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$$

$$4.173. f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}.$$

$$4.175. f(x) = 6^{\frac{x-2}{x+2}}.$$

$$4.177. f(x) = \frac{44}{3-x+3x^2-x^3}.$$

$$4.179. f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}.$$

$$4.181. f(x) = \begin{cases} x+\pi, & x < -\pi \\ \sin x, & -\pi \leq x < \pi \\ 3-2x, & x \geq \pi \end{cases}.$$

$$4.183. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -\operatorname{tg} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases}.$$

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0.

1. Найти пределы:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^3}{x-1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-3x)^{2-5x}}{2-3x};$$

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$$

3. Исследовать функции на непрерывность:

$$а) y = \frac{6}{3+2x-x^2};$$

$$б) y = \begin{cases} x+2 & x \leq -2 \\ 2-x & -2 < x < 0 \\ x^2+2 & x \geq 0 \end{cases}$$

4. Доказать

$$а) \lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7} = -\frac{1}{2}$$

5. Производная и дифференциал функции

Основные правила дифференцирования.

Пусть $u(x), v(x)$ – дифференцируемые в точке x функции.

$$1. (u+v)' = u' + v';$$

$$2. (u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$3. (c \cdot u)' = c(u)', \quad c = \text{const};$$

$$4. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

5. Если $y = f(u)$, где $u = h(x)$, т.е. $y = f(h(x))$ – сложная функция, то ее производная $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

6. Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то ее производная $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(c)' = 0, \quad c = \text{const};$

2. $(x)' = 1;$

3. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha = \text{const};$

4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$

5. $(e^x)' = e^x;$

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$

7. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

8. $(\sin x)' = \cos x;$

9. $(\cos x)' = -\sin x;$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Найти производные функций, используя определение.

Пример 1. $y = 7x^2 - 3$.

Решение.

Дадим аргументу x приращение Δx , тогда значение функции $f(x + \Delta x) = 7(x + \Delta x)^2 - 3$.

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 7(x + \Delta x)^2 - 3 - (7x^2 - 3) = \\ &= 7x^2 + 14x \cdot \Delta x + 7(\Delta x)^2 - 3 - 7x^2 + 3 = 14x\Delta x + 7(\Delta x)^2 = \\ &= \Delta x(14x + 7\Delta x) \end{aligned}$$

Теперь найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(14x + 7\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (14x + 7\Delta x) = 14x.$$

Итак, $y' = (7x^2 - 3)' = 14x$.

Пример 2. $y = \cos 2x$.

Решение.

Дадим аргументу x приращение Δx , значение функции $f(x + \Delta x) = \cos(2x + 2\Delta x)$. Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(2x + 2\Delta x) - \cos 2x =$$

$$\text{Используем формулу } \cos\alpha \cdot \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= -2\sin \Delta x \cdot \sin(2x + \Delta x).$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\sin \Delta x \cdot \sin(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \sin(2x + \Delta x) = -2 \cdot 1 \cdot \sin 2x = -2\sin 2x.$$

Таким образом, $y' = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Найти производные функций используя правила и таблицу производных.

Пример 3. $y = \sqrt[5]{x^4} + \frac{7}{\sqrt{x}} - 3$.

Решение.

Перейдем к дробным показателям: $y = x^{\frac{4}{5}} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 3$.

$$y' = (x^{\frac{4}{5}})' + 7(x^{-\frac{1}{2}})' - (3)' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} - \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} - 0 = \frac{4}{5\sqrt{x}} - \frac{7}{2\sqrt{x^3}}$$

Пример 4. $y = x \cdot \arcsin x$.

Решение:

$$y' = (x)' \cdot \arcsin x + x \cdot (\arcsin x)' = 1 \cdot \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 5. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Решение.

$$y' = \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Пример 6. $y = (x^3 - 2\sqrt{x} - 3)^5$.

Решение.

$$y' = 5 \cdot (4x^3 - 2\sqrt{x} - 3)^4 \cdot (4x^3 - 2\sqrt{x} - 3)' =$$

$$= 5(4x^3 - 2\sqrt{x} - 3)^4 \cdot (12x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}})$$

Пример 7. $y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем правую часть:

$$= \frac{1}{5} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{5} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{5} (\ln(1-x^2) - \ln(1+x^2))$$

Найдем производную

$$y' = \frac{1}{5} \left(\frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{-2x \cdot 2x^2}{1-x^4} = \frac{-4x^3}{5(1-x^4)}$$

Пример 8. $y = \arctg \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение.

$$y' = (\arctg \sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Пример 9. $y = \frac{(2x - 5)^3 \cdot \sqrt{x + 4}}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}}$.

Решение.

Сначала логарифмируем данную функцию по основанию e , т.е.

$$\ln y = \ln \frac{(2x - 5)^3 \cdot \sqrt{x + 4}}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}},$$

$$\ln y = \ln(2x - 5)^3 + \ln(x + 4)^{\frac{1}{2}} - \ln(x - 1)^{\frac{2}{3}},$$

$$\ln y = 3\ln(2x - 5) + \frac{1}{2}\ln(x + 4) - \frac{2}{3}\ln(x - 1).$$

Теперь дифференцируем обе части равенства по правилу дифференцирования сложной функции.

$$(\ln y)' = (3\ln(2x - 5) + \frac{1}{2}\ln(x + 4) - \frac{2}{3}\ln(x - 1))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3 \cdot \frac{1}{2x - 5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x - 1},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{2x - 5} + \frac{1}{2(x + 4)} - \frac{2}{3(x - 1)} \right)$$

$$y' = \frac{(2x - 5)^3 \cdot \sqrt{x + 4}}{\sqrt[3]{(x - 1)^2}} \cdot \left(\frac{3}{2x - 5} + \frac{1}{2(x + 4)} - \frac{2}{3(x - 1)} \right)$$

Пример 10. $y = (\sin x)^{\cos 2x}$.

Решение.

Логарифмируем данную функцию

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos 2x},$$

$$\ln y = \cos 2x \cdot \ln(\sin x).$$

Дифференцируем обе части равенства

$$(\ln y)' = (\cos 2x \cdot \ln(\sin x))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos 2x)' \cdot \ln(\sin x) + \cos 2x \cdot (\ln(\sin x))',$$

$$y' = y \cdot (-2\sin 2x \cdot \ln(\sin x) + \cos 2x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -2\sin 2x \cdot \ln(\sin x) + \cos 2x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

$$y' = y(-2\sin 2x \cdot \ln(\sin x) + \cos 2x \cdot \operatorname{ctgx}),$$

$$y' = (\sin x)^{\cos 2x} \cdot (-2\sin 2x \cdot \ln(\sin x) + \cos 2x \cdot \operatorname{ctgx}).$$

Пример 11.
$$\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}.$$

Решение.

Производная параметрической функции находится по формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$x'_t = (\arcsin \sqrt{t})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{t})^2}} \cdot (\sqrt{t})' = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$y'_t = (\sqrt{1-t})' = \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \cdot (1-t)' = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{t}.$$

Пример 12. $e^y + xy = e^x$.

Решение.

Данная функция неявно заданная. Найдем ее производную, рассматривая при этом y как функцию от x .

$$(e^y + xy)' = (e^x)',$$

$$(e^y)' + (x \cdot y)' = e^x,$$

$$e^y \cdot y' + (x)' \cdot y + x \cdot y' = e^x,$$

$$e^y \cdot y' + xy' = e^x - y,$$

$$y'(e^y + x) = e^x - y,$$

$$y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Пример 13. Используя понятие дифференциала, приближенно вычислить $\sin 46^\circ$.

Решение. Используем формулу приближенного вычисления: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

$f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$. Положим $x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (соответствует углу в 1°),

$x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$. Подставляем в формулу имеем:

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,7071 + 0,0175 = 0,7191.$$

Решение задач на геометрический смысл производной основано на использовании уравнения касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Угловым коэффициентом k касательной равен, с одной стороны тангенсу угла α между касательной и осью абсцисс, а с другой – значению производной функции $f(x)$ в точке x_0 , $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Пример 14. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 4x^2$ в точке $M(1;4)$.

Решение. Для составления уравнения касательной используем формулу $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $x_0 = 1$, $f(x_0) = f(1) = 5$, $f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f'(x_0) = f'(1) = 11$.

Таким образом, $y - 5 = 11(x - 1)$ или $11x - y - 6 = 0$ – уравнение касательной.

Для составления уравнения нормали используем формулу $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$. Получим

$$y - 5 = -\frac{1}{11}(x - 1), \quad 11 \cdot (y - 5) = -x + 1, \quad x + 11y - 56 = 0 - \text{уравнение нормали.}$$

Пример 15. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2$ а) параллельна прямой $y = 2x + 5$? б) перпендикулярна прямой $y = 2x + 5$?

Решение. а) Прямая параллельна касательной, если их угловые коэффициенты равны. Угловым коэффициентом прямой $y = 2x + 5$ равен $k_1 = 2$, угловым коэффициентом касательной равен $k_2 = 2x_0$, где x_0 – точка касания.

Из уравнения $2x_0 = 2$ находим $x_0 = 1$.

Значит касательная должна быть проведена в точке $M(1; 1)$.

б) Прямая перпендикулярна касательной если их угловые коэффициенты $k_1 \cdot k_2 = -1$. Так как $k = 2$, то $k = -\frac{1}{2}$. Из уравнения $2x = -\frac{1}{2}$ находим $x = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, касательная должна быть проведена в точке $N(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16})$.

Пример 16. В какой точке параболы $y = \sqrt{18x}$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

Решение. Найдем производную функции $y' = (\sqrt{18x})' = \frac{18}{2\sqrt{18x}} = \frac{3}{\sqrt{2x}}$.

Так как производная функции характеризует скорость возрастания ординаты (функции) по сравнению с возрастанием аргумента, то по условию задачи $\frac{3}{\sqrt{2x}} = 2$, откуда $x = \frac{9}{8}$ – абсцисса искомой точки.

$$\text{Ордината } y = f\left(\frac{9}{8}\right) = \sqrt{18 \cdot \frac{9}{8}} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом $M(\frac{9}{8}; \frac{9}{2})$ – искомая точка.

Пример 17. $y = \arctg x$. Найти y' .

Решение. Найдем производную данной функции: $y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Вторая производная – производная от первой производной:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Пример 18. $y = a^x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. $y' = (a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $y' = (a^x \cdot \ln a) = a^x \cdot \ln^2 a$, $y^{(3)} = (a^x \cdot \ln^2 a)' = a^x \cdot \ln^3 a$,

$$y^{(4)} = (a^x \cdot \ln^3 a)' = a^x \cdot \ln^4 a.$$

Очевидно, что каждая из найденных производных равна произведению a^x на $\ln a$ в степени, равной порядку производной. Эта закономерность сохраняется для производной любого порядка. Поэтому $y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$.

Задания

Исходя из определения, найти производную функции

1. $y = \frac{1}{x^2 + 2}$

2. $y = \sqrt[3]{x}$

3. $y = \sin^2 x$

4. $y = \arcsin x$

5. $y = e^{kx}$

6. Доказать, что $\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Найти производную функции:

7. $y = \sqrt[5]{8^5} x^6 - \frac{3}{x^9} + x^{-\frac{5}{4}}$

9. $y = x^5 + 7x^4 - 5\sqrt[3]{x}$

11. $y = x^2 + 5\sqrt[5]{6+x^2} - 9\sqrt[5]{x-x^3}$

13. $y = 6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[2]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x})$

15. $y = x\sqrt[5]{x} + 3x - 3x^2 - x$

17. $y = \cos(x^3)$

19. $y = \arcsin \sqrt{x}$

21. $y = \ln(\cos 5x)$

23. $y = \arccos^3(5x)$

25. $y = \operatorname{tg}^5(6x + 3)$

27. $y = 6^{(x+5)}$

29. $y = -\log_{\frac{1}{2}}(4x^4 + 8)^2$

31. $y = \arcsin \sqrt{1-4x^2}$

33. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1)$

35. $y = \ln(3x) \cdot \sin 5x$

37. $y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$

39. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

41. $y = \frac{\operatorname{ctg} 5x}{\ln x}$

43. $y = \frac{5^x}{4x^2 - 5}$

8. $y = -5x^{\frac{1}{5}} + \frac{4}{x} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$

10. $y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{x} + (1-3x^3)^{\frac{1}{9}}$

12. $y = \frac{5}{2x^{-3}} + \sqrt{x} - 4\sqrt{(2+x)^3}$

14. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

16. $y = \sqrt[4]{2x - x^4} + \sqrt[3]{(6x + 2)^4}$

18. $y = \operatorname{ctg}(\ln 2x)$

20. $y = 3^{\cos x}$

22. $y = \sin^5(e^x)$

24. $y = \ln^5(\operatorname{ctg} 6x)$

26. $y = \arcsin^7 2x$

28. $y = \arcsin^4(2x-1) + \sqrt{3x-7}$

30. $y = \frac{1}{3} \operatorname{arcco} \frac{5x-1}{3}$

32. $y = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{2x} + 3e^x + x$

34. $y = e^x \cdot \cos x$

36. $y = 5^x \cdot \operatorname{arctg} x$

38. $y = (x^3 + 4) \cdot \arccos x$

40. $y = \frac{e^{-x}}{\operatorname{tg} x}$

42. $y = \frac{1+x^3}{1-x^5}$

44. $y = \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln(\cos x)$

$$45. y = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x)$$

$$47. y = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x})$$

$$49. y = \sqrt[6]{\left(\frac{2 - 3x^3}{2 + 3x^3} \right)^5}$$

$$51. y = \left| \frac{1 - 4x}{1 + 4x^2} \right|^{\frac{3}{4^x}}$$

$$53. y = \frac{1}{3x^2 - 2}$$

$$55. y = \frac{e^{3x}}{\sin(-3x)}$$

$$57. y = \left(5^{\operatorname{tg} 2x} - x^2 \right)$$

$$59. y = x^{e^{-3x-1}}$$

$$61. y = (2 - 2x)^{x^3}$$

$$63. y = 3x^{-\sin x}$$

$$65. x \sin y - y \cos x = 0$$

$$67. y \sin^2 x - \cos(x^3 + y) = 2 \sin y$$

$$69. x \cos 2x - y^2 \sin(3x - 1) = 0$$

$$71. 3^x - 3^y = 3^{x+y}$$

$$73. x - y = \arcsin x - \arccos y$$

$$75. \log_3(x - y) + \sqrt{y} = 1$$

$$77. \sin y + \cos x = \operatorname{tg}(x + y)$$

$$79. x + \sqrt[3]{y^x} = 6y$$

$$81. \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$$

$$46. y = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

$$48. y = \sqrt[7]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

$$50. y = \sqrt[4]{\frac{x^2+4}{x^3+12x}} \arcsin x$$

$$52. y = \frac{1}{x}$$

$$54. y = \frac{\arccos 6x}{e^x}$$

$$56. y = \frac{5^{\ln 2x}}{5 \sin 3x}$$

$$58. y = (2x + 4)^{\frac{1}{x}}$$

$$60. y = (-3x - 6)^{x^3}$$

$$62. y = (\cos x)^{\ln x}$$

$$64. y = (\sin x)^{\ln x}$$

$$66. e^{x+y} = \frac{y}{x}$$

$$68. \cos^3 yx = \sqrt{1-x+y}$$

$$70. e^{x^2 y} - x^2 + y^3 = 0$$

$$72. 2y \ln y = x$$

$$74. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$76. y + 5x = \ln(2x^2 y)$$

$$78. y\sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln^2 2$$

$$80. \begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \\ x = \sqrt{t^2-1} \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} y = \sqrt{t+1} \\ y = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} x = \sqrt{3-t} \\ y = \ln(3-t) \\ x = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} t_1 \\ y = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} x = \cos^2 4t \\ y = \operatorname{tg}^2 4t \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 8\sin^3 t. \end{cases}$$

Найти значения производных в данных точках:

$$91. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \text{ при } x = 0; 1; \pi; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8} \text{ и } \sqrt{3}$$

$$92. y = \frac{x \ln x}{e^{x^2}}; f'(1); f'(2); f'\left(\frac{3}{4}\right); f'(a^2); f'\left(\frac{a+e}{2}\right).$$

$$93. \text{Доказать, что функция } y = 5e^{\frac{1}{3} - 2x} \text{ удовлетворяет уравнению } y' + 2y = e^x.$$

$$94. \text{Доказать, что функция } y = x \sin x \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{y'}{\cos x} - x = \operatorname{tg} x.$$

$$95. \text{Доказать, что функция } y = 3 + \frac{5}{x} \text{ удовлетворяет уравнению } xy' + y = 3.$$

$$96. y = x\sqrt{1+x^2}. \text{ Найти } y'.$$

$$97. y = e^{-x^2}. \text{ Найти } y''.$$

$$98. y = \sqrt[5]{x^3}. \text{ Найти } y''.$$

$$99. y = x^2 e^{2x}. \text{ Найти } y^{(20)}.$$

$$100. y = x \ln x. \text{ Найти } y^{(5)}.$$

$$101. y = e^x \cos x. \text{ Найти } y^{(4)}.$$

$$102. y = \frac{x^2}{1-x}. \text{ Найти } y^{(8)}.$$

Найти y''_{xx} от функций, заданных параметрически:

$$103. \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$$

$$105. \begin{cases} y = \frac{1}{\sin 2t} \\ x = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$106. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 4} \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$107. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$$

Найти производную n-го порядка

$$108. y = \ln(3x+1).$$

$$109. y = 5^x$$

$$110. y = \ln x$$

$$111. y = \sin(x+1) + \cos 2x$$

$$112. y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}$$

Найти значения производных порядка n при $x = 0$ от нижеследующих функций:

$$113. y = x^k e^{ax}.$$

$$114. y = \arcsin x.$$

$$115. y = \frac{1}{1+x}.$$

116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

117. Составить уравнение такой касательной к кривой $y = x^2 + 5x + 3$, которая параллельна прямой $5x - y + 12 = 0$

118. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

119. Найти тангенсы углов α , под которым ось Ox пересекается с кривой $y = \frac{1}{4}(-4x - x^2)$.

120. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

121. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} y = 1 - \cos t, \\ x = t + 3; \\ y = \sqrt{t - 1}; \end{cases}$ в точке $M_0(5;1)$.

122. Какой угол образует с осью абсцис касательная к графику функции, проведенная в указанной точке? Написать уравнение касательной: а) $y = x^2 - 5x + 8, x_0 = 3$; б) $y = \ln(1 - x), x_0 = 0$.

123. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 5x - x^2$, параллельной прямой, проходящей через точки $(1; 7)$ и $(-2; 2)$.

124. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^3 + 2x + 1$, перпендикулярных прямой $5y + x - 4 = 0$.

125. Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln(x - 1)$, перпендикулярной прямой, образующей с осью абсцисс угол 135° .

126. Составить уравнения касательных к кривой $y = \frac{2x-7}{x-3}$: а) параллельных прямой $4x - y - 2 = 0$; б) перпендикулярных прямой $2x + 2y - 5 = 0$.

127. Составить уравнение касательной к кривой $y = e^{-x}$: а) проходящей параллельно биссектрисе второго и четвертого координатных углов; б) отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный -1 .

128. Найти угол между кривыми: а) $y = x^2 + 5x - 1$ и $y = x^2 + 4$; б) $y = x^3$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

129. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)$. Определить скорость и ускорение тела в указанный момент времени t_0 : а) $s(t) = t^3 - 2t^2 - t, t = 2$; б) $s(t) = \frac{2t+1}{t+3}, t = 7$.

130. Тело брошено вертикально вверх, движется по закону: $h(t) = 9t - 2t^2$. Найти начальную скорость и ускорение тела ($t_0 = 0$) и максимальную высоту подъема (при которой скорость $v(t) = 0$).

Используя понятие дифференциала, приближенно вычислить:

131. $e^{0,2}$

132. $\arcsin 0,54$

133. $\sin 29^\circ$

134. $\ln 1,02$

135. $1,02^{\frac{1}{3}}$

136. $\arctg 1,05$

137. $17^{0,25}$

138. $\cos 151^\circ$

139. lg11

**Задания для индивидуальной работы.
Вариант 0**

1. Найти y' следующих функций:

a) $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x^3}$;

b) $y = \ln \sin(2x-1)$;

c) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arccotg} x^4$;

d) $y = \frac{2x-3}{e^{-2x}}$; e) $y = x^{\sqrt{x+2}}$;

f) $x^4 + x^2 y^2 + y = 4$; g) $\begin{cases} x = \frac{t^2-1}{\sqrt{t+1}} \\ y = \frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$

2. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 5x - 11$, касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$

6. Исследование функции.

1. Область определения функции.

Область определения функции $D(f)$ – это множество значений аргумента x , для которых существует функция.

Пример 1. Найти область определения следующих функций

1) $y = x^3 + 3x^2 - 4$, 2) $y = \frac{3}{x^2 - 2x - 3}$, 3) $y = \sqrt{4x^3 - 3x^2 - x}$.

Решение.

1) Функция определена на всей числовой оси, $x \in (-\infty; +\infty)$, т.к. нет таких значений аргумента x , для которых не существует значение функции y .

2) функция определена, если знаменатель дроби не равен нулю, т.е. $x^2 - 2x - 3 \neq 0$. Решив квадратное уравнение, найдем $x \neq 3, x \neq -1$.

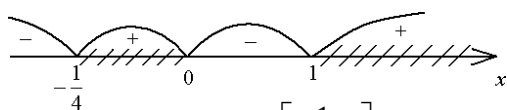
Таким образом, функция определена для всех значений x , кроме $x = 3$ и $x = -1$.

Область определения данной функции

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty).$$

3) Функция определена, если подкоренное выражение $4x^3 - 3x^2 - x \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Разложим многочлен на множители $4x^3 - 3x^2 - x = x(4x^2 - 3x - 1) = 4x \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot (x - 1)$. На числовой оси отметим точки $x = 0, x = -\frac{1}{4}, x = 1$, в которых многочлен

обращается в нуль и определим его знак в полученных интервалах.



Таким образом, $D(f) = \left[-\frac{1}{4}; 0\right] \cup [1; +\infty)$.

2. Исследование функции на четность и нечетность.

Функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной), если для любого $x \in D(f)$ $-x \in D(f)$ и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 2. Исследовать на четность или нечетность функции

$$1) y = 5x^4 - x^2 + 3; \quad 2) y = x^3 - \sin x; \quad 3) y = \frac{x+5}{x-7}.$$

Решение.

1) Функция определена при $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдем $f(-x)$.

$f(-x) = 5(-x)^4 - (-x)^2 + 3 = 5x^4 - x^2 + 3$, т.е. $f(-x) = f(x)$. Значит, данная функция является четной.

2) Функция определена при $x \in (-\infty; +\infty)$ $f(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) =$

$= -x^3 + \sin x = -(x^3 - \sin x)$, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Таким образом, данная функция нечетная.

3) функция определена для $x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$, т.е. для

$x = -7 \in D(f)$, $x = 7 \notin D(f)$. Поэтому функция не является ни четной, ни нечетной. Назовем ее функцией общего вида.

3. Исследование функции на монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале, если в этом интервале каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Функции возрастающие (убывающие) на некотором интервале называются монотонными.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

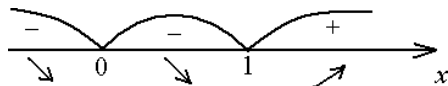
Пример 3. Найти интервалы монотонности функций

$$1) y = x^4 - \frac{x^3}{3} + 5; \quad 3) y = \ln(x^2 + 2x - 3).$$

Решение.

1) Данная функция определена на всей числовой оси. Найдем производную $y' = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$.

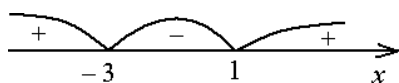
Производная равна нулю, если $x = 0$ и $x = 1$. Область определения – числовая ось, разбивается точками $x = 0$, $x = 1$ на интервалы. Определим знак производной в каждом интервале.



В интервале $(-\infty; 1)$ производная отрицательна, функция на этом интервале убывает.

В интервале $(1; +\infty)$ производная положительна, следовательно, функция на этом интервале возрастает.

2) Данная функция определена, если $x^2 + 2x - 3 > 0$ или $(x-1)(x+3) > 0$.



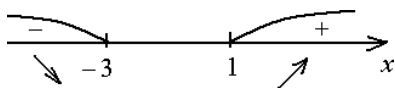
Определяем знак квадратного трехчлена в каждом интервале.

Таким образом, область определения функции

$$D(f) = (-\infty; 3) \cup (1; +\infty).$$

Найдем производную $y' = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$, $y' = 0$, если $2x+2=0$, т.е. $x=-1$, но $-1 \notin D(f)$.

Определим знак производной в интервалах $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$.



В интервале $(-\infty; -3)$ производная отрицательна, следовательно, функция убывает на интервале $(-\infty; -3)$. В интервале $(1; +\infty)$ производная положительна, функция возрастает на интервале $(1; +\infty)$.

4. Исследование функции на экстремум.

Точка $x = x_0$ называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x (x \neq x_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$).

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует (необходимое условие существования экстремума).

Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются критическими.

5. Достаточные условия существования экстремума.

Правило 1. Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если с «-» на «+», то минимум; если $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Правило 2. Пусть в точке $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная существует и отлична от нуля. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции.

Пример 4. Исследовать на максимум и минимум функции:

$$1) y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3; \quad 2) y = 3\sqrt[3]{x^2 - x^2}; \quad 3) y = x\sqrt{2 - x^2};$$

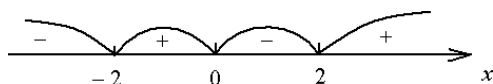
$$4) y = x - 2\sin x.$$

Решение.

1) Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Найдем производную $y' = x^3 - 4x$ и решим уравнение $y' = 0$, т.е. $x(x^2 - 4) = 0$. Отсюда $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ — критические точки.

Определим знак производной в интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$.



При переходе через точки $x = -2$ и $x = 2$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому по правилу 1 $x = \pm 2$ — точки минимума.

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «-», поэтому $x = 0$ — точка максимума.

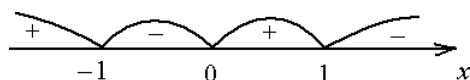
$$y_{\max}(0) = 3, y_{\min}(\pm 2) = -1.$$

2) Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$. Найдем производную

$$y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2x \right)$$

Решив уравнение $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} x = 0$, найдем $x = 1$ и $x = -1$ – критические точки. Если знаменатель

$\sqrt[3]{x} = 0$, т.е. $x = 0$, то производная не существует. Итак, $x = 0$ – третья критическая точка. Определим знак производной в интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.



Следовательно, функция имеет минимум в точке $x = 0$, максимум в точках $x = -1$ и $x = 1$.

$$y_{\min}(0) = 0, \quad y_{\max}(\pm 1) = 2.$$

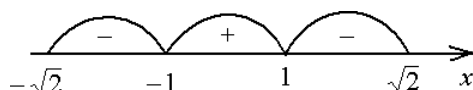
3) Функция определена и непрерывна, если $2 - x^2 \geq 0$, т.е. при $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$\text{Найдем производную } y' = \sqrt{2 - x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$\sqrt{2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{2(1 - x^2)}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

$$\text{Найдем критические точки: } \begin{cases} y' = 0 \\ y' = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \quad x = -1, \\ x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Окрестности точек $x = \pm \sqrt{2}$ не принадлежат области определения, поэтому они не являются т. экстремума. Итак, исследуем критические точки $x = 1$ и $x = -1$.



$$y_{\min}(-1) = -1, \quad y_{\max}(1) = 1.$$

4) Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$. Используем правило 2. Найдем производную $y' = 1 - 2 \cos x$.

Найдем критические точки:

$$1 - 2 \cos x = 0, \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Найдем вторую производную $y' = 2 \sin x$ и определим ее знак в точках $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$y' \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 0.$$

В точках $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ функция имеет минимум.

$$y' \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} < 0.$$

В точках $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ функция имеет максимум.

6. Выпуклость и вогнутость графика функции.

Точки перегиба.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b) , если дуга кривой расположена ниже (выше) касательной, проведенной к дуге в любой точке этого интервала.

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции в этом интервале выпуклый (вогнутый).

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Если $M(x_0, y_0)$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f'(x_0) = 0$ или не существует (необходимое условие существования точки перегиба).

Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка $M(x_0, y_0)$ – точка перегиба (достаточное условие существования точки перегиба).

Пример 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости (вогнутости) графика функции

$$y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x.$$

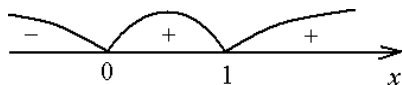
Решение.

Функция определена и непрерывна на множестве R . Найдем первую и вторую производные:

$$y' = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y' = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Решим уравнение $x(x-1)^2 = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Определим знак второй производной в интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.



Итак, в интервале $(-\infty; 0)$ график выпуклый, в интервале $(0; +\infty)$ – вогнутый, $x = 0$ является точкой перегиба, $x = 1$ не является точкой перегиба.

7. Асимптоты.

Асимптотой назовем прямую, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота.

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота.

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ – горизонтальная асимптота.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{2x+3}$.

Решение: Найдем вертикальную асимптоту. В точке $x = -\frac{3}{2}$ функция терпит разрыв и

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}-0} \frac{x^2}{2x+3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}+0} \frac{x^2}{2x+3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = -\frac{3}{2}$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2x+3} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{2(2x+3)} = -\frac{3}{4}$$

Итак, $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ – наклонная асимптота.

8. Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность (нечетность).
3. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва, вертикальные и наклонные асимптоты.
4. Найти нули функции, интервалы, знакопостоянства, точки пересечения графика с осью Oy .
5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и её экстремумы.
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и её точки перегиба.
7. Используя полученные данные, построить график функции.

Пример 7. Исследовать функцию и построить её график: $y = x^3 - 3x$;

Решение:

1) Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x)$, т.е. $f(-x) = -f(x)$, функция нечетная и её график симметричен относительно начала координат.

3) Функция непрерывна, точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

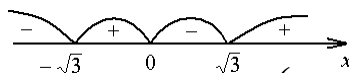
Наклонная асимптота не существует, т.к. $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3) = \infty.$$

4) Найдем нули функции:

$$x^3 - 3x = 0, \quad x(x^2 - 3) = 0, \quad x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}.$$

Интервалы знакопостоянства: $x^3 - 3x > 0$ ($x^3 - 3x < 0$)



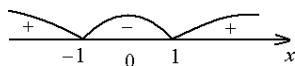
Значит, $y > 0$ при $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$,

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$.

5) Найдем производную: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

$$3(x^2 - 1) = 0, \quad x = 1, \quad x = -1 - \text{критические точки.}$$

Определим знак производной в интервалах $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.



Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, убывает на интервале $(-1; 1)$.

$$x = -1 - \text{точка максимума, } y(-1) = 2;$$

$$x = 1 - \text{точка минимума, } y(1) = -2.$$

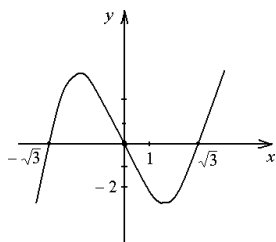
6) Найдем вторую производную: $y' = 6x$, $y'' = 0$ при $x = 0$.

При $x > 0$, $y' > 0$, следовательно, график функции вогнутый на интервале $(0; +\infty)$.

При $x < 0$, $y' < 0$, следовательно график функции выпуклый на интервале $(-\infty; 0)$.

Точка $x = 0$ – точка перегиба графика, $y(0) = 0$.

Строим график функции.



Пример 8. Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Решение.

1) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, функция общего вида.

3) Функция непрерывна на интервале $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. В точке $x = -1$ функция имеет разрыв.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left| \frac{-1}{0} \right| = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left| \frac{-1}{0} \right| = -\infty.$$

Поэтому $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

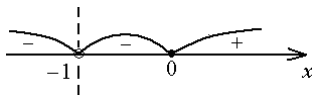
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot 2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ – наклонная асимптота

4) Нули функции: $\frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0, \quad x = 0.$

Интервалы знакопостоянства: $\frac{x^3}{2(x+1)^2} > 0 \quad \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} < 0 \right).$



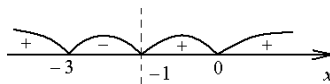
Итак, $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

5) Найдем производную: $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

$$y' = \frac{2x^2 \cdot (x+1) \cdot (3x+3-2x)}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Откуда $x = 0$ и $x = -3$ – критическая точка.

Определим знак производной в интервалах $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-3; -1)$, $x = -3$ – точка максимума, $y(-3) = -\frac{27}{8}$. В точке $x = 0$ экстремума нет, т.к. производная не меняет знак при

переходе через $x = 0$.

6) Найдем вторую производную:

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3x(x+1)^2((x+2)(x+1) - x^2 - 3x)}{(x+1)^6} = \frac{3x(x^2 + 3x + 2 - x^2 - 3x)}{2(x+1)^4} = \frac{6x}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

$$= \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

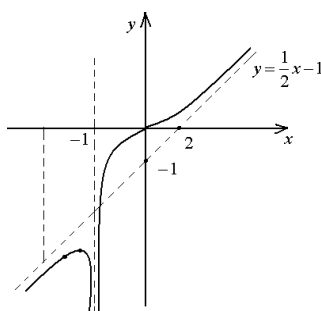
$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

Определим знак второй производной: $\frac{3x}{(x+1)^4} > 0$ при $x > 0$. Следовательно, график функции в интервале $(0; +\infty)$ вогнутый.

$\frac{3x}{(x+1)^4} < 0$ при $x < 0$. Следовательно, график функции в интервале $(-\infty; 0)$ выпуклый.

Точка $x = 0$ – точка перегиба, $y(0) = 0$.

Строим график функций.



9. Наибольшее и наименьшее значения функции

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a; b]$, надо вычислить значения этой функции на концах отрезка и во всех критических точках, принадлежащих этому отрезку. Наибольшее и наименьшее из полученных чисел и будет соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке $[a; b]$.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x - 3\sqrt[3]{x^2} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Решение.

Найдем производную $y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ и критические точки: $y' = 0$ при $x = 8$, $y' = \infty$ при $x = 0$.

Критическая точка $x = 8$ не принадлежит отрезку $[-1; 2]$.

Найдем значения функции: $y(-1) = -2$, $y(2) = 1 - 3\sqrt[3]{4}$, $y(0) = 0$.

Итак, наибольшее значение $y(0) = 0$, наименьшее значение $y(2) = 1 - 3\sqrt[3]{4}$.

Пример 6.10. Бак цилиндрической формы (с крышкой) должен вмещать V л воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление пошло меньше материала?

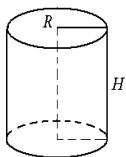
Решение:

Известна формула площади полной поверхности цилиндра

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H. \text{ Согласно условию задачи, объем цилиндра } V = \pi R^2 \cdot H, \text{ откуда } H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

$$\text{Следовательно, } S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Исследуем функцию $S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$ на наименьшее значение при $R > 0$.



$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0, \quad R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
 Далее, $S'(R) = 4\pi + \frac{4V}{R^3}, \quad S'\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + 8\pi = 12\pi$. Таким образом, вторая производная в критической точке $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ положительна. Следовательно, по правилу 2 функция $S(R)$ имеет в точке $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ минимум. Этот минимум является её наименьшим значением, т.к. $S(R)$ непрерывна в интервале $R \in (0; +\infty)$ и имеет только один экстремум – минимум.

Задачи

Исследование функции

1. Найти область определения функций:

а) $y = x^2 + x - 1$;

б) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = \frac{1}{x}$;

г) $y = \frac{5x-7}{\sqrt{x^2-7x-8}}$;

д) $y = \ln\left(\frac{x-2}{9-x}\right)$;

е) $y = \frac{8-\sqrt{4x}}{\ln x}$.

2. Найти интервалы монотонности функций:

а) $y = x^2 - 3x + 1$;

б) $y = -2x^2 + 8x - 1$;

в) $y = 3x^2 - 2x$;

г) $y = 2 - 3x + x^3$;

д) $y = x^4 - 5$;

е) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.

3. Найти максимумы и минимумы следующих функций:

а) $y = x^2 - 2x$;

б) $y = 2x^2 + 3x + 4$;

в) $y = -5x^2 - 2x + 2$;

г) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

д) $y = x^2 \cdot e^{-x}$;

е) $y = \frac{x}{x^2 - x + 3}$;

ж) $y = \frac{x}{\ln x}$.

4. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + x$;

б) $y = \frac{3x^2 - x^3}{2x^2}$;

в) $y = (x-1)^4$;

г) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

д) $y = 2x^2 + \ln x$;

е) $y = \arctg x$.

5. Найти асимптоты данных линий:

а) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$;

в) $y = e^x$;

г) $y = \ln(1 + e^x)$;

$$д) y = \frac{1}{x-1};$$

$$е) y = \frac{1}{(x+2)^3}.$$

6. Исследовать функции и построить их графики:

$$а) y = 12 - x^3;$$

$$б) y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x;$$

$$в) y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2};$$

$$г) y = (x-5) \cdot \sqrt[3]{x^2};$$

$$д) y = \frac{x^x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$е) y = \frac{e^x}{1+x}.$$

7. Найти наибольшее и наименьшее значение данных функций на указанных отрезках:

$$а) y = x^3 - 3x + 3; [-2; 3];$$

$$б) y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1; [-1; 5];$$

$$в) y = x + 3\sqrt[3]{x}; [-1; 1];$$

$$г) y = 2^x; [0; 5];$$

$$д) y = x + \frac{1}{x}; [1; 10];$$

$$е) y = \frac{x-1}{x+1}; [0; 4].$$

8. С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины:

$$а) \sqrt[4]{17}; б) \sin 31^\circ;$$

$$в) \arcsin 0,51;$$

$$г) \operatorname{arctg} 1,05;$$

$$д) \sqrt[4]{15,8};$$

$$е) \operatorname{tg} 46^\circ.$$

9. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x - 5x + 4};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \cdot \sin 7x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{1}{\ln x} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right).$$

10. Задачи.

1. Чему должны быть равны радиус основания R , высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объеме V он имеет наименьшую полную поверхность?
2. Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жести, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов.
3. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

1. Исследовать функции и построить их графики

$$а) y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5;$$

$$б) y = \frac{x^3}{(x-1)^2};$$

$$в) y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке

$$y = x^4 - 2x^2 + 5 \quad [-2; 2].$$

3. С помощью дифференциала приближенно вычислить

$$(2,01)^3 + (2,01)^2.$$

4. Найти указанный предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

5. Задача.

Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

2 семестр

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Частные производные и дифференциалы первого и высших порядков. Дифференцирование сложных функций

Пример 1. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$u = \ln(x^2 + y^2).$$

Решение. Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть исходного уравнения:

$$\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{4y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{8xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Тогда в правой части уравнения имеем:

Сравнивая полученные результаты, видим, что данная функция не удовлетворяет исходному уравнению.

Пример 2. Вычислить указанное выражение приближенно, заменяя приращение функции дифференциалом $\arctg \frac{1,02}{0,95}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \arctg \frac{y}{x}$. Значения z при $x=1, y=1$ есть $z = \arctg(1) = \pi/4 \approx 0,785$. Найдем приращение функции Δz при $\Delta x = -0,05, \Delta y = 0,02$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y/x^2 = -\frac{1}{1}y = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta z \approx -1 \cdot (-0,05) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,05 + 0,01 = 0,06$$

$$\Delta z \approx dz = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{x^2+y^2} = \frac{1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,05}{2} = 0,035.$$

$$\arctg \frac{1,02}{0,95} = z + \Delta z \approx 0,785 + 0,035 = 0,82.$$

2. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y = -3$.

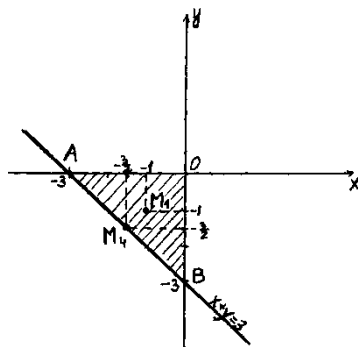
Решение. Находим стационарную точку M_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}.$$

Откуда $x = -1$, $y = -1$.

Получили точку $M_1(-1, -1)$, в которой $z_1 = z(-1, -1) = -1$.

III.



Исследуем данную функцию на границе области. На прямой OB , где $x=0$, имеем $z = y^2 + y$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке $[-3, 0]$. Находим

$$z'_y = 2y + 1 = 0, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z''_{yy} = 2.$$

Получим точку условного локального минимума $M_2(0, -1/2)$, в которой $z_2 = z(0, -1/2) = -1/4$.

На концах отрезка OB $z_3 = z(0, -3) = 6$, $z_4 = z(0, 0) = 0$.

Аналогично на прямой OA , где $y=0$, имеем:

$$z = x^2 + x, \quad z'_x = 2x + 1 = 0, \quad x = -1/2, \quad z''_{xx} = 2, \quad \text{т.е.}$$

$M_3(-1/2, 0)$ – точка локального минимума, в которой $z_5 = z(-1/2, 0) = -1/4$.

В точке A $z_6 = z(-3, 0) = 6$.

На отрезке AB прямой $x+y = -3$ имеем, исключив y из z в соответствии с уравнением $y = -x-3$:

$$z = 3x^2 + 9x + 6, \quad z'_x = 6x + 9 = 0, \quad x = -3/2, \quad \text{отсюда находим стационарную точку } M_4(-3/2, -3/2), \text{ в которой } z_7 = z(-3/2, -3/2) = -3/4.$$

На концах отрезка AB значения функции уже найдены.

Сравнивая все полученные значения функции z , заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 6$ достигается в точках $A(-3, 0)$ и $B(0, -3)$, а $z_{\text{наим}} = -1$ – в стационарной точке $M_1(-1, -1)$.

Ответ: $z_{\text{наиб}} = z(-3, 0) = z(0, -3) = 6$, $z_{\text{наим}} = z(-1, -1) = -1$.

3. Экстремум функции

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=3; M(0,3).$

Находим значения частных производных второго порядка в точке M :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

и составляем дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0$.

Следовательно, в точке $M(0,3)$ заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$.

4. Производная в данном направлении. Градиент функции.

Пример 1. Дана функция $z = x^2 - xy + y^2$, точка $A(1,1)$ и вектор $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$. Найти : а) градиент функции в точке A ; б) производную в точке A по направлению вектора $\vec{l}$.

Решение. Найдем значение частных производных в точке

$$A: \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A = 2x - y|_A = 1;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A = -x + 2y|_A = 1; (\text{grad } z)_A = \vec{i} + \vec{j}.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

$$\cos \beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, $\left(\frac{\partial z}{\partial l} \right)_A = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}.$

Выполнить задания

1. Найти и изобразить области определения следующих функций:

а) $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$; б) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$

в) $z = \sqrt{y^2 - 4x}$ г) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

д) $z = \ln(x + y)$; е) $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2. Найти частные производные следующих функций:

а) $z = x^3 + y^2 - 2xy$; б) $z = x^2 y^3$;

в) $z = \ln \left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$; г) $z = \arctg \frac{y}{x}$

д) $z = e^{3x^2 + 2y^2 - xy}$; е) $z = \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{x}{y}$

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = xy + \frac{x}{y}$; б) $z = x^y$;

в) $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$; г) $z = \ln(x^2 + y^2)$

д) $z = \sin(x^2 + y^2)$; е) $z = e^x (\cos y + x \cdot \sin y)$.

4. Вычислить приближенно данные выражения, заменив приращения соответствующих функций их полными дифференциалами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (1,02)^3 \cdot (0,97)^3; & \text{б) } \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}; \\ \text{в) } \arctan \left(\frac{1,02}{0,05} \right); & \text{г) } \ln(0,09^3 + 0,99^3); \\ \text{д) } \sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}; & \text{е) } 1,02^{4,05}. \end{array}$$

5. Найти частные производные второго порядка от функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = x^3 + y^3 + x^2 y^2; & \text{б) } z = \sin x \cdot \sin y; \\ \text{в) } z = y \cdot \ln x; & \text{г) } z = \ln(x^2 + y); \\ \text{д) } z = 2xy + y^2; & \text{е) } z = xy + \sin(x + y). \end{array}$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, D: x = 3, y = 0, y = x + 1. \\ \text{б) } z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2. \\ \text{в) } z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1. \\ \text{г) } z = 4 - 2x^2 - y^2, D: y = 0, y = \sqrt{x^2}. \\ \text{д) } z = x^2 y(4 - x - y), D: x = 0, y = 0, y = 6 - x. \\ \text{е) } z = 2x^3 - 6xy + 3y^2, D: y = \frac{1}{2}x^2, y = 2, x \geq 0. \end{array}$$

7. Исследовать на экстремумы следующие функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = (x - 2)^2 + 2y^2; & \text{б) } z = x^4 + 4xy - 2y^2; \\ \text{в) } z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5; & \text{г) } z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10; \\ \text{д) } z = 4(x - y) - x^2 - y^2; & \text{е) } z = x^3 + y^3 - 3xy. \end{array}$$

8. Найти производную в направлении вектора l в точке M и градиент функции в данной точке:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z = x^2 - xy + y^2, \text{ в точке } M(1; 1); l = 6i + 8j. \\ \text{б) } z = \ln(x^2 + y^2), \text{ в точке } M(1; 2); l = \{3; 4\}. \\ \text{в) } z = e^{-x-3y} \sin(x + 3y), \text{ в точке } M(3; -1); l = \{5; -12\}. \\ \text{г) } z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}, \text{ в точке } M(1; -3); l = \{6; -8\}. \\ \text{д) } z = \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ в точке } M(2; 1); l = \{3; 4\}. \\ \text{е) } z = \frac{\sin(x - y)}{x}, \text{ в точке } M(1; 1); l = \{-3; -4\}. \end{array}$$

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Сделать чертеж.

2. Дана функция $z = \frac{y}{x}$. Показать, что

$$x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy - 6x - 9y + y^2.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 1 - x$, $x = 0$.

5. Дана функция $z = 3x^2 y^2 + 5y^2 x$. Найти производную в точке $A(1; 1)$ в направлении вектора $\vec{l} = -\vec{i} + \vec{j}$ и $\text{grad } z$ в данной точке.

2. Неопределенный интеграл

2.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл

Основные правила интегрирования

1. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a = \text{const}$.
4. $\int (f(x) + h(x)) dx = \int f(x) dx + \int h(x) dx$.
5. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Таблица основных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C$. | 2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$. |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$. | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. |
| 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$. | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$. |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$. | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$. | 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$. |
| 13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$. | 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$. |
| 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$. | 16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$. |
| 17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. | 18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. |
| 19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. | |

2.2. Непосредственное интегрирование

Задача нахождения неопределенного интеграла от некоторых функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь либо путем алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$, либо подведением части ее множителей под знак дифференциала.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$.

$$\frac{1}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{-\frac{7}{2}}$$

Решение. Заметим, что

$$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{7}{2}} dx = -\frac{2x^{-\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{5x^{\frac{5}{2}}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{x^5}} + C$$

Пример 2. Найти $\int \frac{3x^2 - 5x + 8}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Выполним почленное деление:

$$\frac{3x^2 - 5x + 8}{\sqrt{x}} = \frac{3x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{x}} = 3x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 8}{\sqrt{x}} dx = 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 8 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 8 \cdot \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + 16 \sqrt{x} + C$$

Пример 3. Найти $\int (x-3)^4 dx$.

Решение. Воспользуемся тем, что $dx = d(x-3)$.

$$\int (x-3)^4 dx = \int (x-3)^4 d(x-3) = \frac{(x-3)^5}{5} + C$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{(2x-5)^3}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $dx = \frac{1}{2} d(2x-5)$.

$$\int \frac{dx}{(2x-5)^3} = \int \frac{\frac{1}{2} d(2x-5)}{(2x-5)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-5)}{(2x-5)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-5)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2x-5)^2} + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{3x+1}{x+2} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{3(x+2)-5}{x+2} = 3 - \frac{5}{x+2}$$

$$\int \frac{3x+1}{x+2} dx = \int \left(3 - \frac{5}{x+2} \right) dx = 3 \int dx - 5 \int \frac{dx}{x+2} = 3x - 5 \int \frac{d(x+2)}{x+2} = 3x - 5 \ln|x+2| + C$$

Пример 6. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $x dx = \frac{1}{2} d(x^2+4)$.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x+4)}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + \frac{4}{2} \ln \left(\sqrt{4+x^2} + x \right) \right) + C = \frac{x}{4} \sqrt{4+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{4+x^2} + x \right) + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{\sqrt{\ln x} \cdot dx}{x}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

$$\int (\ln x)^{\frac{1}{2}} d(\ln x) = 2 \frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 8. Найти $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos x dx = d(\sin x)$.

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 9. Найти $\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2)$.

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

Пример 10. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Используем тождество $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

При решении примеров 3 – 9 использовался метод подведения множителей под знак дифференциала. Эти интегралы можно найти и другим методом: заменой перемен

Задания

1. $\int (3x^2 - 4x^3 + 5) dx$.

2. $\int (3\sqrt{x} + 2x) dx$.

3. $\int (8\sqrt[3]{x} - 6x^5) dx$.

4. $\int \frac{6 dx}{\sqrt{x}}$.

5. $\int \frac{3 dx}{x^4}$.

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

7. $\int (3x - \sqrt{x})^2 dx$.

8. $\int 5x^2 (x^2 - 3) dx$.

9. $\int \frac{7x^3 - 4x + 3}{\sqrt{x}} dx$
10. $\int \frac{x^2}{x+2} dx$
11. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$
12. $\int (x+8)^7 dx$
13. $\int (4x-3)^5 dx$
14. $\int \frac{dx}{(1-3x)^2}$
15. $\int \sqrt[3]{x-3} dx$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$
17. $\int x\sqrt{x^2+1} dx$
18. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-5}}$
19. $\int \frac{dx}{5x+1}$
20. $\int \frac{dx}{1-8x}$
21. $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$
22. $\int 3^x dx$
23. $\int 3 \cdot 5^x dx$
24. $\int e_{3^x} dx$
25. $\int e_{-x} dx$
26. $\int e_{\cos x} \sin x dx$
27. $\int \sin 5x dx$
28. $\int \cos \frac{x}{2} dx$
29. $\int \operatorname{tg} 4x dx$
30. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx$
31. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$
32. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$
33. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
34. $\int \frac{dx}{4+x^2}$
35. $\int \frac{dx}{16+9x^2}$
36. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
37. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$
38. $\int \frac{dx}{x^2-1}$
39. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$
40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$
41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$
42. $\int \frac{dx}{25-x^2}$
43. $\int \frac{dx}{3-x^2}$
44. $\int \frac{dx}{x^2+1}$
45. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

2.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

- 1) если $x = \varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, то в интеграле $\int f(x) dx$ можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3.1)$$

Затем найти интеграл от правой части формулы (3.1) и вернуться к исходной переменной,

2) если $t = \psi(x)$, то формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (3.2)$$

Пример 1. Найти $\int (2x^2 - 7)^4 x dx$

Решение. Если принять, что $t = 2x^2 - 7$, то $dt = 4x dx$, откуда $x dx = \frac{dt}{4}$. Произведем замену переменной в данном интеграле.

$$\int (2x^2 - 7)^4 x dx = \int t^4 \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int t^4 dt = \frac{1}{20} t^5 + C = \frac{1}{20} (2x^2 - 7)^5 + C$$

Пример 2. Найти $\int \sqrt{x^3 + 8} \cdot x^2 dx$

Решение. Положим, что $x^3 + 8 = t$, тогда $dt = 3x^2 dx$, $x^2 dx = \frac{dt}{3}$.

$$\int \sqrt{x^3 + 8} \cdot x^2 dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 8)^3} + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{(\ln x + 3)^2}{x} dx$

Решение. Положим, что $\ln x + 3 = t$, то $dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{(\ln x + 3)^2}{x} dx = \int t^2 \frac{dt}{1} = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x + 3)^3 + C$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$

Решение. Если $\sin x = t$, то $dt = \cos x dx$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{(\sin x)^4} + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{e^x}{7 - e^x} dx$

Решение. Если $7 - e^x = t$, то $dt = -e^x dx$, $e^x dx = -dt$.

$$\int \frac{e^x}{7 - e^x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |7 - e^x| + C$$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

Решение. Введем новую переменную $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctg t + C = 2 \arctg \sqrt{x} + C$$

2.4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (4.1)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции.

Для интегралов вида $\int P(x) e^{kx} dx$, $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$,

где $P(x)$ – многочлен, за u следует применять $P(x)$. Для интегралов вида $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$ за u следует применять функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arctg x$.

Пример 1. Найти $\int (x+3) \cdot e^{6x} dx$

$$\int (x+3) \cdot e^{6x} dx = \left[\begin{array}{l} x+3 = u, \quad du = dx, \\ e^{6x} = dv, \quad v = \frac{1}{6} e^{6x} \end{array} \right]$$

Решение.

$$= \frac{1}{6} (x+3) e^{6x} - \frac{1}{6} \int e^{6x} dx = \frac{1}{6} (x+3) e^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} + C$$

Пример 2. Найти $\int (x-2) \cdot \ln(x-4) dx$

$$\int (x-2) \cdot \ln(x-4) dx = \left[\begin{array}{l} \ln(x-4) = u, \\ (x-2) dx = dv, \end{array} \quad v = \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{x(x-4)}{2} \right]$$

Решение.

$$= \frac{x(x-4)}{2} \cdot \ln(x-4) - \int \frac{x(x-4)}{2} \cdot \frac{dx}{x-4} = \frac{x(x-4)}{2} \cdot \ln(x-4) - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x(x-4)}{2} \ln(x-4) - \frac{x^2}{4} + C$$

Пример 3. Найти $\int x^2 \cos 2x dx$

$$\int x^2 \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = u, \\ \cos 2x dx = dv, \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right]$$

Решение.

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \left[\begin{array}{ccc} x = u, & du = dx, & -\frac{1}{2} \cos 2x \\ \sin 2x dx = dv, & v = -2x & v = -2x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Пример 4. Найти $\int \sqrt{4-x^2} dx$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left[\begin{array}{ccc} \sqrt{4-x^2} = u, & du = \frac{-x dx}{\sqrt{4-x^2}}, \\ dx = dv, & v = x \end{array} \right] =$$

Решение.

$$= x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} dx = x \cdot \sqrt{4-x^2} -$$

$$- \int \sqrt{4-x^2} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + 4 \arcsin \frac{x}{2}$$

Таким образом, получим уравнения относительно исходного интеграла

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + 4 \arcsin \frac{x}{2},$$

$$2 \int \sqrt{4-x^2} dx = x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} \right) + C$$

Задачи

1. $\int (x+1) e^x dx$

2. $\int \arcsin x dx$

3. $\int \arctg x dx$

4. $\int x \sin x dx$

5. $\int x_3 \ln x dx$

6. $\int x_2 e_x dx$

7. $\int e^x \sin x dx$

8. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

9. $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int \frac{\ln x}{-x^2} dx$

11. $\int x_2 \arcsin x dx$

12. $\int (x \pm 2x+1) \sin 3x dx$

13. $\int x_2 \ln x dx$

14. $\int \arctg \sqrt{x} dx$

15. $\int x \cos 3x dx$

16. $\int x \arctg x dx$

17. $\int \ln x dx$

18. $\int (\arcsin x)_2 dx$

19. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

20. $\int \sqrt{5+x^2} dx$

2.5. Интегрирование функций содержащих квадратный трехчлен

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + C} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + C}} \quad (5.1)$$

Сводится к табличным интегралам путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена.

Интегралы типа

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + C} dx \text{ и } \int \frac{Mx + \frac{N}{a}}{\sqrt{ax^2 + bx + C}} dx, \quad (5.2)$$

(где $M \neq 0$) выделением в числителе производной квадратного трехчлена сводится к сумме двух интегралов. Один из них табличный, другой имеет вид (5.1).

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.

Решение. Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$5 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x - 5) = -(x^2 + 4x + 4 - 9) = -(x^2 + 4x + 4) + 9 = -(x + 2)^2 + 9.$$

В результате получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{d(x + 2)}{\sqrt{9 - (x + 2)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x + 2}{3} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

Решение. Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$x^2 + 4x + 8 = (x^2 + 4x + 4) + 4 = (x + 2)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{3x^2 - 6x - 5}$.

$$3x^2 - 6x - 5 = 3 \left(x^2 - 2x - \frac{5}{3} \right) = 3 \left(x^2 - 2x + 1 - \frac{8}{3} \right) = 3 \left((x - 1)^2 - \frac{8}{3} \right)$$

Решение.

$$= 3 \left[(x - 1)^2 - \frac{8}{3} \right]$$

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 6x - 5} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x - 1)}{(x - 1)^2 - \frac{8}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}} \ln \left| \frac{x - 1 - \sqrt{\frac{8}{3}}}{x - 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot \sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{\frac{8}{3}}}{x-1+\sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$.

Решение. $x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right| + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{(3x-2)dx}{2x^2 + 10x + 3}$.

Решение. Найдем производную квадратного трехчлена

$$(2x^2 + 10x + 3)' = 4x + 10$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{3x-2}{2x^2 + 10x + 3} = \frac{4}{4} \cdot \frac{3x-2}{2x^2 + 10x + 3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x+10}{2x^2 + 10x + 3} - \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{2x^2 + 10x + 3}$$

Данный интеграл разобьем в сумму двух интегралов

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-2)dx}{2x^2 + 10x + 3} &= \underbrace{\int \frac{4x+10}{2x^2 + 10x + 3} dx}_{Y_1} - \underbrace{\int \frac{19}{2x^2 + 10x + 3} dx}_{Y_2} \\ Y_1 &= \int \frac{(4x+10)dx}{2x^2 + 10x + 3} = \int \frac{d(2x^2 + 10x + 3)}{2x^2 + 10x + 3} = \ln |2x^2 + 10x + 3| + C \\ Y_2 &= \int \frac{dx}{2x^2 + 10x + 3} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + 5x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{5}{2}\right)}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{19}} \ln \left| \frac{2x + 5 - \sqrt{19}}{2x + 5 + \sqrt{19}} \right| + C \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{3x-2}{2x^2 + 10x + 3} dx = \frac{3}{4} \ln |2x^2 + 10x + 3| - \frac{\sqrt{19}}{4} \ln \left| \frac{2x + 5 - \sqrt{19}}{2x + 5 + \sqrt{19}} \right| + C$$

Задания

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 14}.$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 19}.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$
4. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x - 1}.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{13 - 6x - x^2}}.$
7. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$
8. $\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 3}.$
9. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx.$
10. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx.$
11. $\int \frac{3x - 11}{x^2 + 8x + 18} dx.$
12. $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 7x + 14}} dx.$

2.6. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$.

Простейшими дробями называются *правильные дроби* вида:

- | | |
|--------------------------------|--|
| $\frac{A}{x - a},$ | $\frac{A}{(x - a)^m}, m \in \mathbb{Z}, m > 1,$ |
| $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q},$ | $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, n \in \mathbb{Z}, n > 1, p^2 - 4q < 0$ |

Пример 1. Найти $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx.$

Решение. Подынтегральная дробь неправильная, поэтому разделим числитель $x^3 + x + 2$ на

$$\frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} = \frac{x^3 - 7x^2 + 12x + 7x^2 - 11x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x - 4)(x - 3)}.$$

Таким образом, $\frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{7x^2 - 11x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x}.$

Разложим знаменатель на множители

$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 12x &= x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4)(x - 3) \\ \int \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx &= \int \left(1 + \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x - 4)(x - 3)} \right) dx = \int dx + \\ &+ \int \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x - 4)(x - 3)} dx = \int \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x - 4)(x - 3)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 4} + \frac{C}{x - 3} \right) dx. \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства на $x(x-4)(x-3)$, получим

$$7x^2 - 11x + 2 = A(x-4)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-4).$$

Найдем коэффициент A, B и C используя частные значения $x=0, x=4, x=3$ – корни знаменателя.

При $x=0, 2 = -12A$, т.е. $A = -\frac{1}{6}$.

При $x=4, 70 = 4B$, т.е. $B = \frac{35}{2}$.

При $x=3, 32 = -3C$, т.е. $C = -\frac{32}{3}$.

$$= x + \int \left(-\frac{1}{6x} + \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{x-4} - \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= x - \frac{1}{6} \ln |x| + \frac{35}{2} \ln |x-4| - \frac{32}{3} \ln |x-3| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x-1)(x+1).$$

Знаменатель имеет два действительных корня $x=0$, один действительный корень $x=1$ и один $x=-1$. Поэтому

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Умножим обе части равенства на $x^2(x-1)(x+1)$, получим

$$1 = Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1).$$

Найдем коэффициенты комбинированным методом.

При $x=0, 1 = -B$, т.е. $B = -1$.

При $x=1, 1 = 2C$, т.е. $C = \frac{1}{2}$.

При $x=-1, 1 = -2D$, т.е. $D = -\frac{1}{2}$.

Осталось найти коэффициент A . Для этого сравним коэффициенты при одинаковых

степенях x в левой и правой частях равенства. Коэффициент при x^3 в левой части равен нулю (x^3 в левой части равенства отсутствует), а в правой – $A + C + D$. Получим

$$A + C + D = 0, \quad A + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} dx = \int \left(\frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x-7}{x^3 - x^2 + 5x - 5} dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 - x^2 + 5x - 5 = (x^3 - x^2)(5x - 5) = x^2(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x^2 + 5).$$

Знаменатель имеет действительный корень $x = 1$ и комплексно-сопряженные $x = \pm \sqrt{5} i$.

$$\frac{x-7}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Поэтому разложение на элементарные дроби имеет вид

Умножим обе части равенства на $(x-1)(x^2+5)$ получим

$$x-7 = A(x^2+5) + Bx(x-1) + C(x-1).$$

Найдем коэффициенты A, B, C комбинированным методом

при $x = 1$, $-6 = 6A$, т.е. $A = -1$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства.

При x^2 имеет $0 = A + B$,

при x^1 имеет $1 = -B + C$.

$A + B = 0$, $B = -A$, т.е. $B = 1$.

$C - B = 1$, $C = B + 1$, т.е. $C = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \int \frac{x-7}{(x-1)(x^2+5)} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+5} \right) dx = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x+2}{x^2+5} dx = \\ &= -\ln|x-1| + \int \frac{2x dx}{x^2+5} + 2 \int \frac{dx}{x^2+5} = -\ln|x-1| + \ln|x^2+5| + \frac{2}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

Задания

$$\int \frac{x^2}{x^2+9} dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^3-9x} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^4-4x^3+4x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+4x^2-5}$$

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

$$2. \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x} dx$$

$$4. \int \frac{2x-x+9}{x^3-9x} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$$

$$8. \int \frac{dx}{x^4-4x^3+4x^2}$$

$$10. \int \frac{dx}{x^5-x^2}$$

$$12. \int \frac{dx}{x^4+4x^2-5}$$

$$14. \int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3} dx$$

2.7. Интегрирование простейших иррациональных функций

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$$

Пример 1. Найти

Решение. Имеем интеграл типа (7.1).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{x^2}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{выполняем подстановку} \\ x-1 = t^2, x = t^2 + 1, dx = 2t dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(t^2+1)^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + 2t^2 + 1) dt = \frac{2}{5} t^5 + \frac{4}{3} t^3 + 2t + C = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{с помощью равенства } t = \sqrt{x-1} \\ \text{переходим к старой переменной} \end{array} \right| = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Имеем интеграл типа (7.2). Выполним подстановку $x = 3\sin t$, $dx = 3\cos t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos t dt}{9\sin t \cdot \sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{3\sin t \cdot 3\cos t} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin t} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \left| \begin{array}{l} \text{с помощью равенства } t = \arcsin \frac{x}{3} \\ \text{переходим к старой переменной} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arcsin \frac{x}{3}}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Известно, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\arcsin \frac{x}{3}}{2} &= \frac{\sin \left(\arcsin \frac{x}{3} \right)}{1 + \cos \left(\arcsin \frac{x}{3} \right)} = \frac{\frac{x}{3}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{3} \right)}} = \frac{\frac{x}{3}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2}} = \frac{x \cdot 3}{3 \left(3 + \sqrt{9 - x^2} \right)} = \frac{x}{3 + \sqrt{9 - x^2}}. \\ \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Поэтому окончательный ответ

Пример 3. Найти $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{\frac{7}{5}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$ и сравним его с $\int x^m (a + b x^n)^p dx$.

$$m = -\frac{7}{5}, \quad n = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{1}{5}. \quad \frac{m+1}{n} = -\frac{6}{5} \quad \frac{m+1}{n} + p = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5} = -1$$

Вычислим $\frac{m+1}{n}$ – не целое число, далее $\frac{m+1}{n} + p = -1$ – целое число. Имеет интеграл типа (7.4) третий случай. Выполним подстановку $x^{-\frac{1}{3}} + 1 = t^5$, $x = (t^5 - 1)^{-3}$, $dx = -3(t^5 - 1)^{-4} \cdot 5t^4 dt = -15t^4(t^5 - 1)^{-4} dt$.

$$\int x^{\frac{7}{5}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{-\frac{7}{5}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{-\frac{7}{5}} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \left(x^{\frac{1}{3}} + 1 \right)^{\frac{1}{5}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int x^3 \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1 \right)^{\frac{4}{3}} dx = \int \left(t^5 - 1 \right)^{\frac{4}{3}} \cdot t \cdot -15 t^4 \cdot t^5 - 1^{-4} dt = \\
&= - \int \left(t^5 - 1 \right)^4 \cdot 5 \left(t^5 - 1 \right)^{-4} dt = - \int_5^{15} \frac{15 t^6}{6} dt = - \frac{5}{2} t^3 = \\
&= \left| t = \sqrt[3]{x^{-\frac{1}{3}} + 1} \right| = - \frac{5}{2} \sqrt[3]{\left(x^{-\frac{1}{3}} + 1 \right)^3} + C
\end{aligned}$$

Задания

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-1}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

3. $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

4. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$

5. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} dx$

6. $\int \frac{dx}{x^2-1}$

7. $\int \frac{1}{9-x} dx$

8. $\int \frac{1}{2+x} dx$

9. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} dx$

10. $\int \frac{1+x}{x^2 \sqrt{x}} dx$

11. $\int \frac{dx}{(2+x^2) \sqrt{2x+x^2}}$

12. $\int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$

2.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Пример 1. Найти $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx$.

Решение. Имеем интеграл типа (8.1). Преобразуем произведение функций в сумму

$$\sin 5x \cdot \cos 8x = \frac{1}{2} (\sin (5-8)x + \sin (5+8)x) = \frac{1}{2} (\sin (-3x) + \sin 13x) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 13x - \sin 3x)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 13x - \sin 3x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 13x}{13} + \frac{\cos 3x}{3} \right) + C
\end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение. Имеем интеграл типа (8.2) случай 1. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) d(\sin x).$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = \left[\sin x = t \right] =$$

$$= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \sin^4 2x dx$.

Решение. Имеем интеграл типа (8.2) случай 2. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\begin{aligned} \sin^4 2x &= (\sin^2 2x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) = \frac{1}{8} (2 - 4\cos 4x + 1 + \cos 8x) = \\ &= \frac{1}{8} (3 - 4\cos 4x + \cos 8x). \end{aligned}$$

Итак,

$$\int \sin^4 2x dx = \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 4x + \cos 8x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{5 + 3\sin x}$.

Решение. Имеем интеграл типа (8.3). Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через новую переменную

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \cdot 2t.$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Известно, что $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, поэтому

$$\frac{dx}{5 + 3\sin x} = \frac{2 dt}{5 + \frac{6t}{1+t^2}} = \frac{2 dt}{5t^2 + 6t + 5}.$$

$$\int \frac{dx}{5 + 3\sin x} = 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 6t + 5} = \left[\text{интеграл типа (5.1), выделим полный квадрат } 5t^2 + 6t + 5 = 5 \left(t^2 + \frac{6}{5}t + 1 \right) = 5 \left(t^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}t + \frac{9}{25} + 1 - \frac{9}{25} \right) = \right.$$

$$= \left. 5 \left[\left(t + \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{16}{25} \right] \right] = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{4} + C.$$

Задания

1. $\int \sin 6x \cdot \cos 7x dx$.

2. $\int \cos 3x \cdot \cos 9x dx$.

3. $\int \sin 2x \cdot \sin 5x dx$.

4. $\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx$.

$$5. \int \frac{\cos 6x \cdot \cos 8x}{\sin x} dx$$

$$7. \int \sin x dx$$

$$9. \int \cos x \cdot \sin x dx$$

$$11. \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$13. \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

В

$$15. \int \frac{\square dx}{2 \sin x - 2 \sin x - 1}$$

$$17. \int \sin x \cdot \cos x dx$$

$$19. \int \operatorname{tg} x dx$$

$$21. \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$6. \int \sin 3x \cdot \sin 7x dx$$

$$8. \int \cos x dx$$

$$10. \int \sin x \cdot \cos x dx$$

$$12. \int \frac{dx}{2 - \sin x}$$

$$14. \int \frac{\square dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$$

$$16. \int \cos^4 x dx$$

$$18. \int \sin x \cdot \cos x dx$$

$$20. \int \operatorname{tg} x dx$$

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

$$1. \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$$

$$2. \int \frac{dx}{(4x - 10)^8}$$

$$3. \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4. \int (5x + 1) \cdot \sin 6x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 1}$$

$$6. \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$$

$$7. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$8. \int \frac{\square dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$$

3. Определенный интеграл

3.1. Формулу Ньютона - Лейбница

$$\int_1^8 (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}) dx$$

Пример 1. Вычислить ¹

Решение. Применяя формулу Ньютона - Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

$$\begin{aligned} \int_1^8 (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}) dx &= 2 \int_1^8 \sqrt{x} dx - \int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx = \left. \frac{4}{3} \sqrt{x^3} \right|_1^8 - \left. \frac{3}{5} \sqrt[5]{x^3} \right|_1^8 = \\ &= \frac{4}{3} (8^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) - \frac{3}{5} (8^{\frac{3}{5}} - 1^{\frac{3}{5}}) = \frac{4}{3} \cdot 16\sqrt{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{5} \cdot 32 + \frac{3}{5} = \frac{64\sqrt{2}}{3} - \frac{299}{15}. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

Пример 2. Вычислить

Решение. Применим формулу (3.8).

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = u, \quad du = dx, \\ e^{-x} dx = dv, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \\ &= \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

Пример 3. Вычислить

Решение. Применим подстановку $x = t^2$, $dx = 2t dt$. Определим новые границы интегрирования. Если $x_n = 0$, то $t_n = 0$; если $x_b = 4$, то $t_b = 2$.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \\ &= 2 \left(t - \arctg t \right) \Big|_0^2 = 2 (2 - \arctg 2). \end{aligned}$$

3.2. Вычисление площади плоской фигуры

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4 - (y-1)^2, \quad x = y^2 - 4y + 3.$$

Решение. Графиком функции $x = 4 - (y-1)^2$ является парабола с вершиной в точке $x = 4$, $y = 1$. Найдем точки пересечения параболы с осью OY :

$$4 - (y-1)^2 = 0, \quad (y-1)^2 = 4, \quad y-1 = \pm 2, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -1.$$

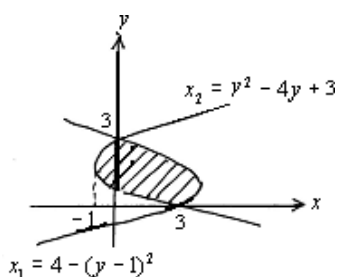
Графиком функции $x = y^2 - 4y + 3$ является парабола с вершиной в точке $x = -1$, $y = 2$. Найдем точки пересечения параболы с осью OY :

$$y^2 - 4y + 3 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 1, \quad x_1 = 4 - (y-1)^2.$$

Найдем точки пересечения данных парабол:

$$\begin{aligned} 4 - (y-1)^2 &= y^2 - 4y + 3, \\ -2y^2 + 6y &= 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, точки пересечения парабол $x = 3$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = 3$.



Построим фигуру, ограниченную данными параболой. Заштрихованная область D является правильной в направлении оси Ox , поэтому площадь фигуры найдем по

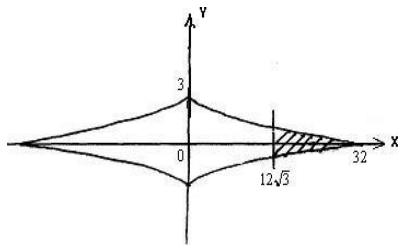
формуле
$$S = \int_a^b (x_1(y) - x_2(y)) dy$$

$$S = \int_0^3 (4 - (y-1)^2) - (y^2 - 4y + 3) dy = \int_0^3 (-2y^2 + 6y) dy =$$

$$= \left(-\frac{2y^3}{3} + 3y^2 \right) \Big|_0^3 = -18 + 27 = 9$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными

уравнениями
$$\begin{cases} x(t) = 32 \cos^3 t \\ y(t) = 3 \sin^3 t \\ 12\sqrt{3} \leq x(t) \leq 32 \end{cases}$$



Решение. Площадь заштрихованной фигуры найдем,

используя формулу
$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Сначала найдем $\frac{1}{2}$ площади S .

Чтобы найти границы интегрирования решим уравнения:

$$32 \cos^3 t = 12\sqrt{3} \quad \text{и} \quad 32 \cos^3 t = 32$$

$$32 \cos^3 t = 12\sqrt{3}, \cos^3 t = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \cos t = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}. \quad \text{Корнем этого уравнения в промежутке } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ является}$$

$$\frac{\pi}{6}, \quad 32 \cos t = 32, \cos t = 1, \cos t = 1.$$

Корнем уравнения является $t = 0$.

Итак, если x изменяется от $12\sqrt{3}$ до 32 , то t изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до 0 .

$$x'(t) = (32 \cos^3 t)' = -96 \cos^2 t \sin t$$

$$\frac{1}{2} S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin^3 t \cdot (-96) \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt = -288 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= -288 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = -36 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t)^2 (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= -36 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \frac{1 + \cos 4t}{2} - \cos 2t \right) dt - 18 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2t d(\sin 2t) =$$

$$= -36 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \cos 2t \right) dt - 18 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 2t) d \sin 2t =$$

$$= -36 \cdot \left(\frac{1}{2} t - \frac{\sin 4t}{4} - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - 18 \left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -36 \cdot \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{13}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) - 18 \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{-3}{2} \right)^3 \right) = 3\pi - \frac{9 \cdot 3}{2} = 1,631.$$

Тогда $S = 6\pi - 9\sqrt{3} = 3,262$ (кв.ед.).

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах $r = 6\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

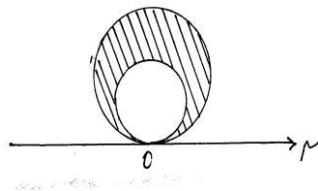
Решение. Площадь

найдем, используя формулу

Уравнения окружностей

величины $r \geq 0$, тогда $\sin\varphi \geq 0$.

интегрирования $0 \leq \varphi \leq \pi$



заштрихованной фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

$$r = 6\sin\varphi \text{ и } r = 4\sin\varphi$$

Поэтому границы

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (6\sin\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (4\sin\varphi)^2 d\varphi = 18 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi - 8 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \\ &= 10 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 10 \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = 5\pi. \end{aligned}$$

3.3. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Пример 1. Вычислить длину кривой $y = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3}$ между точками с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \text{ имеем}$$

Решение. Согласно формуле

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2x-1)^{1/2} \cdot 2 = \sqrt{2x-1},$$

$$(y')^2 = (\sqrt{2x-1})^2 = 2x-1,$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + 2x-1} = \sqrt{2x}.$$

$$\begin{aligned} l &= \int_2^8 \sqrt{2x} dx = \int_2^8 \sqrt{2} \sqrt{x} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} \left[\sqrt{x} \right]_2^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{8} - \sqrt{2}) = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2 \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(лин. ед.).

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

Решение. Длину дуги находим по формуле

Сначала найдем x'_t и y'_t .

$$x'_t = 2t \sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2 \cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'_t = -2t \cos t - (2-t^2) \sin t + 2 \sin t + 2 t \cos t = t^2 \sin t,$$

$$l = \int_0^{\pi} t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi} t^4 dt = \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5} = 10,335.$$

Тогда

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных

координатах $r = 6 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Решение. Длину дуги находим по формуле

Найдем $r' = 6 \cos \varphi$, $(r')^2 = 36 \cos^2 \varphi$.

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{36 \sin^2 \varphi + 36 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} 6 d\varphi = 6\varphi \Big|_0^{\pi} = 6\pi$$

3.4. Вычисление объема тела

Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры,

ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$,

$y = 0$.

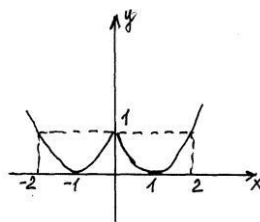
Решение. Объем тела находим по

формуле

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Из уравнения $y = (x-1)^2$ выразим x .

$$x-1 = \pm \sqrt{y}, x_1 = 1 + \sqrt{y}, x_2 = 1 - \sqrt{y}$$



$$V = \pi \int_0^1 (x_1^2(y) - x_2^2(y)) dy = \pi \int_0^1 ((1 + \sqrt{y})^2 - (1 - \sqrt{y})^2) dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{8\pi}{3} \sqrt{y^3} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} = 8,378.$$

3.5. Несобственные интегралы

Интеграл называется *несобственным*, если его подынтегральная функция не ограничена на отрезке интегрирования, либо неограниченная сама область интегрирования.

Несобственный интеграл с неограниченной областью интегрирования – это интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctg x \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл от неограниченной функции – это интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad \text{где } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad \text{где } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin x) \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится, если существует предел этого интеграла в точке разрыва подынтегральной функции или в бесконечно удаленной точке.

В противном случае говорят, что несобственный интеграл расходится.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$$

Пример 3. Исследовать $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\operatorname{ctg} x) \Big|_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg} 0 + \varepsilon) = -\frac{\pi}{4} + \infty = \infty.$$

Интеграл расходится.

3.6. Приложения определенных интегралов к решению физических задач

1. Вычисление пройденного пути по скорости.

Если $v = f(t)$ – скорость движения материальной точки по некоторой прямой, то путь S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

пройденный за время $[t_1; t_2]$ вычисляется по формуле

Пример 1. Материальная точка M движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ м/с промежутков времени $[0; 2]$.

$$S = \int_0^2 (3t^2 + 2t + 1) dt = t^3 + t^2 + t \Big|_0^2 = 8 + 4 + 2 = 14$$

Решение. М.

2 Вычисление работы переменной силы

Если под действием переменной силы $F(S)$ материальная точка движется по прямой, то

работа этой силы на участке пути $[a; b]$ вычисляется по формуле $A = \int_a^b F(S) dS$.

Пример 2. Определить работу, совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли $R_3 = 6380$ км, $g = 10$ м/с².

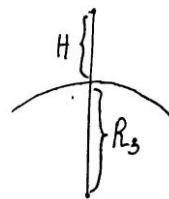
Решение. Работу, совершаемую силой F , находим по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Согласно закону Ньютона сила F

$$F = \frac{k}{x^2}, \text{ где } R_3 \leq x \leq H + R_3.$$

Если $x = R$, т.е. спутник находится на



притяжения тела Землей

поверхности Земли, то сила $\frac{k}{R^2} = P$, откуда $k = P \cdot R_3^2$

F будет равна весу тела $P = mg$. Тогда

$$F = \frac{PR^2}{x^2} = \frac{mgR^2}{x^2}. \text{ Итак, } A = \int_{R_3}^{R_3+H} F(x) dx = mg R_3^2 \int_{R_3}^{R_3+H} \frac{1}{x^2} dx = mg R_3^2 \left[-\frac{1}{x} \right]_{R_3}^{R_3+H} = -mg R_3^2 \left(\frac{1}{R_3+H} - \frac{1}{R_3} \right) = mg R_3^2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3+H} \right) = mg R_3 \left(\frac{R_3+H - R_3}{R_3(R_3+H)} \right) = mg R_3 \frac{H}{R_3(R_3+H)} = \frac{mg R_3 H}{R_3(R_3+H)} = \frac{mg H}{R_3+H}.$$

Пример 3. Цилиндр диаметра 20см и длины 80см заполнен паром под давлением 10кг/см². Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается неизменной.

Решение. Работу, совершаемую силой F находим по формуле

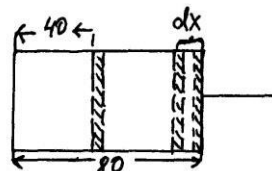
$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b P(x) \cdot S(dx) = \int_a^b P(x) dx$$

Согласно закону Бойля-Мариотта

$$P_1 V_1 = P_2 V_2, \text{ откуда } P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{P_1 \pi R^2 H}{\pi R^2 (H-x)} = \frac{P_1 H}{H-x}.$$

Таким образом

$$A = \pi R^2 \int_0^{H-40} P(x) dx = \pi R^2 \int_0^{H-40} \frac{P_1 H}{H-x} dx = \pi R^2 P_1 H \left[-\ln(H-x) \right]_0^{H-40} = \pi R^2 P_1 H \left(-\ln(H-40) + \ln H \right) = \pi R^2 P_1 H \ln \frac{H}{H-40} = 10 \cdot 314 \cdot 80 \cdot \ln 2 \approx 174118.$$



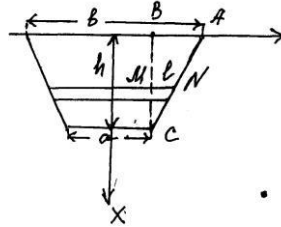
$P_1 V_1 = P_2 V_2$, откуда

3. Вычисление силы давления жидкости на пластину.

Метод решения задачи покажем на конкретном пример.

Пример 4. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции с основанием $a=100\text{м}$, $b=400\text{м}$, высота $h=20\text{м}$.

Решение. По закону Паскаля сила давления на элементарной полоске на глубину x вычисляется по формуле $P = \rho g h S$.
Площадь элементарной полоски $ds = \frac{2a + 4l}{2} dx = (a + 2l) dx$.



давления воды на площадь S , на глубине h .
плотину в выделенной x $dP = \rho g \cdot dS \cdot x$.
выражается так:

Найдем l из подобных треугольников ABC и CMN .

Так как $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{MC}$ то $\frac{b-a}{2l} = \frac{h}{h-x}$, откуда $l = \frac{b-a}{2h} (h-x)$.

$$P = \rho g \int_0^h (a + \frac{b-a}{h} x) dx = \rho g \left[ax + \frac{(b-a)x^2}{2h} \right]_0^h = \rho g \left(\frac{200a}{h} + \frac{200(b-a)}{h} \right) = 10^4 (20000 + 60000 - 40000) = 40000 \text{ Н.}$$

Задания

Вычислить определенные интегралы

1. $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5) dx$

2. $\int_{-2}^2 (x^3 + 4x) dx$

3. $\int_2^3 \frac{x dx}{x^2 + 1}$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cdot \cos 5x dx$

6. $\int_0^1 e^{2x} dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$

9. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

10. $\int_0^{3-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

11. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cdot \cos 5x dx$

12. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cdot \cos 2x dx$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$$

$$15. \int_2^4 \sqrt{x-1} \, dx$$

$$\int \sqrt{x} \, dx$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4 \sin x + 3 \cos x}$$

$$21. \int_1^2 \ln x \, dx$$

$$23. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$\int_{2\pi} x^2 \cos x \, dx$$

$$14. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

$$16. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x+1}}$$

$$18. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \, dx$$

$$20. \int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$22. \int_0^1 \arcsin x \, dx$$

$$24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

26. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x^2 + 3x - 9 \text{ и осью } OX.$$

27. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+2)^2$, $y = 4 - x$ и осью OX .

28. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$ и осью OX .

29. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x \cdot y = 3$, и $x + y = 4$.

30. Найти площадь, ограниченную астроидой $x = 8 \cos^3 \frac{t}{4}$, $y = 8 \sin^3 \frac{t}{4}$.

31. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

32. Найти площадь, ограниченную лемнискатой $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$.

33. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $\rho = 6(1 - \cos \varphi)$.

34. Найти площадь одного лепестка трехлепестковой розы $\rho = 4 \sin 3\varphi$.

35. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 6x$, $y = 16 - x^2$ и $x^2 + y^2 = 16$.

36. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $y = x^2 - x$ и $y = 3x$; б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ и $y = 10 - x$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} & y = x^2 \quad \text{и} \quad y = 2x - x^2 \quad ; \quad \text{г)} \quad y = -x^2 \quad \text{и} \quad y = 4 - x \\ \text{д)} & y = x^2 \quad \text{и} \quad y = 2\sqrt{2x} \quad ; \quad \text{е)} \quad y = x^2 \quad \text{и} \quad y = 3\sqrt{x} \end{array}$$

Вычислить длину дуги данной линии.

$$\begin{array}{ll} 37. & y = x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 4. \\ 38. & y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq e. \\ 39. & y^2 = (x+1)^3, \quad 0 \leq x \leq 4. \\ 40. & x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t. \\ 41. & x = 2(\cos t + t \sin t), \quad y = 2(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \\ 42. & x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ 43. & \rho = 3(1 - \cos \varphi). \\ 44. & \rho = 3 \sin \varphi. \quad 45. \quad \rho = 4 \cos \varphi. \\ 46. & \rho = 5(1 + \cos \varphi). \end{array}$$

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры D вокруг указанной оси координат.

$$\begin{array}{ll} 47. & D: y = 2x - x^2, \quad y = 0. \\ & \text{а) вокруг } Ox, \text{ б) вокруг } Oy. \\ 48. & D: y = \sin x, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq \pi). \\ & \text{а) вокруг } Ox, \text{ б) вокруг } Oy. \\ 49. & D: y^2 = 4 - x, \quad x = 0 \quad \text{вокруг } Oy. \\ 50. & D: x = 2\cos t, \quad y = 5\sin t \quad \text{вокруг } Oy. \\ 51. & D: \rho = 2(1 + \cos \varphi) \quad \text{вокруг полярной оси.} \end{array}$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$\begin{array}{ll} 52. & \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} \\ 53. & \int_0^\infty x e^{3-x^2} dx \\ 54. & \int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} \\ 55. & \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} \\ 56. & \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ 57. & \int_0^1 \ln x dx \\ 58. & \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ 59. & \int_0^2 \frac{dx}{2-x} \\ 60. & \int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4-1} dx \end{array}$$

61. Скорость движения тела задана формулой $v = 1 + 2t$ м/сек.

Найти путь, пройденный телом за первые 10 сек. после начала движения.

62. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6 - t)$ м/сек.

Каково наибольшее удаление точки от начала движения.

63. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н. она растягивается на 1 см.

64. Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость.

Какую работу надо совершить при этом, если длина цистерны равна 3, а диаметр 2?

65. Найти силу давления бензина, находящегося в

цилиндрическом баке высотой 4 м и радиусом 2 м ($\rho = 900$ кг/м³) на стенки бака.

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

1. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}; \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx; \text{ в) } \int_{-2}^0 x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

2. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{16x^4 + 1}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = 2 - x^2.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox , ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = \sqrt{x}.$$

5. Скорость материальной точки, которая движется прямолинейно, изменяется по закону $v(t) = 4(6 - 3t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до его остановки.

4. Комплексные числа и действия над ними

Пример 1. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2) \cdot z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$2z_2 = 6 + 4i$$

$$z_1 + 2z_2 = (2 + 3i) + (6 + 4i) = 8 + 7i$$

$$(z_1 + 2z_2) \cdot z_3 = (8 + 7i) \cdot (5 - 2i) = 40 - 16i + 35i + 14 = 54 + 19i.$$

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$.

$$z = \frac{(z_1 + z_3) \cdot z_2}{z_3}.$$

Найти число

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_3 = (3 + 5i) + (1 - 2i) = 4 + 3i$$

$$(z_1 + z_3) \cdot z_2 = (4 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 12 + 9i - 16i + 12 = 24 - 7i$$

$$\begin{aligned} \frac{(z_1 + z_3) \cdot z_2}{1 - 2i} &= \frac{24 - 7i}{1 - 2i} = \frac{(24 - 7i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{24 - 7i + 48i + 14}{5} = \\ &= \frac{38 + 41i}{5} = \frac{38}{5} + \frac{41}{5}i. \end{aligned}$$

Пример 3. Изобразить комплексные числа векторами, представить их в тригонометрической и показательной формах: а) $z = 2$, б) $z = -2$, в) $z = 3i$, г) $z = -3i$.

а) $z = 2$. *Решение.* $z = 2 = 2 + i \cdot 0$,
 $\varphi = \arctg \frac{0}{2} = \arctg 0$, так как радиус-вектор
 оси OX , то $\varphi = 0$, $z = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$

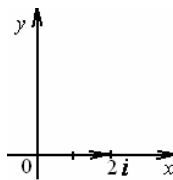


Рис. 1

$$r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2,$$

совпадает с направлением
 (рис. 1).

б) $z = -2$. *Решение.* $z = -2 = -2 + 0i$; $r = 2$,
 $\varphi = \arctg \frac{0}{-2} = \arctg 0$, так как радиус-вектор
 оси OX , то $\varphi = \pi$,
 $z = -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2 \cdot e^{i \pi}$ (рис. 2).

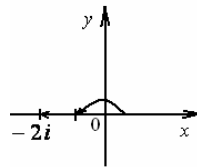


Рис. 2

противоположен направлению

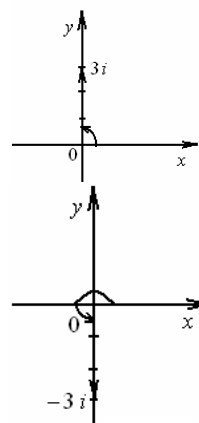
в) $z = 3i$. *Решение.* $z = 3i = 0 + 3i$, $r = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,
 совпадает с положительным направлением

$$z = 3i = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}.$$

г) $z = -3i$. *Решение.* $z = -3i = 0 - 3i$, $r = 3$,

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$, так как радиус-вектор образует с

$$z = -3i = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 3 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}}.$$



так как радиус-вектор
 оси OY , то

осью OX угол $\frac{3\pi}{2}$, то

Рис. 4

Пример 4. Вычислить $(1+i)^{12}$.

Решение. Представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической или показательной форме, используя формулы (1):

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Тогда по формуле Муавра

$$\begin{aligned} z_{12} &= \left(\sqrt{2} \right)^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{12^{12}} e^{3\pi i} = \\ &= 64 \cdot (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -64. \end{aligned}$$

Пример 5. Решить уравнения : а) $z^4 - 1 = 0$; б) $z^2 + 6z + 10 = 0$.

Решение. а) $z^4 - 1 = 0$, откуда получаем $z^4 = 1$ или $z = \sqrt[4]{1}$ в тригонометрической форме $1 = \cos 0 + i \sin 0$, тогда

$$z = \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4},$$

где $k = 0; 1; 2; 3$.

При $k = 0$, $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$,
 $z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

при $k = 1$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$,

при $k = 2$, $z_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$,

при $k = 3$, $z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$.

Таким образом, $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$.

б) $z^2 + 6z + 10 = 0$. По теореме Виета $z_1 \cdot z_2 = c$; $z_1 + z_2 = -b$. Следовательно $z_1 = -3 - i$, $z_2 = -3 + i$.

Пример 6. Изобразить множества точек на плоскости, удовлетворяющих условиям: а)

Re $z \geq 0$; б) Im $z < 0$; в) $|z + 2| < 1$.

Решение. а) Re $z = x$, следовательно, неравенство примет вид: $x \geq 0$.

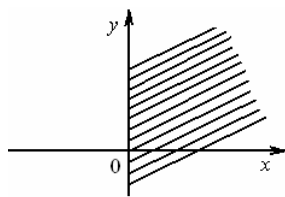


Рис. 5

б) Im $z = y$, тогда получим неравенство $y < 0$

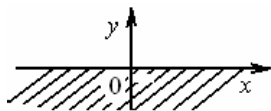


Рис. 6

в) $z+2 = x+2+iy$, тогда $|z+2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ и неравенство можно записать в виде $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} < 1$ или $(x+2)^2 + y^2 < 1$.

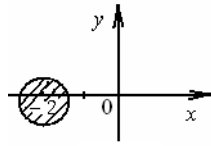


Рис. 7

Задачи

1. Найти значение выражения:

а) $\frac{(2-i) \cdot 5i}{5-2i}$, б) $\frac{(2+i) \cdot (1-4i)}{3i}$,

в) $\frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, если $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 7-9i$,

г) $\frac{z_1+z_2 \cdot z_3}{z_2}$, если $z_1 = 4+8i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 9+13i$.

2. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = -1 - i\sqrt{3}$, б) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

в) $z = -1 + i$, г) $z = 1 + 3i$.

3. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z = -2$, б) $z = -1 - i\sqrt{3}$,

в) $z = i$.

4. Изобразить комплексные числа векторами, представить их в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 1 + i$, б) $z = 4i$,

в) $z = -\sqrt{3} - i$, г) $z = -5$.

5. Вычислить:

а) $(1-i)^6$, б) $\sqrt{\sqrt[3]{3+i}}$, в) $\left(\frac{1-i}{3+i}\right)^{\sqrt{2}}$.

6. Решить уравнения:

а) $z^2 - 16 = 0$, б) $z^2 + 8z + 17 = 0$,

в) $z^8 - 1 = 0$.

7. Изобразить множества точек на плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $|z| \leq 2\sqrt{2}$, б) $2 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.

в) $|z - z_1| = 4$, где $z_1 = 3 - 5i$, г) $|z + z_1| = 6$, где $z_1 = 1 - i$.

II курс III семестр

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$.

Решение. Данное уравнение есть дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Поэтому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$
или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$. Тогда $x^2 - y^2 = c$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

Более общий случай описывают уравнения с разделяющимися переменными, которые имеют вид

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0. \quad (6)$$

Особенность уравнения (6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x , другая от y .

Уравнение (6) легко сводится к уравнению (5) путем почленного деления его $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$.

Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = 0, \quad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = c - \text{общий интеграл.}$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' = \frac{2x + xy^2}{3y + x^2y}$.

Решение. Упростим правую часть уравнения

$$y' = \frac{y(3 + x^2)}{x(2 + y^2)};$$

$$y' = \frac{y}{3 + x^2} \cdot \frac{2 + y^2}{y} - \text{дифференциальное уравнение с}$$

разделяющимися переменными.

$$\int \frac{y dy}{2 + y^2} = \int \frac{x dx}{3 + x^2}$$

$$\frac{1}{2} \ln |2 + y^2| = \frac{1}{2} \ln |3 + x^2| + \frac{1}{2} \ln c$$

$$2 + y^2 = c \cdot (3 + x^2)$$

$$y^2 = c(3 + x^2) - 2$$

$$y = \pm \sqrt{c(3 + x^2) - 2} - \text{общее решение.}$$

Пример 3. Найти общий интеграл уравнения

$$(y + xy) dx + (x - xy) dy = 0,$$

$$y(1+x) dx + x(1-y) dy = 0.$$

Решение. Обе части делим на $xy \neq 0$:

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0.$$

$$\frac{1+x}{x} dx = -\frac{1-y}{y} dy$$

$$\int \frac{1+x}{x} dx = \int \frac{y-1}{y} dy$$

$$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$$

$$\ln|xy| + x - y = C - \text{общий интеграл.}$$

Пример 4. Решить задачу Коши

$$y' = (3+y) \cdot \operatorname{ctg} x, \quad y = \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4.$$

Решение. $\frac{dy}{dx} = (3+y) \cdot \operatorname{ctg} x$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{3+y} = \operatorname{ctg} x \cdot dx.$$

$$\int \frac{dy}{3+y} = \int \operatorname{ctg} x \cdot dx$$

$$\ln|3+y| = \ln|\sin x| + \ln C$$

$$3+y = C \cdot \sin x$$

$$y = (C \cdot \sin x - 3) - \text{общее решение.}$$

$$\text{Подставим начальные условия } 4 = c \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 3$$

$$4 = c - 3$$

$$c = 7,$$

подставляем значение c в общее решение, получим

$$y = (7 \sin x - 3) - \text{частное решение.}$$

Задания

Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1. (1+y) dx - (1-x) dy = 0.$$

$$2. (y-a) dx + x^2 dy = 0.$$

$$3. x(y^2 - 4) dx + y dy = 0.$$

$$4. x y dx + (x+1) dy = 0.$$

$$5. (1+x^2) dy + y dx = 0.$$

$$6. \sqrt{y^2 + 1} dx = x y dy.$$

$$7. \sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0.$$

$$8. (1+x^2) dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0.$$

$$9. \ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0.$$

$$10. 2x^2 y y' + y^2 = 2.$$

$$11. y' - x y^2 = 2xy.$$

$$12. y' \cdot \cos x = \frac{y}{\ln y}.$$

$$13. y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y.$$

Найти частные решения дифференциальных уравнений

$$14. x y' + y = y^2; y(1) = 0,5.$$

$$15. y' \cdot \operatorname{ctg} x + y = 2; y(0) = -1.$$

$$16. y' = 3^3 y^2; y(2) = 0.$$

1.2. Однородные дифференциальные уравнения

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$.

Решение. Данное уравнение однородное, т.к. функции $P(x; y) = x^2 - y^2$ и $Q(x; y) = 2xy$ – однородные функции второго порядка. Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Подставляем в искомое уравнение:

$$(x^2 - u^2 x^2) \cdot dx + 2x \cdot u x \cdot x \cdot du + 2x \cdot u x \cdot u \cdot dx,$$

$$x^2 (1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^2 \cdot du = 0,$$

$$(1 + u^2) \cdot dx + 2u x \cdot du = 0,$$

последнее – уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные $\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2} \cdot du = 0$ и

интегрируем $\ln|x| + \ln(1+u^2) = c_1$, $\ln(|x| \cdot (1+u^2)) = c_1$, $|x| \cdot (1+u^2) = e^{c_1}$. Обозначим $c = e^{c_1}$, $c > 0$.

Тогда $|x| \cdot (1+u^2) = c$. Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ – общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(y^2 - xy)dx - x^2 dy = 0.$$

Решение. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{x^2}$;
 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$ ($y \neq 0$) – уравнение однородное.

Подстановка $z = \frac{y}{x}$; $y = z \cdot x$; $y' = z' \cdot x + z$

$$z' \cdot x + z = z^2 + z$$

$z' = z^2 \cdot \frac{1}{x}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| - \ln c$$

$$\frac{1}{z} = \ln c - \ln|x|$$

$$\frac{1}{z} = \ln \frac{c}{|x|}$$

$$z = \ln^{-1} \frac{c}{|x|}$$

$$\frac{y}{x} = \ln^{-1} \frac{c}{|x|}$$

$$y = x \cdot \ln^{-1} \frac{c}{|x|} \text{ – общее решение.}$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

Решение. Замена: $z = \frac{y}{x}$; $y = z \cdot x$; $y' = z' \cdot x + z$.

$$z' \cdot x + z = z^2 - 2$$

$$\begin{aligned}
 z' &= (z^2 - z - 2) \cdot \frac{1}{x} \\
 \int \frac{dz}{z^2 - z - 2} &= \int \frac{dx}{x} \\
 \int \frac{dz}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - 9} &= \int \frac{dx}{x} \\
 \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\frac{z-1}{2} - 3}{\frac{z-1}{2} + 3} \right| &= \ln |x| + \ln c \\
 \frac{1}{3} \ln \left| \frac{z-2}{z+1} \right| &= \ln |c| \cdot x \\
 \ln \left| \frac{z-2}{z+1} \right| &= 3 \ln |c| \cdot x \\
 \frac{z-2}{z+1} &= c \cdot x^3 \\
 \frac{y-2}{x} &= c x^3 \\
 \frac{y}{x} + 1 &= c x^3 \\
 \frac{y-2x}{y+x} &= c x^3 - \text{общий интеграл.}
 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Решить однородные уравнения

1. $x y y' = y^2 + 2x^2$.
2. $x y' \ln^y = x + y \ln^y$.
3. $x y + y^2 = (2x^2 + x y) \cdot y'$.
4. $x y' \sin^{\frac{y}{x}} + x = y \sin^{\frac{y}{x}}$.
5. $x y' - y = x \cdot t^{\frac{y}{x}}$.
6. $x y' = y - x \cdot \frac{y}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}}$.
7. $x y' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$.
8. $(y + xy) dx = x dy$.
9. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$.
10. $(x + y)dx + x dy = 0$.
11. $x dy - y dx = x^2 + y^2$.
12. $xy^2 dy = (x^2 + y^2) dx$.
13. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$.
14. $(x + 2y)dx - x dy = 0$.
15. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.
16. $x y' - y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}; y(1) = \frac{\pi}{2}$.
17. $(y^2 - 3x^2)dy + 2x y dy = 0; y(1) = -2$.
18. $x dy - y dx = y dy; y(-1) = 1$.

1.3. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции, в частности – постоянные.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2x$.

Решение. Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т.е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение $v' + 2x \cdot v = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \ln |v| = -x^2, v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т.е. $\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}$, $du = 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$, $u = e^{x^2} + c$.

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = \left(e^{x^2} + c \right) \cdot e^{-x^2}$, т.е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$.

Пример 2. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x$ методом Лагранжа.

Решение: Решаем уравнение $y' + 2xy = 0$. Имеем $\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$, или $y = c \cdot e^{-x^2}$. Заменяем c на

$c(x)$, т.е. решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 2x$ ищем в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$. Имеем

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Тогда $c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xc(x) \cdot e^{-x^2} + 2xc(x) \cdot e^{-x^2} = 2x$, т.е. $c'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x$, или $c(x) = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx$, или $c(x) = e^{x^2} + c$. Поэтому $y = \left(e^{x^2} + c \right) \cdot e^{-x^2}$, или $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ – общее решение данного уравнения.

Замечание. Уравнение вида $(x \cdot P(y) + Q(y)) \cdot y' = R(y)$, где $P(y), Q(y), R(y) \neq 0$ – заданные функции, можно свести к линейному, если x считать функцией, а y – аргументом: $x = x(y)$. Тогда, пользуясь равенством $y' = \frac{1}{x'}$, получаем $\frac{x \cdot P(x) + Q(x)}{x'} = R(y)$, т.е. $x' - \frac{P(y)}{R(y)} \cdot x = \frac{Q(y)}{R(y)}$ –

линейное относительно x уравнение. Его решение ищем в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y), v = v(y)$ – две неизвестные функции.

Пример 3. Решить уравнение Бернулли $y' + \frac{2y}{x+1} = -(x+1)^2 \cdot y^2$.

Решение. $-\frac{1}{y^2} \cdot y' - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1}{y} = (x+1)^2$. Подстановка $\frac{1}{y} = z$; $-\frac{1}{y^2} \cdot y' = z'$ сводим данное уравнение к линейному относительно $z(x)$.

$$z' - \frac{2}{x+1} \cdot z = (x+1)^2;$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot v = (x+1)^2$$

$$1) v' = \frac{2}{x+1} \cdot v$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln |v| = 2 \ln |x+1|$$

$$v = (x+1)^2$$

Отсюда находим $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x+c)(x+1)^2}$ – общее решение.

$$z = u \cdot v; z' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \left(v' - \frac{2}{x+1} \cdot v \right) = (x+1)^2$$

$$2) u' \cdot v = (x+1)^2$$

$$u' = 1$$

$$u = x + c.$$

$$z = (x+c)(x+1)^2$$

Задания

Решить линейные уравнения и уравнения Бернулли

$$1. y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2.$$

$$2. y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

3. $y' + y = e^{-x}$.
4. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$.
5. $x y' - y = x^2 \cos x$.
6. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$.
7. $y' \cos x + y = 1 - \sin x$.
8. $(1+x^2) \cdot y' + y = \arctg x$.
9. $y'(x+y^2) = y$.
10. $y' \cdot \sqrt{x^2+y} = \arcsin x$;
 $y(0) = 0$.
11. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \cdot \ln x$;
 $y(e) = \frac{e^2}{2}$.
12. $y' \cdot \sin x - y \cos x = 1$;
 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
13. $y' + xy = x^3 y^3$.
14. $(1-y^2) \cdot y' - xy - a x y^2 = 0$.
15. $y' + 2y = y^2 e^x$.
16. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Дифференциальные уравнения n -го порядка, допускающие понижения порядка

I. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Решение этого уравнения находится n – кратным интегрированием.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

Решение. Выполним трижды интегрирование $\sin x$.

Первое интегрирование: $y' = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1$.

Второе интегрирование: $y = \int (-\cos x + C_1) \, dx = -\sin x + C_1 x + C_2$.

Третье интегрирование:

$$y = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) \, dx = \cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Решить задачу Коши при указанных начальных условиях для уравнения

$$y' = \frac{1}{x},$$

$$y'(1) = 2, y(1) = 1.$$

Решение. Выполним дважды интегрирование функции $\frac{1}{x}$

$$y' = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$$

$$y = \int (\ln x + C_1) \, dx = \int \ln x \, dx + C_1 x = \left[\begin{array}{l} \ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv, \quad v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \ln x - \int \frac{dx}{x} + C_1 x = x \ln x - x + C_1 x + C_2.$$

Воспользуемся начальными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = -1 + C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{array} \right.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид $y = x \ln x + x$.

II. Уравнение вида $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее искомой функции. Порядок уравнения можно понизить на единицу с помощью подстановки $y' = p(x)$, где $p(x)$ – новая искомая функция. Эта подстановка приводит к уравнению $F(x, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(1+x^2)y' + 2xy' = 12x^3$.

Решение. Выполним подстановку $y' = p(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $(1+x^2)p' + 2xp = 12x^3$.

Уравнение $p + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{12x^3}{1+x^2}$ линейное относительно p и p' решим методом Бернулли. Пусть

$$p = u \cdot v, p' = u'v + uv'.$$

Уравнение примет вид

$$u'v + uv' + \frac{2x}{1+x^2}uv = \frac{12x^3}{1+x^2}.$$

$$\begin{cases} v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0 \\ u'v = \frac{12x^3}{1+x^2} \end{cases} \quad \text{— II.}$$

I. $v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{2x}{1+x^2} dx, \ln v = -\ln(1+x^2), \ln v = \ln \frac{1}{1+x^2}, v = \frac{1}{1+x^2}.$$

II. $u'v = \frac{12x^3}{1+x^2}$

$$u' \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{12x^3}{1+x^2}$$

$$u' = 12x^3$$

$$\int du = 12 \int x^3 dx$$

$u = 3x^4 + C_1$ таким образом, $p = \frac{3x^4 + C_1}{1+x^2}$.

Так как $p = y'$, то $y' = \frac{3x^4 + C_1}{1+x^2}, y = \int \frac{3x^4 + C_1}{1+x^2} dx =$

$$= \int \left(3x^2 - 3 + \frac{3+C_1}{1+x^2} \right) dx = x^3 - 3x + (3+C_1) \arctg x + C.$$

(□)

III. Уравнение вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее независимой переменной x . Подстановка $y' = z(y)$ позволяет понизить порядок на единицу, тогда $y', y'', \dots$ находятся по правилу дифференцирования сложной функции.

Пример 4. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y' \cdot y^3 = 1, y \Big|_{\frac{1}{2}} = 1,$

$$y' \Big|_{\frac{1}{2}} = 1.$$

Решение. Выполним подстановку $y' = z(y), z(y)$ – новая неизвестная функция, $y' = (z(y))' = z'(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z$. Получим уравнение с разделяющимися переменными $z' \cdot z \cdot y^3 = 1$.

$$\int z \, dz = \int \frac{dy}{y^3}, \quad z^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1, \quad z = \sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}}, \quad y' = \sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}}.$$

Из начальных условий $y' = 1$ при $y = 1$ найдем C_1 .

$$1 = \sqrt{C_1 - 1}, \quad \text{отсюда } C_1 = 2.$$

$$\text{Тогда } y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}, \quad \int \frac{y}{\sqrt{2y^2 - 1}} \, dy = \int dx, \quad \frac{1}{2} \sqrt{2y^2 - 1} = x + C_2.$$

Определим C_2 из начальных условий $y = 1, x = \frac{1}{2}$, то $C_2 = 0$.

Следовательно, $2y^2 - 1 = 4x^2$ решение данного уравнения.

Задания

Найти общие решения уравнений

1. $y' = 1 - y'^2$
2. $x y' + y' = 0$
3. $(1 + x^2) y' + (y')^2 + 1 = 0$
4. $x^2 y' + x y' = 1$
5. $(y'')^2 = 4 y'$
6. $y'(1 + y'^2) = y'$

Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений

7. $y y' + y'^2 = 1, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$
8. $y(0)=2, \quad y'(0)=2.$
 $y' - y'^2 + y'(y-1) = 0,$
9. $y^2 + y'^2 - 2 y y' = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$
10. $3 y' y' = y + y'^3 + 1, \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=0.$
11. $y^3 \cdot y' \cdot y' + 1 = 0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=\frac{3}{2}.$
12. $y' \operatorname{ctg} x + y' = 2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2, \quad y''(0)=1.$

2.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные однородного дифференциального уравнения второго порядка

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - 10 y' + 9 y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^4 - 10 \lambda^2 + 9 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm 3, e^x, e^{-x}, e^{3x}, e^{-3x}$ — фундаментальная система решений; $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$ — общее решение.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6 \lambda + 9 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = -3, e^{-3x}, x \cdot e^{-3x}$ — фундаментальная система решений, $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$ — общее решение.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' + 6y' + 18y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9i^2} = -3 \pm 3i$.
 $e^{-3x} \cos 3x$, $e^{-3x} \sin 3x$ – фундаментальная система решений; $y = e^{-3x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ – общее решение.

Задания

Найти фундаментальные системы решений и общее решение данных однородных линейных дифференциальных уравнений.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $3y' - 2y'' - 8y = 0$ | 7. $y' - 3y'' + 3y' - y = 0$ |
| 2. $y' - 6y' + 13y = 0$ | $y^{IV} - 3y' = 0$ |
| | 8. |
| 3. $y' + 6y' + 9y = 0$ | 9. $y' - 6y' + 18y = 0$ |
| 4. $y' + 9y' = 0$ | 10. $y' + 16y = 0$ |
| 5. $y^{IV} - 8y' + 16y = 0$ | 11. $y' + 17y = 0$ |
| 6. $4y' - 8y' + 5y = 0$ | 12. $y' + y' + y = 0$ |

Линейные неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$.

Решение.

1 Однородное уравнение, соответствующее данному $y' - 6y' + 9y = 0$.

2 Составляем характеристическое уравнение при $y' = \lambda$, $y' = \lambda^2$,

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Характеристическое уравнение имеет кратные действительные корни $\lambda_{1,2} = 3$. Имеем

фундаментальную систему решений $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = x \cdot e^{3x}$. Общее решение однородного уравнения
 $y = c_1 e^{3x} + c_2 x \cdot e^{3x}$.

3 Ищем частное решение неоднородного уравнения методом подбора по виду правой части. Сравнивая правую часть уравнения $f(x) = 4e^{3x}$ с видом (6) находим $\alpha = 3$, $\beta = 0$. таким образом показатель правой части $k = \alpha \pm \beta i = 3$ и он дважды совпадает с корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать по виду (7), где число $r = 2$. Учитывая, что правая часть уравнения имеет постоянный множитель, т. е. многочлен нулевой степени, многочлены $\tilde{P}(x)$ и $Q(x)$ надо взять нулевой степени $y^* = x^2 \cdot Ae^{3x}$.

4 Находим коэффициент A , дифференцируя y^* два раза и подставляя в данное уравнения.

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{3x}$$

$$y^{*'} = Ae^{3x}(2x + 3x^2)$$

$$y^{*''} = Ae^{3x}(12x + 9x^2 + 2)$$

$$9x^2 \cdot Ae^{3x} - 6Ae^{3x}(2x + 3x^2) + Ae^{3x}(12x + 9x^2 + 2) = 4e^{3x}$$

$$2Ae^{3x} = 4e^{3x}$$

$$2A = 4, A = 2,$$

$$y^* = 2x^2 e^{3x}$$

5 Находим общее решение неоднородного уравнений

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 2e^{3x} x^2 \text{ или } y = e^{3x} (c_1 + c_2 x + 2x^2).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8.$$

Решение. 1. Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y' - 8y' + 7y = 0.$$

2. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$. Корни уравнения действительные и разные $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$. Имеем фундаментальную систему решений $y_1 = e^{7x}$, $y_2 = e^x$. Общее решение неоднородного уравнения $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^x$.

3. Ищем частное решение неоднородного уравнения. В правой части отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции. Поэтому $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Показатель правой части $k = \alpha \pm \beta i = 0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому в формуле (7) $r = 0$.

Многочлен $\tilde{P}_s(x)$ должен иметь вторую степень, многочлен $\tilde{Q}_s(x)$ отсутствует, так как $\sin \beta = \sin 0 = 0$. $y^* = Ax^2 + Bx + C$.

4. Находим коэффициенты A, B, C . $y^{*'} = 2Ax + B$, $y^{*''} = 2A$,

$$2A - 16Ax - 8B + 7Ax^2 + 7Bx + 7C = 3x^2 + 7x + 8,$$

$$7Ax^2 + (7B - 16A)x + (2A - 8B + 7C) = 3x^2 + 7x + 8.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства.

$$\begin{array}{l} x^2 \mid 7A = 3 \\ x \mid 7B - 16A = 7 \\ x^0 \mid 2A - 8B + 7C = 8. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7A = 3 \\ 7B - 16A = 7 \\ 2A - 8B + 7C = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 3/7 \\ B = 97/49 \\ C = 1129/343 \end{array} \right. ,$$

$$y^* = \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1129}{343}.$$

5. Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1129}{343}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 100y' = 20e^{10x} + 100 \cos 10x.$$

1 Однородное уравнение имеет вид $y'' - 100y' = 0$.

2 Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 100\lambda = 0$. Корни уравнения действительные разные $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -10$. Имеем фундаментальную систему решений $y_1 = 1$, $y_2 = e^{10x}$, $y_3 = e^{-10x}$ и общее решение однородного уравнения $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x}$.

3 Решаем неоднородное уравнение, правая часть которого есть сумма двух функций.

Находим частное решение y_1^* уравнения

Показатель правой части $k = \alpha \pm \beta i = 10$, совпадает с корнем характеристического уравнения, поэтому в формуле (7) $r = 1$. так как $\beta = 0$, то многочлен $\tilde{P}_s(x)$ имеет нулевую степень

$$y_1^* = x \cdot A e^{10x}.$$

Дифференцируем трижды: $y_1^{*'} = Ae^{10x}(1+10x)$, $y_1^{*''} = 10Ae^{10x}(2+10x)$,

$$y_1^{*'''} = 100Ae^{10x}(3+10x),$$

$$100Ae^{10x}(3+10x) - 100Ae^{10x}(2+10x) = 20e^{10x}$$

$$100Ae^{10x} \cdot 2 = 20e^{10x}$$

$$10A = 1, A = \frac{1}{10}.$$

Таким образом, $y^* = \frac{1}{10} x \cdot e^{10x}$.

Находим частное решение y_2^* уравнения $y'' - 100 y' = 100 \cos 10 x$. Показатель правой части $k = 0 \pm 10 i$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, $r = 0$. Правая часть уравнения имеет постоянный множитель, поэтому многочлены $\tilde{P}_s(x)$ и $\tilde{Q}_s(x)$ нулевой степени.

$$y_2^* = B \cos 10x + C \sin 10x.$$

Дифференцируем трижды: $y_2^{*'} = -10 B \sin 10 x + 10 C \cos 10 x$,

$$y_2^{*''} = -100 B \cos 10x - 100 C \sin 10x, y_2^{*'''} = +1000 B \sin 10 x - 1000 C \cos 10 x,$$

$$1000 B \sin 10x - 1000 C \cos 10x + 1000 B \sin 10 x - 1000 C \cos 10 x = 100 \cos 10 x.$$

$$2000 B \sin 10x - 2000 C \cos 10 x = 100 \cos 10x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 10x$ и при $\cos 10x$.

$$\begin{cases} 200 B = 0 \\ -200 C = 100, \end{cases} \begin{cases} B = 0 \\ C = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

$$y_2^* = -\frac{1}{20} \sin 10 x. \text{ Общее решение данного уравнения } y = y_1 + y_2^* + y_3^*$$

$$y = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x} + \frac{1}{10} x e^{10x} - \frac{1}{20} \sin 10x.$$

Задания

Найти общие решения дифференциальных уравнений

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1. $y' - 6y' + 8y = 10$ | 6. $y' + y = \cos x$ |
| 2. $y' + 4y = 2$ | 7. $y' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ |
| 3. $y' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$ | 8. $y' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ |
| 4. $y' - 5y' + 4y = 7e^{3x}$ | 9. $y' + y = 4x \cos x$ |
| 5. $y' - 3y' - 4y = x^2$ | 10. $y' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ |

Найти частные решения неоднородных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям

- | | |
|--|--|
| 11. $y' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x),$ | $y(0)=1, y'(0)=-2$ |
| 12. $y' - y' = -2x,$ | $y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=2$ |
| 13. $y^{IV} - y = 8e^x,$ | $y(0)=-1, y'(0)=0, y''(0)=1,$
$y'''(0)=0$ |
| 14. $y' + y' = 5x + 2e^x,$ | $y(0)=0, y'(0)=0$ |
| 15. $y' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + x \cdot e^{-x},$ | $y(0)=0, y'(0)=0$ |

Решение неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных заключается в следующем.

Если известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ и общее решение однородного уравнения (2) $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, то общее решение неоднородного уравнения (1) может быть найдено по формуле

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

где функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Интегрируя, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и записываем общее решение неоднородного уравнения.

Пример. Найти решение задачи Коши $y' + y = \frac{1}{\cos x}$ с начальными условиями $y(0)=1, y'(0)=0$.

Решение. 1. Записываем соответствующее однородное уравнение $y' + y = 0$. Находим фундаментальную систему решений $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i, y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ и общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Применяем метод вариации произвольных постоянных. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Записываем систему уравнений для определения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1}' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$$

$$\Delta_{C_2}' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x \quad C_2'(x) = 1. \text{ Интегрируем, находим}$$

$$C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln |\cos x| + A, \quad A = \text{const},$$

$$C_2(x) = -\int dx = -x + B, \quad B = \text{const}.$$

Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$y = (\ln |\cos x| + A)\cos x + (-x + B)\sin x.$$

Используя начальные условия определяются константы A и B

$$y' = -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x - (\ln |\cos x| + A)\sin x + \sin x + (-x + B)\cos x;$$

$$y' = -(\ln |\cos x| + A)\sin x + (-x + B)\cos x$$

$$y(0)=1 \quad 1 = (\ln \cos 0 + A) \cos 0 + (0 + B)\sin 0$$

$$A=1$$

$$y'(0)=0 \quad 0 = -(\ln \cos 0 + A)\sin 0 + (0 + B) \cos 0$$

$$B=0$$

$$y = \cos x (\ln |\cos x| + 1) - x \sin x.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти решения задачи Коши для дифференциальных уравнений

$$1. \quad y' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=0$$

$$2. \quad y' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\begin{array}{ll}
3. y' + 4y = 2 \operatorname{tg} x, & y(0) = 0, \quad y'(0) = -2 \\
4. y' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\
5. y' + y = \operatorname{tg} x, & y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \\
6. y' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, & y(1) = e, \quad y'(1) = 3e
\end{array}$$

Найти общие решения уравнений

$$\begin{array}{ll}
7. y' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x. & 9. y' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}. \\
8. y' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0. & 10. y' \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4} y \cos \frac{x}{2} = 1.
\end{array}$$

3. Системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример 1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -20x + 6y. \end{cases}$$

Решение. 1. Решение системы будем искать в виде $x(t) = \alpha e^{kt}$, $y(t) = \beta e^{kt}$, α , β , k – неизвестные постоянные.

1. Составим характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -3-k & 1 \\ -20 & 6-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(3+k)(6-k) = 20$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0, k = 2, k = 1.$$

2. При $k_1 = 2$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} (-3-2)\alpha + \beta = 0 \\ -20\alpha + (6-2)\beta = 0, \\ -5\alpha + \beta = 0 \\ -20\alpha + 4\beta = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет множество ненулевых решений. Полагая $\alpha_1 = 1$, найдем $\beta_1 = 5$.

При $k_2 = 1$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (-3-1)\alpha + \beta = 0 \\ -20\alpha + (6-1)\beta = 0, \\ -4\alpha + \beta = 0 \\ -20\alpha + 5\beta = 0. \end{cases}$$

Эта система также имеет бесконечное множество решений. Полагая $\alpha_2 = 1$, найдем $\beta_2 = 4$.

Таким образом, фундаментальная система решений имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = e^{2t} & y_1 = 5e^{2t} \\
x_2 = e^t & y_2 = 4e^t.
\end{array}$$

Общее решение системы:
$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t \\ y(t) = 5C_1 e^{2t} + 4C_2 e^t. \end{cases}$$

Если корни характеристического уравнения равные или комплексно-сопряженные, то решение системы усложняется. Такие системы дифференциальных уравнений решаются методом исключения одного неизвестного и сведением к однородному дифференциальному уравнению второго порядка.

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

1. Продифференцируем первое уравнение системы: $\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 3 \frac{dy}{dt}.$

2. Подставим значение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 4 \frac{dx}{dt} - 3(3x + 4y) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 4 \frac{dx}{dt} - 9x - 12y. \end{aligned}$$

3. Из первого уравнения системы найдем y и подставим в уравнение II порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 9x - 16x + 4 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 25x = 0 - \text{линейное однородное уравнение.}$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0.$

$$\lambda_{1,2} = +4 \pm 3i$$

$$x(t) = e^{4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

$$y(t) = \frac{1}{3} \left(4 \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \frac{1}{3} \left(4 e^{4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) - 4 e^{4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \right.$$

$$\left. + 3 e^{4t} (C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t) \right) = e^{4t} (C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t).$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x(t) = e^{4t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y(t) = e^{4t} (C_2 \cos 3t - C_1 \sin 3t). \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Найти общие решения системы уравнений

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = y - 3x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = y - 3x \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = y - 3x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{2} \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t \\ \frac{d^2x}{dt^2} = -5x + 2y + e^t \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = \dots \end{cases}$$

Задания для индивидуальной работы.

Вариант 0

1. $y' \sin x = y \ln y$.

2. $y - xy' = x \cdot \frac{1}{\sin \frac{y}{x}}$.

3. $xy' - 2y = 2x^4$.

4. $y' + y' = 2x - 1$.

5. $y' \cdot x \ln x = y'$.

2. Ряды

2.1.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – ряд убывающей геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2} < 1$,

который сходится. Члены данного ряда меньше членов вспомогательного ряда, т.е. $u_n \leq v_n$, следовательно сходится и данный ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$.

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, у которого $v_n = \frac{1}{n}$. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0 \neq \infty$, следовательно ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3+1}$.

Решение. Сравним данный ряд с обобщенно гармоническим рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, где $v_n = \frac{1}{n}$, который сходится. Члены данного ряда меньше членов вспомогательного ряда, т.е. $u_n \leq v_n$, следовательно сходится и данный ряд.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3};$$

$l = \frac{1}{3} < 1$, ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{2}{1^4} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2n}{n^4} + \dots$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^{n+1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2;$$

$l = 2 > 1$, ряд расходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}, \quad f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$$

$$\int_1^b \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln(x+1) \Big|_1^b = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно ряд тоже расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость рядов:

а) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Решение. а) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, ряд сходится.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2e, \quad l = \frac{e}{2} > 1$$

б) $\frac{e}{2}$, ряд расходится.

2.2. Знакопередающие и знакопеременные ряды.

Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

Решение. Применим признак Лейбница:

$$1) \frac{1}{2} > \frac{2}{2^2+1} > \frac{3}{3^2+1} > \frac{4}{4^2+1} > \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

2)

Оба условия выполняются, значит ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Этот ряд бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, $q = \frac{1}{2} < 1$, следовательно он сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно.

2.3. Степенные ряды. Интервал и область сходимости

Пример 1. Найти область сходимости степенных рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n \cdot 3^n}.$$

Решение. а) Найдем радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{n! 5^{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty.$$

Интервалом сходимости ряда является вся числовая ось, т.е. ряд сходится при всех значениях x .

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

б) Используем ту же формулу и находим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^n} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 3.$$

Интервал сходимости: $x \in (-3; 3)$.

Исследуем ряд на концах интервала. При $x = 3$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Значит граница не принадлежит области сходимости. При $x = -3$

получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. На основании признака Лейбница имеем:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Оба условия выполняются, следовательно, ряд сходится. Эта граница принадлежит области сходимости. Таким образом, область сходимости ряда является промежуток $[-3; 3)$.

Ответ: $x \in [-3; 3)$.

24. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функции: а) $f(x) = 3^x$;

б) $f(x) = \frac{2}{3-x}$; в) $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. а) Так как $3 = e^{\ln 3}$, то заменим x на $x \ln 3$ в разложении (1), получим:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!} x + \frac{(\ln 3)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln 3)^3}{3!} x^3 + \dots + \frac{(\ln 3)^n}{n!} x^n + \dots \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1}$$

б) Воспользуемся формулой (4)

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots\right)$$

$-1 < \frac{x}{3} < 1$, т.е. $-3 < x < 3$.

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

в)

Заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \dots\right) =$$

$$= \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \dots$$

Пример 2. Вычислить $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем разложение $\sin x$ в ряд, получаем

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$$

Знакопеременный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда. Первый из отброшенных членов равен $\frac{1}{7!} \approx 0,0002 < 0,001$.

Итак, $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0,842$.

Пример 3. Вычислить $\sqrt[5]{1,1}$ с точностью до 0,0001.

$$(1+x)^m \quad x = 0,1 \quad m = \frac{1}{5}$$

Решение. Используем разложение в ряд, полагая $x = 0,1$; $m = \frac{1}{5}$ получаем:

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5}-1)}{2!} \cdot 0,01 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5}-1) \cdot (\frac{1}{5}-2)}{3!} \cdot 0,0001 + \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \dots$$

Первый из отброшенных членов равен $0,000048 < 0,0001$. Итак $\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192$.

Пример 4. Применяя разложение в ряд Маклорена некоторых функций, вычислить

приближенные значения $\int_0^1 \sin \frac{x}{3} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin \frac{x}{3} = \frac{x}{3} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^5}{5!} - \dots = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{3^5 \cdot 5!} - \dots$$

$$\int_0^1 \sin \frac{x}{3} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{27 \cdot 6} + \frac{x^5}{243 \cdot 120} - \dots \right) dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{18} - \frac{x^4}{2592} + \frac{x^6}{758160} - \dots \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{18} - \frac{1}{2592} + \frac{1}{758160} - \dots = 0,056 - 0,0004 + 0,0000013 - \dots$$

Итак, искомый интеграл равен сумме знакопеременного числового ряда. Требуется найти ее с заданной точностью $\varepsilon = 0,001$. Видим, что $0,056 > \varepsilon$, но $0,0004 < \varepsilon$. Отбросим все члены ряда начиная со второго члена. Погрешность вычисления интеграла не превосходит члена $0,0004$, что меньше $\varepsilon = 0,001$, таким образом

$$\int_0^1 \sin \frac{x}{3} dx \approx 0,056 \quad \text{с точностью до } 0,001.$$

Пример 5. Применяя метод последовательного дифференцирования найти, пять первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши

$$y' = 2xy - \cos x + 5, \quad y(0) = 2.$$

Решение. Решение имеем в виде

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Найдем $y'(0)$, используя дифференциальное уравнение:

$$y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 2 - \cos 0 + 5 = 4.$$

Дифференцируя обе части дифференциального уравнения получили:

$$y' = 2y + 2xy' + \sin x;$$

$$y'(0) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + \sin 0 = 4;$$

$$y'' = 2y' + 2y' + 2xy' + \cos x;$$

$$y''(0) = 8 + 8 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + \cos 0 = 17;$$

$$y^{IV} = 2y' + 2y' + 2y' + 2xy'' - \sin x = 6y' + 2xy'' - \sin x ;$$

$$y^{IV=0}(0) = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 17 - \sin 0 = 24 .$$

$$y = 2 + 4x + 2x^2 + \frac{17}{6}x^3 + x^4$$

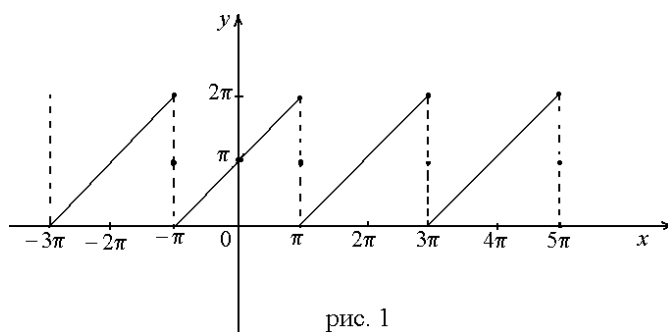
Решение запишем в виде:

25. Ряды Фурье

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π ,

заданную на интервале $(-\pi; \pi)$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

Решение.



Графиком этой функции в интервале $(-\pi; \pi)$ является отрезок, соединяющий точки $(-\pi; 0)$ и $(\pi; 2\pi)$. На рис. 1 изображен график функции $y = S(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Эта сумма является периодической функцией с периодом 2π и совпадает с функцией $f(x)$ на сегменте $(-\pi; \pi)$.

Определяем коэффициенты ряда Фурье.

Сначала находим $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\pi x + \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - \left(-\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} (2\pi^2) = \pi$.

Находим $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \right)$
 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos n\pi) = 0$.
 $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin n\pi \right) - \left(-\frac{-\pi}{n} \cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(-n\pi) \right)$
 $= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin n\pi + \frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \sin n\pi = 0$.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right] = -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos n\pi) - \\
&- \frac{1}{n\pi} (\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2}{n} (-1)^n = \\
&= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Следовательно разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

Пример 2. $f(x) = x^2$ с периодом 2, заданную на сегменте $[-1; 1]$ уравнением $f(x) = x^2$.

Решение. Рассматриваемая функция является четной. Ее график – дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$, рис. 2. Так как

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\
l=1, \text{ то } \\
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \frac{\cos n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \\
&= \int_0^1 u^2 dv = \left[\frac{1}{n\pi} u^2 \sin n\pi x - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 u \sin n\pi x dx \right]_0^1 = \\
&= \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \left[-\frac{4}{n\pi} \frac{x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right]_0^1 = \\
&= -\frac{4}{n^2 \pi^2} \cos n\pi + \frac{4}{n^2 \pi^2} (\sin n\pi - \sin 0) = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

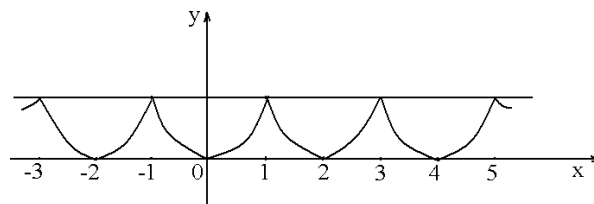


рис. 2

Так как рассматриваемая функция – четная, то $b_n = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi x = \\
&= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[0; e]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно доопределить ее на сегменте $[-l; 0]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на сегменте $[-l; l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках на сегменте $[-l; 0]$ находились из условия

$f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. В первом случае функция $f(x)$ на сегменте $[-l; l]$ будет четной, а во втором – нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции (a_n в первом случае и b_n – во втором) можно определить по вышеприведенным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на полупериоде $[0; 2]$, уравнением $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

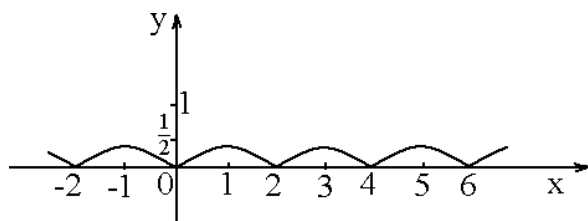


рис. 3

Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

1. Доопределим $f(x)$ на сегменте $[-2; 0]$ четным образом (рис. 3). Имеем $l = 2$.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right|_0^2 = 3; \\
 a_n &= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left. \begin{aligned} &u = x - \frac{x^2}{2} \\ &du = (1 - x) dx \\ &dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{aligned} \right|_0^2 = \\
 &= \left. \left(\frac{2}{n\pi} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (1 - x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) \right|_0^2 = \\
 &= \left. \left(\frac{2}{n\pi} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \left(-\frac{2(1-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right) \right|_0^2 = \\
 &= \left. \left(\frac{2}{n\pi} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} (1-x) \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right|_0^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (-\cos n\pi - \cos 0\pi) = -\frac{4}{n^2\pi^2} (-(-1)^n + 1) = -\frac{4}{n^2\pi^2} (1 + (-1)^n) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= 0; \\
 \text{Итак: } f(x) &= 3 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \pi x + \frac{1}{4^2} \cos 2\pi x + \frac{1}{6^2} \cos 3\pi x + \dots \right)$$

Задания

Исследовать на сходимость знакположительные ряды.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{7^n + 1}$	1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{8n+3} \right)^n$
1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$	1.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2n+1}}$
1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$	1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$
1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$	1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$
1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$	1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(2n+1)}$
1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$	1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$
1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$	1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$
1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$	1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{6+n^5}}$
1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{2^n}$	1.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{(n+2)!}$
1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$	1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n-1}{3n+2} \right)$
1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$	1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n(3n+1)}$
1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+1} \right)^n$	1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$
1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$	

- Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакпеременные ряды.

Задания

2.1.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$	
2.2.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$	
2.3.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n$	
2.4.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{5n+1}{3n} \right)^{n^2}$	
2.5.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^n}$	
2.6.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(\ln n)}$	
2.7.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{5n+1}}$	
2.8.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+5) \ln(n+5)}$	
2.9.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[6]{2n+1}}$	
2.10.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{3n+1}$	
2.11.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n$	
2.12.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$	
2.13.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{\ln(n+1)}$	
2.14.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$	

2. Найти области сходимости степенных рядов

Задания	
3.1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(n+1)} \cdot x^n$
3.2.	$\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{x^n}{n} + 2 \right)$

3.3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot x^{\frac{n}{2}}}{n+1}$	
3.4.	$\sum_{n=1}^{\infty} n \binom{x^n}{n+5}$	
3.5.	$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$	
3.6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{\frac{n}{2}}}{n}$	
3.7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$	
3.8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}$	
3.9.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$	
3.10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n+1}}$	
3.11.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot x^n}{2n-1}$	
3.12.	$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{4n+1} \frac{1}{4^n}$	

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

Задания

4.1.	$f(x) = \cos 5x$	
4.2.	$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$	
4.3.	$f(x) = \sin x^2$	
4.4.	$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$	
4.5.	$f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$	
4.6.	$f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$	
4.7.	$f(x) = e^{3x}$	

4.8.	$f(x) = \frac{1}{1+x}$	
4.9.	$f(x) = 2^{-x^2}$	
4.10.	$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$	

4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

Задания		
5.1.	$f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$	
5.2.	$f(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = -2$	
5.3.	$f(x) = e^x, x_0 = 1$	
5.4.	$f(x) = \frac{1}{2x+5}, x_0 = 3$	
5.5.	$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1$	
5.6.	$f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2$	
5.7.	$f(x) = \ln(5x+3), x_0 = 5$	
5.8.	$f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$	

5. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

Задания		
6.1.	$\int_0^1 e^{-x^2} dx$	
6.2.	$\int_0^1 \sin x^2 dx$	
6.3.	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^2}$	
6.4.	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	
6.5.	$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$	
6.6.	$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$	

6.7. $\int_0^{0,1} \cos 100 x^2 dx$	
6.8. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x^4}}$	
6.9. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$	
6.10. $\int_0^{\sqrt[3]{3}} x^3 \arctg x dx$	
6.11. $\int_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx$	
6.12. $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$	
6.13. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$	
6.14. $\int_0^{0,5} \frac{x - \arctg x}{x^2} dx$	
6.15. $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$	

6. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена разложения).

Задания	
7.1. $y' = x y + e^y, y(0) = 0$	
7.2. $y' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1$	
7.3. $y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}$	
7.4. $y' = x^3 + y^2, y(0) = \frac{1}{2}$	
7.5. $y' = x + y^2, y(0) = -1$	
7.6. $y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1$	
7.7. $y' = 2 \cos x - x y^2, y(0) = 1$	
7.8. $y' = e^x - y^2, y(0) = 0$	
7.9. $y' = x^2 y^2 + y \sin x, y(0) = \frac{1}{2}$	
7.10. $y' = e^{3x} + 2x y^2, y(0) = 1$	

7. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Задания	
8.1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	
8.2. $f(x) = \begin{cases} 2-x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$	
8.3. $f(x) = \begin{cases} -x+0,5, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$	

8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0; \pi)$, продолжив ее четным образом. Построить графики.

Задания	
9.1. $f(x) = e^x$	
9.2. $f(x) = x^2$	
9.3. $f(x) = 3^{2^x}$	
9.4. $f(x) = x^2 + 1$	
9.5. $f(x) = e^{-x}$	

10. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в интервале $(0; \pi)$, продолжив ее нечетным образом. Построить графики.

Задания	
10.1. $f(x) = 2^x$	
10.2. $f(x) = e^{2x}$	
10.3. $f(x) = x^2$	

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$$

Исследовать на абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n+2}$$

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}$$

3. Двойные интегралы

Пример 1. Изменить порядок интегрирования :

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

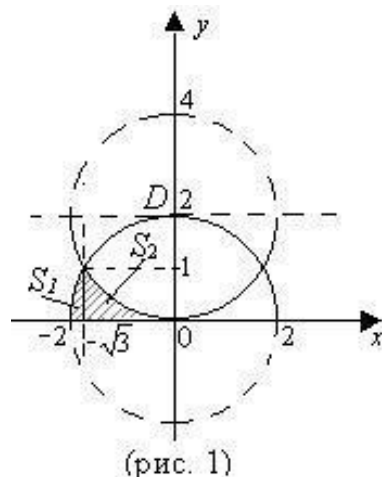
Решение. Построим область S_1 , ограниченную линиями

$$x = -2, \quad x = -\sqrt{3}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{4-x^2}.$$

Область S_2 ограничена линиями $x = -\sqrt{3}; x = 0, y = 0$ и

$$y = 2 - \sqrt{4-x^2}.$$

Последняя представляет собой нижнюю часть окружности с центром в точке $D(0, 2)$ и радиусом 2. Покажем эти области на рисунке (рис. 1).



Полученная кривыми

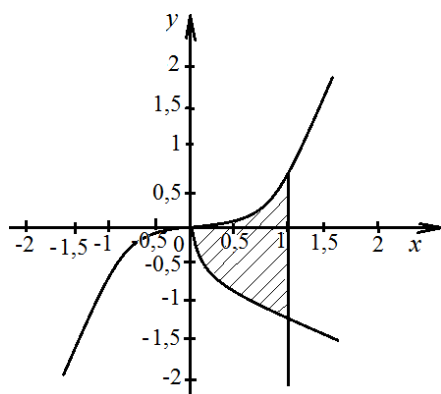
область $S = S_1 \cup S_2$ ограничена

$x = \varphi_1(y) = -\sqrt{4-y^2}$, $x = \varphi_2(y) = -\sqrt{4y-y^2}$, $y = 0$, $y = 1$, причем всюду на отрезке $[0; 1]$ функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны и $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$. Поэтому для нового порядка интегрирования обойдемся одним интегралом. Формулы преобразование тройного интеграла к сферическим координатами имеет вид:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

Пример 2. Вычислить $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy$; $D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^3$,

Решение. Изобразим область интегрирования на рисунке. При $x \in [0; 1]$ функции $y_1 = -\sqrt{x}$ и $y_2 = x^3$ непрерывны и $y_1 \leq y_2$.



Расставим интеграл и вычислим его:

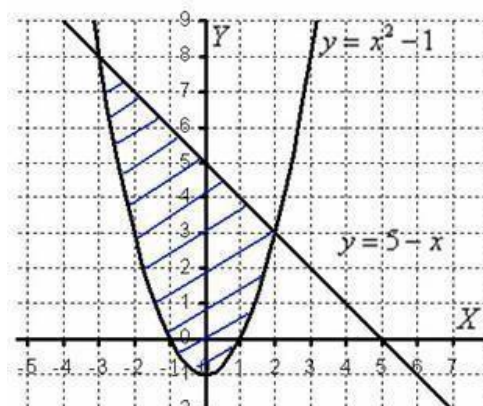
пределы интегрирования в повторном

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dy &= \int_0^1 (18x^2 y^3 + 30x^4 y^5) \Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \\ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dy &= \int_0^1 (18x^2 y^3 + 30x^4 y^5) \Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \\ \int_0^1 (18x^2 (x^9 - (-x)^3) + 30x^4 (x^{15} - (-x)^5)) dx &= \int_0^1 (18x^{11} + 30x^{11} + 18x^5 + 30x^9) dx = \\ \int_0^1 (48x^{11} + 48x^9) dx &= \left(\frac{48}{12} x^{12} + \frac{48}{10} x^{10} \right) \Big|_0^1 = 4 + 4.8 = 8.8 \end{aligned}$$

Пример 3. С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad x + y = 5, \quad -1,$$

Решение. Изобразим область D на чертеже.



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле: $S = \iint_D dx dy$.

Выберем следующий порядок обхода области:

$$x^2 - 1 \leq y \leq 5 - x$$

$$-3 \leq x \leq 2$$

Таким образом:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-3}^2 dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy.$$

1. С помощью формулы Ньютона-Лейбница вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{x^2-1}^{5-x} dy = (y) \Big|_{x^2-1}^{5-x} = 5 - x - (x^2 - 1) = 6 - x - x^2.$$

2. Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx &= \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 = 12 - 2 - \frac{8}{3} - (-18 + 9 + 9) = \\ &= 10 - \frac{8}{3} + 9 - 9 = 19 - \frac{8}{3} = 19 + \frac{27-8}{3} = 19 + \frac{19}{3} = 19 + 6\frac{1}{3} = 25\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

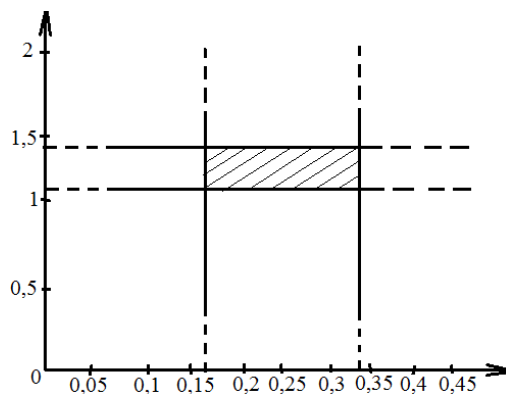
Ответ. $S = 25\frac{1}{3} \text{ ед}^2$.

Пример 4. Вычислить

$$\iint_D 12ye^{6xy} dx dy; D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

D

Решение. Область интегрирования представляет собой прямоугольник, изобразим его на рисунке.



Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

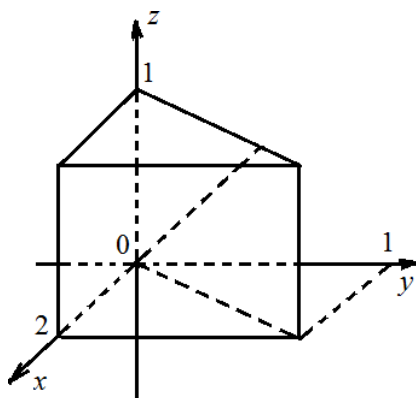
$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} 12 y e^{6xy} dx = 2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} e^{6xy} d(6xy) = 2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{6xy} \Big|_{\ln 3}^{\ln 4} dy =$$

$$= 2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} (e^{2y} - e^y) dy = (e^{2y} - 2e^y) \Big|_{\ln 3}^{\ln 4} = e^{2\ln 4} - 2e^{\ln 4} - e^{2\ln 3} + 2e^{\ln 3} =$$

$$16 - 8 - 9 + 6 = 5.$$

Пример 5. Вычислить $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz$; $V: x=2, y=\frac{x}{2},$
 $y=0, z=0, z=1.$

Решение. Областью интегрирования является прямая призма. Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

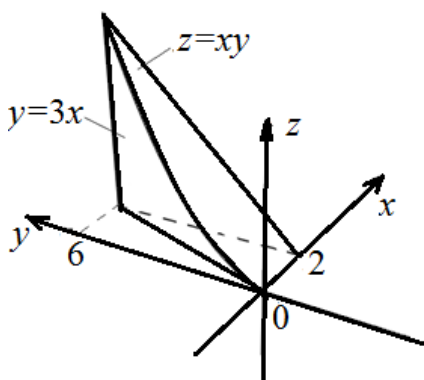


$$\int_0^1 dz \int_0^2 dx \int_0^{x/2} x^2 \operatorname{sh}(xy) dy = \int_0^1 dz \int_0^2 x dx \int_0^{x/2} \operatorname{sh}(xy) d(xy) = \int_0^1 x (\operatorname{ch}(xy) \Big|_0^{x/2}) dx =$$

$$= \int_0^1 x (\operatorname{ch}(\frac{x}{2}) - 1) dx = (\operatorname{sh}(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}) \Big|_0^2 = \operatorname{sh} 2 - 2.$$

Пример 6. Вычислить $\iiint_V x^2 z dx dy dz$; $V: y=3x, y=0, x=2,$
 $z=xy, z=0.$

Решение. Область интегрирования ограничена сверху гиперболическим параболоидом $z=xy$, снизу плоскостью $z=0$. Боковая поверхность ограничена плоскостями $y=3x, y=0, x=2$ как показано на рисунке.



Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

$$\int_0^2 \int_{x^4}^{3x} \int_0^{xy} z dz = \int_0^2 \int_{x^4}^{3x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) dy = \int_0^2 \int_{x^4}^{3x} \frac{x^2 y^2}{2} dy =$$

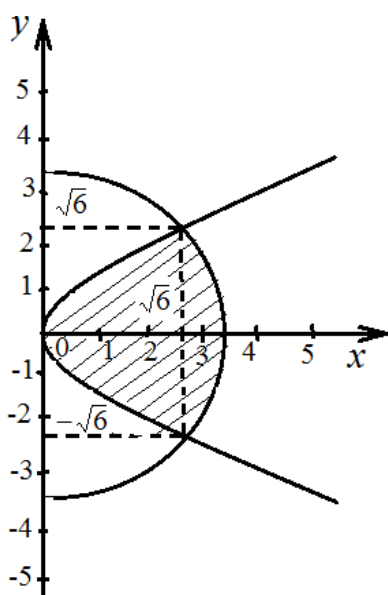
$$= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3} \Big|_0^{3x} \right) dx = \int_0^2 \frac{27x^3}{3} dx = \frac{27}{16} x^4 \Big|_0^2 = 144.$$

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$x^2 + y^2 = 12, \quad x = \sqrt{6} = y^2, \quad (x \geq 0).$$

Решение. Данная фигура получается при пересечении окружности радиуса $R = 2\sqrt{3}$ и параболы с осью симметрии Ox . Из уравнения параболы, возводя в квадрат обе части,

имеем $6x^2 = y^4$. Точки пересечения линий, ограничивающих область, определяются из уравнения $\frac{1}{6}y^4 + y^2 = 12$. Получим $y = \pm\sqrt{6}$. В силу симметрии области интегрирования имеем



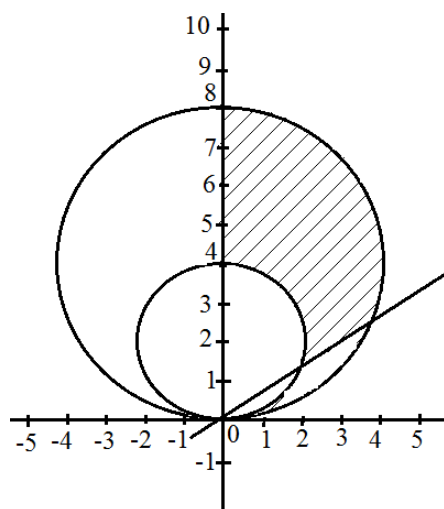
$$S = 2 \int_0^{\sqrt{6}} dy \int_{\frac{1}{6}y^2}^{\sqrt{12-y^2}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy =$$

$$= -2 \left(y \sqrt{12-y^2} \Big|_0^{\sqrt{6}} + \int_0^{\sqrt{6}} \frac{y^2}{\sqrt{12-y^2}} dy \right) = -2 \left(\frac{y^3}{3\sqrt{6}} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) =$$

$$= 2 \left(6 - \int_0^{\sqrt{6}} \frac{12-y^2}{\sqrt{12-y^2}} dy - 2 \right) = 2 \left(4 - \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2} dy + 12 \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{12-y^2}} dy \right) =$$

$$= 2 \left(1 + 12 \arcsin \frac{y}{2\sqrt{3}} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) = 2 + 3\pi \text{ кв.ед.}$$

Пример 8. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями



$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

Решение. Первые две кривые представляют собой окружности с центрами в точках $O_1(0;2)$ и $O_2(0;4)$ и, соответственно, радиусами $R_1=2$ и $R_2=4$. В полярных координатах, где $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$, площадь находится по формуле

$$S = \iint_G r dr d\varphi,$$

где G – область интегрирования. В полярных координатах первая окружность имеет уравнение $r = 4 \sin \varphi$, а вторая – $r = 8 \sin \varphi$.

Изменение φ : $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \Big|_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi}) d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) d\varphi =$$

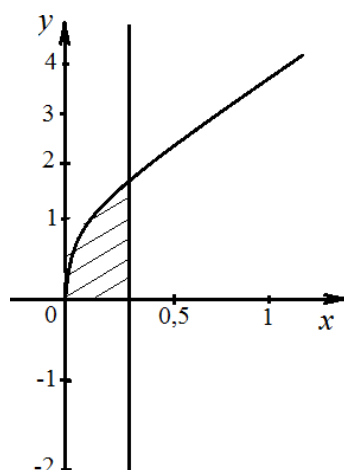
$$(12\varphi - 6 \sin 2\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 12 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - 6 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4\pi + 3\sqrt{3} =$$

$$= 4\pi + 3\sqrt{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 9. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластины.

$$D: x = \frac{1}{4}, y = 0, y^2 = 16x \ (y \geq 0), \mu = 16x + \frac{9}{2}y^2.$$

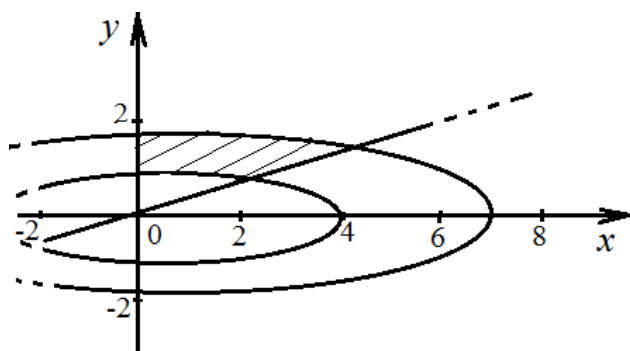
Решение. Масса пластины определяется двойным интегралом $M = \iint_G \mu(x; y) dx dy$, где G – область интегрирования, изображенная на рисунке.



$$M = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16x}} (16x + 2y) dy = \int_0^4 (16xy + y^2) \Big|_0^{\sqrt{16x}} dx = \int_0^4 (64x\sqrt{x} + 16x^2) dx = 64 \int_0^4 x^{3/2} dx + 16 \int_0^4 x^2 dx = 64 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 + 16 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 = 64 \cdot \frac{2}{5} \cdot 32 + \frac{16}{3} \cdot 64 = \frac{4096}{5} + \frac{1024}{3} = \frac{12288 + 5120}{15} = \frac{17408}{15} \text{ (ед. массы)}.$$

Пример 10. Пластинка D задана неравенствами, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{x}{4}, \quad \mu = \frac{x}{y^5}.$$



Решение. Воспользуемся обобщенными полярными координатами вида $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ $|J| = abr$, тогда массу пластинки можно вычислить с помощью двойного интеграла

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} ab r dr$$

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad \mu = \frac{4 \cos \varphi}{r^4 \sin^5 \varphi}.$$

Из рисунка видно, что φ и r изменяются в пределах:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 1 \leq r \leq \sqrt{3}$$

Нижнюю границу φ получим из уравнения прямой $y = \frac{x}{4}$, переходя в ней к новым координатам: $r \cos \varphi = r \sin \varphi$. Откуда $\tan \varphi = 1$, а $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

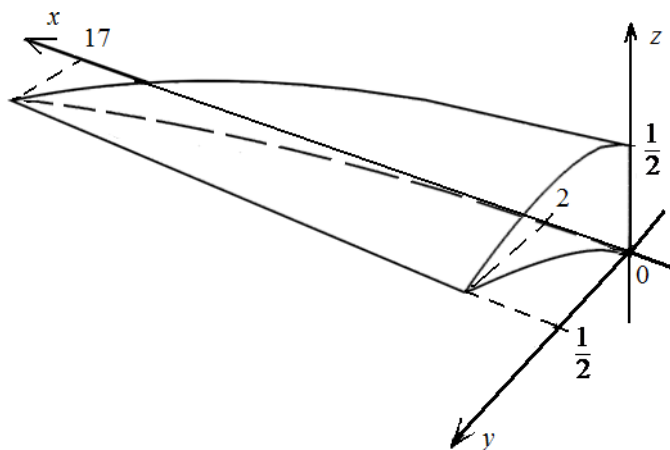
Тогда получим для нахождения массы двойной интеграл

$$M = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4 \cos \varphi}{r^4 \sin^5 \varphi} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{8 \cos \varphi}{\sin^5 \varphi} \cdot \frac{1}{r} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
 & -8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{\sin^5 \varphi} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) d\varphi = \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-5} \varphi d(\sin \varphi) = -\frac{4}{3} \frac{1}{\sin^4 \varphi} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 & = -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4} \right) = -\frac{4}{3} (1 - 4) = 4 \quad (\text{ед. массы}).
 \end{aligned}$$

Пример 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями $x = 17\sqrt{2}y$, $x = 2\sqrt{2}y$, $z = 0$, $z + y = \frac{1}{2}$.

Решение. Данное тело является цилиндром, ограниченным сверху плоскостью $z + y = \frac{1}{2}$, снизу плоскостью $z = 0$, а с боков прямыми цилиндрами $x = 17\sqrt{2}y$, $x = 2\sqrt{2}y$, как показано на рисунке.

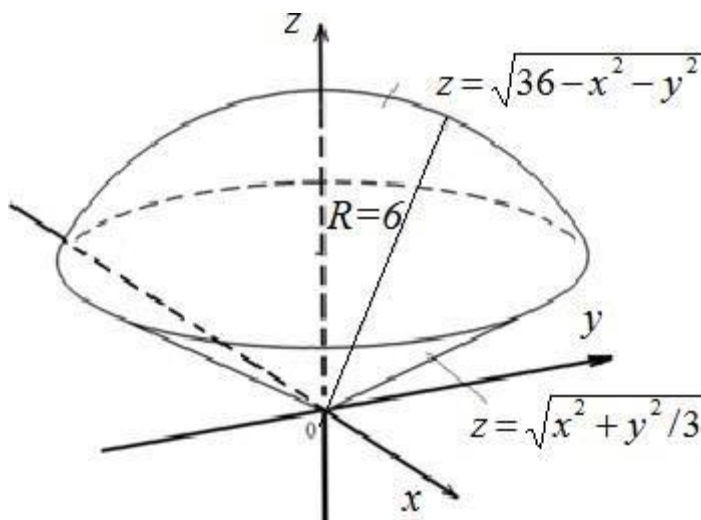


Тогда искомый объем находим по формуле:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2\sqrt{2}y}^{17\sqrt{2}y} \left(\frac{1}{2} - y \right) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y \right) (17\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ куб.ед.}
 \end{aligned}$$

Пример 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$$



Решение. Тело ограничено сверху полусферой, а снизу положительной частью конуса, как это видно из рисунка.

В сферических координатах $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$,

$z = r \cos \theta$ сфера $r = 6$, конус $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда искомый объем находим тройным

интегралом

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^6 r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \left(\frac{1}{3} r^3 \right) d\theta =$$

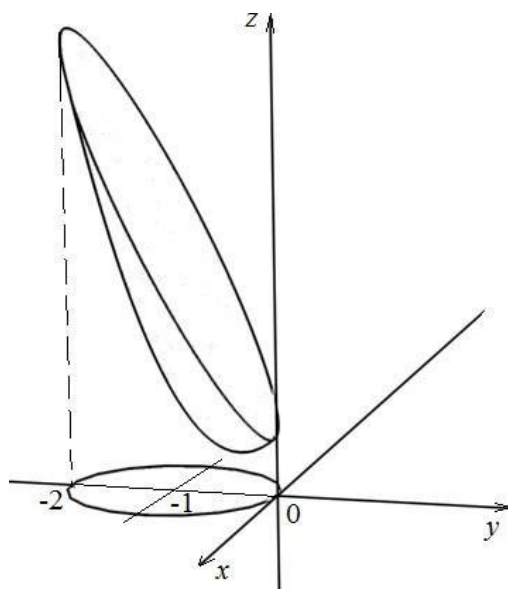
$$72 \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 72 \cdot 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) = 72\pi \quad \text{куб.ед.}$$

Пример 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$z = 10(x^2 + y^2) + 1, \quad z = 1 - 20y.$$

Решение. В цилиндрических координатах: $x = r \cos \varphi$,

$y = r \sin \varphi$, $z = z$, наше тело снизу ограничивает параболоид $z = 10r^2 - 20r \sin \varphi + 1$, а плоскость $z = 1 - 20r \sin \varphi$ сверху, как это видно из рисунка.



Проекция линии пересечения этих поверхностей на плоскость xOy будет в цилиндрических координатах:

$10r^2 - 20r \sin \varphi + 1 = 1 - 20r \sin \varphi$ или $r = 1$. Тогда искомый объем находим тройным интегралом

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{10r^2 - 20r \sin \varphi + 11}^{21 - 20r \sin \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (z \Big|_{10r^2 - 20r \sin \varphi + 11}^{21 - 20r \sin \varphi}) dr = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (21 - 20r \sin \varphi - 10r^2 + 20r \sin \varphi - 11) dr = \\
 &= 10^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (1 - r^2) dr = 10^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\
 &= \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 5\pi \text{ куб.ед.}
 \end{aligned}$$

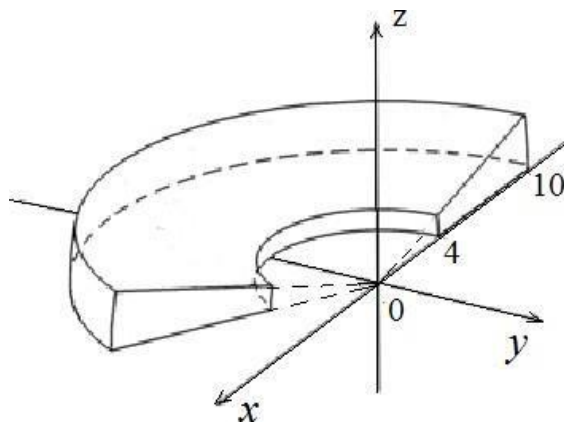
Пример 14. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}, \quad y \leq 0, \quad y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Решение. В сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad |J| = r^2 \sin \theta, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\text{где } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\arctg \frac{1}{\sqrt{24}}, \pi \leq \varphi \leq \frac{11}{6}\pi.$$



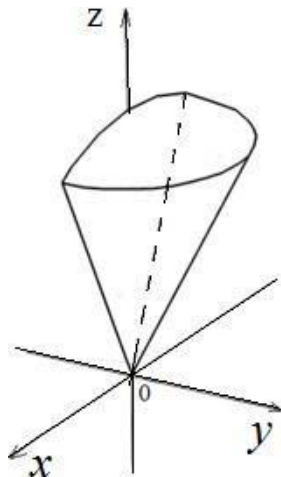
$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\pi}^{\frac{11\pi}{6}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{24}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{24}} r^3 dr = \frac{11\pi}{6} \int_{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{24}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{24}} \frac{1}{3} r^3 d\theta = \\
 &= 312 \int_{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{24}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (-\cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{24}}^{\frac{\pi}{2}} = 312 \cdot \frac{5\pi}{6} \cdot (0 + \cos(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{24})) = \\
 &= 52 \cdot 5\pi \cdot \sin(\operatorname{arctg} \sqrt{24}) = 260\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1+24}} = 52\pi \text{ куб.ед.}
 \end{aligned}$$

Пример 15. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела.

$$\begin{aligned}
 4(x^2 + y^2) &= z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y = 0, \\
 z &= 0, \quad (y \geq 0, z \geq 0), \quad \mu = 10(x^2 + y^2).
 \end{aligned}$$

Решение. В цилиндрических координатах $x = r \cos \varphi$,
 $y = r \sin \varphi$, $z = z$ мы получим, как видно на рисунке,

что тело
 конической
 цилиндром
 координат.



ограничено снизу плоскостью $z=0$ сверху
 поверхностью $z=2r$, а с боков прямым
 $r=1$. $\mu = 10r^2$ – в цилиндрической системе
 Искомую массу находим по формуле

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{5}}^1 r dr \int_0^{2r} \mu dz = 10 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2r} dz = 10 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 2r dr = \\
 &= 20\pi \int_0^1 d\varphi (r^5) = 4\pi \text{ (ед. массы).} \\
 V &= \int_{-1}^1 dx \int_{-5}^5 dy \int_{1-2x^2+3y^2}^{7-2x^2} dz = 3 \int_{-1}^1 dx \int_{-5}^5 dy = 3 \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \\
 &= 6(x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-1}^1 = 6 \cdot 2 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 8 \text{ куб.ед.}
 \end{aligned}$$

Задания

Изменить порядок интегрирования в интеграле. Область интегрирования изобразить на чертеже.

$$1. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$$

$$2. \int_1^4 dx \int_0^x f(x, y) dy$$

$$3. \int_0^{\frac{3}{4}} dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$$

$$4. \int_1^2 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$$

$$5. \int_1^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$$

$$6. \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$$

$$7. \int_0^2 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$$

$$8. \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$9. \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy$$

$$10. \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy$$

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$11. y = x^2, y = 6 - x, y = 0. \quad 12. y = 6 - x, y = \frac{5}{x}.$$

$$13. y = x^2 - 3x, y = 0. \quad 14. y = e^x, x = -1, x = 1, y = 0.$$

$$15. y = \frac{1}{x+1}, x = 0, x = 2, y = 0. \quad 16. y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4.$$

$$17. y = x^2, y = -x + 2. \quad 18. y = -x^2 + 2x + 3, y = 4x, y = 0.$$

$$19. y = (x+1)^2, x = -4, y = 0. \quad 20. y = 2 - \frac{1}{4}x^3, x = 0, y = 0.$$

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Данное тело и его проекцию на плоскость xOy изобразить на чертежах.

$$21. z = 0, z = x^2, x + y = 2, y = 0.$$

$$22. z = 0, z = x, x = \sqrt{4 - y^2}.$$

$$23. z = 0, x^2 + y^2 = 9, z = 5 - x - y.$$

$$24. z = 0, z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, x + y = 2.$$

$$25. z = 0, z = 2y, y = \sqrt{9 - x^2}.$$

$$26. z = 0, z = 3x, y^2 = 2 - x.$$

$$27. \quad z = 0, z = \sqrt{y}, y = 3x, \quad x = 2.$$

$$28. \quad z = 0, z = y^2, \quad y = 2x, \quad x = 3.$$

$$29. \quad z = 0, z = \sqrt{y}, y = 2x, \quad y = 3, \quad x = 0.$$

$$30. \quad z = 0, z = x^2, y = 2x, \quad x = 4, y = 0.$$

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Параметр a положителен.

$$31. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 4y^2).$$

$$32. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (2x^2 + 3y^2).$$

$$33. (x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2.$$

$$34. (x^2 + y^2)^3 = a^4 x^2.$$

$$35. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (5x^2 + 3y^2).$$

$$36. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (7x^2 + 5y^2).$$

$$37. x^4 = a^2 (x^2 - y^2).$$

$$38. x^6 = a^2 (x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2).$$

$$39. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2.$$

$$40. x^6 = a^2 (3x^2 - y^2)(x^2 + y^2).$$

41. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями: $y - x = 0, x + y - 4 = 0, x - 2y - 4 = 0$.

42. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями: $y = x^2, x + y = 2$.

43. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

44. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой μ .

$$y = x^2, \quad y = x^3, \quad \mu = 2x + 3y^2;$$

45. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой μ .

$$y = x, y = 2 - x, x = 0, \mu = x^2;$$

46. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой μ . $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2, \mu = xy$;

47. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой μ .

$$x = \ln y, \quad x = e^y, \quad y = 1, y = 2, \mu = 5;$$

48. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой μ .

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 5, y = x, x = 0 (x \geq 0),$$

$$\mu = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}.$$

49. Найти момент инерции однородной пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 4$, относительно оси Ox .

50. Найти момент инерции однородной пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 3$, относительно оси Oy

Задания для индивидуальной работы

Вариант 0

1. Вычислить двойные интегралы по области D , заданной линиями:

а) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, $D: y = x^2, x = y^2$;

б) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $D: x^2 + y^2 = 1, (y \geq 0, x \geq 0)$.

2. Вычислить тройной интеграл по области V , заданной поверхностями: $\iiint_V y z dx dy dz$,

$$V: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = \sqrt{2} y.$$

3. Вычислить объем тела

$$V: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z - 4x = 0.$$

4. Вычислить массу пластины D с плотностью $\rho = 8$: $y = x^2, y = 8 - x, y = 0$.

1. Теория вероятностей и математическая статистика

Задания

- 1.1. В бассейне содержится 20 окуней и 15 карасей. Какова вероятности того, что 3 наугад выловленные рыбы окажутся либо только карасями, либо только окунями?
- 1.2. На рыбокомбинате работают 3 автоматические линии по разделке рыбы. Вероятность того, что работает в данный момент первая линия равна 0,8, вторая – 0,7, третья – 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работают только две линии.
- 1.3. Консервы поступают с конвейера на проверку к одному из двух контролеров. Вероятность того, что проверяемая банка попадет к первому контролеру равна 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что банка будет признана стандартной при проверке первым контролером равна 0,85, а вторым – 0,95. Банка при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что банка была проверена вторым контролером.
- 1.4. Работают три конвейера по изготовлению консервов. Вероятность поступления брака с первого конвейера равна 0,1, со второго – 0,2, а с третьего – 0,15. Найти вероятность того, что в данный момент брак поступает только с одного конвейера.
- 1.5. Рабочий работает на трех станках. Вероятность безотказной работы в течение смены первого станка равна 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент не работает хотя бы один из станков.
- 1.6. В первой коробке содержится 20 банок консервов, из них 4 банки с браком, во второй

коробке находится 16 банок, из них 5 банок с браком. Из второй коробки произвольно взята одна банка и переложена в первую коробку. Затем из первой коробки случайно извлечена одна банка. Найти вероятность того, что эта извлеченная банка из первой коробки, окажется без брака.

- 1.7. В бассейне находится 30 карасей, 15 окуней, 20 карпов. Найти вероятность того, что из пяти случайно пойманных рыб две рыбы окажутся окунями, а три – карпами.
- 1.8. Вероятность своевременного прибытия первого автобуса равна 0,6, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в определенное время только один из трех автобусов опоздает.
- 1.9. В бассейне находятся 20 мальков судака, 30 мальков сазана, 15 мальков карпа. Какова вероятность того, что из двух наугад пойманных мальков окажутся либо оба мальками судака, либо оба мальками карпа?
- 1.10. Из 100 изделий 10 изделий имеют дефект вида A , 6 изделий имеют дефект вида B , 8 изделий имеют дефект вида C . Найти вероятность того, что два случайно взятых изделия оба окажутся либо с дефектом вида B либо с дефектом вида C .

2 Рабочий за смену изготавливает n деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта равна P . Найти вероятность того, что из n деталей первого сорта будет а) ровно m штук; б) не менее m_1 штуки и не более m_2 штуки.

- 2.1. $n = 400$, $p = 0,8$, $m = 330$, $m_1 = 200$, $m_2 = 300$.
- 2.2. $n = 300$, $p = 0,75$, $m = 240$, $m_1 = 150$, $m_2 = 200$.
- 2.3. $n = 600$, $p = 0,6$, $m = 375$, $m_1 = 400$, $m_2 = 500$.
- 2.4. $n = 400$, $p = 0,9$, $m = 372$, $m_1 = 250$, $m_2 = 340$.
- 2.5. $n = 650$, $p = 0,64$, $m = 370$, $m_1 = 450$, $m_2 = 500$.
- 2.6. $n = 192$, $p = 0,75$, $m = 150$, $m_1 = 100$, $m_2 = 150$.
- 2.7. $n = 225$, $p = 0,8$, $m = 165$, $m_1 = 120$, $m_2 = 200$.
- 2.8. $n = 100$, $p = 0,9$, $m = 96$, $m_1 = 70$, $m_2 = 90$.
- 2.9. $n = 150$, $p = 0,6$, $m = 75$, $m_1 = 100$, $m_2 = 130$.
- 2.10. $n = 625$, $p = 0,8$, $m = 510$, $m_1 = 520$, $m_2 = 600$.

3 Задан закон распределения дискретной случайной величины X (в первой строке таблицы даны возможные значения величины X , а во второй строке указаны вероятности $P = P(X = x_i)$ этих возможных значений). Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$.

3.1.	X	23	25	28	29	31
	$p = P(X = x_i)$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

3.2.	X	10	12	20	25	30
	$p = P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

3.3.	X	8	12	18	24	30
	$p = P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

3.4.	X	21	25	32	40	50
	$p = P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

3.5.	X	10,2	12,4	16,5	18,1	20,0
	$p = P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

3.6.	X	11	15	20	25	32
	$p = P(X = x_i)$	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

3.7.	X	13	17	22	27	30
	$p = P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

3.8.	X	14	18	23	28	30
	$p = P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

3.9.	X	15	19	24	29	30
	$p = P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

3.10.	X	4,6	5,2	6,8	7,2	8,4
	$p = P(X = x_i)$	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

4. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)$, Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) математическое ожидание и дисперсию;

3) построить графики дифференциальной и интегральной функций.

$$4.1. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 2x, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$4.2. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$4.3. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 3x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$4.4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{6}x^2, & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$4.5. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$4.6. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$4.7. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{18}x, & \text{при } 0 < x \leq 6 \\ 0, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$$4.8. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{2}{25}x, & \text{при } 0 < x \leq 5 \\ 0, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

$$4.9. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{2}{49}x, & \text{при } 0 < x \leq 7 \\ 0, & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

$$4.10. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{2}{81}x, & \text{при } 0 < x \leq 9 \\ 0, & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

5. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали (математическое ожидание) равна a мм, среднее квадратическое отклонение равно σ мм. Найти: 1) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм; 2) вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более, чем на δ мм. Значения a , σ , α , β , δ даны.

5.1. $a = 50$, $\sigma = 5$, $\alpha = 45$, $\beta = 52$, $\delta = 3$.

5.2. $a = 20$, $\sigma = 3$, $\alpha = 17$, $\beta = 26$, $\delta = 1,5$.

5.3. $a = 36$, $\sigma = 4$, $\alpha = 30$, $\beta = 40$, $\delta = 2$.

5.4. $a = 60$, $\sigma = 5$, $\alpha = 54$, $\beta = 70$, $\delta = 8$.

5.5. $a = 48$, $\sigma = 4$, $\alpha = 45$, $\beta = 56$, $\delta = 3$.

5.6. $a = 30$, $\sigma = 3$, $\alpha = 24$, $\beta = 33$, $\delta = 1,5$.

5.7. $a = 35$, $\sigma = 4$, $\alpha = 27$, $\beta = 37$, $\delta = 2$.

5.8. $a = 45$, $\sigma = 5$, $\alpha = 40$, $\beta = 48$, $\delta = 3$.

5.9. $a = 40$, $\sigma = 3$, $\alpha = 34$, $\beta = 43$, $\delta = 1,5$.

5.10. $a = 25$, $\sigma = 2$, $\alpha = 20$, $\beta = 27$, $\delta = 1$.