

Федеральное агентство по рыболовству

*Федеральное государственное бюджетное образовательное
Учреждение высшего профессионального образования
«Астраханский государственный технический университет»*

Институт нефти и газа

Кафедра «Математика»

Практикум по теории вероятностей математической статистике

Методическое пособие для проведения практических
занятий и организации самостоятельной работы студентов
специальностей и направлений института экономики

Астрахань 2015

Автор: доцент кафедры «Математика»,
к.э.н. **Соловьева Н.В.**

Рецензент: доцент кафедры «Математика»,
к.п.н. **Шамайло О.Н.**

Соловьева Н.В. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. Методическое пособие. – Астрахань, 2015 – с. 152

Методическое пособие составлено в соответствии с содержанием учебной программы обучения математике согласно требованиям ФГБОУ ВПО для финансово-экономических направлений подготовки. В каждом параграфе приведены основные сведения из курса теории вероятностей и математической статистике и примеры решения задач. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами. Пособие может быть использовано студентами в качестве сборника задач на практических занятиях и для самостоятельной работы при изучении теории вероятностей и математической статистики.

Одобрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе заседанием кафедры «Математика»,
протокол № 1 от 24.09.2015

Содержание

Предисловие	4
§1 Операции над случайными событиями	5
§2 Элементы комбинаторики	10
§3 Классическое определение вероятности	17
§4 Задачи с элементами комбинаторики	23
Задача о выборке	23
§5 Геометрическая вероятность	28
§6 Теорема сложения и умножения	35
§7 Формула полной вероятности. Формула Байеса	45
§8 Формула Бернулли, Пуассона, Лапласа	53
§9 Дискретная случайная величина	62
§10 Непрерывная случайная величина	70
§11 Основные типы распределений	80
§12 Основы выборочного метода	93
§13 Точечные и интегральные оценки параметров распределения	103
§14 Статистическая проверка гипотез	111
§15 Основы корреляционного анализа	126
§16 Основы регрессионного анализа	138
Приложения	147
Список литературы	158

Предисловие

Методическое пособие для решения задач по теории вероятностей и математической статистике предназначено для студентов высших учебных заведений. Весь материал пособия разделен на параграфы. Каждый параграф пособия содержит: краткую теорию; формулы, используемые при решении задач раздела; образцы решений типовых задач; задачи для решения на практическом занятии и для организации самостоятельной работы студентов. Все приведенные задачи снабжены ответами в конце каждого параграфа.

Автор выражает свою благодарность к.т.н., профессору кафедры «Математика»

Юсупову Р.А.

§1. Операции над случайными событиями

Комплекс условий, который можно осуществить неограниченное число раз с целью получения некоторого результата, называется *испытанием или экспериментом со случайным исходом*. Каждый исход случайного эксперимента является *элементарным событием* и обозначается буквой ω . Множество *всех несовместных* исходов испытания называется *пространством элементарных событий* Ω .

Любое подмножество пространства элементарных событий называется *случайным событием*. Событие, происходящее при каждом осуществлении одного и того же испытания, называется *достоверным*, оно совпадает с множеством Ω . Событие, которое не может произойти при данных условиях, называется *невозможным*, оно не содержит ни одного исхода ω , представляя собой пустое множество, и обозначается $\emptyset$.

Для случайных событий определены следующие *операции и отношения*:

$A \subset B$ – отношение включения: множество A является подмножеством множества B – *событие A влечет за собой событие B* (рис. 1.1,а);

$A = B$ – отношение эквивалентности – *событие A тождественно событию B* ($A \subset B$ и $B \subset A$ одновременно);

$A + B$ – объединение множеств – *сумма событий* – состоит в том, что в результате испытания произойдет хотя бы одно из событий A или B (рис. 1.1,б);

$A B$ – пересечение множеств – *произведение событий* – состоит в одновременном (совместном) появлении событий A и B (рис. 1.1,в);

$A - B$ – *разность событий* – означает, что событие A произошло, а событие B не произошло (рис. 1.1,г);

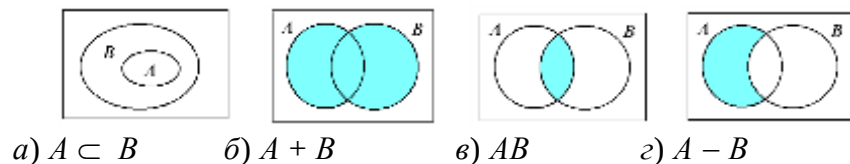


Рис. 1.1

$\bar{A} = \Omega - A$ – дополнение множества A до Ω – событие, противоположное событию A , состоит в том, что в результате испытания событие A не произойдет (рис. 1.2,а).

События A и B несовместны, если $AB = \emptyset$ (рис. 1.2,б). События $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, если для всех $i \neq j$, где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, выполняется условие $A_i A_j = \emptyset$. События $A_1, A_2, \dots, A_n$, удовлетворяющие условию $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n = \Omega$, составляют полную группу событий. Если при этом $A_j = \emptyset$, такая совокупность составляет полную группу несовместных событий..

Операции сложения и умножения событий обладают следующими свойствами:

а) $A + B = B + A$, $AB = BA$ (коммутативность сложения и умножения);

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

$(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность сложения и умножения);



а) $\bar{A} + A = \Omega$

б) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$

Рис. 1.2

в) $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

г) $A + \emptyset = A$; $A \cap \Omega = A$;

д) $A + \bar{A} = \Omega$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

е) $A + A = A$; $AA = A$.

Пример 1. Игральная кость бросается дважды. Требуется описать: 1) пространство элементарных событий Ω ; 2) событие A , состоящее в том, что сумма выпавших очков четная; 3) событие B , состоящее в том, что первое выпавшее число четное; 4) $A+B$; 5) $A-B$, $B-A$; 6) AB ; 7) $\bar{A}$, $\bar{B}$.

1. Каждому из шести исходов при первом бросании кости соответствует 6 возможных исходов при втором бросании. Следовательно, пространство элементарных событий Ω имеет вид

$$\Omega = \{(1;1), (1;2), \dots, (1;6), (2;1), \dots, (2;6), \dots, (6;1), (6;2), \dots, (6;6)\}$$

и содержит $6 \cdot 6 = 36$ элементарных событий.

2. Событие A состоит из тех элементарных событий, у которых результаты обоих бросаний либо четные, либо нечетные:

$$A = \{(1;1), (1;3), (1;5), (2;2), (2;4), (2;6), (3;1), \dots, (6;6)\}.$$

Нетрудно видеть, что A содержит 18 элементарных событий.

3. Событие B содержит те элементы пространства Ω , у которых первые цифры четные, вторые – любые:

$$B = \{(2;1), (2;2), (2;3), \dots, (4;1), (4;2), \dots, (6;1), \dots, (6;6)\} \text{ – всего } 18 \text{ исходов.}$$

4. Событие $A+B$ состоит в том, что при двукратном бросании игральной кости сумма выпавших очков четная или первое выпавшее число четное. Иными словами, требуется найти объединение множеств A и B , для чего множество исходов одного из них следует дополнить недостающими исходами другого. В результате получим множество, состоящее из 27 элементарных событий:

$$A+B = \{ (1;1), (1;3), (1;5), (2;1), (2;2), \dots, (6;5), (6;6) \}.$$

5. Чтобы получить разность $A-B$, следует из множества исходов A исключить исходы, входящие в B . Аналогично получается разность $B-A$.

6. Произведением $A \cdot B$ является множество тех элементарных событий, которые принадлежат множествам A и B одновременно:

$AB = \{(2;2), (2;4), (2;6), (4;2), \dots, (6;4), (6;6)\}$ – всего 9 исходов.

7. Для описания и достаточно вспомнить, что

$$\bar{A} = \Omega - A, \quad \bar{B} = \Omega - B.$$

Пример 2. Доказать справедливость следующих тождеств:

а) $A+B = AB + \bar{A}B + A\bar{B}$; б) $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$; в) $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.

а) Известно, что $A \cap \Omega = A$ и $A + \emptyset = \Omega$, а на основании свойств (а) и (е); $AB + BA = AB + AB = AB$ тогда

$$\dot{A} + \dot{a} = \dot{A}\Omega + \dot{a}\Omega = \dot{A}(\dot{a} + \dot{\bar{a}}) + \dot{a}(\dot{A} + \dot{\bar{A}}) = \dot{A}\dot{a} + \dot{A}\dot{\bar{a}} + \dot{a}\dot{A} + \dot{a}\dot{\bar{A}},$$

$$\text{откуда } \dot{A} + \dot{a} = \dot{A}\dot{a} + \dot{A}\dot{\bar{a}} + \dot{a}\dot{A}.$$

б) Из свойства (д) следует, что $\overline{A+B} = \Omega - (\dot{A} + \dot{a})$. Рассмотрим сумму событий

$$A+B = AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} - \bar{A}\bar{B} = A(B+\bar{B}) + \bar{A}(B+\bar{B}) - \bar{A}\bar{B}.$$

$$\text{Так как } B+\bar{B} = \Omega, \text{ то } A+B = A\Omega + \bar{A}\Omega - \bar{A}\bar{B} = (A+\bar{A})\Omega - \bar{A}\bar{B} = \Omega - \bar{A}\bar{B}.$$

$$\text{Так как } B+\bar{B} = \Omega, \text{ то } A+B = A\Omega + \bar{A}\Omega - \bar{A}\bar{B} = (A+\bar{A})\Omega - \bar{A}\bar{B} = \Omega - \bar{A}\bar{B}.$$

Отсюда следует, что $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$.

в) Из доказательства предыдущего тождества следует, что $Ae + A\bar{e} + \bar{A}e + \bar{A}\bar{e} = \Omega$, откуда

$$\overline{Ae} = \Omega - Ae = A\bar{e} + \bar{A}e + \bar{A}\bar{e}.$$

$$\text{Так как } \overline{A\bar{e}} = \bar{A}e + \bar{A}\bar{e}, \quad \square \quad \overline{Ae} = A\bar{e} + \bar{A}e + \bar{A}\bar{e} + \bar{A}\bar{e} =$$

$$= \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + A\bar{B} = \bar{A}(B+\bar{B}) + \bar{B}(A+\bar{A}) = \bar{A}\Omega + \bar{B}\Omega = \bar{A} + \bar{B}.$$

В задачах 1.3 – 1.6 доказать справедливость следующих тождеств:

1.3. $A - B = A\bar{B}$.

1.4. $(A + B) - B = A - AB = A\bar{B} = A - B$.

Эти равенства свидетельствуют о том, что «приведение подобных членов» в алгебре событий недопустимо.

1.5. $\bar{A}B + C = (\bar{A} + C)(B + C)$ – дистрибутивность сложения относительно умножения.

1.6. $A + B = A + (B - AB); \quad A + B = A + B\bar{A}$.

1.7. Показать, что если $\bar{A} \subset B$, то выполняются соотношения

$$AB = A, \quad A + B = B.$$

1.8. Показать, что если $B \subset A$, то выполняется соотношение $(A - B) + B = A$. Доказать тождества:

1.9. $(A + B)(A + \bar{B}) = A$.

1.10. $(A + B)(\bar{A} + B)(A + \bar{B}) = AB$.

1.11. $(\bar{A} + BC)(\bar{B} + AC)(\bar{C} + AB) = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Пусть A, B, C – три случайных события, которые могут появиться в данном эксперименте. Выразить указанные ниже события в алгебре событий A, B, C .

1.12. $A_1 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ произойдет ровно одно}\};$

$A_2 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ произойдет ровно два}\}.$

1.13. $\bar{a}_1 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ произойдет хотя бы одно}\};$

$\bar{a}_2 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ произойдет не меньше двух}\}.$

1.14. $„_1 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ не произойдет ни одного}\};$

$C_2 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ произойдет хотя бы два}\};$
 $C_3 = \{\text{из трех событий } A, B, C \text{ не произойдет хотя бы од-}$
 $\text{но}\}.$

§2. Элементы комбинаторики

Во многих задачах классической теории вероятностей используется комбинаторика, т.е. раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил – правила умножения и правила сложения.

Теорема. Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип распространяется на случай трех и более объектов.

Теорема. Правило сложения: если некоторый объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (a или b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Существуют две схемы выбора m элементов из заданного множества: *без возвращения*, когда выбранные элементы не возвращаются в исходное множество, и *с возвращением*, когда выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвратов

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Два размещения различны, если они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k обозначаются символом A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, причем $1! = 1$, $0! = 1$.

Перестановкой из n элементов называется размещением из n элементов по n элементов.

Таким образом, указать ту или иную перестановку данного множества из n элементов значит выбрать определенный порядок этих элементов. Поэтому любые две перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n!$$

Сочетанием из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется любое подмножество данного множества, которое содержит k элементов.

Любые два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т.е. отличаются только составом элементов). Число сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Для чисел C_n^k (они называются биномиальными коэффициентами) справедливы следующие тождества

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (правило симметрии),}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ (правило Паскаля),}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Схема выбора с возвращением

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой *размещения с повторениями*. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по несколько раз, т.е. повторяться), то полученные выборки есть *сочетания с повторениями*. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{N}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пусть в множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1

раз, 2-й – n_2 раз, ..., k -й – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями*.

Число перестановок с повторениями (иногда говорят о числе разбиений множества) из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Пример 1. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Решение. Используем размещение. При $n = 10$, $m = 3$ получаем

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Пример 2. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Решение. При $n = 5$ находим число перестановок

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Решение. Находим сочетание при $n = 10$, $m = 3$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример 4. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями. При $k = 2$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n = 6$ получаем

$$P_6(3; 3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Пример 5. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: *замок, ротор, топор, колокол*?

Решение. В слове *замок* все буквы различны, всего их пять. Получаем

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

В слове *ротор*, состоящем из пяти букв, буквы *р* и *о* повторяются дважды. При $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ находим

$$P_5(2; 2) = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30.$$

В слове *топор* буква *о* повторяется дважды, поэтому

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

В слове *колокол*, состоящем из семи букв, буква *к* встречается дважды, буква *о* – трижды, буква *л* – дважды. При $n = 7$, $n_1 = 2$, $n_3 = 2$ получаем

$$P_7(2; 3; 2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 210.$$

2.1. Сколько различных слов можно составить из первых пяти букв русского алфавита, таким образом, что каждая буква участвует один раз?

2.2. Берем 10 цифр. Сколько 6-значных номеров можно составить из этих цифр, если каждая цифра участвует 1 раз?

2.3. В коробке 30 билетов. Сколько существует способов выбрать 5 билетов?

2.4. На сельскохозяйственные работы из 3 бригад выделяют по 1 человеку. Известно, что в первой – 15 человек, во второй 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что каждого могут отправить на работу.

2.5. Студенты изучают 12 дисциплин. В расписание каждый день включают 3 предмета. Сколькими способами можно составить расписание на каждый день?

2.6. 8 человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из 8 вагонов. Сколькими способами можно распреде-

лить этих людей по вагонам, если в каждый сядет по 1 человеку?

2.7. 5 человек договорились ехать в поезде, состоящим из 10 вагонов и каждый человек может сесть в любой вагон. Сколькими способами можно распределить людей по вагонам?

2.8. В лифт 9-ти этажного дома заходят 3 человека. Сколько вариантов выхода пассажиров по этажам?

2.9. Какое количество рукопожатий при встрече 12 человек?

2.10. Из 10 кандидатов на одну должность выбирают 3 человека. Определить результаты выборов.

2.11. На полке стоят 10 книг, 2 из них по теории вероятностей. Сколько способов расположения книг на полке?

2.12. Сколько перестановок можно сделать из слова *ракета*, чтобы они все начинались с *р*?

2.13. Сколько перестановок можно сделать из слова *математика*, чтобы они все начинались на *и*?

2.14. Даны цифры: 1, 2, ..., 9. Сколько можно записать 5-значных чисел без повторений?

2.15. Даны цифры: 1, 2, ..., 9. Сколько можно записать 5-значных чисел кратных двум из этих цифр?

2.16. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков. Кубики перемешали. Найти вероятность того, что кубик будет иметь: а) 1 окрашенную грань; б) 2 окрашенные грани; в) 3 окрашенные грани.

2.17. На полке расставлены наудачу 9 различных книг. Сколько способов, что 4 определенные книги окажутся рядом?

2.18. На полке случайным образом расставлены 10 книг. Сколько способов, что 3 определенные книги окажутся рядом?

2.19. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10 кандидатов?

2.20. Сколько различных 6-значных чисел можно записать с помощью цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2?

2.21. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: *резак*, *лампа*?

2.22. Сколькими способами могут быть распределены три призовых места среди 16 соревнующихся?

2.23. В цветочном киоске 7 видов цветов. Сколькими разными способами можно составить букет, содержащий 3 цветка?

2.24. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материя 5 различных цветов?

2.25. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений А.С.Пушкина, располагая их: а) в произвольном порядке; б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом?

2.26. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове: а) *солнце*; б) *театр*; в) *лилия*?

2.27. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?

2.28. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее: а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик одного цвета; в) 4 красных и 3 розовые гвоздики?

2.29. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове *MISSISSIPPI*?

2.30. Сколько различных инициалов (ФИО) можно образовать, используя 5 первых букв русского алфавита?

ОТВЕТЫ: 2.1. 120. 2.2. $A_{10}^6 = 151200$. 2.3. $\tilde{N}_{30}^5$. 2.4. $15 \cdot 12 \cdot 10 = 1800$. 2.5. C_{12}^3 . 2.6. $P_8 = 8! = 40320$. 2.7. $A = n^m = 10^5$. 2.8. $8^3 = 512$. 2.9. $\tilde{N}_{12}^2$. 2.10. C_{10}^3 . 2.11. $P_9 = 8! \cdot 2!$. 2.12. $\frac{5!}{2!}$.

$$\begin{aligned}
& 2.13. \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} \cdot 2.14. A_9^5 \cdot 2.15. A_8^4 \cdot 2.16. \text{à) } \frac{64 \cdot 6}{1000}; \text{á) } \frac{8 \cdot 12}{1000}; \\
& \hat{a}) \frac{8}{1000} \quad 2.17. 6! \cdot 4! \quad 2.18. 8! \cdot 3! \quad 2.19. A_{10}^3 = 720. \quad 2.20. \\
& \bar{p} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20. \quad 2.21. p_5 = 120. \quad \bar{p} = \frac{5!}{2!} = 60. \quad 2.22. 3360. \quad 2.23. 84. \\
& 2.24. 60. \quad 2.25. \text{à) } \check{d}_{10} = 3628800; \quad \text{á) } \check{d}_8 \cdot \check{d}_3 = 241920. \quad 2.26. \\
& \text{a) } 720; \text{б) } 60; \text{в) } 6; \text{г) } 3. \quad 2.27. C_7^3 = 35. \quad 2.28. \text{à) } \tilde{N}_{16}^3 = 560; \\
& \text{á) } \tilde{N}_9^6 + \tilde{N}_7^6 = 91; \quad \text{в) } C_9^4 \cdot C_7^3 = 4410. \quad 2.29. 34650. \quad 2.30. \\
& \bar{A}_5^3 = 125.
\end{aligned}$$

§3. Классическое определение вероятности

Вероятность события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

Пусть производится опыт с n равновероятными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются *элементарными исходами (событиями), случаями, шансами*. Случай, который приводит к наступлению события A , называется *благоприятным* (или *благоприятствующим*) ему.

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности называется *классическим*.

Из классического определения следуют свойства вероятности: $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cap B = \emptyset$.

Пример 1. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара, различающихся только цветом.

1) Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый.

2) Вынимается наудачу два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный.

Решение. 1) Переименуем шары. Пространство элементарных событий можно записать в виде

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, Ч_1, Ч_2, Ч_3, Ч_4\}.$$

Пусть событие $A = \{\text{появление белого шара}\}$, тогда $A = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$.

Так как все элементарные исходы равновозможны, то по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$.

2) При вынимании двух шаров возможны такие исходы: $(B_1, Ч_1), (B_2, B_3), (B_3, B_2), (Ч_4, B_5)$ и т.д. число всех случаев равно $n = A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$.

а) Исходами, благоприятствующими наступлению события $B = \{\text{появление двух белых шаров}\}$, являются $(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_3, B_5), (B_3, B_1)$ и т.д. Число таких случаев равно $m = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Поэтому $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

б) Исходами, благоприятствующими наступлению события $C = \{\text{появление хотя бы одного черного шара}\}$, являются $(B_1, Ч_1), (B_1, Ч_2), (B_1, Ч_3), (Ч_3, B_1), (Ч_1, Ч_2), (Ч_3, Ч_4)$ и т.д. Число таких случаев равно $m = A_9^2 - A_5^2 = 72 - 20 = 52$ (в 20 случаях из 72 появятся два белых шара), поэтому в остальных случаях хотя бы один из пары шаров будет черным. Отсюда $P(C) = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$. Этот же результат можно получить иначе, так как

$$C = \bar{B}, \text{ то } P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$

Пример 2. В магазин поступили плащи разных расцветок: 5 синих, 5 желтых и 10 красных. Продавец извлекает наугад один из этих плащей. Какова вероятность того, что плащ окажется желтым?

Решение. Множество элементарных исходов состоит из 20 элементов, так как в магазин поступило 20 плащей; поэтому $n=20$. Если обозначить $A = \{\text{выбранный продавцом плащ оказался желтым}\}$, то по условию $m = 5$. Отсюда следует:

$$m(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = 0,25.$$

Пример 3. В урне 7 белых, 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что извлеченный наугад шар – цветной.

Решение. Пусть событие A означает появление красного шара, а B – появление синего шара. Тогда событие $C = A + B$ означает появление цветного шара. Так как A и B – несовместные события, то $P(C) = P(A) + P(B)$. Имеем $P(A) = 8/25$, $P(B) = 10/25$. Тогда $P(C) = 8/25 + 10/25 = 0,72$.

3.1. В урне 10 одинаковых шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар является голубым?

3.2. Натуральные числа от 1 до 30 записаны на карточках. Карточки перемешивают и извлекают одну карточку. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

3.3. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что число является простым?

3.4. Подбрасываются две монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались цифры?

3.5. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

3.6. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна из букв. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной; б) согласной; в) буквой *ч*?

3.7. Подбрасываются два игровых кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Какова вероятность того, что: а) сумма выпавших очков равна 7; б) сумма очков четна; в) сумма очков кратна 3; г) выпало одинаковое число очков на обоих кубиках?

3.8. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

3.9. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число является делителем 30?

3.10. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число является простым?

3.11. На полке случайным образом расставляются 10 книг. Какова вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся стоящими рядом?

3.12. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи – белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?

3.13. На шести одинаковых карточках написаны числа 3, 4, 7, 8, 12, 14. Последовательно выбирают 2 карточки. Какова вероятность того, что из двух полученных чисел можно составить сократимую дробь?

3.14. Из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 наудачу выбирают три различных цифры и составляют трехзначное число. Какова вероятность того, что это число окажется четным?

3.15. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что набраны нужные цифры?

3.16. A и B и еще 8 человек стоят в очереди. Какова вероятность того, что между A и B в очереди стоят 3 человека?

3.17. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что случайно набирая цифры, можно угадать нужный код?

3.18. Восемь друзей распределяют места за круглым столом по жребию. Какова вероятность того, что два из них, а именно A и B , будут сидеть рядом?

3.19. Три человека произвольно размещаются в 8 вагонах электрички. Какова вероятность того, что все они: а) зайдут в один вагон; б) зайдут в вагон №3; в) разместятся в разных вагонах?

3.20. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают три карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш?

3.21. В урне 5 белых и 4 черных шара. Вынимаются наудачу два шара. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный?

3.22. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: а) сумма выпавших очков не превосходит 7; б) произведение выпавших очков делится на 4; в) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков?

3.23. В «Словаре русского языка» С.И.Ожегова 900 страниц. Какова вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 13?

3.24. 10 яблок, 3 груши и 8 лимонов раскладывают наудачу в 3 пакета с равным количеством фруктов. Какова вероятность того, что: а) в каждом пакете по 1 груше; б) в случайно выбранном пакете нет груш?

3.25. Первые семь букв русского алфавита написаны на карточках. Случайным образом последовательно извлекаются четыре карточки. Какова вероятность того, что полученное *слово* будет оканчиваться буквой *а*?

3.26. В старинной индейской игре «Тонг» два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Если для каждого игрока равновозможно показать 1, 2, 3 пальца, то чему равна вероятность того, что общее число показанных пальцев четно?

3.27. В лифт 6-этажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже?

3.28. В магазин поступило 25 новых телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Для проверки наудачу выбирается один из телевизоров. Какова вероятность того, что он не имеет скрытых дефектов?

3.29. В садке содержатся 15 сазанов, 9 карпов 6 карасей. Какова вероятность того, что случайно выловленная рыба оказалась не карасем?

3.30. Подлежат контролю 250 деталей, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что наудачу взятая для контроля деталь окажется: а) нестандартной; б) стандартной?

ОТВЕТЫ: 3.1. 0,6. 3.2. 0,2. 3.3. 0,4. 3.4. 0,25. 3.5. 0,1. 3.6.

а) 0,417; б) 0,583; в) 0. 3.7. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,5; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{6}$. 3.8. $\frac{1}{3}$.

3.9. 0,2. 3.10. 0,3. 3.11. 0,067. 3.12. $\frac{7}{9}$. 3.13. $\frac{A_5^2 + p_2}{A_6^2} = \frac{11}{15}$.

3.14. $\frac{2A_4^2}{A_5^3} = 0,4$. 3.15. $\frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$. 3.16. $\frac{12 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{15}$. 3.17. $1/10^8$.

$$3.18.2/7. \quad 3.19. \quad a) \frac{8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{64}; \quad б) \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{1}{512}; \quad в) \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{21}{32}.$$

$$3.20. \quad a) \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_5^3}; \quad б) \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{11}; \quad в) \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{22}.$$

$$3.21. \quad a) \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{5}{18}; \quad б) \frac{A_9^2 - A_5^2}{A_9^2} = \frac{13}{18}. \quad 3.22. \quad a) 7/12; \quad б) 5/12;$$

$$в) 11/36. \quad 3.23. \approx 0,077. \quad 3.24. \quad a) 49/1140; \quad б) 26/95.$$

$$3.25. \quad \frac{A_6^3}{A_7^4} = \frac{1}{7}. \quad 3.26. \quad 5/9. \quad 3.27. \quad 0,008. \quad 3.28. \quad 0,8. \quad 3.29. \quad 0,8.$$

$$3.30. \quad a) 5/250; \quad б) 245/250.$$

§4. Задачи с элементами комбинаторики. Задача о выборке

Задача о выборке. Среди N элементов некоторой совокупности содержится M элементов, обладающих определенным свойством. Случайным образом отбираются n элементов. Найти вероятность того, что среди них окажется m элементов, обладающих указанным свойством.

Решение. В данном случае порядок следования элементов не имеет значения, поэтому множество элементарных исходов состоит из всех сочетаний C_N^n , составленных из N элементов по n . Благоприятными будут те исходы, когда в выборку попадут m элементов из M , обладающих определенным свойством. Такой выбор можно осуществить C_M^m способами. Но при этом вместе с указанными m элементами в выборку должны попасть $n - m$ элементов из числа $N - M$ элементов данной совокупности, не обладающих этим свойством. А этот отбор можно осуществить C_{N-M}^{n-m} спосо-

бами. Таким образом, число всех благоприятствующих исходов испытания равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$, а искомая вероятность принимает вид

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Пример 1. Первые 7 букв русского алфавита написаны на карточках. Случайным образом последовательно извлекаются четыре карточки. Найти вероятность того, что полученное “слово” будет оканчиваться буквой *a*.

Решение. Любой набор из четырех букв здесь считается словом, поэтому порядок следования букв имеет значение.

Число $N(\Omega) = A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Так как последняя буква слова известна, то количество слов с буквой *a* в конце равно числу размещений из 7 элементов по 3:

$$N(A) = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Отсюда искомая вероятность $P(A) = \frac{120}{840} = \frac{1}{7}$.

Пример 2. На шести карточках написаны буквы *A, B, K, M, O, C*. После перетасовки случайным образом выбирают одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в котором они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово *МОСКВА*.

Решение. Множество элементарных исходов состоит из всех перестановок из шести разных элементов, $N(\Omega) = 6! = 720$. Интересующему нас событию соответствует лишь один исход. Поэтому $P(A) = 1/720$.

Пример 3. Из разрезной азбуки выкладывается слово *МАТЕМАТИКА*. Затем все буквы тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *МАТЕМАТИКА*?

Решение. В данном случае множество всех букв слова *МАТЕМАТИКА* состоит из нескольких групп: три буквы *А*, по две буквы *М* и *Т*, по одной букве *Е*, *И* и *К*. Поэтому множество элементарных исходов состоит из всех перестановок с повторениями из 10 элементов, разбитых на указанные группы.

$$N(\Omega) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

4.1. Слово *АЗИМУТ* составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешивают и из них наугад выбирают 4 карточки. Какова вероятность того, что расположенные по порядку карточки составят слово *ЗИМА*?

4.2. Из букв разрезной азбуки составлено слово *ремонт*. Карточки перемешивают и наугад вытаскивают 4 карточки, раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получим слово *море*?

4.3. Из пяти карточек с буквами *а, б, в, г, д* наугад выбирают две и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово *да*?

4.4. На каждой из пяти карточек написаны буквы *А, Б, И, Р, Ж*. Карточки перемешивают, берут по одной и кладут последовательно. Какова вероятность того, что получится слово *БИРЖА*?

4.5. На пяти карточках написаны буквы *И, К, М, Н, С*. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *МИНСК*?

4.6. Из букв слова *ротор*, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекают 3 буквы. Какова вероятность того, что получится слово *тор*?

4.7. На шести карточках написаны буквы слова *талант*. Карточки перемешиваются. Их наудачу располагают одна за другой. Какова вероятность того, что снова получится слово *талант*?

4.8. На пяти карточках написаны буквы: на двух карточках *л*, на остальных трех *и*. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово *лиии*?

4.9. На пяти карточках написаны буквы *л, м, о, о, т*. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получится слово *молот*?

4.10. Дано 6 карточек с буквами *Н, М, И, Я, Л, О*. Какова вероятность того, что: а) получится слово *ЛОМ*, если наугад одна за другой выбираются 3 карточки; б) получится слово *молния*?

4.11. Из букв *А, С, Н, Н, А, А* разрезной азбуки составляется наудачу слово, состоящее из 6 букв. Какова вероятность того, что получится слово *АНАНАС*?

4.12. На 9 одинаковых карточках написаны буквы *Е, Е, Р, Р, С, С, Я, Г, И*. Эти карточки выкладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово *РЕГРЕССИЯ*?

4.13. Из букв разрезной азбуки составлено слово *песня*. Какова вероятность получить снова слово *песня* после перемешивания карточек?

4.14. На пяти карточках написаны буквы *Б, Е, Р, С, Т*. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *БРЕСТ*?

4.15. Из букв разрезной азбуки составлено слово *колокол*. Карточки перемешиваются. Какова вероятность получить слово *колокол*?

4.16. В урне 10 шаров, из которых 6 белых, остальные черные. Наудачу извлекают 4 шара. Какова вероятность того, что среди них окажется 3 белых шара?

4.17. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия для контроля. Какова вероятность того, что в полученной выборке окажется одно бракованное изделие?

- 4.18.** Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек разыгрывается 5 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки?
- 4.19.** В ящике 4 голубых и 5 красных шара. Из ящика наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета?
- 4.20.** Из десяти билетов выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?
- 4.21.** В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?
- 4.22.** В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?
- 4.23.** В партии из 15 изделий имеется две дефектных. Наудачу выбирают 4 изделия для контроля. Какова вероятность того, что в этой выборке окажется хотя бы одно дефектное изделие?
- 4.24.** Партия из 20 выловленных рыб подвергается некоторому контролю. Условием непригодности улова является наличие хотя бы одной бракованной рыбы из четырех проверенных. Какова вероятность того, что улов будет признан непригодным, если он содержит 3 недоброкачественные рыбы?
- 4.25.** Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее, чем на 3 из 4 поставленных вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?
- 4.26.** В коробке 5 белых, 4 красных и 3 желтых шара. Наудачу вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что среди них 2 белых и 1 желтый шар?

4.27. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Какова вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает 2 вопроса?

4.28. Из колоды в 36 карт извлекают 4 карты. Какова вероятность того, что все извлеченные карты пиковой масти?

4.29. В лотерее выигрывают 100 билетов. Выигрыши выпали на 20 билетов. Некто приобрел 5 билетов. Какова вероятность того, что выигрыш выпадет хотя бы на 1 билет?

4.30. Наудачу выбирают 5 военнослужащих из группы, состоящей из 4 офицеров и 12 солдат. Какова вероятность того, что в группе будет не более двух офицеров?

ОТВЕТЫ: 4.1. $1/360$. 4.2. $1/360$. 4.3. $0,0167$. 4.4. $1/120$.

4.5. $1/120$. 4.6. $1/15$. 4.7. $1/180$. 4.8. $1/10$. 4.9. $1/60$.

4.10. а) $1/120$; б) $1/720$. 4.11. $1/60$. 4.12. $\frac{1}{45360}$. 4.13. $1/120$.

4.14. $1/120$. 4.15. $1/210$. 4.16. $8/21$. 4.17. $2/40$. 4.18. $0,385$.

4.19. $5/9$. 4.20. $5/9$. 4.21. $0,17$. 4.22. $0,25$. 4.23. $10/21$.

4.24. $0,5088$. 4.25. $0,901$. 4.26. $3/22$. 4.27. $0,44$. 4.28. $0,21 \cdot 10^{-2}$. 4.29. $0,69$. 4.30. $0,94$.

§5. Геометрическая вероятность

Пусть Ω – множество точек отрезка или ограниченной плоской фигуры, A – заданное подмножество множества Ω . Будем считать, что испытание состоит в случайном выборе точки этого множества, событие A – выбор точки из подмножества A , причем «попадание» точки в каждую элементарную часть $\Delta\Omega$ одной и той же длины или площади равновозможно. Тогда вероятность случайного события A будет определена по формуле

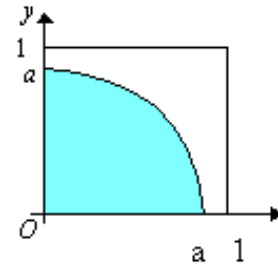
$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}, \quad \text{или} \quad P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $L(A)$ – длина отрезка A , $L(\Omega)$ – длина отрезка Ω ,

$S(A)$ – площадь плоской фигуры A , $S(\Omega)$ – площадь фигуры Ω .

Пример 1. Внутри квадрата с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$ наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность события $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 < a < 1\}$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – случайная точка, попавшая внутрь квадрата со стороной 1 и круга с центром в начале координат радиуса a (рис. 5.1). Так как



$S(\Omega) = 1$, а $S(A) = \frac{\pi a^2}{4}$, то и

$$P(A) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Рис.5.1

Пример 2. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительны, если все значения $|p| \leq 1, |q| \leq 1$ равновероятны и единственно возможны.

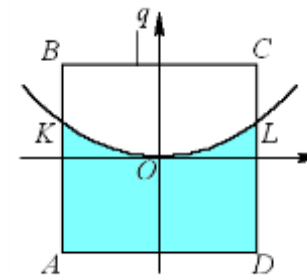


Рис. 5.2

Решение. Областью всех возможных пар значений (p, q) является квадрат $ABCD$ с центром в начале координат и стороной, равной 2 (рис. 5.2). Значит,

$S(\Omega) = S_{ABCD} = 4$. Интересующему нас событию соответствуют те точки, координаты которых удовлетворяют условию

Осуществования корней квадратного уравнения:

$(\delta^2 / 4) - q \geq 0$. Эти точки принадлежат криволинейной

фигуре $AKOLD$, ограниченной сверху кривой $q = \frac{p^2}{4}$.

Площадь фигуры равна

$$S(A) = 2 + \int_{-1}^1 \frac{p^2}{4} dp = 2 + \frac{p^3}{12} \Big|_{-1}^1 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Отсюда $P = \frac{13}{24}$.

Пример 3. Наугад взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность того, что их произведение не меньше 2, а сумма не больше 3.

Решение. Так как числа x и y удовлетворяют условиям $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 2$, то точки $M(x, y)$, удовлетворяющие этим условиям, образуют квадрат со стороной 2 и площадью $S_D = 4$.

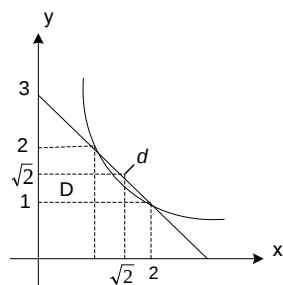


Рис. 5.3

Найдем множество $M(x, y)$ для которых $xy \geq 2$ и $x + y \leq 3$. Эти точки, удовлетворяющие указанной системе неравенств, образуют область d , ограниченную гиперболой $xy = 2$ и прямой $x + y = 3$ (рис. 5.3). Находим площадь S_d области d :

$$S_d = \iint_D dx dy = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} dy = \int_1^2 (3-x-2/x) dx =$$

$$= \left(3x - x^2/2 - 2\ln|x| \right) \Big|_1^2 = 1,5 - \ln 4 \approx 0,1137.$$

Искомая вероятность $P = S_d/S_D = 0,1137/4 \approx 0,0284$.

5.1. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих теплоходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого теплохода – один час, а второго – 2 часа.

5.2. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого же часа нужно преодолеть этот опасный участок шоссе. Какова вероятность того, что можно избежать налета, если время преодоления опасного участка пять минут?

5.3. Два человека договорились о встрече в определенном месте в промежутке времени от 19.00 до 20.00. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого и ожидает 15 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

5.4. Два студента условились встретиться между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 10 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

5.5. Внутри круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника?

5.6. На площадку, покрытую кафельной плиткой со стороной $a = 6$ см, случайно падает монета радиуса $r = 2$ см. Какова вероятность того, что монета целиком окажется внутри квадрата?

5.7. На отрезке $[0,3]$ наудачу выбраны два числа x и y . Какова вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leq 3y \leq 3x$?

5.8. Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что их сумма заключена между $1/4$ и 1 ?

5.9. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Какова вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше 1 , а частное y/x не больше двух?

5.10. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает единицы. Какова вероятность того, что сумма $x + y$ будет не превышает 1 , а произведение $x \cdot y$ не меньше $0,09$?

5.11. На плоскости нарисованы две concentric окружности, радиусы которых 3 и 5 см. Какова вероятность того, что точка брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями?

5.12. На перекрестке установлен светофор, в котором в течение 25 секунд горит зеленый свет, 19 секунд горит красный свет, а в промежутках между ними в течение 3 секунд – желтый свет. Какова вероятность того, что автомобиль, случайно подъехавший к перекрестку, проедет его без остановки?

5.13. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ расположен круг

$x^2 + y^2 = 9$. Какова вероятность того, что точка попадет в кольцо, образованное эллипсом и кругом?

5.14. В квадрат с вершинами в точках $O(0, 0)$, $K(0, 1)$, $L(1, 1)$, $M(1, 0)$ наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \frac{1}{2}x$?

- 5.15.** В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$ вписан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Какова вероятность того, что точка, брошенная в больший эллипс попадет внутрь малого эллипса?
- 5.16.** На отрезке $[0, 2]$ наудачу выбраны два числа x и y . Какова вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leq 4y \leq 4x$?
- 5.17.** Круг разделен на 6 равных секторов, через один окрашенный в черный цвет. Какова вероятность того, что точка брошенная в круг попадет в белый сектор?
- 5.18.** Взяты наугад два положительных числа, каждое из которых не больше единицы. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет единицы, а произведение будет не больше $2/9$?
- 5.19.** В прямоугольник с вершинами $K(-1, 0)$, $L(-1, 5)$, $M(2, 5)$, $N(2, 0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $x^2 + 1 \leq y \leq x + 3$?
- 5.20.** В квадрат с вершинами $O(0, 0)$, $K(0, 1)$, $L(1, 1)$, $M(1, 0)$ наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2x$?
- 5.21.** На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, а область q – этим эллипсом и эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область q ?
- 5.22.** В прямоугольник с вершинами $K(-2, 0)$, $L(-2, 5)$, $M(1, 5)$, $N(1, 0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $x^2 + 1 \leq y \leq x - 3$?

5.23. В прямоугольник с вершинами $R(-2, 0)$, $L(-2, 5)$, $M(1, 5)$, $N(1, 0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $0 \leq y \leq 2x - x^2 + 8$?

5.24. Внутри круга радиусом R наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника?

5.25. Внутри равностороннего треугольника со стороной a брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в треугольник?

5.26. Наугад взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает 2. Какова вероятность того, что их произведение не меньше 2, а сумма не больше 3?

5.27. Внутри круга радиусом R наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка окажется в области между кругом и вписанным в него квадратом?

5.28. В квадрат вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная в квадрат, попадет внутрь вписанного в него круга?

5.29. На отрезке AB длины L числовой оси Ox наудачу нанесена точка $M(x)$. Какова вероятность того, что отрезки AM и MB имеют длину, большую $L/4$?

5.30. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на наименьший отрезок?

ОТВЕТЫ: 5.1. 0,121. 5.2. 0,77. 5.3. $7/16$. 5.4. 0,3056.

5.5. а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. 5.6. $1/9$. 5.7. $1/6$. 5.8. $15/32$. 5.9. 0,38.

5.10. 0,2. 5.11. 0,64. 5.12. 0,5. 5.13. 0,55. 5.14. 0,75.

5.15. 0,714. 5.16. $1/3$. 5.17. 0,5. 5.18. 0,467. 5.19. 0,3.

5.20. 0,25. 5.21. $5/6$. 5.22. 0,3. 5.23. $2/3$. 5.24. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

5.25. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 5.26. 0,0284. 5.27. $1 - \frac{2}{\pi}$. 5.28. $\pi/4$. 5.29. 0,5.
5.30. 0,5.

§6. Теорема сложения и умножения

Теорема сложения вероятностей двух событий.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема сложения вероятностей n несовместных событий.

Вероятность суммы n несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Если обозначить

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q,$$

то формула примет вид

$$p + q = 1.$$

Вероятность события B при условии, что произошло событие A , называется *условной вероятностью* события B и обозначается: $P(B/A)$, или $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B/A), \quad P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Событие B не зависит от события A , если

$$P(B/A) = P(B),$$

т.е. вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A .

В этом случае и событие A не зависит от события B , т.е. свойство независимости событий является взаимным.

Отметим, что если A и B не зависимы, то независимы $\bar{A}$ и B , A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема умножения вероятностей n событий.

Вероятность произведения n событий равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

В частности, для трех событий A , B , C формула принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, или *независимыми*, если они попарно независимы, а также независимы каждое из них и произведение k остальных ($k = 2, 3, \dots, n - 1$).

Замечание. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

Замечание. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то противоположные им события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ также независимы.

Теорема умножения вероятностей n независимых событий.

Если событие $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

Замечание. Это равенство выражает необходимое и достаточное условие независимости событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Для трех независимых событий A, B, C формула принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения противоположных событий по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$$

В частности, если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы, то

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = \\ &= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n)). \end{aligned}$$

или

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Если независимые события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p , то вероятность появления хотя бы одного из этих событий выражается формулой

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

В обратной задаче вероятность $P(A)$ известна и нужно определить, при каком числе n независимых событий A_i достигается заданное значение $P(A)$. Точнее говоря, задается некоторое число Q такое, что $P(A) = 1 - q^n \geq Q$; из этого неравенства определяется значение n .

Пример 1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение. Введем обозначения: A – выпало четное число очков; B_k – выпало k очков ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6 , т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6 несовместны, то можно воспользоваться формулой при $n = 3$, учитывая, что $P(B_k) = 1/6$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$P(A) = P(B_2) + P(B_4) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение. Извлечение цветного шарика означает появление либо голубого, либо зеленого шарика. Вероятность извлечения голубого шарика (событие A): $P(A) = 15/40 = 3/8$. Вероятность извлечения зеленого шарика (событие B): $P(B) = 5/40 = 1/8$. Так как события A и B несовместны, то получаем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$, где C – «появление цветного шара»; этому событию благоприятствуют 20 элементарных исходов.

Пример 3. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A – «сумма выпавших очков не превосходит четырех».

Решение. Событие A есть сумма трех несовместных событий B_2, B_3, B_4 , заключается в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Поскольку

$$P(B_2)=\frac{1}{36}, \quad P(B_3)=\frac{2}{36}, \quad P(B_4)=\frac{3}{36},$$

То по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$P(A)=P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Замечание. Тот же результат можно получить непосредственно. Действительно, событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2). Всего же элементарных исходов, образующих полную группу событий, $n = 36$, поэтому

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Пример 4. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на три сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. События A – «попадание в первый сектор» и B – «попадание во второй сектор» несовместны (попадание в

первый сектор исключает попадание во второй), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

Пример 5. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен?

Решение. Введем обозначения: события A – «попадание первого спортсмена», B – «попадание второго спортсмена», C – «попадание хотя бы одного из спортсменов». Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совместны. Получаем

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

A и B – независимые события. Подставив данные значения $P(A) = 0,85$, $P(B) = 0,8$ в формулу для $P(C)$, найдем искомую вероятность

$$P(C) = (0,85 + 0,8) - 0,85 \cdot 0,8 = 0,97.$$

Пример 6. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.

Решение. а) Пусть $A_i, i = \overline{1,3}$, – события, означающие попадание в цель каждого из трех стрелков. Тогда $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,7$, $P(A_3) = 0,9$, $P(\overline{A_1}) = 1 - 0,8 = 0,2$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0,7 = 0,3$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0,9 = 0,1$. Событие A , озна-

чающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Так как $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ - несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,092. \end{aligned}$$

б) Так как попадания в цель каждого стрелка – независимые в совокупности события, то следует, что

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Пример 7. На складе 30 изделий первого сорта и 20 – второго сорта. Найти вероятность того, что три взятых наугад изделия – первого сорта.

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 – события, состоящие в появлении изделия первого сорта соответственно при первом, втором и третьем взятии изделия со склада. Тогда событие $A = A_1, A_2, A_3$ означает появление трех изделий первого сорта. Следует, что $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$. Так как $P(A_1) = 30/50, P(A_2/A_1) = 29/49, P(A_3/A_1A_2) = 28/48$, то

$$P(A) = \frac{30}{50} \frac{29}{49} \frac{28}{48} \approx 0,2071.$$

6.1. В урне имеется 10 красных, 15 синих, 5 белых шаров. Из урны наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар – красный или белый?

6.2. Охотник выстрелил три раза по цели. Вероятность попадания в нее при первом выстреле равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Какова вероятность того, что охотник: а) промахнется все три раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет два раза?

6.3. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны 0,8, 0,4 и 0,7. Какова вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей?

6.4. Студент изучает математику, химию и биологию. Он оценивает вероятности получить пятерку по этим курсам как $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно. Какова вероятность того, что студент получит: а) только одну пятерку; б) хотя бы одну пятерку; в) пятерку только по химии?

6.5. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, делая по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Какова вероятность того, что один из них получит приз?

6.6. Какова вероятность того, что при одновременном случайном извлечении двух карт из колоды в 52 карты обе окажутся бубновой масти?

6.7. Измерительный прибор может проработать безотказно 800 часов с вероятностью 0,7, а 1200 часов с вероятностью 0,5. Прибор проработал 800 часов. Какова вероятность того, что он проработает еще 400 часов?

6.8. Вероятность попасть в самолет при одном выстреле равна 0,4, а вероятность сбить его равна 0,1. Какова вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит?

6.9. Вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Какова вероятность того, что пять первых покупателей потребуют обувь 41-го размера?

6.10. Среди 60 лампочек 3 - нестандартные. Какова вероятность того, что две взятые одновременно лампочки окажутся нестандартными?

6.11. В мешке смешаны нити, среди которых 30% белых, остальные – красные. Какова вероятность того, что вынутые наудачу две нити окажутся: а) одного цвета; б) разных цветов?

6.12. В связке имеется пять различных ключей, из которых только одним можно открыть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Какова вероятность того, что: а) дверь будет открыта первым ключом; б) для открывания двери будет использованы не более двух ключей?

6.13. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Какова вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста?

6.14. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна $1/7$. Какова вероятность того, что обладатель пяти билетов выиграет: а) по всем пяти; б) ни по одному; в) хотя бы по одному билету?

6.15. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен?

6.16. Монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

6.17. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что все три шара голубые?

6.18. Найти вероятность совместного появления цифры при одновременном подбрасывании двух монет.

6.19. В урне 6 голубых, 5 красных и 4 белых шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Какова вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар, при втором – красный, при третьем – белый?

6.20. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике – 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными?

6.21. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что любой станок в течение часа потребует внимания рабочего равна 0,6. Какова вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего: а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере один станок?

6.22. Какова вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 7, или тому и другому одновременно?

6.23. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара, первый шар в ящик не возвращают. Какова вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй – красным?

6.24. Вероятность попадания в цель равна 0,3, а вероятность ее уничтожения равна 0,05. Какова вероятность того, что при попадании в цель она будет уничтожена?

6.25. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открывания замка?

6.26. В ящике 9 белых, 6 черных и 5 зеленых шаров. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется либо черным, либо зеленым?

6.27. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Какова вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов?

6.28. В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по од-

ному человеку из каждой комнаты. Какова вероятность того, что оба они окажутся юношами, или оба девушками?

6.29. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Экзаменатор задает ему вопросы до тех пор, пока не обнаруживает пробела в знаниях студента. Какова вероятность того, что будут заданы: а) два вопроса; б) более двух вопросов?

6.30. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Какова вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов?

ОТВЕТЫ: **6.1.** 1/2. **6.2.** а) 0,24; б) 0,976; в) 0,452.

6.3. 0,712. **6.4.** а) 11/24; б) 3/4; в) 1/8. **6.5.** 0,447. **6.6.** 1/17.

6.7. 5/7. **6.8.** 0,25. **6.9.** $0,2^5$. **6.10.** 0,0017. **6.11.** а) 0,58;

б) 0,42. **6.12.** а) 1/5; б) 2/5. **6.13.** 0,5072. **6.14.** а) 1/75;

б) $(6/7)^5$; в) $1 - (6/7)^5$. **6.15.** 0,97. **6.16.** 3/8. **6.17.** 0,055.

6.18. 1/4. **6.19.** 0,044. **6.20.** 0,7. **6.21.** а) 0,1296; б) 0,0256;

в) 0,9744. **6.22.** 51/90. **6.23.** 0,238. **6.24.** 1/6. **6.25.** 0,11.

6.26. 0,55. **6.27.** а) 0,48; б) 0,32; в) 0,44; г) 0,92. **6.28.** 5/11.

6.29. а) 0,19; б) 0,56. **6.30.** а) 0,456; б) 0,834; в) 0,622.

§7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть в некотором эксперименте случайное событие A может появиться лишь с одним из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, составляющих полную группу. Тогда вероятность того, что в результате испытания событие A произойдет, определяется *формулой полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Если известно, что в результате испытания событие A произошло, то условная вероятность того, что оно произошло с гипотезой H_k , определяется по *формуле Байеса*:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пример 1. На склад поступает продукция с трех фабрик. Поступления с первой фабрики составляют 20%, со второй – 46%, с третьей – 34%. Вероятность брака для первой фабрики равна 0,03, для второй – 0,02, для третьей – 0,01. Найти вероятность того, что в случае, когда взятое наугад изделие нестандартно, оно произведено на первой фабрике.

Решение. Известно, что любое изделие, находящееся на складе, произведено на первой фабрике (H_1), на второй фабрике (H_2) или на третьей фабрике (H_3). Система гипотез H_1, H_2, H_3 является полной группой несовместных событий. По условию $P(H_1) = 0,2$, $P(H_2) = 0,46$, $P(H_3) = 0,34$, $P(A/H_1) = 0,03$, $P(A/H_2) = 0,02$, $P(A/H_3) = 0,01$. Необходимо найти вероятность гипотезы H_1 при условии, что взятое наугад изделие (событие A) оказалось нестандартным. Согласно формуле Байеса, имеем

$$\begin{aligned} P(H_1 / A) &= \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3)} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,003}{0,2 \cdot 0,03 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01} \approx 0,322. \end{aligned}$$

Пример 2. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объем продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе $p_1 = 0,05$, на втором заводе – $p_2 = 0,01$. Наудачу взятая деталь оказалась брако-

ванной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Обозначим через H_1 событие, состоящее в том, что взятая деталь изготовлена на первом заводе. H_2 – на втором заводе, тогда

$$P(H_1) = \frac{4}{5} = 0,8, \quad P(H_2) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Пусть A – событие, состоящее в том, что наудачу взятая деталь оказалась бракованной.

По условию $P(A/H_1) = 0,05$, $P(A/H_2) = 0,01$.

В случае $n = 1$ получаем

$$P(H_1/A) = \frac{0,8 \cdot 0,05}{0,8 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,01} = 0,952.$$

Пример 3. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взято нестандартное изделие, через H_1 , H_2 , H_3 – гипотезы, состоящие в том, что взято изделие, изготовленное соответственно на первой, на второй, на третьей фабрике.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1) = 0,20, \quad P(H_2) = 0,46, \quad P(H_3) = 0,34;$$

$$P(A/H_1) = 0,03, \quad P(A/H_2) = 0,02, \quad P(A/H_3) = 0,01.$$

Поскольку в данном случае

$$P(A) = 0,20 \cdot 0,03 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01 = 0,0186,$$

находим искомую вероятность

$$P(H_1/A) = \frac{0,20 \cdot 0,03}{P(A)} = \frac{0,006}{0,0186} \approx 0,322.$$

Аналогично находим вероятности:

$$P(H_2 / A) = \frac{0,46 \cdot 0,02}{P(A)} = \frac{0,0092}{0,0186} \approx 0,495,$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0,34 \cdot 0,01}{P(A)} = \frac{0,0034}{0,0186} \approx 0,183.$$

7.1. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдут сбои в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3 : 2 : 5. Вероятности обнаружения сбоев в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Какова вероятность того, что: а) возникший в машине сбой будет обнаружен; б) сбой произошел в арифметическом устройстве?

7.2. На фабрике машина A производит 40% продукции, а машина B – 60%. В среднем 9 единиц из 1000 продукции машины A оказывается бракованными, а у машины B – 1 из 250. Некоторая единица продукции, выбранная из дневной продукции, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она была произведена на машине A ?

7.3. На фабрике 30% производится машиной A , 25% продукции – машиной B , а остальная продукция машиной C . У машины A в брак идет 1% всей продукции, а у машины B – 1,2% продукции, а у машины C – 2%. Какова вероятность того, что выбранная единица продукции окажется стандартной?

7.4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны извлекли наудачу по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Какова вероятность того, что взят белый шар?

7.5. Имеются две урны: в первой 2 белых и 4 черных шара, во второй 3 белых и 3 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; шары перемешиваются, затем из второй урны в первую перекладывается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?

7.6. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4; для второго – 0,6; для третьего – 0,8. Какова вероятность того, что в мишени будет две пробоины?

7.7. В пяти ящиках находятся одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках – по 6 голубых и 4 красных шара. В двух других ящиках – по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике – 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался красным?

7.8. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% - вторым, на 50% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01; 0,005; 0,006. Какова вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной?

7.9. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наугад один студент. Какова вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценки?

7.10. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Найти вероятность попадания на сборку

бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 3000 деталей.

7.11. На распределительной базе находятся электрические лампочки, приготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 85. Какова вероятность того, что взятая наудачу лампочка будет удовлетворять стандарту?

7.12. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30% изделий от общего объема производства, на второй – 25%, на третьей – остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 97%, 98%, 96%. Какова вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным?

7.13. Имеются три урны с шарами. В первой находится 5 голубых и 3 красных шара, во второй – 4 голубых и 4 красных шара, в третьей – 8 голубых. Наугад выбирается одна из урн, из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется красным?

7.14. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1 : 2 : 3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1%. Прибор, приобретенный институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что этот прибор произведен первым заводом?

7.15. В пирамиде 5 винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Какова вероятность того, что мишень будет поражена, ес-

ли стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки?

7.16. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины – 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Какова вероятность того, что это грузовая машина?

7.17. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на первом заводе, 15% - на втором, остальные на третьем заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96; 0,84; 0,9 соответственно. Какова вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы?

7.18. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек: а) мужчина; б) женщина.

7.19. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятности их попадания в мишень соответственно равны 0,75 и 0,8. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что в мишень попал второй стрелок?

7.20. Из 1000 ламп 100 принадлежит 1-й партии, 250 – 2-й и остальные 3-й партии. В 1-й партии 6%, во 2 – 5%, в 3-й – 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?

7.21. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания для первого охотника равна 0,2, а для второго – 0,6. В результате произошло одно по-

падение в цель. Какова вероятность того, что первый охотник промахнулся?

7.22. По линии связи передано два сигнала типов A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60% сигналов типа A и 70% сигналов типа B . Какова вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал – типа A ?

7.23. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8; а для студента второй группы – 0,7. Какова вероятность того, что: а) случайно выбранный студент попал в сборную института; б) студент попал в сборную. В какой группе он вероятнее всего учится?

7.24. В двух коробках имеются конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. Какова вероятность того, что:

а) наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки оказался годным; б) конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

7.25. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B . Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B – 0,5. Какова вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет?

7.26. В состав блока входят 6 ламп первого типа и 10 ламп второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80% ламп первого типа и 90% второго типа. Какова вероятность того, что лампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа?

7.27. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и

третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнения нормы мастера спорта равны соответственно для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4,

третьей 0,2. Какова вероятность того, что студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе?

7.28. Перед посевом 80% всех семян было обработано химикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян – 0,3. Какова вероятность того, что пораженное растение выращено из обработанного семени?

7.29. В студенческой группе 70% юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал: а) юноше; б) девушке?

7.30. В коробке находится 4 новых и 2 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки 2 мяча, а затем их возвращают после игры в коробку. Какова вероятность того, что для второй игры будут взяты два новых мяча?

ОТВЕТЫ: 7.1. а) 0,87; б) 0,276. 7.2. 0,6. 7.3. 0,985. 7.4. 0,5. 7.5. 0,476. 7.6. 0,387. 7.7. 0,4. 7.8. 0,9935. 7.9. 0,81.

7.10. 0,023. 7.11. 0,91. 7.12. 0,032. 7.13. 0,292. 7.14. 0,3. 7.15. 0,85. 7.16. 3/7. 7.17. 0,918. 7.18. а) 20/21; б) 1/21. 7.19. 4/7. 7.20. 0,0445. 7.21. 0,857. 7.22. а) 0,62; б) 0,7742. 7.23. а) 0,7555; б) в первой. 7.24. 0,8333; б) из первой. 7.25. 0,5375. 7.26. 0,3478. 7.27. 0,4. 7.28. 0,44. 7.29. а) 0,54; б) 0,46. 7.30. 0,16.

§8. Формула Бернулли, Пуассона, Лапласа

Схема повторных испытаний служит базовой моделью для решения большого числа практических задач и фор-

мально выглядит так: производится серия n независимых однотипных испытаний, в каждом из которых интересующее нас событие A может появиться с одной и той же вероятностью p . Требуется определить вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз. Задача решается с помощью *формулы Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность появления противоположного события $\bar{A}$.

Вероятность того, что событие A появится в n испытаниях не менее m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^n C_n^k p^k q^{n-k}$$

или по формуле

$$P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Вероятность появления события A хотя бы один раз в n испытаниях равна

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Совокупность событий, состоящих в появлении события A от 0 до n раз в n испытаниях, составляет полную группу событий. Для вычисления вероятностей $P_n(m)$ можно использовать так называемую *производящую функцию* $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = (q + px)^n &= q^n + C_n^1 p q^{n-1} x + C_n^2 p^2 q^{n-2} x^2 + \dots + \\ &+ C_n^m p^m q^{n-m} x^m + \dots + p^n x^n. \end{aligned}$$

Коэффициент при x^m разложения этого бинома равен вероятности $P_n(m)$.

В том случае, когда вероятности появлений события A в каждом испытании неодинаковы и равны p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), производящая функция имеет вид

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x) \dots (q_n + p_n x).$$

Число m_0 появлений события A , вероятность которого в данной серии n испытаний максимальна, называется *наивероятнейшим числом наступлений события A* и определяется из неравенств

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Если число испытаний n велико, а вероятность появления события A в каждом испытании очень мала (близка к нулю), то используют *формулу Пуассона*, согласно которой

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Равенство тем точнее, чем больше число испытаний n .

Формула используется и тогда, когда известна продолжительность испытаний t и среднее число наступлений события в единицу времени $-\lambda$ (*интенсивность потока событий*). В этом случае вероятность того, что за время t событие появится ровно m раз, вычисляется по формуле

$$P_t(m) \approx \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}.$$

Если вероятность p появления события в одном испытании не столь близка к нулю или к единице, используют *локальную теорему Муавра-Лапласа*:

При достаточно больших значениях npq

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(z), \text{ где } \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \text{ а } z = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для функции $\varphi(z)$ составлены таблицы ее значений при $z \geq 0$.

На практике больший интерес представляет вопрос о вероятности того, что событие A появится в серии n испытаний от m_1 до m_2 раз. В этом случае используется *инте-*

гральная теорема Муавра-Лапласа, согласно которой

$$P(m_1 \leq X \leq m_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где $z_k = \frac{m_k - np}{\sqrt{npq}}$, $k=1,2$, а $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – так назы-

ваемый интеграл вероятностей, или интегральная функция Лапласа, значения которой определяются из таблицы.

Пример 1. Производится 5 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна 0,2. Для разрушения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.

Решение. Пусть A_m – событие, состоящее в m попаданиях в цель, а событие B означает разрушение цели после пяти выстрелов. Очевидно, что $B = A_3 + A_4 + A_5$. Так как события A_m попарно несовместны, то по теореме сложения

$$P(B) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

Вероятности $P(A_m)$ найдем по формуле Бернулли:

$$P(A_m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

тогда согласно $P(B) = \sum_{k=3}^5 C_n^k p^k q^{n-k}$, где

$$n=5, p=0,2, q=0,8.$$

Вычисляя, получим:

$$\begin{aligned} P(B) &= C_5^3 (0,2)^3 (0,8)^2 + C_5^4 (0,2)^4 (0,8)^1 + C_5^5 (0,2)^5 (0,8)^0 = \\ &= 10 \cdot 0,008 \cdot 0,64 + 10 \cdot 0,0016 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,00032 = 0,06432. \end{aligned}$$

Пример 2. Случайное событие A может появиться в каждом испытании с вероятностью p . Сколько испытаний следует произвести, чтобы с вероятностью, не меньшей P , событие A произошло хотя бы один раз?

Решение. Пусть n – наименьшее количество необходимых

испытаний, при которых событие A произойдет хотя бы один раз. Согласно

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n, \text{ где } q = 1 - p, \text{ и по условию}$$

$$1 - q^n \geq P, \text{ или } (1 - p)^n \leq 1 - P.$$

Логарифмируя, получим: $n \ln(1 - p) \leq \ln(1 - P)$, а так как $\ln(1 - p) < 0$, то $n \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)}$.

Пример 3. При транспортировке изделие может быть повреждено с вероятностью 0,002. Найти вероятность того, что в партии из 2000 изделий в пути окажутся поврежденными три изделия.

Решение. Имеем: $n = 2000$; $p = 0,002$; $\lambda = np = 4$; $m = 3$. Вероятность появления события в одном испытании очень мала, поэтому используем формулу Пуассона. Находим, что $P_{2000}(3) = 0,195367$.

Пример 4. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 мин, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин. поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение. По условию интенсивность потока вызовов

$$\lambda = 2, \text{ значит, } \lambda t = 8.$$

Находим по таблице 3:

$$\text{а) } P_4(m = 4) = 0,0573;$$

$$\text{б) } P_4(m < 4) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) = 0,0003 + 0,0027 + 0,0107 + 0,0286 = 0,0423;$$

$$\text{в) } P_4(m \geq 4) = 1 - P_4(m < 4) = 1 - 0,0423 = 0,9577.$$

Пример 5. Известно, что в партии из 2000 изделий в среднем 20% всех изделий являются второсортными. Найти вероятность того, что в результате проверки качества изделий в партии второсортными окажутся от 360 до 480 изделий.

Решение. По условию $n = 2000$, $p = 0,2$, $q = 0,8$, $m_1 = 360$,

$m_2 = 480$. $P_{2000}(360, 480) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$, где

$$z_1 = \frac{360 - 400}{\sqrt{2000 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx -2,24; \quad z_2 = \frac{480 - 400}{8\sqrt{5}} \approx 4,47.$$

По таблице 2 находим: $\Phi(-2,24) = -0,4874$;

$\Phi(4,47) = 0,5$. Отсюда искомая вероятность равна
 $P_{2000}(360, 480) = 0,5 + 0,4874 = 0,9874$.

8.1. Для группы юридических лиц вероятность своевременного погашения кредита равна 0,8. Какова вероятность того, что из 10 случайно выбранных лиц по крайней мере 7 погасят кредит своевременно?

8.2. Процентная ставка потребительского кредита может измениться в течение месяца с вероятностью 0,25. Какова вероятность того, что за год ставка изменится 3 раза?

8.3. В семье 5 детей. Какова вероятность того, что двое родились в понедельник?

8.4. Производится 5 выстрелов по цели, вероятность попадания в которую равна 0,4. Для разрушения цели достаточно трех попаданий. Найти: а) наименее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что цель будет разрушена.

8.5. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет: а) 2 раза; б) не более 8 раз; в) хотя бы один раз?

8.6. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов.

8.7. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,86. Какова вероятность того, что при пятикратной передаче сигнал будет принят: а) 4 раза; б) не менее 4 раз?

8.8. Считая, что в среднем 15% открывающихся малых предприятий становятся в течение года банкротами, найти вероятность того, что из 10 новых малых предприятий за это вре-

мя банкротами станут: а) одно предприятие; б) более трех предприятий.

8.9. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи:

а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

8.10. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Какова вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) более семи; в) не более семи?

8.11. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1200 знаков, равна 0,005. Какова вероятность того, что при наборе будет допущено: а) 6 ошибок; б) хотя бы одна ошибка?

8.12. Некачественные изделия составляют 2% всей продукции цеха. Какова вероятность того, что из 200 наудачу взятых изделий окажется: а) не более 5 некачественных изделий; б) два или три некачественных изделия?

8.13. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,005. Какова вероятность попадания в цель не менее 3 раз, если число выстрелов равно 800?

8.14. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

8.15. Завод отправил на базу 12000 доброкачественных изделий. Число изделий поврежденных при транспортировке, составляет в среднем 0,05%. Какова вероятность того, что на базу поступит: а) не более 3 поврежденных изделий; б) хотя бы 2 поврежденных?

8.16. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в течение часа, равно 120. Какова вероятность того, что за 2 минуты на АТС: а) не поступит ни одного вызова; б) поступит менее двух вызовов; в) поступит ровно три вызова?

8.17. Аэропорт в течение часа принимает в среднем 4 самолета. Какова вероятность того, что в течение двух часов в аэропорт придут: а) ровно 6 самолетов; б) не более 6 самолетов?

8.18. Среднее число заказов такси за одну минуту равно трем. Какова вероятность того, что за две минуты поступит: а) 4 вызова; б) менее 4-х вызовов; в) не менее 4-х вызовов?

8.19. Среднее число машин, прибывающих в автопарк за 1 минуту, равно двум. Какова вероятность того, что за 5 минут придет не менее 2 машин?

8.20. Средняя плотность бактерий в 1м^3 воздуха равна 100. Берется на пробу 2дм^3 воздуха. Какова вероятность того, что в нем будет обнаружена хотя бы одна бактерия?

8.21. Найти вероятность того, что среди 80 выловленных из пруда рыб карпа окажется от 55 до 70 штук, если известно, что численность карпа в водоеме составляет 75%.

8.22. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70%. Какова вероятность того, что из 700 посаженных семян будет 500 проросших?

8.23. Вероятность попадания в цель из орудия при отдельном выстреле равна 0,75. Какова вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет не менее 210, но не более 230 раз?

8.24. Вероятность рождения девочки равна 0,485. Какова вероятность того, что из 600 родившихся детей девочек будет 300?

8.25. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполняет: а) 150 студентов; б) не менее 100 студентов; в) не более 150 студентов?

8.26. Вероятность выхода из строя одного конденсатора равна 0,2. Какова вероятность того, что из 100 конденсаторов

выйдет из строя: а) ровно 20 конденсаторов; б) от 15 до 35 конденсаторов?

8.27. На склад поступает продукция трех фабрик, прием изделия первой фабрики на складе составляют 30%, второй – 32% и третьей 38%. В продукции первой фабрики 60% изделия высшего сорта, второй – 25%, третьей – 50%. Какова вероятность того, что среди 300 наудачу взятых со склада изделий число изделий высшего сорта заключено между 130 и 170?

8.28. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что из 1000 детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550?

8.29. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0,8.

8.30. Какова вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будет гореть от 1500 до 1600 ламп. Считать, что каждая лампа будет гореть в течение года с вероятностью 0,64.

ОТВЕТЫ: **8.1.** 0,879. **8.2.** 0,258. **8.3.** 0,1285. **8.4.** а) 2; б) 0,317. **8.5.** а) 0,291; б) $1 - 51/6^{10}$. **8.6.** 7. **8.7.** а) 0,383; б) 0,853. **8.8.** а) 0,35; б) 0,05. **8.9.** а) 0,3087; б) 0,1323; в) 0,9692. **8.10.** а) 0,302; б) 0,4362; в) 0,5638. **8.11.** а) 0,162; б) 0,998. **8.12.** а) 0,784; б) 0,342. **8.13.** 0,762. **8.14.** 0, 168. **8.15.** а) 0,151; б) 0,9826. **8.16.** а) 0,0183; б) 0,0916; в) 0,1954. **8.17.** а) 0,1221; б) 0,3134. **8.18.** а) 0,135; б) 0,1525; в) 0,8475. **8.19.** 0,999505. **8.20.** 0,1813. **8.21.** 0,8965. **8.22.** 0,023. **8.23.** 0,7258. **8.24.** 0,025. **8.25.** а) 0,019; б) 1; в) 0,938. **8.26.** а) 0,0997; б) 0,8944. **8.27.** 0,719. **8.28.** 0,8157. **8.29.** 0,456. **8.30.** 0,91.

§9. Дискретная случайная величина

Случайная величина называется *дискретной*, если ее возможные значения можно перенумеровать, т.е. они составляют конечное или бесконечное счетное множество.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан или рядом распределения или интегральной функцией распределения.

Пусть X – дискретная случайная величина, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество всех ее возможных значений, причем каждому событию ($X = x_i$) можно поставить в соответствие вероятность $P(X = x_i) = p_i$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Перечень всех возможных значений дискретной случайной величины и соответствующих этим значениям вероятностей является ее законом распределения. Такое соответствие обычно представляют в виде *ряда распределения*:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Сумма вероятностей в таблице распределения должна быть равна единице $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что в результате испытания она примет значение, меньшее некоторого x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретной случайной величины $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$.

Отметим некоторые свойства функции распределения:

$$1) 0 \leq F(x) \leq 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

3) Функция распределения $F(x)$ является функцией убывающей, т.е. для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $F(x_1) \leq F(x_2)$.

4) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток (α, β) равна приращению функции распределения $F(x)$ на этом промежутке:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Случайные величины, кроме законов распределения, могут быть представлены числовыми характеристиками, среди которых основными считаются характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана), характеристики рассеивания (дисперсия, среднее квадратичное отклонение) и характеристики формы (асимметрия и эксцесс).

Математическим ожиданием $M(X)$ (или m_x) дискретной случайной величины X называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

если множество возможных значений случайной величины конечно.

Модой M_o дискретной случайной величины X называется ее наиболее вероятное возможное значение (если оно единственно). Мода может не существовать, может иметь единственное значение, или иметь несколько значений.

Медианой случайной величины называется действительное число M_e , удовлетворяющее условию

$$P(X < M_e) = P(X \geq M_e),$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - m_x)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Для вычисления дисперсии пользуются формулой $D(X) = M(X^2) - m_x^2$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Случайная величина $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ называется *центрированной*; ее математическое ожидание $M(\overset{\circ}{X}) = 0$, а дисперсия $D(\overset{\circ}{X}) = D(X)$.

Случайная величина $Z = \frac{X - m_x}{\sigma_x} = \frac{\overset{\circ}{X}}{\sigma_x}$ называется *нормированной*; ее математическое ожидание $M(Z) = 0$, дисперсия $D(Z) = 1$.

Пример 1. Составить функцию распределения числа попаданий стрелком в мишень при пяти выстрелах, если для него вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в этой серии стрелок попадет в мишень от 2 до 4 раз.

Решение. Число попаданий в мишень при пяти выстрелах – это дискретная случайная величина X , возможные значения которой составляют конечное множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Результаты выстрелов являются независимыми случайными событиями. Значит, для вычисления вероятностей

$P(X = m)$, где $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, можно использовать формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. В нашем случае $n = 5$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, и при $m = 0$ $P_5(0) = C_5^0 (0,8)^0 (0,2)^5 = 0,00032$;

Далее аналогично:

$P_5(1) = 0,0064$; $P_5(2) = 0,0512$; $P_5(3) = 0,2048$; $P_5(4) = 0,4096$;
 $P_5(5) = 0,32768$.

Составляем ряд распределения:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Составим функцию распределения случайной величины X .

1. При $x \leq 0$ $F(x) = \sum_{x_i < 0} P(X = x_i) = 0$.

2. При $0 < x \leq 1$ $F(x) = \sum_{x_i < 1} P(X = x_i) = P(X = 0) = 0,00032$.

Значения $F(x)$ в последующих интервалах равны соответственно

0,00672; 0,05792; 0,26272; 0,67232 и 1,00000.

Таким образом, функция распределения для данного случая имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 0,00032, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0,00672, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 0,05792, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 0,26272, & \text{если } 3 < x \leq 4, \\ 0,67232, & \text{если } 4 < x \leq 5, \\ 1,00000, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 9.1.

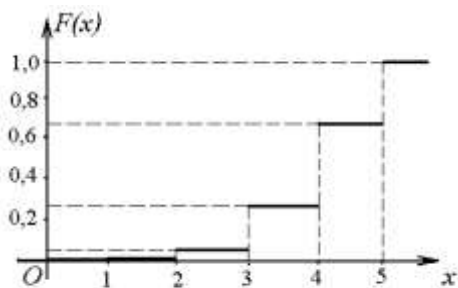


Рис. 9.1

Вероятность попадания стрелком от 2 до 4 раз может быть найдена либо как сумма соответствующих вероятностей

$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,6656$,
либо как приращение интегральной функции

$$F(5) - F(2) = 0,6656.$$

Пример 2. Ежемесячная прибыль валютного отдела сбербанка является случайной величиной X , распределение которой в условных денежных единицах дана в таблице.

X	15	17	19	21	23	25
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану распределения.

Решение. По определению математического ожидания

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 15 \cdot 0,1 + 17 \cdot 0,2 + 19 \cdot 0,3 + 21 \cdot 0,2 + 23 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,1 = 19,3.$$

Дисперсию вычислим по формуле $D(X) = M(X^2) - m_x^2$.

$$D(X) = 225 \cdot 0,1 + 289 \cdot 0,2 + 361 \cdot 0,3 + 441 \cdot 0,2 + 529 \cdot 0,1 + 625 \cdot 0,1 - (19,3)^2 = 392,2 - 372,49 = 19,71.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{19,71} \approx 4,44.$$

Мода данного распределения равна $M_o = 19$, так как вероятность этого возможного значения максимальна. Медиана M_e тоже равна 19, в исходной таблице это первое значение, удовлетворяющее условию $F(x) \geq 0,5$.

Составить ряд распределения, найти $F(x)$, построить многоугольник распределения и график $F(x)$; найти $M(X)$, $D(X)$.

9.1. Монета подбрасывается 5 раз. X -число выпадений герба.

9.2. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5; 0,6; 0,8. X -число попаданий в цель.

9.3. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. X -число извлеченных шаров.

9.4. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. X -число извлеченных белых шаров.

9.5. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты срабатывает правильно, равна 0,98. X -число опусканий монет в автомат до первого правильного срабатывания автомата, если опущено было 5 монет.

9.6. У дежурного имеется 7 разных ключей от комнаты. Вынув наудачу ключ, он пробует открыть дверь. Проверенный ключ второй раз не используется. X -число попыток открыть дверь.

9.7. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. X -число стандартных деталей среди отобранных.

9.8. Два стрелка делают по выстрелу в одну мишень. Вероятности попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым — 0,4. X -число попаданий в мишень.

9.9. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. X -число библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки.

9.10. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,1. Из партии берется изделие и проверяется его качество. Если оно оказалось нестандартным, вся партия бракуется. Если проверяемое изделие стандартно, на проверку берется следующее. Всего проверяется не более 5 изделий. X -число проверяемых изделий.

9.11. Подбрасываются две монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. X -число выпадений гербов на обеих монетах.

9.12. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. X -суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.

9.13. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,7. X -число сданных экзаменов.

9.14. Вероятность сдачи экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. X -число студентов, сдавших экзамен.

9.15. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $1/6$. X -число выигрышных билетов из четырех.

9.16. В партии 25 изделий 6 бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают 4 изделия. X -число бракованных изделий среди отобранных.

9.17. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника. X -число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку.

9.18. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. X -число попаданий при четырех бросках.

9.19. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. X -число красных карандашей в коробке.

9.20. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. X -число выстрелов, производимых охотником, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

9.21. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 разрешает или запрещает движение. X -число светофоров, пройденных автомобилем без остановки.

9.22. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос равна 0,9. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент обнаруживает незнание данного вопроса. X -число дополнительных вопросов, если экзаменатор имеет 6 дополнительных вопросов.

9.23. Стрелок стреляет до первого попадания. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. X -число попаданий, если стрелок может выстрелить 5 раз.

9.24. Имеется 7 лампочек, каждая из них с вероятностью 0,2 имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон, и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. X -число лампочек, которые будут испробованы.

9.25. Вероятность рождения мальчика и девочки одинаковы. X -число мальчиков в семье, имеющей 5 детей.

9.26. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попаданий в цель для каждого охотника 0,7. X -число выстрелов, которые произведут охотники.

9.27. Брошены две игральные кости. X -произведение выпавших очков.

9.28. У студента имеется 5 книг, в которых он должен найти статью. Вероятность того, что эта статья есть в книге, равна 0,7. Студент просматривает книги поочередно.

X -число просмотренных книг.

9.29. В первой коробке 10 ламп, из них 2 бракованные, во второй 16 ламп, из них 4 бракованные, в третьей – 12, из них 3 бракованные. X -число бракованных ламп при условии, что из каждой коробки взять наугад по одной лампе.

9.30. Вероятность того, что билет на авиарейс есть в кассе равна 0,4. Всего из аэропорта в этот день отправляется пять рейсов. X - порядковый номер рейса, на который куплен билет.

§10. Непрерывная случайная величина

Случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при всех x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения*, и определяется как предел отношения вероятности попадания в элементарный интервал к длине этого интервала Δx , когда $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Таким образом, непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения (интегральным законом), либо плотностью распределения вероятности (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины непрерывна в каждой точке области распределения:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0, \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Если $\beta \rightarrow \alpha$, то $P(X = \alpha) = F(\alpha) - F(\alpha) = 0$, т.е. вероят-

ность попадания непрерывной случайной величины в точку равна нулю.

Отметим теперь основные свойства плотности распределения:

$$1) f(x) = F'(x).$$

$$2) f(x) \geq 0,$$

$$(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0).$$

$$3) P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Геометрически эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$ (рис. 10.1).

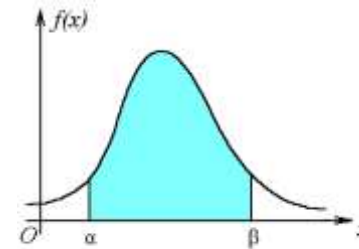


Рис. 10.1

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Геометрический смысл этого свойства заключается в том,

что площадь фигуры, заключенной между кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс, равна единице.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $f(x)$, определяется как несобственный интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Модой непрерывной случайной величины является точка максимума ее плотности распределения $f(x)$, т.е. корень уравнения $f'(x) = 0$; медианой распределения является корень уравнения $F(x) = 0,5$. Медиана

существует для любых распределений, в то время как математическое ожидание может и не существовать.

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется аналогично:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx - m_x^2.$$

Обобщением понятий математического ожидания и дисперсии являются *моменты распределения случайной величины*.

Начальным моментом k -го порядка ($k = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени X :

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральным моментом k -го порядка ($k = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины от ее центра распределения:

$$\mu_k = M(X - m_x)^k.$$

Из этих определений, в частности, следует, что

$$\nu_0 = \mu_0 = 1, \quad \nu_1 = m_x, \quad \mu_2 = D(X) = \sigma_x^2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Характеристиками формы кривых распределения являются:

— *асимметрия* (показатель «скошенности» распределения)

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3};$$

— *экцесс* (показатель «островершинности» распределения)

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Пример 1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a ; 2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$; 3) вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$;

4) показать найденную вероятность на графике.

Решение. 1) На основании свойства 4 плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} a \cos x dx = a \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = a(-1-1) = -2a = 1,$$

откуда $a = -0,5$. Тогда плотность распределения примет вид

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

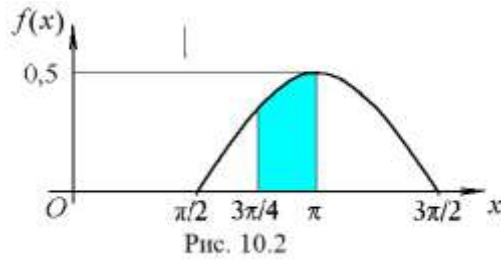
Найдем функцию распределения:

при $x \leq \pi/2$ $F(x) = 0$, так как на этом промежутке $f(x) = 0$;

при $\pi/2 < x \leq 3\pi/2$ функция $F(x)$ примет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (-0,5 \cos t) dt = -0,5 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^x = 0,5(1 - \sin x);$$

наконец, при $x > 3\pi/2$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/2} 0 dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-0,5 \cos t) dt + \int_{3\pi/2}^x 0 dt = -0,5 \sin t \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0,5(1+1) = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \pi/2, \\ 0,5(1 - \sin x) & \text{при } \pi/2 < x \leq 3\pi/2, \\ 1 & \text{при } x > 3\pi/2. \end{cases}$$

3) Находим вероятность попадания в интервал $(\pi/4; \pi)$:

$$P(\pi/4 < X < \pi) = -\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi} \cos x dx = -0,5 \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi} = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35.$$

На рис. 10.2 эта вероятность численно равна площади заштрихованной криволинейной трапеции.

Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - \cos x & \text{при } 0 \leq x < \pi/2, \\ 1 & \text{при } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

Требуется вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение. Сначала найдем дифференциальную функцию распределения.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x \geq \pi/2, \\ \sin x & \text{при } 0 \leq x < \pi/2. \end{cases}$$

Теперь найдем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\pi/2} x \sin x dx + \int_{\pi/2}^{\infty} x \cdot 0 dx = - \int_0^{\pi/2} x d(\cos x) = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

Дисперсию найдем по формуле

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2 :$$

$$D(X) = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx - 1.$$

Интегрируя дважды по частям, получаем:

$$\begin{aligned} D(X) &= - \int_0^{\pi/2} x^2 d(\cos x) - 1 = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x dx - 1 = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} x d(\sin x) - 1 = 2 \left(x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \right) - 1 = 2 \left(\pi/2 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} \right) - 1 = \pi - 3. \end{aligned}$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\pi - 3}.$$

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$. Требуется: 1) найти параметр a ; 2) найти интегральную функцию распределения; 3) вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b) ; 4) построить графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$; 5) найти числовые характеристики.

10.1.

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$a = \frac{\pi}{4}, \vartheta = \pi.$$

10.3.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-1), & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 1,5; \vartheta = 2.$$

10.5.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-3)^2, & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 0, \vartheta = 1.$$

10.7.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

$$a = \frac{\pi}{2}, \vartheta = \frac{5\pi}{6}.$$

10.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2, \\ ax^2, & \text{при } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$a = 1, \vartheta = 2.$$

10.4.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-3), & \text{при } 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{при } x < 3 \text{ или } x > 5. \end{cases}$$

$$a = 3, \vartheta = 4.$$

10.6.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

$$a = \frac{\pi}{3}, \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

10.8.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-1), & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 1,5; \vartheta = 1,9.$$

10.9.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2), & \text{при } 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{при } x < 2 \text{ или } x > 3. \end{cases}$$

$$a = 2, 5; \epsilon = 2, 8.$$

10.11.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x+3), & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = 1.$$

10.13.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-1), & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 1, \epsilon = 2.$$

10.15.

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = \frac{\pi}{6}.$$

10.17.

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & \text{при } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & \text{при } x < \frac{3\pi}{2} \text{ или } x > 2\pi. \end{cases}$$

$$a = \frac{3\pi}{2}, \epsilon = \frac{7\pi}{4}.$$

10.10.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-2), & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 1, 2; \epsilon = 1, 5.$$

10.12.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x+1), & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = 1.$$

10.14.

$$f(x) = \begin{cases} a(3x^2+3), & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = 1.$$

10.16.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x+2), & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 3. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = 2.$$

10.18.

$$f(x) = \begin{cases} a(6x+2), & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 3. \end{cases}$$

$$a = 0, \epsilon = 2.$$

10.19.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{при } -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < -1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a=1, \epsilon=2.$$

10.21.

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1), & \text{при } -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < -1 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a=1, \epsilon=2.$$

10.25.

$$f(x) = \begin{cases} a(3x^2 + 1), & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 4. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=3.$$

10.27.

$$f(x) = \begin{cases} a(2x+2), & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 4. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=1.$$

10.29.

$$f(x) = \begin{cases} a(4x+5), & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 3. \end{cases}$$

$$a=1, \epsilon=2.$$

10.20.

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x < \frac{\pi}{2} \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

$$a = \frac{\pi}{2}, \epsilon = \frac{3\pi}{4}.$$

10.22.

$$f(x) = \begin{cases} a(3x^2 + 8), & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 4. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=2.$$

10.26.

$$f(x) = \begin{cases} a(3x^2 + 1), & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=1.$$

10.28.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x, & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 3. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=1.$$

10.30.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

$$a=0, \epsilon=1.$$

ОТВЕТЫ: 10.1. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) 0,35; 5) $m_x = \pi$; $D(x) = \frac{\pi^2}{2} - 2$.

10.2. 1) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{8}$; 5) $m_x = \frac{3}{2}$; $D(x) = \frac{3}{20}$.

10.3. 1) $\frac{1}{2}$; 3) 0,625; 5) $m_x = \frac{19}{12}$; $D(x) = \frac{11}{144}$.

10.4. 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 5) $m_x = 4,333$; $D(x) = 0,225$.

10.5. 1) $\frac{3}{26}$; 3) ; 5) $m_x = 0,692$; $D(x) = 0,259$.

10.6. 1) $\frac{1}{2}$; 3) 0,25; 5) $m_x = 1,57$; $D(x) = 0,465$.

10.7. 1) 1; 3) 0,87; 5) $m_x = 2,14$; $D(x) = 0,14$.

10.8. 1) $\frac{1}{2}$; 3) 0,48; 5) $m_x = 1,589$; $D(x) = 0,076$.

10.9. 1) 2; 3) 0,39 ; 5) $m_x = 2,667$; $D(x) = 0,056$.

10.10. 1) $\frac{1}{4}$; 3) 0,262 ; 5) $m_x = 2,0625$; $D(x) = 0,771$.

10.11. 1) $\frac{1}{10}$; 3) 0,4 ; 5) $m_x = 1,133$; $D(x) = 0,315$.

10.12. 1) $\frac{1}{6}$; 3) 0,333; 5) $m_x = 1,222$; $D(x) = 0,284$.

10.13. 1) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{8}$; 5) $m_x = 1,667$; $D(x) = 0,111$.

10.14. 1) $\frac{1}{14}$; 3) 0,286 ; 5) $m_x = 1,286$; $D(x) = 0,29$.

10.15. 1) 1; 3) 0,5; 5) $m_x = 0,57$; $D(x) = 0,14$.

10.16. 1) $\frac{1}{15}$; 3) 0,533; 5) $m_x = 1,8$; $D(x) = 0,66$.

10.17. 1) -1; 3) 0,707 ; 5) $m_x = 5,28$; $D(x) = 0,14$.

10.18. 1) $\frac{1}{33}$; 3) 0,485 ; 5) $m_x = 1,909$; $D(x) = 0,583$.

10.19. 1) $\frac{1}{3}$; 3) 0,778; 5) $m_x = 1,25$; $D(x) = 0,6375$.

10.20. 1) -1 ; 3) 0,29; 5) $m_x = 2,57$; $D(x) = 0,14$.

10.21. 1) $\frac{2}{9}$; 3) 0,556; 5) $m_x = 1$; $D(x) = 0,5$.

10.22. 1) $\frac{1}{96}$; 3) 0,25; 5) $m_x = 2,667$; $D(x) = 1,067$.

10.23. 1) 1; 3) 0,5; 5) $m_x = 1$; $D(x) = 0,14$.

10.24. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) 0,5; 5) $m_x = 3,64$; $D(x) = 1,54$.

10.25. 1) $\frac{1}{20}$; 3) 0,65; 5) $m_x = 2,53$; $D(x) = 1,049$.

10.26. 1) $\frac{1}{10}$; 3) 0,2; 5) $m_x = 1,4$; $D(x) = 0,227$.

10.27. 1) $\frac{1}{24}$; 3) 0,125; 5) $m_x = 2,44$; $D(x) = 1,136$.

10.28. 1) $\frac{2}{9}$; 3) 0,111; 5) $m_x = 2$; $D(x) = 0,5$.

10.29. 1) $\frac{1}{33}$; 3) 0,333; 5) $m_x = 1,77$; $D(x) = 0,676$.

10.30. 1) $\frac{3}{8}$; 3) 0,125; 5) $m_x = 1,5$; $D(x) = 0,15$.

§11. Основные типы распределений

Биноминальное распределение

Пусть в каждом из n повторных независимых испытаний случайное событие A может произойти с одной и той же вероятностью p . Число появлений этого события в каждой серии n испытаний является случайной величиной. При этом вероятности событий $X = m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) вычисляются по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p,$$

а распределение случайной величины X называется *биномиальным*.

Для получения этих вероятностей можно использовать *производящую функцию*

$$\varphi(x) = (q + px)^n = q^n + nq^{n-1}px + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2x^2 + \dots + p^n x^n,$$

коэффициенты при x^m , в которой равны вероятностям $P_n(m)$.

Числовые характеристики биномиально распределенной случайной величины имеют вид:

математическое ожидание $m_x = np$,

дисперсия $D(X) = \sigma_x^2 = npq$,

асимметрия $A = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$ и эксцесс $E = \frac{1-6pq}{npq}$.

В том случае, когда вероятности появления события A во всех испытаниях различны и равны p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), производящая функция имеет вид

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i x).$$

Для случайной величины X – числа появлений события A в этой серии испытаний математическое ожидание и дисперсия определяются из соотношений:

$$m_x = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \sum_{i=1}^n p_i; \quad D(X) = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

Пример 1. Производится 10 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, асимметрию и эксцесс распределения.

Решение. Число независимых испытаний $n = 10$, вероятность появления события в каждом испытании $p = 0,7$. Число появлений события в данной серии испытаний является случайной величиной, распределенной по биномиальному закону. Находим ее числовые характеристики:

математическое ожидание $m_x = np = 10 \cdot 0,7 = 7$;

дисперсия $D(X) = npq = 10 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 2,1$;

среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = \sqrt{2,1} = 1,45$;

мода распределения – это наивероятнейшее число m_o , удовлетворяющее неравенству

$np - q \leq m_o \leq np + p$, $7 - 0,3 \leq m_o \leq 7 + 0,7$, $m_o = 7$; медиану

распределения найдем из неравенства $F(m_e) \geq 0,5$; используя производящую функцию $\varphi(x) = (0,3 + 0,7x)^{10}$, находим, что наименьшее значение функции распределения, удовлетворяющее этому неравенству, равно $F(7) = 0,514$, откуда следует, что $m_e = 7$; асимметрия распределения

$$A = \frac{1 - 2p}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 1,4}{1,45} = -\frac{0,4}{1,45} = -0,276;$$

$$\text{эксцесс } E = \frac{1 - 6pq}{npq} = \frac{1 - 6 \cdot 0,21}{2,1} = -\frac{0,26}{2,1} = -0,124.$$

11.1. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов равны $p = 0,2$. Найти числовые характеристики случайной величины X -числа элементов: m_x , $D(x)$, m_o , m_e , A , E .

11.2. Контрольная работа по теории вероятности состоит из 6 задач. Вероятность решить каждую задачу правильно для данного студента равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины X -числа правильно решенных задач, m_x и $D(x)$.

11.3. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить закон распределения случайной величины X -числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

11.4. Производится 9 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = 2/3$. Составить закон распределения случайной величины X -числа появлений события A при этих испытаниях.

11.5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов не менее 3 будут удачными?

Геометрическое распределение

Если в схеме Бернулли случайная величина X представляет собой число испытаний до первого появления события A , ее закон распределения называется *геометрическим*, а вероятности событий $X = m$ ($m = 1, 2, \dots$) вычисляются по формуле

$$P(m) = q^{m-1} p.$$

Числовые характеристики геометрического распределения таковы:

$$m_x = \frac{1}{p}, \quad \sigma_x^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Пример 2. Производится подбрасывание игрального кубика до первого выпадения шести очков. Какова вероятность того, что первое выпадение шестерки произойдет при втором подбрасывании игрального кубика?

Решение. Поскольку в данном случае $p = 1/6$ (вероятность появления шестерки при подбрасывании кубика) и $m = 2$, то

$$P(X = 2) = (1-p)^{2-1} p = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

11.6. Стрелок стреляет в цель до первого попадания. Найти m_x и $D(x)$ числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

11.7. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X -числа произведенных выстрелов и найти ее числовые характеристики.

11.8. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти m_x и $D(x)$ случайной величины X -числа произведенных выстрелов, считая, что в наличии есть всего 5 патронов. Составить закон распределения случайной величины X .

11.9. Игрок покупает лотерейные билеты до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. Найти $M(x)$, где случайная величина X -число купленных билетов, если игрок может купить: а) только 4 билета; б) неограниченное число билетов.

11.10. Вероятность производства нестандартной детали равна 0,05. Контролер проверяет партию деталей, беря по одной до первого появления нестандартной детали, но не более 3-х штук. Найти m_x и $D(x)$ числа проверенных стандартных деталей.

Гипергеометрическое распределение

Допустим, что из совокупности N элементов, среди которых имеется M элементов, обладающих некоторым свойством, производится выборка n элементов, где $n \leq N$ (задача о выборке). Распределение случайной величины X — числа элементов в выборке, обладающих указанным свойством, называется *гипергеометрическим*, а вероятности событий $X = m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) вычисляются по формуле

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Пример 3. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей окажется 3 стандартных.

Решение. Так как в данном случае $N = 12$, $M = 8$, $n = 5$, $m = 3$, то

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{12!}{5!7!} = \\ &= \frac{8!4!5!7!}{3!5!2!2!12!} = \frac{8!4!7!}{3!2!2!12!} = \frac{7!}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{14}{33}. \end{aligned}$$

11.11. В урне находится 6 белых и 4 черных шара. Наугад извлекаются 3 шара. Найти числовые характеристики случайной величины X -числа черных шаров в выборке.

11.12. Из партии, содержащей 16 телевизоров, среди которых 6 телевизоров фирмы N , выбраны случайным образом 5 телевизоров. Составить закон распределения случайной величины X -числа телевизоров фирмы N , оказавшихся в выборке, найти ее m_x и $D(x)$.

11.13. В садке содержится 15 сазанов и 5 карпов. Случайная величина X -число сазанов среди 4 выловленных рыб. Составить закон распределения случайной величины, найти ее m_x и $D(x)$.

Равномерное распределение

Распределение непрерывной случайной величины называется *равномерным* на отрезке $[a, b]$, если плотность вероятности на этом отрезке постоянна

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

а вне отрезка $f(x) = 0$.

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины имеют вид:

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 4. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 2]$. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Решение. Из условия задачи следует, что $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\beta - \alpha = 2 - (-3) = 5$; значит,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3, \\ \frac{x+3}{5} & \text{при } -3 < x < 2, \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Пример 5. Найти математическое ожидание случайной величины X , равномерно распределенной на отрезке $[2, 8]$.

Решение. Поскольку в данном случае $\alpha = 2$, $\beta = 8$, то

$$M(X) = \frac{8+2}{2} = 5.$$

Пример 6. Найти дисперсию случайной величины X , равномерно распределенной на отрезке $[4, 6]$.

Решение. Так как в данном случае $\alpha = 4$, $\beta = 6$, то

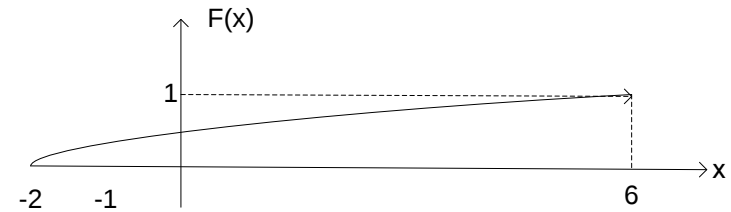
$$D(X) = \frac{(6-4)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{3}.$$

11. 14. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 2]$. Найти функцию и плотность распределения этой случайной величины.

11.15. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная

величина X , имеющая равномерное распределение. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19ч. 22мин. до 19ч. 46м.

11.16. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид, указанный на рисунке. Найти аналитические выражения для $F(x)$, $f(x)$, $M(x)$ и $D(x)$.



11.17. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[4, 7]$. Найти $F(x)$, $f(x)$, $M(x)$ и $\sigma(x)$, вероятность попадания в интервал $(6; 6,81)$.

Показательное распределение

Распределение непрерывной случайной величины называется *показательным* (экспоненциальным), если ее дифференциальная функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Характеристики показательного распределения связаны с параметром λ :

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности как статистическая модель безотказной работы сложных систем.

Если случайная величина T представляет собой время безотказной работы системы, то вероятность отказа системы за промежуток времени $(0; t)$ определяется равенством

$$P(T < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

где λ — так называемая *интенсивность отказов* (т.е. среднее число отказов в единицу времени).

Вероятность безотказной работы системы в течение времени t называется *функцией надежности* и имеет вид

$$R(t) = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

Пример 7. Записать плотность распределения и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 7$.

Решение. Записываем плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 7e^{-7x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Находим функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-7x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Пример 8. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , плотность распределения которой задана функцией $p(x) = 5e^{-5x}$ ($x \geq 0$).

Решение. Так как для показательного закона

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

и по условию $\lambda = 5$, то

$$D(X) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04, \quad \sigma(X) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

11.18. Время выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 \cdot e^{-0,2t} & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}. \quad \text{Найти функцию распределения, } M(x), D(x); \text{ вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.}$$

11.19. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,4$. Найти $f(x)$, $F(x)$, $M(x)$, $\sigma(x)$, а также вероятность попадания случайной величины в интервал $(0,25; 5)$.

11.20. Случайная величина X , которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t) = 0,003e^{-0,003t}$, $t \geq 0$. Найти среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент проработает не менее 400 часов.

11.21. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0,04 \cdot e^{-0,04x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \text{ Найти вероятность того, что в}$$

результате испытания X попадет в интервал $(1, 2)$.

11.22. Найти $M(x)$, $D(x)$, $f(x)$ случайной величины с заданной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-10x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

Пуассоновское распределение

Если число испытаний n достаточно велико, вероятность p близка к нулю (или к единице), то распределение случайной величины X называется *пуассоновским*, а вероятности событий $X = m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) вычисляются по приближенной формуле Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np,$$

причем степень приближения тем выше, чем больше число испытаний n .

Числовые характеристики распределения Пуассона таковы:

$$m_x = \sigma_x^2 = \lambda.$$

Пример 9. На факультете обучается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для k студентов данного факультета? Вычислить эту вероятность для значений $k = 0, 1, 2, 3$.

Решение. Поскольку $n = 500$ является достаточно большим, а $p = 1/365$ – достаточно малым, то можно считать, что случайное число X студентов, родившихся 1 сентября, подчиняется закону распределения Пуассона с параметром $\lambda = np = 500/365 = 1,36986$.

Получаем $p_0 = P(X = 0) = e^{-\lambda} \approx 0,2541$. Последовательно находим:

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \lambda p_0 \approx 0,3481;$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{2} p_1 \approx 0,2385;$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{\lambda}{3} p_2 \approx 0,1089.$$

11.23. В магазин отправлены 1000 бутылок воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти: а) среднее число разбитых бутылок; б) вероятность того, что магазин получит более 2-х разбитых бутылок.

11.24. Случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0,324$. Найти $M(x)$ и $\sigma(x)$.

11.25. При введении вакцины иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 10000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребенка?

Нормальное распределение

Нормальным называется распределение непрерывной случайной величины, дифференциальная функция (плотность распределения) которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < a < \infty, \quad \sigma > 0.$$

Параметр a является математическим ожиданием случайной величины, параметр σ – ее средним квадратическим отклонением. Нормальное распределение с указанными параметрами обозначается $N(a, \sigma)$.

Интегральная *функция нормального распределения* нормированной случайной величины $N(0, 1)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вероятность попадания случайной величины $N(a, \sigma)$ в интервал (α, β) равна приращению интегральной функции Лапласа: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$,

$$\text{где } z_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}, \quad z_2 = \frac{\beta - a}{\sigma}, \quad \text{а } \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отсюда $F(z) = 0,5 + \Phi(z)$.

Вероятность заданного отклонения случайной величины от ее математического ожидания вычисляется как удвоенная функция Лапласа:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(t), \quad \text{где } t = \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Для нормального распределения асимметрия и эксцесс равны нулю, а мода и медиана совпадают с математическим ожиданием, т.е. равны a .

Пример 10. Измерение дальности до объекта сопровождается случайной ошибкой, подчиненной нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ м. Найти: а) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной более чем на 150 м; б) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

Решение. Пусть случайная величина X – случайная ошибка измерения дальности. По условию она распределена по закону $N(0, 100)$.

а) Событие $A = \{\text{измеренная дальность не превзойдет истинной}\}$ означает, что ошибка измерения $X \leq 150$. Тогда искомая вероятность

$$P(-\infty < X \leq 150) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \text{ где } z_1 = -\infty, \quad z_2 = \frac{150}{100} = 1,5.$$

Из таблицы значений функции $\Phi(z)$ находим:

$$\Phi(-\infty) = -\Phi(\infty) = -0,5; \quad \Phi(1,5) = 0,4332.$$

$$\text{Значит, } P(X \leq 150) = 0,4332 - (-0,5) = 0,9332.$$

б) Вероятность заданного отклонения $P(|X| < 150) = 2\Phi(t)$,

$$\text{где } t = \frac{150}{100} = 1,5. \text{ Отсюда}$$

$$P(|X| < 150) = 2\Phi(1,5) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

11.26. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$. Найти вероятность того, что измерения детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25.

11.27. Случайная величина X распределена по закону $N(10; 2)$. Найти вероятность того, что в результате испытания она примет значение из интервала $(12, 14)$.

11.28. Случайная величина X – годовая процентная ставка потребительского кредита подчинена нормальному закону

распределения $N(12; 1,75)$. Найти вероятность того, что в текущем году процентная ставка не превысит 15,5.

11.29. Размер отчислений предприятия в социальные фонды зависит от текущей прибыли и является случайной величиной, подчиненной закону $N(27, 6)$. Найти доверительный интервал для случайной величины отчислений при заданной вероятности $p = 0,95$.

11.30. Улов камбалы является случайной величиной, подчиненной закону $N(2,4; 0,6)$. Найти доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,9 окажется очередное значение улова.

ОТВЕТЫ: **11.1.** $m_x = 1,6$; $D(x) = 1,28$; $m_0 = 1$;

$m_e = 2$ $A = 0,53$; $E = 0,03$. **11.2.** $m_x = 4,2$; $D(x) = 1,26$.

11.3. 11.4. 11.5. 0,99. **11.6.** $m_x = 2,5$; $D(x) = 3,75$.

11.7. $m_x = 1,624$; $D(x) = 0,811$. **11.8.** $m_x = 3,3616$; $D(x) = 2,57$.

11.9. $m_x = 3,439$; $m_x = 10$. **11.10.** $m_x = 2,8525$; $D(x) = 0,225$.

11.11. $m_x = 1,2$; $D(x) = 0,56$. **11.12.** $m_x = 1,875$; $D(x) = 0,8594$.

11.13. $m_x = 3$; $D(x) = 12/19$. **11.14. 11.15.** 0,4. **11.16.** $M(x) = 2$,

$D(x) = 16/3$. **11.17.** $M(x) = 5,5$; $\delta(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 0,27. **11.18.** $M(x) = 5$,

$D(x) = 25$; 0,451. **11.19.** $\sigma(x) = 5/2$; 0,77. **11.20.** 333 1/3; 0,3.

11.21. 0,038. **11.22.** $m_x = 0,1$; $D(x) = 0,01$. **11.23.** 2; 0,323.

11.24. 0,324; 0,569. **11.25.** 0,3679; 0,1839; 0,0613; 0,0153.

11.26. 0,7888. **11.27.** 0,1359. **11.28.** 0,9772. **11.29.** 15,34;

38,76. **11.30.** 1,413; 3,387.

§ 12. Основы выборочного метода

12.1. Первичная обработка результатов наблюдений

Математическая статистика оперирует количественными признаками случайных массовых явлений, которые проявляются в виде значений некоторой случайной величины (случайного признака).

Разработка методов регистрации, описания и анализа экспериментального материала составляет *предмет математической статистики*.

Основными задачами математической статистики являются определение неизвестного закона распределения наблюдаемой случайной величины или систем,

статистическая проверка гипотез о параметрах и законах распределения, нахождение оценок параметров распределения.

Конечное или бесконечное множество всех возможных значений случайного признака называется *генеральной совокупностью*.

Выборочной совокупностью, или просто *выборкой* объема n из генеральной совокупности называется последовательность n значений случайной величины X , полученных в n независимых повторениях эксперимента. Выборка может быть представлена в виде простого перечня значений случайного признака (при малом объеме n) $x_1, x_2, \dots, x_n$ или в виде *вариационного ряда* – таблицы значений признака $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ и им соответствующих частот m_i .

Схема составления вариационного ряда такова:

1) среди всех $x_1, x_2, \dots, x_n$ найти $x_{\text{наим}}$ и $x_{\text{наиб}}$, вычислить *размах вариации* $R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}$;

2) выбрать количество разрядов k , руководствуясь условием $k \leq 5 \lg n$ (обычно $k = 8 \div 12$) и вычислить *шаг ряда*

$$h = \frac{R}{k};$$

3) разбить промежуток $(x_{\text{наим}}, x_{\text{наиб}})$ на k интервалов точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$; при этом границы разбиения должны быть удобными для дальнейших вычислений;

4) подсчитать количество значений признака

оказавшихся в интервалах $(x^{(i-1)}, x^{(i)})$, т.е. определить частоту m_i попадания случайного признака X в i – й интервал (или относительную частоту $\omega_i = \frac{m_i}{n}$);

5) составить таблицу, в которой каждому интервалу $(x^{(i-1)}, x^{(i)})$ соответствует частота m_i , показывающая, сколько значений случайного признака из выборочной совокупности оказалось в этом интервале; при этом следует заранее решить, какая из границ, левая или правая, принадлежит данному интервалу (табл. 10.1).

Таблица 12.1

Интервалы значений признака X	$x^{(0)} - x^{(1)}$	$x^{(1)} - x^{(2)}$	. . .	$x^{(k-1)} - x^{(k)}$
Дискретные значения признака x_i	x_1	x_2	. . .	x_k
Частоты признака m_i	m_1	m_2	. . .	m_k
Относительные частоты ω_i	ω_1	ω_2	. . .	ω_k

Интервальный ряд может быть преобразован в *дискретный вариационный ряд*. Для этого в каждом интервале $(x^{(i-1)}, x^{(i)})$ надо выбрать какое-либо значение x_i (обычно это середина интервала).

Накопленной частотой S_i признака x_i (или соответствующего интервала) называется сумма всех предыдущих частот, включая частоту i -го признака:

$$S_i = \sum_{j=1}^i m_j.$$

Аналогично: *накопленная относительная частота*

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i \omega_j.$$

Очевидно, что $S_k = \sum_{j=1}^k m_j = n; \quad \sigma_k = \sum_{j=1}^k \omega_j = 1.$

Накопленная относительная частота является *статистической функцией распределения* случайного признака и обозначается $F^*(x)$.

Графической иллюстрацией интервального вариационного ряда является *гистограмма* (рис. 12.1),

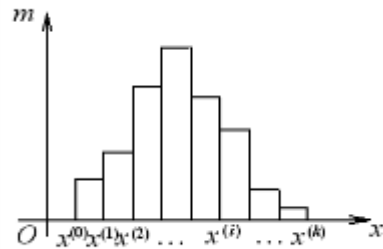


Рис. 12.1

дискретного вариационного ряда – *полигон (многоугольник) частот* (рис. 12.2); графическая иллюстрация накоп-

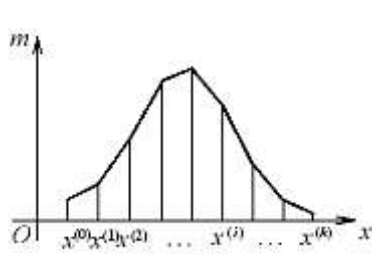


Рис. 12.2

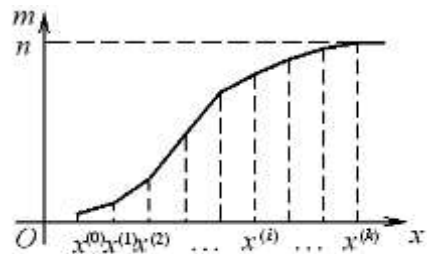


Рис. 12.3

ленной частоты называется *кумулятивной кривой* (рис. 12.3), график статистической функции распределения показан на рис. 12.4.

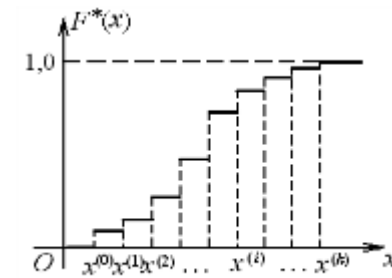


Рис. 12.4

Полигон частот по форме аналогичен графику плотности распределения случайной величины в выборочной совокупности.

Пример 1. По данным 55 наблюдений составить интервальный вариационный ряд, преобразовать его в дискретный ряд, вычислить накопленные частоты и составить статистическую функцию распределения.

17 19 23 18 21 15 16 13 20 18 15 20 14 20 16 14 20 19 15 19
16 19 15 22 21 12 10 21 18 14 14 17 16 13 19 18 20 14 16 20
19 17 18 18 21 17 19 17 13 17 11 18 19 19 17

Размах вариации $R = 24 - 10 = 14$; из неравенства $k \leq 5 \lg 55 = 8,7$ определяем, что число разрядов можно принять равным 7. Тогда длина интервала $h = \frac{14}{7} = 2$. Условимся считать, что каждому интервалу, кроме последнего, принадлежит только левая граница. Результаты группировки и вычислений записаны в таблице (12.2).

Таблица 12.2

Границы интервалов	Середина интерв. x_i	Частота признака m_i	Накопл. частота S_i	Относит. частота ω_i	Статистич. функ. распр. $F^*(x)$
10 – 12	11	2	2	0,0364	0,0364
12 – 14	13	4	6	0,0727	0,1091
14 – 16	15	8	14	0,1455	0,2546
16 – 18	17	12	26	0,2182	0,4728
18 – 20	19	16	42	0,2909	0,7637
20 – 22	21	10	52	0,1818	0,9455
22 – 24	23	3	55	0,0545	1,0000

12.1. Ошибки l в третьем знаке при округлении чисел заданы в таблице

-1,000	-0,998	-0,993	-0,975	-0,911	-0,688	0,068	0,604	-0,986	0,645
0,746	0,677	-0,659	-0,048	-0,355	0,297	0,981	-0,766	0,452	-0,213
0,747	-0,162	-0,857	0,317	-0,382	0,853	0,555	-0,347	0,922	0,653
-0,383	-0,172	0,414	0,030	0,459	0,483	0,769	0,265	0,669	-0,365
-0,213	0,004	-0,059	-0,388	0,200	0,692	0,356	-0,091	0,245	0,295

Построить вариационный ряд и найти $\bar{l}$, S_l^2 для выборки случайной величины l .

12.2. В таблице приведен ряд моментов t срока работы электрических лампочек (в годах). Построить вариационный ряд, найти $\bar{t}$ и S_t^2 выборки.

0,001	0,001	0,003	0,012	0,046	0,169	0,763	1,620	0,007	1,728
2,067	1,824	0,187	0,646	0,389	1,046	4,672	0,113	1,295	0,500
1,754	0,543	0,074	1,075	0,370	2,612	1,504	0,396	3,245	1,751
0,369	0,534	1,227	0,724	1,307	1,353	2,157	1,000	1,800	0,382
0,500	0,697	0,636	0,365	0,916	1,871	1,134	0,606	0,975	1,043

12.3. Время t (в минутах) ожидания водителем зеленого света на перекрестке представлено случайной выборкой (табл.). Составить вариационный ряд, определить $\bar{t}$ и S_t^2 .

0,000	0,001	0,003	0,012	0,044	0,156	0,534	0,802	0,007	0,822
0,873	0,838	0,170	0,476	0,322	0,648	0,991	0,107	0,726	0,393
0,827	0,419	0,071	0,659	0,309	0,927	0,773	0,327	0,961	0,826
0,308	0,414	0,707	0,515	0,729	0,742	0,884	0,632	0,835	0,318
0,394	0,502	0,471	0,306	0,600	0,846	0,678	0,454	0,623	0,648

12.4. Наблюдения за межремонтными интервалами T (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты, приведенные в таблице. Построить вариационный ряд выборки, определить $\bar{T}$ и S_T^2 .

0,000	0,000	0,002	0,006	0,023	0,084	0,382	0,810	0,003	0,864
1,033	0,912	0,093	0,323	0,194	0,522	2,336	0,057	0,648	0,250
0,877	0,271	0,037	0,537	0,183	1,306	0,752	0,198	1,623	0,875
0,184	0,276	0,613	0,362	0,654	0,676	1,079	0,500	0,900	0,191
0,250	0,348	0,318	0,182	0,3458	0,936	0,567	0,303	0,487	0,522

12.5. При обследовании диаметров карданных валов автомобиля, выпускаемых заводов, были зафиксированы отклонения от номинала Δd (мкм), приведенные в таблице. Найти $\Delta \bar{d}$, $S_{\Delta d}^2$.

-8,700	-1,455	-4,665	-2,250	2,500	-1,645	0,425	0,650	-1,220	-4,410
-6,280	8,550	3,170	0,360	2,450	1,590	-5,435	4,495	5,140	-6,520
7,655	-2,215	7,045	8,650	-1,330	1,745	-1,460	-4,415	-0,280	3,785
-4,790	1,240	-0,475	-7,440	-1,805	-0,295	-2,695	-0,390	1,145	0,970
2,075	-6,910	0,645	-11,805	-5,435	-5,420	1,590	1,835	-4,960	2,645

12.6. Для определения надежности металлорежущих станков на заводе фиксировались значения наработки на отказ (время τ непрерывной работы до первого отказа). Полученные данные для τ (в месяцах) приведены в таблице.

0,031	0,244	0,098	0,195	0,759	0,231	0,415	0,442	0,260	0,106
0,62	4,078	0,902	0,407	0,736	0,577	0,079	1,312	1,574	0,058
3,206	0,197	2,698	4,249	0,252	0,602	0,243	0,106	0,340	1,073
0,095	0,522	0,321	0,045	0,221	0,338	0,172	0,330	0,509	0,484
0,662	0,052	0,442	0,013	0,079	0,079	0,577	0,618	0,090	0,777

Определить среднюю наработку на отказ $\bar{\tau}$ и S_{τ}^2 .

12.7. Интервал движения поездов метро составляет 2 минуты. В таблице приведены значения случайной величины X – времени ожидания пассажиром поезда. Составить интервальный вариационный ряд и найти среднее время ожидания.

0,000	0,002	0,007	0,025	0,089	0,312	1,068	1,604	0,014	0,045
1,747	1,677	0,341	0,952	0,645	1,297	1,981	0,214	1,452	0,787
1,654	0,838	0,143	1,317	0,618	1,853	1,555	0,653	1,922	1,653
0,617	0,828	1,413	1,030	1,459	1,483	1,769	1,265	1,669	0,635
0,787	1,004	0,941	0,612	1,200	1,692	1,356	0,908	1,245	1,295

12.8. В таблице приведены численные значения промежутков времени Δt (в минутах) между появлениями клиентов в некотором банке. Построить вариационный ряд и найти $\Delta \bar{t}$ и $S_{\Delta t}^2$.

0,000	0,002	0,007	0,025	0,091	0,339	1,527	3,239	0,014	3,457
4,134	3,647	0,374	1,293	0,778	2,091	9,344	0,226	2,590	1,000
3,507	1,086	0,148	2,150	0,740	5,223	3,007	0,791	6,492	3,502
0,738	1,069	2,453	1,447	2,614	2,706	4,314	2,001	3,600	0,764
1,000	1,394	1,272	0,730	1,832	3,742	2,267	1,211	1,949	2,086

12.9. В таблице приведены значения прибыли 50 фирм, принадлежащих одной корпорации, Q (1000 усл. ед.). Найти среднее значение прибыли по всем фирмам и выборочную дисперсию.

4,744	9,127	7,201	8,650	11,53 6	9,013	10,25 5	10,39 0	9,268	7,354
6,232	15,10 3	11,90 2	10,21 6	11,47 0	10,95 4	6,739	12,69 7	13,08 4	6,088
14,59 3	8,671	14,22 7	15,19 0	9,202	11,04 7	9,124	7,351	9,832	12,27 1
7,126	10,74 4	9,715	5,536	8,917	9,823	8,383	9,766	10,68 7	10,58 2
11,24 5	5,854	10,38 7	2,917	6,739	6,748	10,95 4	11,10 1	7,024	11,58 7

12.10. Для проверки оборудования размельчения руды были случайным образом выбраны и измерены 50 образцов минерала. Результаты измерений приведены в таблице. Найти средний диаметр $\bar{d}$ образцов и S_d^2 .

0,030	0,559	0,155	0,407	2,784	0,518	1,185	1,297	0,614	0,171
0,081	30,020	3,554	1,155	2,664	1,889	0,114	6,038	7,815	0,073 7
21,370	0,412	16,74 0	31,82 0	0,587	2,010	0,558	0,171	0,894	4,545
0,147	1,642	0,827	0,051	0,486	0,889	0,340	0,856	1,581	1,474
2,293	0,063	1,294	0,009	0,114	0,114	1,889	2,083	0,138	2,881

12.11. В таблице приведены значения промежутков времени τ (в минутах) между вызовами такси в городе Гродно. Найти $\bar{\tau}$, S_{τ}^2 .

0,000	0,000	0,000	0,003	0,011	0,042	0,191	0,405	0,002	0,432
0,517	0,456	0,047	0,162	0,097	0,261	0,168	0,028	0,324	0,125
0,438	0,136	0,019	0,269	0,092	0,653	0,376	0,099	0,812	0,438
0,092	0,134	0,307	0,181	0,327	0,338	0,539	0,250	0,450	0,096
0,125	0,174	0,159	0,091	0,229	0,468	0,283	0,151	0,244	0,261

12.12. Имеются данные о годовой мощности M (тыс. т.) предприятия цементной промышленности. Построить интервальный ряд, найти $\bar{M}$.

11,24 0	18,54 5	15,33 5	17,75 0	22,56 0	18,35 5	20,42 5	20,65 0	18,78 0	15,59 0
13,72 0	28,50 5	23,17 0	20,36 0	22,45 0	21,59 0	14,56 5	24,49 5	25,14 0	13,48 0
27,65 5	17,78 5	27,04 5	28,65 0	18,67 0	71,74 5	18,54 0	15,58 5	19,72 0	23,78 5
15,21 0	21,24 0	19,52 5	12,56 0	18,19 5	19,70 5	17,30 5	19,61 0	21,14 5	20,97 0
22,07 5	13,09 0	20,64 5	8,195	14,56 5	14,58 0	21,59 0	21,83 5	15,04 0	22,64 5

12.13. В фирме, производящей микросхемы для компьютеров, была сделана проверка их качества. Для этого испытаны в жестком режиме $n = 50$ образцов и зафиксированы моменты τ их выхода из строя.

0,056	0,117	0,085	0,108	0,175	0,114	0,141	0,144	0,120	0,087
0,720	0,317	0,186	0,140	0,173	0,159	0,079	0,212	0,226	0,071
0,291	0,108	0,274	0,321	0,118	0,161	0,117	0,087	0,132	0,198
0,084	0,158	0,129	0,064	0,113	0,131	0,103	0,130	0,152	0,149
0,166	0,068	0,144	0,042	0,079	0,079	0,159	0,163	0,082	0,176

Построить интервальный вариационный ряд, найти τ , S_{τ}^2 .

12.14. На стоянке такси в микрорайоне города были зафиксированы интервалы времени x (в минутах) между появлениями машин. Найти $\bar{x}$, S_x^2 .

0,002	0,008	0,033	0,124	0,455	1,693	7,634	16,20 0	0,068	17,28 0
20,67 0	18,24 0	1,869	6,465	3,890	10,46 0	46,72 0	1,132	13,95 0	5,002
17,54 0	5,428	0,741	10,75 0	3,698	26,12 0	15,04 0	3,955	32,46 0	17,51 0
3,690	5,343	12,27 0	7,236	13,07 0	13,53 0	21,57 0	10,00 0	18,00 0	3,822
5,000	6,971	6,360	3,651	9,158	18,71 0	11,34 0	6,056	9,747	10,43 0

12.15. По данным выборочного обследования получено распределение семей по среднему душевому доходу (в усл. ед.).

10,98 4	22,67 2	17,53 6	21,40 0	29,09 6	22,36 8	25,68 0	26,04 0	23,04 8	17,94 4
14,95 2	38,60 8	30,07 2	25,57 6	28,92 0	27,54 4	16,30 4	32,19 2	33,22 4	14,56 8
37,24 8	21,45 6	36,27 2	38,84 0	22,87 2	27,79 2	22,66 4	17,93 6	24,55 2	31,05 6
17,33 6	26,98 4	24,24 0	13,09 6	22,11 2	24,52 8	20,68 8	24,37 6	26,83 2	26,55 2
28,32 0	13,94 4	26,03 2	6,112	16,30 4	16,32 8	27,54 4	27,93 6	17,06 4	29,23 2

Построить гистограмму распределения частот и найти среднедушевой доход семьи $\bar{D}$ в выборке.

Ответы: 12.1 $\bar{l} = 0,025$; $S_l^2 = 0,34$. 12.2. $\bar{t} = 1,06$; $S_t^2 = 0,752$.
12.3. $\bar{t} = 0,5$; $S_t^2 = 0,0097$. 12.4. $\bar{T} = 0,592$; $S_T^2 = 0,136$.
12.5. $\Delta d = -0,83$; $S_{\Delta d}^2 = 18,6$. 12.6. $\bar{\tau} = 0,719$; $S_\tau^2 = 0,723$.
12.7. $\bar{X} = 1,022$. 12.8. $\Delta t = 2,0$; $S_{\Delta t}^2 = 3,042$. 12.9. $\bar{Q} = 9,52$;
 $S_Q^2 = 7,025$. 12.10. $\bar{d} = 4,67$; $S_d^2 = 39,25$. 12.11. $\bar{\tau} = 0,262$;
 $S_\tau^2 = 0,047$. 12.12. $\bar{M} = 19,48$. 12.13. $\tau = 0,314$; $S_\tau^2 = 0,04$.
12.14. $\bar{x} = 9,738$; $S_x^2 = 55,316$. 12.15. $\bar{D} = 23,78$.

§ 13. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Пусть θ – неизвестный параметр генеральной совокупности. Его приближенное значение θ^* , найденное по результатам случайной выборки, называется *точечной оценкой* генерального параметра. Величина θ^* случайна и зависит от значений признака $x_1, x_2, \dots, x_n$, составивших выборочную совокупность:

$$\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Выборочная оценка θ^* может достойно представлять неизвестный параметр θ , если она обладает следующими свойствами:

- 1) *несмещенность*, когда $M[\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \theta$;
- 2) *состоятельность*, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1$;
- 3) несмещенная оценка считается *эффективной*, если $M(\theta^* - \theta)^2$ минимально.

Известно, что выборочная средняя $\bar{x}$ является несмещенной оценкой генеральной средней a , так как $M(\bar{x}) = a$;

выборочная дисперсия $S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_i$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии, так как

$M(S_x^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2$. Поэтому при малых объемах выборки n пользуются «исправленной» дисперсией

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_i.$$

Если случайная величина X в генеральной совокупности распределена по нормальному закону $N(a, \sigma_x)$, то выборочная средняя $\bar{x}$ и дисперсия S_x^2 являются состоятельными и эффективными оценками соответствующих генеральных параметров.

Интервальной оценкой генерального параметра θ называется *доверительный интервал* $(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon)$, который с вероятностью α содержит параметр θ , т.е. $P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = \alpha$. Вероятность α принято называть *доверительной вероятностью*. Если случайная величина X распределена по закону $N(a, \sigma_x)$, причем параметр σ_x неизвестен, то для интервальной оценки генеральной средней используется слу-

чайная величина $T = \frac{\bar{x} - a}{\hat{S}_x} \sqrt{n}$, подчиненная t – распре-

лению Стьюдента. Ее значения t_α , соответствующие доверительной вероятности α и числу степеней свободы $n-1$, находят в таблице распределения Стьюдента (Приложение). Доверительный интервал для генеральной средней в этом случае имеет следующий вид:

$$\bar{x} - \frac{t_\alpha \hat{S}_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\alpha \hat{S}_x}{\sqrt{n}}.$$

Для интервальной оценки генеральной дисперсии используется случайная величина $\chi^2 = \frac{\hat{S}_x^2(n-1)}{\sigma_x^2}$, значения

которой при заданной вероятности α и числе степеней свободы $n-1$ можно найти в табл. 4 Приложений. В этом случае доверительный интервал для генеральной диспер-

сии имеет вид $\frac{S_x^2(n-1)}{\chi_1^2} < \sigma_x^2 < \frac{S_x^2(n-1)}{\chi_2^2}$, где χ_1^2 и χ_2^2 бер-

утся из приложения для вероятностей $0,5(1-\alpha)$ и $0,5(1+\alpha)$ соответственно.

В том случае, когда объем выборки n достаточно велик, для интервального оценивания генеральной средней вид закона распределения X уже не имеет значения, так как выборочная средняя $\bar{x}$ как сумма n случайных величин согласно центральной предельной теореме распределена асимптотически нормально. При этом случайная величина

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\hat{S}_x} \sqrt{n} \text{ подчинена закону } N(0;1).$$

Тогда интервальная оценка генеральной средней выгля-

дит так: $\bar{x} - \frac{tS_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{tS_x}{\sqrt{n}}$, где $t = \Phi^{-1}(\alpha/2)$, а

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Пример 1. Произведено 10 независимых измерений напряжения в сети, отклонение которого от номинала распределено нормально с неизвестными параметрами.

Найти интервальные оценки для неизвестных математического ожидания и дисперсии отклонения напряжения при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

Порядк. измерения	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta U, \text{ в}$		2,5	2,0	-2,3	1,9	-2,1	2,3	2,4	-2,5	1,5	-1,7

Решение. Вычислим выборочную среднюю и дисперсию случайной величины ΔU .

$$\overline{\Delta U} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \Delta U_i = 0,4(\hat{a}); \quad S_{\Delta U}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (\Delta U_i - 0,4)^2 = 4,33.$$

Далее из Приложений при $\alpha = 0,95$ и $\nu = n - 1 = 9$ находим $t_\alpha = 2,26$.

Вычисляем предельное отклонение ε :

$$\varepsilon = 2,26 \sqrt{\frac{4,33}{10}} \approx 1,58.$$

Находим доверительный интервал для генеральной средней:

$$\overline{\Delta U} - \varepsilon = -1,18; \quad \overline{\Delta U} + \varepsilon = 1,98, \text{ значит } -1,18 < \Delta U < 1,98.$$

Теперь из Приложения при $\nu = n - 1 = 9$ и

$p_1 = 0,5(1 - 0,95) = 0,025$, $p_2 = 0,5(1 + 0,95) = 0,975$ находим: $\chi_1^2 = 20,7$ и $\chi_2^2 = 3,275$.

Тогда $\frac{S_{\Delta U}^2(n-1)}{\chi_1^2} = 1,89$; $\frac{S_{\Delta U}^2(n-1)}{\chi_2^2} = 11,91$, т.е. довери-

тельный интервал для σ_x^2 имеет границы (1,89 ; 11,91).

Пример 2. Результаты измерений диаметра валика ротора электродвигателя сведены в интервальный вариационный ряд:

X , $мм$	18,70- 18,72	18,72- 18,74	18,74- 18,76	18,76- 18,78	18,78- 18,80	18,80- 18,82	18,82- 18,84	18,84- 18,86	18,86- 18,88
m	5	27	42	78	51	26	8	2	1

Требуется: 1) определить числовые характеристики распределения, считая их неизвестными; 2) найти интервальную оценку генеральной средней при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

Решение. Составим рабочую таблицу и преобразуем интервальный ряд в дискретный, выбрав в качестве x_i середины заданных интервалов; вычислим последовательно $x_i m_i$, $x_i^2 m_i$ и накопленную частоту S_i .

Таблица

X	x_i	m_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	S_i
18,70 – 18,72	18,71	5	93,55	1750,32	5
18,72 – 18,74	18,73	27	505,71	9471,95	32
18,74 – 18,76	18,75	42	787,5	14765,62	74
X	x_i	m_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	S_i
18,76 – 18,78	18,77	78	1464,06	27480,41	152
18,78 – 18,80	18,79	51	958,29	18006,27	203
18,80 – 18,82	18,81	26	489,06	9199,22	229
18,82 – 18,84	18,83	8	150,64	2836,55	237
18,84 – 18,86	18,85	2	37,7	710,64	239
18,86 – 18,88	18,87	1	18,87	356,08	240
Сумма		240	4505,38	84577,06	

По результатам вычислений получаем:

– выборочную среднюю

$$\bar{x} = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^9 x_i m_i = \frac{4505,38}{240} = 18,7724 (\text{мм});$$

– выборочную дисперсию

$$S_x^2 = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^9 x_i^2 m_i - (\bar{x})^2 = \frac{84577,06}{240} - (18,7724)^2 \approx 0,00141;$$

– среднее квадратичное отклонение

$$S_x = \sqrt{0,00141} \approx 0,0375 (\text{мм}).$$

Для интервальной оценки генеральной средней найдем сначала значение аргумента t функции Лапласа $\Phi(t)$ при $\alpha = 0,95$:

$$t = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,4775) = 1,96.$$

Затем, вычислив предельное отклонение

$$\varepsilon = \frac{1,96 \cdot 0,0375}{\sqrt{240}} \approx 0,00475,$$

получим доверительный интервал для генеральной средней a :

$$18,768 < a < 18,777.$$

13.1. При формировании для фирмы портфеля поставок был произведен случайный отбор 100 поставщиков, которые осуществляли поставки сырья в прошлом году. Для процента внесвоевременно отгрузивших сырье поставщиков необходимо определить доверительные границы на уровне 0,997, если в выборке оказалось 25 таких поставщиков.

13.2. С целью определения средней суммы Q вкладов в банке, имеющем 2200 вкладчиков, проведено выборочное обследование (бесповторный отбор), результаты которого

приведены в таблице. Найти с вероятностью 0,96 доверительные границы для Q .

Сумма вклада, тыс.руб.	10-30	30-50	50-70	70-80	80-110	110-130
Число вкладчиков	1	3	10	30	60	7

13.3. По схеме бесповторной выборки произведено измерение выработки на земляных работах 145 рабочих из 500. В результате средняя выработка на одного рабочего оказалась равной $\bar{x} = 4,95$ м, а среднее квадратическое отклонение $\bar{S} = 1,95$. Найти доверительные границы для генерального среднего μ при уровне надежности $\gamma = 0,954$.

13.4. Из 2500 ящиков облицовочной плитки было проверено 10%. Среди них оказалось 80% ящиков с плиткой первого сорта. Найти границы, в которых с вероятностью 0,996 заключена доля P ящиков с плиткой первого сорта.

13.5. Среди 4000 автомашин, следовавших по шоссе, выборочно было проверено 500. Среди них 350 оказались с различного рода повреждениями. Найти с вероятностью 0,96 доверительный интервал для доли неисправных машин.

13.6. Найти с вероятностью 0,9545 пределы, в которых находится средний срок службы T изделия в совокупности, состоящей из 15000 единиц, по результатам бесповторной выборки из 300 изделий. Средний срок службы изделия в выборке оказался равным 1200 часам, а выборочная дисперсия – 324.

13.7. Для оценки уровня безработицы в городе были отобраны 100 человек рабочих специальностей. Из них 6 человек оказались безработными. Оценить с вероятностью 0,95 процент P безработных рабочих в городе.

13.8. При обследовании 100 малых предприятий оказалось, что 94 из них относятся к негосударственной форме собственности. Определить с вероятностью 0,95 границы для доли P негосударственных малых предприятий в городе.

13.9. При обследовании средней зарплаты работающих жителей города была сделана выборка из 100 человек, при этом оказалось, что $\bar{x} = 80$ усл. ед., а выборочная дисперсия $\bar{S}_x^2 = 12$. Найти доверительный интервал уровня 0,95 для средней зарплаты X .

13.10. Для оценки стоимости древесины, с целью последующей продажи, была сделана выборка из 100 деревьев участка, подлежащих выборке. В результате измерения диаметров d деревьев были получены среднее значение $\bar{d} = 50$ см и выборочная дисперсия $\bar{\sigma}_x^2 = 3,5$. Определить на уровне 0,95 доверительный интервал для диаметра d деревьев, подлежащих вырубке.

13.11. Для определения привеса рыбы за год в одном из рыбхозов Любанского района проводились выборочные исследования. Разводимые в пруду карпы вылавливались, взвешивались и отпускались обратно. Результаты 100 таких измерений показали, что годовой привес рыбы в среднем составил $\Delta P = 200$ г, а дисперсия – $\bar{\sigma}_{\Delta p}^2 = 320$. Найти 95%-ны доверительный интервал для годового привеса рыбы.

13.12. По данным 10 измерений некоторой величины d найдено среднее $\bar{d} = 20$ и выборочная дисперсия $\bar{S}_d^2 = 25$.

Найти границы, в которых с вероятностью 0,99 заключено истинное значение величины.

13.13. Из 25 студентов группы, проходивших флюорографию, у одного были обнаружены признаки легочных заболеваний. Найти с вероятностью 0,99 доверительный интервал для P – процента студентов, не страдающих легочными заболеваниями, если всего в университете учатся около 7000 студентов.

13.14. Найти с вероятностью 0,99 доверительный интервал для дисперсии генеральной совокупности в задаче 13.12.

13.15. Из 10 орехов, взятых для проверки, 2 оказались «пустыми». Найти 95%-ный доверительный интервал для доли «пустых» орехов в продаваемой партии.

Ответы: **13.1.** $11,95 < \omega < 38,05$. **13.2.** $86,45 < Q < 93,37$.

13.3. $4,75 < a < 5,15$. **13.4.** $0,773 < P < 0,867$.

13.5. $0,662 < P < 0,867$. **13.6.** $1198 < T < 1202$.

13.7. $1,3\% < P < 10,7\%$. **13.8.** $0,8935 < P < 9865$.

13.9. $79,321 < X < 80,679$. **13.10.** $46,33 < d < 53,67$.

13.11. $196,49 < \Delta P < 203,51$. **13.12.** $15 < d < 25$.

13.13. $92,7 < P < 99,3$ **13.14.** $16,7 < \sigma^2 < 259,5$.

13.15. $0 < P < 0,448$.

§ 14. Статистическая проверка гипотез.

Одной из наиболее часто встречающихся задач, связанных с исследованием статистических совокупностей, является проверка предположений о законах распределения изучаемого признака, об однородности выборок, о значениях параметров генеральной совокупности и т. д.

Процедура сопоставления предположений с результатами наблюдений получила название *статистической*

проверки гипотез.

Пусть имеется выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ из генеральной совокупности, распределение которой характеризуется некоторым параметром. И пусть относительно этого параметра высказывается некоторое предположение. Назовем его *нулевой гипотезой* и обозначим H_0 . Предположение, противоречащее гипотезе H_0 , называют *альтернативной (конкурирующей) гипотезой* и обозначают H_1 .

Ввиду того, что выборка всегда несет в себе элемент случайности, статистически подтвержденную гипотезу следует расценивать не как абсолютно верный факт, а лишь как *достаточно правдоподобное утверждение*, не противоречащее данному опыту. Может оказаться, что некоторая выборка заставит нас отвергнуть заведомо верную гипотезу, или наоборот. Такие ошибки называются ошибками I и II рода.

Проверка нулевой гипотезы осуществляется с помощью количественного *критерия* – функции результатов наблюдений $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будучи случайной величиной, $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подчинена одному из законов, зависящих только от объема выборки n (в предположении справедливости гипотезы H_0). Основными из них являются известные законы: χ^2 – распределение, t – распределение Стьюдента и F – распределение Фишера.

Все множество возможных значений случайной величины θ можно разбить на два непересекающихся подмножества Ω – *область допустимых значений* критерия и W – *критическую область*. Вероятность попадания критерия в область W обозначается β и называется *уровнем значимости*, а вероятность α попадания в область Ω – *уровнем достоверности (надежности)*.

Решающим правилом для принятия нулевой гипотезы является попадание эмпирического значения критерия $\theta_{\text{эмп}}$ в

область допустимых значений Ω . Если $\theta_{\text{эмп}}$ оказалось в критической области W , гипотеза отвергается.

Критическими точками (границами) $\theta_{\text{кр}}$ называются границы областей Ω и W . *Правосторонней* называется критическая область, определяемая неравенством $\theta > \theta_{\text{кр}}$; *левосторонней* называется критическая область, определяемая неравенством $\theta < \theta_{\text{кр}}$. *Двусторонней* называется критическая область, определяемая неравенствами $\theta < \theta_1, \theta > \theta_2$, где $\theta_2 > \theta_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенством $|\theta| > \theta_{\text{кр}}$.

При заданном уровне значимости β критические области определяются из равенств:

а) правосторонняя – $P(\theta > \theta_{\text{кр}}) = \beta, \quad \theta_{\text{кр}} > 0;$

б) левосторонняя – $P(\theta < \theta_{\text{кр}}) = \beta, \quad \theta_{\text{кр}} < 0;$

в) двусторонняя симметричная –

$$P(|\theta| > \theta_{\text{кр}}) = \beta/2, \quad \theta_{\text{кр}} > 0;$$

Гипотеза называется *параметрической*, если необходимо проверить предположение о значениях параметров известного распределения.

14.1. Проверка параметрических гипотез

1. Проверка гипотез о параметрах распределения.

Пусть произведена выборка объема n из нормальной генеральной совокупности, получены выборочные характеристики случайного признака.

Рассмотрим нулевую гипотезу H_0 о том, что генеральная средняя a равна некоторой гипотетической средней a_0 при альтернативной гипотезе $H_1: a \neq a_0$. Возможны два случая: 1) дисперсия признака в генеральной совокупности

известна и равна σ^2 ; 2) дисперсия неизвестна.

В первом случае, когда генеральная дисперсия известна, критерием согласия служит нормированная случайная величина $Z = \frac{\bar{X} - a}{\sigma_x} \sqrt{n}$, подчиненная закону $N(0;1)$. Эмпи-

рическое значение критерия $z_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma_x} \sqrt{n}$ сравнивают с

критическим $z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right)$ при заданном уровне значи-

мости β . Решающее правило: если $|z_{\text{эмп}}| \leq z_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза о равенстве выборочной и генеральной средних принимается; если же $|z_{\text{эмп}}| > z_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу следует отвергнуть.

В случае, если генеральная дисперсия неизвестна, для ее оценки используют исправленную выборочную дисперсию S_x^2 . В качестве критерия используется случайная ве-

личина $T = \frac{\bar{X} - a}{S_x} \sqrt{n}$, распределенная по закону Стьюдента

с $\nu = n - 1$ степенями свободы. Эмпирическое значение критерия $t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x} - a_0}{\hat{S}_x} \sqrt{n}$ сравнивается с критическим зна-

чением $t_{\text{кр}} = t_{\beta, \nu}$ при заданном уровне значимости β и числе степеней свободы $\nu = n - 1$ (Приложение).

Решающее правило: если $|t_{\text{эмп}}| \leq t_{\text{кр}}$, гипотеза о равенстве средних принимается; в противном случае гипотеза отвергается.

При альтернативной гипотезе $H_1: a > a_0$ ($a < a_0$) правая (левая) граница критической области определяется из ра-

венства $z_{кр} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-2\beta}{2}\right)$, а решающим правилом для принятия нулевой гипотезы является условие $z_{эмп} \leq z_{кр}$ ($z_{эмп} > -z_{кр}$), $z_{кр} > 0$.

Проверка гипотезы о равенстве генеральной дисперсии σ^2 некоторой гипотетической дисперсии σ_0^2 при альтернативной гипотезе $\sigma^2 > \sigma_0^2$ осуществляется при помощи критерия χ^2 с числом степеней свободы $\nu = n$, если генеральная средняя известна, и $\nu = n-1$, если генеральная средняя неизвестна. Эмпирическое значение $\chi_{эмп}^2 = \frac{\nu \hat{S}_x^2}{\sigma_x^2}$

сравнивают с критическим $\chi_{кр}^2 = \chi_{\beta, \nu}^2$, найденным из таблицы χ^2 -распределения (табл. 4 Приложений) при заданном уровне значимости β и числе степеней свободы ν . Если $\chi_{эмп}^2 \leq \chi_{кр}^2$, нулевая гипотеза принимается. При $\chi_{эмп}^2 > \chi_{кр}^2$ гипотезу следует отклонить.

При альтернативной гипотезе $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ определяют границы двусторонней критической области. Нулевая гипотеза принимается, если эмпирическое значение критерия $\chi_{эмп}^2$ удовлетворяет условию $\chi_{p_1, \nu}^2 \leq \chi_{эмп}^2 \leq \chi_{p_2, \nu}^2$, где

$p_1 = 1 - \frac{\beta}{2}$, $p_2 = \frac{\beta}{2}$. В противном случае гипотезу отклоняют.

Предположим теперь, что произведено достаточно большое число n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, но неизвестна. Требуется при заданном уровне значимости β проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что неизвестная вероятность p равна некоторой гипотетической вероятности

p_0 при альтернативной гипотезе $H_1: p \neq p_0$. Известно, что случайная величина $U = \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{pq}} \sqrt{n}$ распределена асимптотически нормально. Ее эмпирическое значение $U_{\text{эмп}} = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}} \sqrt{n}$ сравнивают с критическим $U_{\text{крит}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right)$, найденным в таблице Приложений. При $|U_{\text{эмп}}| \leq U_{\text{крит}}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $|U_{\text{эмп}}| > U_{\text{крит}}$, нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

При альтернативной гипотезе $H_1: p > p_0$ ($p < p_0$) правая (левая) граница критической области определяется равенством $U_{\text{крит}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-2\beta}{2}\right)$, а решающим правилом для принятия гипотезы является условие $U_{\text{эмп}} \leq U_{\text{крит}}$ ($U_{\text{эмп}} > -U_{\text{крит}}$). В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

2. Сравнение дисперсий и средних двух совокупностей.

Пусть имеются две независимые выборки малого объема n_1 и n_2 из двух нормальных генеральных совокупностей, по которым вычислены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии $\hat{S}_x^2$ и $\hat{S}_y^2$. Генеральные дисперсии хоть и неизвестны, но считаются равными. Необходимо проверить нулевую гипотезу о том, что $m_x = m_y$ (такие гипотезы о равенстве параметров двух распределений называются *простыми*). В качестве точечных оценок генеральных средних m_x и m_y можно использовать выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$, а для оценки дисперсий – сред-

невзвешенную дисперсию

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{S}_x^2(n_1 - 1) + \hat{S}_y^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина $Z = \bar{X} - \bar{Y}$ распределена нормально с математическим ожиданием $m_z = 0$ и дисперсией $\sigma_z^2 = \hat{S}^2(n_1 + n_2)/n_1n_2$. Тогда случайная величина $T = \frac{Z - m_z}{\sigma_z} = \frac{Z}{\sigma_z}$ подчинена t -распределению Стьюдента с $\nu = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы и служит критерием для оценки нулевой гипотезы о равенстве центров распределения $m_x = m_y$.

Критическое значение $t_{кр.} = t_{\nu, \beta}$, соответствующее числу степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$ и заданному уровню значимости β , определяют из таблицы Приложений (t -распределения Стьюдента).

При альтернативной гипотезе $m_x \neq m_y$ эмпирическое значение $t_{эмп}$ находят по формуле

$$t_{эмп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\hat{S} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sqrt{n_1 n_2}, \text{ где } \hat{S}^2 = \frac{\hat{S}_x^2(n_1 - 1) + \hat{S}_y^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Если $|t_{эмп}| \leq t_{\nu, \beta}$, то с надежностью $\alpha = 1 - \beta$ гипотеза считается справедливой, в противном случае гипотеза отвергается.

Задача проверки гипотезы о равенстве генеральных дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ сводится к сравнению выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2 (при альтернативной гипотезе $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$). Для построения критической области с заданным уровнем значимости β используется F -распределение Фишера, плотность которого зависит только от объемов выборок n_1 и n_2 .

Эмпирическое значение критерия определяется как отношение выборочных дисперсий $F_{\text{эмп}} = \frac{S_x^2}{S_y^2}$ или $F_{\text{эмп}} = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ (отношение составляется так, чтобы оно было больше единицы).

Критическое значение $F_{\text{кр}} = F_{\beta, \nu_1, \nu_2}$ определяют таблицы Приложений (таблица F – распределения Фишера) при уровне значимости β и степенях свободы $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$.

Если $F_{\text{эмп}} \leq F_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $F_{\text{эмп}} > F_{\text{кр}}$, то гипотеза отвергается.

Замечание. Сравнение параметров двух нормальных распределений следует начинать с гипотезы о равенстве дисперсий, и только затем, если она подтвердится, проверить гипотезу о равенстве средних.

14.2. Проверка гипотез о законах распределения

Этот вопрос занимает центральное место в теории статистической проверки гипотез. Речь идет об идентификации исследуемого распределения с одним из известных законов на основе выборочных параметров. Одним из распространенных *критериев согласия* для проверки гипотезы о законе распределения является критерий Пирсона χ^2 , эмпирическое значение которого вычисляется по формуле

$$\chi_{\text{эмп}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i},$$

где m_i – эмпирическая частота i -го признака x_i в выборке, m'_i – теоретическая частота этого же признака, k – число разрядов (интервалов) вариационного ряда.

Теоретическое значение критерия $\chi^2_{кр} = \chi^2_{\beta, \nu}$ определяют из таблицы χ^2 -распределения (таблице Приложений) при уровне значимости β и числе степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где r – число параметров данного распределения, оценки которых найдены по результатам выборки.

Гипотеза H_0 должна быть принята, если $\chi^2_{эмп} \leq \chi^2_{\beta, \nu}$, и отвергнута, если $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{\beta, \nu}$.

Более простым является критерий Колмогорова, в основе которого лежит вычисление $D = \max |F^*(x) - F(x)|$.

Последовательность проверки гипотезы по критерию Колмогорова такова:

1) по результатам n наблюдений составляется статистическая функция распределения $F^*(x)$;

2) по выборочным оценкам параметров составляется теоретическая функция $F(x)$;

3) определяется максимум модуля разности значений $F^*(x)$ и $F(x)$ при одних и тех же значениях x ;

4) вычисляется эмпирическое значение критерия $\lambda_{эмп} = D\sqrt{n}$;

5) для заданного уровня значимости β из нижеприведенной таблицы определяют критическое значение критерия $\lambda_{кр} = \lambda_{\beta}$.

Таблица

β	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_{β}	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Если $\lambda_{\text{эмп}} \leq \lambda_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза считается справедливой. В противном случае ее следует отклонить или считать сомнительной.

Пример 1. Для управления качеством выпускаемой продукции необходимо знание законов распределения ее характеристик. Результаты исследования 180 единиц продукции предприятия приведены в таблице:

Интервалы значений X	40-41	41-42	42-43	43-44	44-45	45-46	46-47	47-48	48-49
m	6	16	20	28	49	32	18	8	3

Требуется проверить гипотезу о том, что исследуемый показатель качества (случайный признак X) имеет нормальное распределение. Известны выборочная средняя $\bar{x} = 44,3$ и среднее квадратичное отклонение $S = 1,77$; построен интервальный вариационный ряд. Уровень значимости $\beta = 0,01$.

Решение. Составим расчетную таблицу, преобразовав интервальный ряд в дискретный. Определив теоретические частоты m'_i , вычислим эмпирическое значение критерия (таблицы)

Таблица

x_i	m_i	z_i	$\phi(z_i)$	m'_i	$m_i - m'_i$	$\frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$
40,5	6	-2,15	0,0396	4,03	1,97	0,963
41,5	16	-1,58	0,1145	11,64	4,36	1,633
42,5	20	-1,02	0,2371	24,11	-4,11	0,701
43,5	28	-0,45	0,3605	36,66	-8,66	2,046
44,5	49	0,11	0,3965	40,32	8,68	1,869
45,5	32	0,68	0,3166	32,20	9,80	2,970

46,5	18	1,24	0,1849	18,80	-0,80	0,034
47,5	8 3 } 11	2,09	0,0449	6,85	4,15	2,504
48,5						
Σ						$\chi^2 = 9,761$

Так как частота последнего значения $x_9 = 48,5$ меньше 5, объединяем его с предыдущим значением; тогда для $x_8 = 48$ частота $m_8 = 11$.

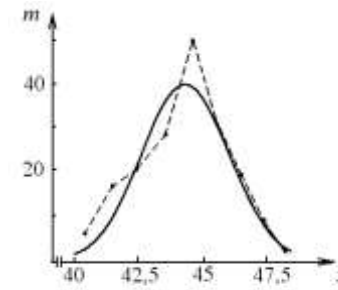


Рис 14.1

На рис. 14.1 изображен полигон эмпирических частот (штриховая линия) и теоретическая кривая Гаусса (сплошная линия), соответствующая заданным параметрам. Сравнение кривых говорит о том, что распределение данного случайного признака мож-

но считать нормальным. При уровне значимости $\beta=0,01$ и числе степеней свободы $\nu = 9-3 = 6$ из таблицы χ^2 - распределения (табл. 4 Приложений) находим $\chi_{кр}^2 = 16,8$. Поскольку $\chi_{эмп}^2 < \chi_{кр}^2$, нулевую гипотезу следует принять.

Проверим ту же гипотезу с помощью критерия Колмогорова. Для этого составим функции распределения $F(x)$ и $F^*(x)$ случайного признака. Напомним, что статистическая функция распределения $F^*(x)$ определяется как относительная накопленная частота $\sigma_i(x)$, $i=1,2,...,n$ данного признака. Функция $F(x)$ вычисляется так же, как и $F^*(x)$.

Составим рабочую таблицу.

Таблица

x_i	m_i	m'_i	ω_i	ω'_i	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x)-F(x)$
40,5	6	4,03	0,033	0,023	0,033	0,023	0,010

41,5	16	11,64	0,089	0,067	0,122	0,090	0,032
42,5	20	24,11	0,111	0,138	0,233	0,228	0,005
43,5	28	36,66	0,156	0,210	0,389	0,438	- 0,049
44,5	49	40,32	0,272	0,231	0,661	0,669	- 0,008
45,5	32	32,20	0,178	0,184	0,839	0,853	- 0,014
46,5	18	18,80	0,100	0,108	0,939	0,961	- 0,022
47,5	$\left. \begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right\} 11$	6,85	0,061	0,039	1,000	1,000	0
48,5							

Из последнего столбца находим, что

$$D = \max|F^*(x) - F(x)| = 0,049; \lambda_{\text{эмп}} = 0,049 \sqrt{180} = 0,657.$$

При уровне значимости $\beta = 0,01$ из таблицы вероятностей $P(\lambda)$ (табл. 11.6) получаем $\lambda_{\text{к.д}} = 1,63$. Как видно, $\lambda_{\text{эмп}} < \lambda_{\text{к.д}}$, значит гипотезу о нормальном распределении следует принять, считая расхождения несущественными.

Для выборок малого объема, когда значения признака не группируются, проверка основана на сравнении некоторых генеральных параметров нормального распределения и их выборочных оценок: если оценки асимметрии

$$A^* = \frac{1}{nS^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad \text{и эксцесса} \quad E^* = \frac{1}{nS^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3$$

незначительно отличаются от нуля, гипотеза H_0 принимается.

Следует, однако, иметь в виду, что оценки A^* и E^* , будучи случайными величинами, могут быть настолько отличными от нуля, что принять решение относительно гипотезы H_0 будет затруднительно. В этом случае используются дисперсии $D(A^*)$ и $D(E^*)$, по которым можно оценить значимость отклонений от нуля этих случайных величин:

$$D(A^*) = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}, \quad D(E^*) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}.$$

Критерий согласия выглядит так: если выборочные асимметрия и эксцесс удовлетворяют неравенствам

$|A^*| \leq 3\sqrt{D(A^*)}$, $|E^*| \leq 5\sqrt{D(E^*)}$, то наблюдаемое распределение можно считать нормальным.

14.1. Для проверки эффективности нового лекарства были отобраны две случайные группы по 15 человек, страдающих гриппом. При применении старого лекарства средний срок выздоровления составлял 11 дней с выборочной дисперсией $S_1^2 = 3$, при применении нового – срок выздоровления составил 8 дней с $S_2^2 = 4$. Проверить на уровне 0,99 гипотезу о преимуществе нового лекарства.

14.2. В двух фирмах, выпускающих детское питание, производилась оценка качества продукции. В фирме А, где проверялось 30 единиц продукции, средняя сумма баллов оказалась равной 52. Во второй фирме проверялось 36 единиц продукции и их средняя сумма баллов оказалась равной 47. Считая дисперсию балльной оценки равной 12, определить на уровне значимости $\alpha = 0,05$, какая фирма выпускает лучшую продукцию.

14.3. Точность работы двух станков оценивалась отклонениями от номинала производимой продукции. Из 10 единиц продукции первого станка отклонение от номинала (выборочная дисперсия) составила $\bar{S}_1^2 = 3,5$ из 15 единиц продукции второго станка – $\bar{S}_2^2 = 4,5$. Можно ли считать на уровне значимости $\alpha = 0,1$, что станки имеют одинаковую точность?

14.4. В прошлом году доля бракованных изделий, выпускаемых предприятием, равнялась 0,04. В этом году было проверено 300 изделий, из которых 95 оказались бракованными. Можно ли на уровне значимости 0,01 считать, что качество продукции осталось на прежнем уровне?

14.5. Учет времени сборки узла машины бригадой из 10 слесарей показал, что среднее (в минутах) сборки узла равно $\bar{x} = 76$, а $\bar{S}^2 = 15$. Предполагая распределение времени сборки нормальным, проверить на уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу о том, что 75 минут является нормативом (математическим ожиданием) трудоемкости.

14.6. Номинальная точность прибора равна $\sigma_0 = 2$ мкм. Из 10 замеров детали была получена выборочная дисперсия показаний прибора, равная $\bar{S}^2 = 0,9$. На уровне доверия $\gamma = 0,9$ проверить гипотезу $H_0: \sigma = \sigma_0$.

14.7. По техническим условиям средняя прочность троса составляет 2000 кг. В результате испытаний 20 кусков троса было установлено, что средняя прочность на разрыв равна 1955 кг при средней ошибке 25 кг. Удовлетворяет ли образец троса техническим условиям?

14.8. Для проверки новой технологии были выбраны две группы рабочих, численностью $n_1 = 40$ человек и $n_2 = 50$ человек. В первой группе, при применении старой технологии, средняя выработка составила $\bar{x}_1 = 85$ (изделий), во второй, где применялась новая технология, $\bar{x}_2 = 95$. Дисперсии по группам $\sigma_1^2 = 100$, $\sigma_2^2 = 75$ были известны заранее. Выяснить на уровне значимости $\alpha = 0,05$ влияние новой технологии на производительность.

14.9. Средний годовой оборот 5 компаний в регионе A составил 4900 усл. ед., средний оборот 10 компаний в регионе B составил 5000 усл. ед. Выборочная дисперсия оборота компаний в регионе A оказалась равной 1000, а в регионе B – 4000. Считая дисперсии среднегодовых оборотов одинаковыми ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), проверить на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о равенстве средних значений в регионах A и B .

14.10. Из 50 человек, покупающих в магазине кофе, 23 выбирают сорт «Арабика». Проверить на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о том, что половина покупателей выбирает данный сорт.

14.11. В результате проверки 10 продавцов одной из торговых точек города были обнаружены недовесы со средним значением $\bar{x}_1 = 150$ г и выборочной дисперсией $S_1^2 = 2500$. В другой точке недовесы характеризовались $\bar{x}_2 = 125$ и $S_2^2 = 1600$ среди выборки из 15 продавцов. Выяснить на уровне доверия $\gamma = 0,95$, в какой точке предпочтительнее покупать продукцию.

14.12. Стрелок по летающим тарелкам попадал в цель в 80% случаев. После тренировок в учебном центре он стал поражать мишени в 89 случаев из 100. Можно ли считать на уровне доверия 0,95, что его квалификация улучшилась?

14.13. Средний урожай пшеницы с 1 га составил $Q = 80$ ц/га. После рекультивации почвы был определен средний урожай с площади в 9 га, причем оказалось, что $\bar{Q} = 85$ ц/га, а $\bar{S}_Q^2 = 4,5$. Можно ли считать на уровне доверия 0,05, что урожайность поля увеличилась?

14.14. В больнице скорой помощи фиксировалось количество X вызовов в час специализированных бригад. Наблюдения велись в течении 100 часов, их результаты приведены в таблице.

Количество вызовов	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота вызовов	6	27	26	20	10	5	5	1

Найти выборочный параметр $\bar{x}$ и по критерию Пирсона показать, что при $\alpha = 0,05$ случайная величина X распределена по закону Пуассона.

14.15. Для данных задачи 7.5 проверить с помощью критерия Пирсона гипотезу о нормальности случайной величины Δd на уровне доверия $\gamma = 0,9$.

Ответы: **14.1.** $t_{кр} = 2,76$, $t = 4,25$ гипотеза принимается.

14.2. $t_{кр} = 1,65$, $t = 1,652$ лучшую продукцию выпускает фирма A . **14.3.** $U = 0,1$, $V = 7,1$, $t = 0,6$, гипотеза об одинаковой точности станков принимается. **14.4** $t_{кр} = 2,58$,

$t = 2,58$. Гипотеза принимается. **14.5.** $t_{9,кр} = 1,83$, $|t| < t_{9,кр}$, и гипотеза принимается. **14.6.** $t = 1,832$, $t_{9,кр} = 1,83$, $t < t_{9,кр}$, гипотеза принимается. **14.7.** $t_{кр} = 1,96$, $t = 8,05$. Гипотеза отвергается, трос не удовлетворяет техническим условиям.

14.8. $\alpha = 0,05$ $t_{кр} = 1,96$, $t = 5$, гипотеза о равенстве средних отвергается, новая технология повышает производительность. **14.9.** $t = -3,103$, $t_{13,кр} = 1,8$. Средний годовой оборот компаний в регионе B больше, чем в регионе A . **14.10.** Гипотеза подтверждается. *Указание:* $t = 0,566$, $t_{кр} = 1,96$.

14.11. На данном уровне доверия недовесы в торговых точках одинаковы. *Указание:* $t = 1,326$, $t_{23,кр} = 1,7$. **14.12.**

Да. *Указание:* $t = 2,25$, $t_{кр} = 1,96$. **14.13.** Гипотеза об увели-

чении урожайности принимается. Указание: $t = 7,071$, $t_{8,кр} = 1,9$. **14.14.** $\bar{x} = 2,41$, $t = 5,46$, $\chi^2_{5,кр} = 11$, $t < \chi^2_{5,кр}$ и гипотеза о пуассоновском распределении принимается. **14.15.** $t = 3,183$, $\chi^2_{3,кр} = 6,2$; гипотеза принимается.

§ 15. Основы корреляционного анализа

Задачей *корреляционного анализа* является выявление и измерение линейной связи между случайными величинами. Решение задачи включает в себя также определение формы связи между ними, надежности и доверительных границ параметров *уравнений регрессии*.

15.1. Линейная корреляция

Если система состоит из двух случайных величин X и Y , связанных линейной зависимостью, ее характеристиками являются:

- начальные моменты $\nu_{10} = M(X)$, $\nu_{01} = M(Y)$,
- центральные моменты $\mu_{20} = D(X)$, $\mu_{02} = D(Y)$,
- центральный момент $\mu_{11} = M(\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}) = k_{xy}$ – *корреляционный момент*,
- коэффициент линейной корреляции $\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ – по-

казатель силы линейной связи между X и Y .

В статистическом анализе используются их соответствующие выборочные оценки.

Если объем выборки невелик, выборочные моменты определяются по следующим формулам:

- выборочные средние

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i;$$

– выборочные (исправленные) дисперсии

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - (\bar{x})^2),$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{n}{n-1} (\overline{y^2} - (\bar{y})^2);$$

– выборочный корреляционный момент

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y};$$

– выборочный коэффициент линейной корреляции

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{S_x S_y}.$$

Выборочный коэффициент корреляции не зависит от выбора начала отсчета и единицы измерения; иными словами, при любых a_1, a_2, b_1 и b_2

$$r(a_1x + b_1, a_2y + b_2) = r_{xy}.$$

2. Выборочный коэффициент корреляции не превышает единицы, $|r_{xy}| \leq 1$.

3. Если $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \frac{a}{|a|}$, т.е. $r_{xy} = \pm 1$.

Чем ближе $|r_{xy}|$ к единице, тем сильнее связь, тем меньше представлены в ней случайные факторы. При $|r_{xy}| = 1$ случайные величины связаны *линейной функциональной* зависимостью.

При большом объеме выборки составляется корреляционная таблица.

Таблица

X	Y				m_x
	y_1	y_2	$\dots$	y_l	
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2l}	m_{x_2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	$\dots$	m_{y_l}	n

В этом случае выборочные моменты вычисляются по формулам:

– выборочные средние $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i m_{x_i}, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l y_j m_{y_j}$

– выборочные дисперсии

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_{x_i} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l (y_j - \bar{y})^2 m_{y_j} = \overline{y^2} - (\bar{y})^2;$$

– корреляционный момент

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) m_{ij} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y};$$

– выборочный коэффициент корреляции $r_{xy} = \frac{k_{xy}}{S_x S_y}$.

Как всякая выборочная оценка, выборочный коэффициент корреляции является величиной случайной, достоверность (значимость) которой следует проверить с помощью того или иного критерия.

Если система (X, Y) распределена нормально, то вопрос о значимости коэффициента корреляции решается с помо-

щью случайной величины $T = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, распределенной по закону Стьюдента с $\nu = n - 2$ степенями свободы. Высказывается гипотеза H_0 : $\rho_{xy} = 0$. Если $t_{\text{эмп}} = r_{xy} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}$ по абсолютной величине не превышает критического значения $t_{\text{кр}} = t_{\beta, \nu}$, полученного из таблицы t -распределения, то гипотеза H_0 принимается. Если $|t_{\text{эмп}}| > t_{\beta, \nu}$, гипотеза отвергается, корреляционная связь между признаками X и Y признается значимой.

При больших объемах выборки n выборочный коэффициент корреляции r_{xy} распределен асимптотически нормально с параметрами

$$m_r = \rho_{xy} \quad \text{и} \quad \sigma_r = \frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n}}.$$

При доверительной вероятности α интервальная оценка для ρ_{xy} имеет вид

$$r_{xy} - t_{\alpha} \frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n}} < \rho_{xy} < r_{xy} + t_{\alpha} \frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n}},$$

$$\text{где } t_{\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha/2), \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Пример 1. Данные о зависимости между объемом выполненных работ X (тыс.руб.) и накладными расходами Y (тыс.руб.) сведены в таблицу.

Требуется:

- найти выборочные средние и дисперсии признаков X и Y ;
- вычислить выборочный коэффициент корреляции r_{xy} ;

в) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости $\beta = 0,05$, считая распределение признаков X и Y нормальным;

г) найти интервальную оценку для коэффициента корреляции ρ_{xy} при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

Таблица

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	$m_{\cdot}$
15	4	5							9
25	1	3	1						5
35	2	3	6	5	3	1			20
45		5	6	19	8	7	2	1	48
55		1	2	7	16	9	4	2	41
65			1	5	6	4	2	2	20
75							1	6	7
m_y	7	17	16	36	33	21	9	11	150

Решение. Вычислим точечные оценки параметров распределения:

$$\bar{x} = \frac{1}{150} \cdot 7200 = 48,0 ; \quad \bar{y} = \frac{1}{150} \cdot 735 = 5,0;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{150} \cdot 374750 - (48,0)^2 = 194,333, \quad S_x = 13,94;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{150} \cdot 4233,5 - (5,0)^2 = 3,223, \quad S_y = 1,795;$$

$$k_{xy} = \frac{1}{150} \cdot 39087,5 - 48,0 \cdot 5,0 = 20,58;$$

$$r_{xy} = \frac{20,58}{13,94 \cdot 1,795} = 0,822.$$

Рассмотрим нулевую гипотезу H_0 о значимости выборочного коэффициента корреляции. Сначала вычислим эмпирическое значение критерия:

$$t_{y\bar{y}} = 0,822 \sqrt{\frac{148}{1 - (0,822)^2}} = 17,56.$$

Затем из таблицы распределения Стьюдента (таблица Приложений) получим критическое значение критерия $t_{кр} = t_{\beta, \nu}$ для уровня значимости $\beta = 0,05$ и числа степеней свободы $\nu = 148$:

$$t_{0,05;148} = 1,99.$$

Как видно, $t_{эмп} > t_{\beta, \nu}$, значит нулевая гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции отвергается, т.е. связь между признаками следует считать существенной.

При доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ из таблицы Приложений находим $t_{\alpha} = 1,96$. Тогда получим интервальную оценку для генерального коэффициента корреляции

$$0,822 - 1,96 \cdot \frac{1 - (0,822)^2}{\sqrt{150}} < \rho_{xy} < 0,822 + 1,96 \cdot \frac{1 - (0,822)^2}{\sqrt{150}}, \text{ или}$$

$$0,770 < \rho_{xy} < 0,874.$$

15.1. По имеющимся данным об уровне механизации труда X (%) и производительности труда Y (т/ч) для 14 предприятий (таблица 1) оценить тесноту связи между переменными с помощью коэффициента корреляции и проверить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Таблица 1

x_1	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
y_1	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

15.2. В таблице 2 приводятся данные для розничного товарооборота Z (млрд руб.), средней численности населения X (млн чел.) и среднегодового дохода Y (млн руб.) для некоторого региона.

Таблица 2

Z	1,2	1,3	2,5	1,4	1,2	0,2	0,2	2,4	4,1	1,1
X	1,4	1,4	2,5	1,5	1,3	0,3	0,3	2,6	4,2	1,1
Y	1,3	1,3	1,4	1,8	1,5	1,5	1,6	1,8	1,9	1,6

Определить тесноту связи между Z и переменными X и Y .

15.3. Для исследования влияния объема капиталовложений X (млрд руб.) на получаемую годовую прибыль Y (млрд руб.) была собрана статистика по 20 крупным предприятиям (таблица 3). Определить тесноту связи между переменными X и Y с помощью выборочного коэффициента корреляции. Оценить значимость коэффициента корреляции r и построить доверительный интервал для генерального значения коэффициента корреляции ρ на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Таблица 3

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	n_y
1,5-2,5	1	—	—	—	—	1
2,5-3,5	2	5	2	—	—	9
3,5-4,5	—	3	3	2	—	8
4,5-5,5	—	—	—	—	2	2
n_x	3	8	5	2	2	$n = 20$

15.4. Определить тесноту связи общего веса $X(r)$ некоторого растения и веса $Y(r)$ его семян на основе выборочных данных представленных в таблице 4. Проверить значимость выборочного коэффициента корреляции при $\alpha = 0,05$.

Таблица 4

X	40	50	60	70	80	90	100
Y	20	25	28	30	35	40	45

15.5. В корреляционной таблице 5 представлено распределение 50 гастрономических магазинов области по уровню издержек обращения X (%) и годовому доходу Y (млн руб.). Оценить тесноту связи с помощью коэффициента корреляции r .

Таблица 5

$X \backslash Y$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
0,5-2,0	–	–	2	3	1
2,0-3,5	–	4	5	1	–
3,5-5,0	–	8	5	5	–
5,0-6,5	3	8	2	–	–
6,5-8,0	2	1	–	–	–

15.6. Определить тесноту связи между себестоимостью продукции Y (тыс. руб.) и количеством выпускаемой продукции X (тыс. штук.) по данным 7 предприятий (таблица 6). Выяснить значимость выборочного коэффициента корреляции на уровне $\alpha = 0,05$.

Таблица 6

X	2	3	4	5	6	7	8
Y	2	1,9	2,2	2,4	2,3	2,5	2,5

15.7. Для выяснения зависимости урожая сельскохозяйственной культуры от почвенной влаги были исследованы 20 одинаковых участков земли в пойме реки. Результаты представлены в корреляционной таблице 7, где X – расстояние участка до реки (км), Y – урожайность культуры (т/га).

Таблица 7

$X \backslash Y$	0,4	0,8	1,0	1,2	1,8	2,0
3,0	2	3	–	–	–	–
3,5	–	4	2	1	–	–
4,5	–	–	1	2	2	–
5,0	–	–	–	–	2	1

Определить с помощью выборочного коэффициента корреляции r тесноту связи между величинами X и Y . Показать, что r значим на уровне $\alpha = 0,05$ и объяснить результаты.

15.8. При исследовании влияния уставного капитала на прибыль банка за год была собрана статистика по 10 банкам города. (таблица 8).

Таблица 8

$X \backslash Y$	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9
20-40	1	2	–	–
40-60	–	–	4	–

60-80	–	–	–	3
-------	---	---	---	---

Здесь X (млн руб.) – уставный капитал, Y (тыс. усл.ед.) – Годовая прибыль банка. Найти выборочные коэффициент корреляции.

15.9. При отладке токарного станка были изменены погрешности обработки Y (мкм) для разных диаметров обрабатываемых деталей X (см) (таблица 9). Найти выборочный коэффициент корреляции между величинами X и Y и определить его значимость при $\alpha = 0,05$.

Таблица 9

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Y	3	13	4	4	4	5	5	5	6	8

15.10. Для проверки зависимости заболеваний легких в различной форме (оцениваемой в баллах, Y) от срока курения X (лет) были опрошены 20 больных и результаты опроса сведены в корреляционную таблицу 10. Требуется установить тесноту связи между признаками X и Y и проверить значимость выборочного коэффициента корреляции при $\alpha = 0,05$.

Таблица 10

$Y \backslash X$	5	10	15	20	25	30
1	1	2	–	–	–	–
2	–	2	2	3	–	–
3	–	1	3	1	2	–
4	–	–	–	–	1	2

15.11. Для изучения надежности машины был собран статистический материал, таблица 11, где Y – время непрерывной безотказной работы машины (в месяц), X – количество предшествующих ремонтов. Установить тесноту связи между переменными X и Y и проверить значимость выборочного коэффициента корреляции при $\alpha = 0,05$.

Таблица 11

$Y \backslash X$	0	1	2	3
2-6	–	–	1	2
6-10	–	1	3	1
10-14	1	2	1	–
14-18	2	1	1	–
18-22	1	3	–	–

15.12. Для данных таблице 1 найти выборочный коэффициент корреляции, проверить его значимость и определить доверительный интервал уровня $\alpha = 0,05$.

Таблица 12

$y_i \backslash x_i$		12,5	17,5	22,5	27,5	n_i
20-21	20,5	1	–	–	–	1
21-22	21,5	–	2	–	–	2
22-23	22,5	–	1	2	–	3
23-24	23,5	–	–	3	3	6
24-25	24,5	–	–	–	8	8
n_i		1	3	5	11	$n = 20$

Ответы: 15.1. $r = 0,969$, статистика $t = 2,18$, коэффициент корреляции значим. 15.2. $R = 0,552$, связь является «средней». 15.3. $r = 0,782$, статистика $t = 8,54$, коэффициент r значим. 15.4. $r = 0,992$, статистика $t = 17,6$, r – значим. 15.5. $r = -0,619$, коэффициент значим. 15.6. $r = 0,925$, статистика $t = 5,44$, r – значим. 15.7. $r = 0,871$. 15.8. $r = 0,961$. 15.9. $r = 0,921$, статистика $t = 6,68$, r – значим. 15.10. $r = 0,758$, статистика $t = 4,93$, r – значим. 15.11. $r = -0,812$, статистика $t = 5,9$, r – значим. 15.12. $r = 0,924$ – значим, $0,901 < \rho < 0,970$.

§ 16. Основы регрессионного анализа

Задачей *регрессионного анализа* является определение формы и параметров *уравнений регрессии*, характеризующих зависимость между случайными признаками, а также оценка значимости и доверительных границ этих параметров. Для двух случайных величин X и Y равенство вида $\bar{y}_x = \varphi(x)$ называется *уравнением регрессии*. Функции $\varphi(x)$, как правило, линейны по оцениваемым параметрам $\alpha_0, \alpha_1, \dots$:

$$\varphi_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad \varphi_2(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x},$$

$$\varphi_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \text{ и т.д.,}$$

хотя относительно аргумента x могут быть и нелинейными.

Выборочные оценки параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ могут быть получены методом наименьших квадратов.

Пусть известны результаты n наблюдений над системой случайных величин (X, Y) :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Параметры линейной функции $Y = AX + B$, характеризующей связь между X и Y , определяются из *системы нормальных уравнений*:

$$\begin{cases} A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ A \sum_{i=1}^n x_i + Bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

После деления каждого уравнения на n система приобретает вид

$$\begin{cases} \overline{x^2} A + \bar{x} B = \overline{xy}, \\ \bar{x} A + B = \bar{y}, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{k_{xy}}{S_x^2}.$

Полученное отношение называется *выборочным коэффициентом регрессии Y на X* и обозначается $a_{y/x}$.

Тогда *линейное уравнение регрессии Y на X* будет иметь следующий вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = a_{y/x} (x - \bar{x}), \text{ или } \bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}),$$

где r_{xy} – выборочный коэффициент линейной корреляции.

Если результирующим признаком является X , то выборочное уравнение регрессии X на Y запишется так:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}).$$

Проверить значимость выборочных оценок a_0 и a_1 – значит установить, достаточна ли их величина для статистически обоснованного вывода о том, что параметры α_0 и α_1 уравнения регрессии $m_{y/x} = \alpha_0 + \alpha_1 x$ отличны от нуля.

С этой целью высказывают нулевую гипотезу $H_0: \alpha = 0$.
Рассматривается случайная величина

$$T = \frac{|a|}{S_a},$$

где a – выборочная оценка параметра α , S_a – ее среднее квадратичное отклонение. Для a_0 и a_1 отклонение S_a вычисляется по формулам:

$$S_{a_0} = \frac{S_{\text{ост}}}{\sqrt{n-2}}, \quad S_{a_1} = \frac{S_{\text{ост}}}{S_x \sqrt{n-2}},$$

$$S_{a_0} = \frac{S_{\text{ост}}}{\sqrt{n-2}}, \quad S_{a_1} = \frac{S_{\text{ост}}}{S_x \sqrt{n-2}},$$

где $S_{\text{ост}}^2$ – выборочная оценка остаточной дисперсии $\sigma_{\text{ост}}^2$. Это среднее значение межгрупповых дисперсий, и оно является той частью общей дисперсии σ_y^2 результативного признака, которая обусловлена влиянием только случайных факторов.

Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $v = n - 2$ степенями свободы. Для заданного уровня значимости β и числа степеней свободы v по табл. 5 Приложений можно найти критическое значение $t_{\beta,v}$. Если $t_{\text{эмп}} \leq t_{\beta,v}$, нулевая гипотеза принимается. Если же $t_{\text{эмп}} > t_{\beta,v}$, то гипотезу H_0 отвергают, считая параметр уравнения регрессии значимым.

Доверительный интервал для значимых параметров находят из условия

$$P(|\alpha - a| < t_{\beta,v} \cdot S_a) = 1 - \beta: a - t_{\beta,v} \cdot S_a < \alpha < a + t_{\beta,v} \cdot S_a.$$

Для случаев, когда зависимость между случайными признаками X и Y нелинейна по переменным, оценка параметров уравнений регрессии осуществляется тем же методом наименьших квадратов. Простейшие нелинейные модели, которые могут быть использованы, таковы:

$$1) \bar{y}_x = a_0 + \frac{a_1}{x} ; 2) \bar{y}_x = a_0 + a_1 \ln x ; 3) \bar{y}_x = a_0 e^{a_1 x} ;$$

$$4) \bar{y}_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m .$$

Первые три формы связи легко линеаризуются заменой переменных величин:

в первом уравнении достаточно положить $\frac{1}{x} = x'$, и

уравнение становится линейным, $\bar{y}_x = a_0 + a_1 x'$;

во втором — $\ln x = x'$, после чего $\bar{y}_x = a_0 + a_1 x'$;

в третьем следует сначала прологарифмировать обе части: $\ln \bar{y}_x = \ln a_0 + a_1 x$, затем обозначить $\ln \bar{y}_x = \bar{y}'_x$, $\ln a_0 = a'_0$ и получить $\bar{y}'_x = a'_0 + a_1 x$.

Пример 1. В условиях примера 1 § 15 требуется: а) найти условные средние случайных признаков; б) построить эмпирические линии регрессии; в) составить уравнения теоретических линий прямой регрессии и построить их; г) оценить значимость параметров полученных уравнений при уровне значимости $\beta = 0,05$; д) найти интервальную оценку для параметров уравнений при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

Решение. Рассмотрим корреляционную таблицу из примера 1 § 15. Вычислив условные средние признаков X и Y , заполним ими еще одну строку и столбец (табл. 16.1).

Таблица 16.1

$\begin{matrix} \bar{y} \\ X \end{matrix}$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	m_i	$\bar{y}_x$
15	4	5							9	2,06
25	1	3	1						5	2,50
35	2	3	6	5	3	1			20	3,85
45		5	6	19	8	7	2	1	48	4,83
55		1	2	7	16	9	4	2	41	5,72
65			1	5	6	4	2	2	20	5,85
75							1	6	7	8,36
m_i	7	17	16	36	33	21	9	11	150	
$\bar{x}_y$	22,14	31,47	42,50	48,33	52,58	52,62	57,22	66,82		

$$\bar{x}_{y_1} = \frac{1}{7} (15 \cdot 4 + 25 + 35 \cdot 2) = \frac{155}{7} = 22,143;$$

$$\bar{x}_{y_2} = \frac{1}{17} (15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 35 \cdot 3 + 45 \cdot 5 + 55) = \frac{535}{17} = 31,471$$

и т. д.,

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{1}{9} (1,5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 5) = \frac{18,5}{9} = 2,056;$$

$$\bar{y}_{x_2} = \frac{1}{5} (1,5 + 2,5 \cdot 3 + 3,5) = \frac{12,5}{5} = 2,500$$

и т. д.

Построим эмпирические линии регрессии

$$\bar{y}_x = \varphi(x) \text{ и } \bar{x}_y = \psi(y) \text{ (рис. 16.1).}$$

Как видно, связь между признаками можно описать линейной зависимостью

$$\bar{y}_x = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad \text{и} \quad \bar{x}_y = \beta_0 + \beta_1 y.$$

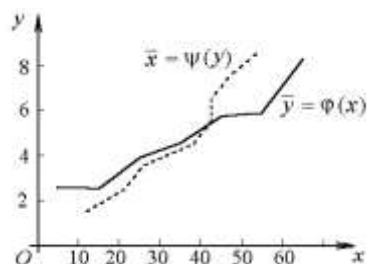


Рис. 16.1

Найдем точечные оценки параметров $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$. Для этого воспользуемся уравнениями

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}) \text{ и}$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \frac{S_x}{S_y} (y - \bar{y}).$$

Используя результаты задачи 12.1, получим

$$\bar{y}_x - 4,9 = 0,605 \frac{1,74}{13,4} (x - 47,4), \text{ или } \bar{y}_x = 1,176 + 0,079x;$$

$$\bar{x}_y - 47,4 = 0,605 \frac{13,4}{1,74} (y - 4,9), \text{ или } \bar{x}_y = 24,57 + 4,659y.$$

Итак, $a_0 = 1,176$, $a_1 = 0,079$, $b_0 = 24,57$, $b_1 = 4,659$.

Для оценки значимости этих параметров найдем сначала остаточные дисперсии составляющих системы, т.е. средние значения внутригрупповых дисперсий признаков X и Y .

$$\bar{S}_{x/y}^2 = 93,1433, \bar{S}_{x/y} = 9,6511; \bar{S}_{y/x}^2 = 1,5141, \bar{S}_{y/x} = 1,2305.$$

Затем вычислим средние квадратичные отклонения самих параметров:

$$S_{a_0} = \frac{1,2305}{\sqrt{148}} = 0,10115, \quad S_{a_1} = \frac{1,2305}{13,94 \cdot \sqrt{148}} = 0,00726;$$

$$S_{b_0} = 0,79332, \quad S_{b_1} = 0,44196.$$

Далее находим эмпирические значения t -критерия Стьюдента по формуле

$$t_{\hat{y}_{ii}} = \frac{|a|}{S_a}: \quad t_{\text{эмп}}(a_0) = \frac{1,176}{0,10115} = 11,63, \quad t_{\text{эмп}}(a_1) = \frac{0,079}{0,00726} = 10,88;$$

$$t_{\text{эмп}}(b_0) = \frac{24,57}{0,79332} = 30,97, \quad t_{\text{эмп}}(b_1) = \frac{4,659}{0,44196} = 10,54.$$

При заданном уровне значимости $\beta = 0,05$ и числе степеней свободы $\nu = 148$ из таблицы t -распределения Стьюдента (таблице Приложений) находим критическое значение критерия: $t_{\text{кр}} = t_{\nu, \beta} = 1,97$.

Как видно, эмпирические значения критериев всех параметров уравнений регрессии значительно превышают критическое значение. Следовательно, значения параметров можно считать значимыми.

Находим интервальные оценки параметров уравнений:

$$1,176 - 1,97 \cdot 0,10115 < \alpha_0 < 1,176 + 1,97 \cdot 0,10115 \Rightarrow$$

$$0,977 < \alpha_0 < 1,375;$$

$$0,079 - 1,97 \cdot 0,00726 < \alpha_1 < 0,079 + 1,97 \cdot 0,00 \Rightarrow$$

$$0,056 < \alpha_1 < 0,093;$$

$$24,57 - 1,97 \cdot 0,79332 < \beta_0 < 24,57 + 1,97 \cdot 0,79332 \Rightarrow$$

$$23,01 < \beta_0 < 26,13;$$

$$4,659 - 1,97 \cdot 0,44196 < \beta_1 < 4,659 + 1,97 \cdot 0,44196 \Rightarrow$$

$$3,79 < \beta_1 < 5,53.$$

16.1. В таблице 1 приведены данные о связи между ценой на нефть X (ден. ед.) и индексом нефтяных компаний Y (усл. ед). Предполагая, что связь между величинами X и Y линейна, найти функцию регрессии, оценить ее значимость и построить доверительный интервал уровня $\alpha = 0,05$ для величины Y при $X=12$.

Таблица 1

x	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
y	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	1,9

16.2. Найти линейное уравнение регрессии для данных 15.3 оценить его значимость и найти доверительный интервал уровня $\alpha = 0,1$ для Y_0 при $X_0 = 15$.

16.3. По данным задачи 15.4 построить линейную регрессионную функцию, найти остаточную дисперсию и доверительный интервал уровня $\alpha = 0,1$, для Y_0 при $X_0 = 60$.

16.4. По данным задачи 15.5 найти линейное уравнение регрессии, оценить его значимость на уровне $\alpha = 0,1$ и найти остаточную дисперсию.

16.5. Для данных задачи 15.6 найти линейное уравнение регрессии, проверить его значимость на уровне $\alpha = 0,05$ и вычислить остаточную дисперсию.

16.6. Для данных задачи 15.7 найти коэффициенты линейного уравнения регрессии, остаточную дисперсию и доверительный интервал уровня $\alpha = 0,1$ для Y_0 при $X_0 = 1$.

16.7. По данным задачи 15.8 найти линейное уравнение регрессии и оценить остаточную дисперсию.

16.8. По данным задачи 15.9 найти линейное уравнение регрессии, остаточную дисперсию и доверительный интервал уровня $\alpha = 0,1$ для Y_0 при $X_0 = 3$.

16.9. По данным задачи 15.10 найти линейное уравнение регрессии Y по X , оценить остаточную дисперсию и найти доверительный интервал уровня $\alpha = 0,05$ для Y_0 при $X_0 = 20$.

16.10. В таблице 2 приведены данные о зависимости эксплуатации самолета Y (млн. руб.) от его возраста X (лет).

Таблица 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	3,5	3,5	4	4	6	9	10

Найти линейное уравнение регрессии Y по X , оценить его значимость на уровне $\alpha = 0,01$ и определить остаточную дисперсию.

16.11. Найти линейное уравнение регрессии и остаточную дисперсию по данным задачи 15.11.

6.12. По данным задачи 15.1 найти линейное уравнение регрессии, оценить его значимость и найти остаточную дисперсию.

Ответы: **16.1.** $y = -0,677 + 0,189x$, функция регрессии значима. **16.2.** $y = 2,45 + 0,05x$; уравнение значимо;

$2,07 < Y_0 < 4,33$. **16.3.** $y = 3,87 + 0,4x$; $S_0^2 = 1,372$;

$29,35 < Y_0 < 34,39$. **16.4.** $y = 8,46 - 0,52x$; $S_0^2 = 1,63$.

16.5. $y = 1,76 + 0,1x$, уравнение значимо, $S_0^2 = 0,011$.

16.6. $y = 1,21 + 2,24x$; $S_0^2 = 0,513$; $2,50 < Y_0 < 4,40$.

16.7. $y = 4,07 + 79,19x$; $S_0^2 = 24,73$. **16.8.** $y = 2,2 + 0,91x$;

$S_0^2 = 0,382$; $4,27 < Y_0 < 5,59$. **16.9.** $y = 0,78 + 0,1x$; $S_0^2 = 0,541$;

$2,03 < Y_0 < 3,53$. **16.10.** $y = x + 0,875x$, уравнение значимо,

$S_0^2 = 1,563$. **16.11.** $y = 1675 - 4,55x$; $S_0^2 = 6,41$.

16.12. $y = 7,04 + 0,54x$, уравнение значимо, $S_0^2 = 4,39$.

Приложения

Таблица 1. Значения функции $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

<i>z</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0012	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2. Значения функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	0,1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2923	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	3015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	0,4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4860	4864	4867	4871	4874	4877	4880	4883	4886	4889
2,3	4892	4895	4898	4900	4903	4906	4908	4911	4913	4915
2,4	4918	4920	4922	4924	4926	4928	4930	4932	4934	4936
2,5	0,4937	4939	4941	4942	4944	4946	4947	4949	4950	4952
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4960	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4971	4972	4973
2,8	4974	4975	4075	4976	4977	4978	4978	4979	4950	4980
2,9	4981	4981	4983	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986
3,0	0,4986	4986	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989

3,1	4990	4990	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992
3,2	4993	4993	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4994
3,3	4995	4995	4995	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996
3,4	4996	4996	4996	4996	4997	4997	4997	4997	4997	4997
3,5	0,4997	4997	4997	4997	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,7	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,9	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999

Таблица 3. Значения функции Пуассона $P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

λ									
m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000696	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
							0,000001	0,000002	0,000004

m	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,02862	0,014994

								6	
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,05725 2	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,09160 4	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,12213 8	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,13958 7	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008102	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,13958 7	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,12407	0,131756

Продолжение таблицы 3

m	λ								
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
10	0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113740
12	0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13		0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14		0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15		0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16			0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17			0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18				0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19				0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20					0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21					0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22						0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23						0,000001	0,000008	0,000042	0,000176

24							0,000003	0,000016	0,000073
25							0,000001	0,000006	0,000029
26								0,000002	0,000011
27								0,000001	0,000004
28									0,000001

Продолжение таблицы 3

m	λ								
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
10	0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113740
12	0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13		0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14		0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15		0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16			0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17			0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18				0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19				0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20					0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21					0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22						0,000003	0,000022	0,000108	0,000404

23						0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24							0,000003	0,000016	0,000073
25							0,000001	0,000006	0,000029
26								0,000002	0,000011
27								0,000001	0,000004
28									0,000001

Таблица 4. Значения $\chi^2_{\beta, \nu}$ для вероятностей $P(\chi^2 > \chi^2_{\beta, \nu}) = \beta$

ν	β															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,000	0,00	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,04	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	0,115	0,18	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66	4,64	6,30	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,297	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,90	6,00	7,80	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	0,554	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,10	7,30	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	0,872	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,20	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	1,239	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,34	8,40	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,4
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,50	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	21,6
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,58	6,39	8,35	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,05	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,57	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	4,11	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,66	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	5,23	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	5,81	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	6,41	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8

18	7,02	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	7,63	8,6	10,1	11,3	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	8,26	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3

Продолжение таблицы 4

v	β															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	9,54	10,60	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	10,20	11,29	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	22,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	10,86	11,99	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	11,52	12,70	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	12,20	13,41	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	12,88	14,12	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	13,56	14,85	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	14,26	15,57	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	14,95	16,31	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7
35	18,5	19,9	22,5	24,8	27,8	30,2	33,7	38,9	41,8	46,1	49,8	53,1	57,3	60,3	65,0	66,6
40	22,2	23,6	26,5	29,1	32,3	34,9	38,6	44,2	47,3	51,8	55,8	58,2	63,7	66,8	71,8	73,4
45	25,9	27,5	30,6	33,4	36,9	39,6	43,6	49,5	52,7	57,5	61,7	64,2	70,0	73,2	78,0	80,1
50	29,7	31,5	34,8	37,7	41,4	44,3	48,5	54,7	58,2	63,2	67,5	70,1	76,2	79,5	84,5	86,2
75	49,5	51,7	56,1	59,8	64,5	68,1	73,2	80,9	85,1	91,1	96,2	99,8	106,4	110,3	116,5	118,6
100	70,1	72,9	77,9	82,4	87,9	92,1	98,0	106,9	111,7	118,5	124,3	128,3	135,6	140,2	147,1	149,4

Таблица 5. Значения t_α для вероятностей $2 \int_0^{t_\alpha} S_\nu(t) dt = \alpha$
(t - распределение Стьюдента)

v	α						
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250
4	134	271	414	569	741	941	1,190
5	132	267	408	559	727	920	1,156
6	131	265	404	553	718	906	1,134
7	130	263	402	549	711	896	1,119
8	130	262	399	546	706	889	1,108
9	129	261	398	543	703	883	1,100
10	129	260	397	542	700	879	1,093
11	129	260	396	540	697	876	1,088
12	128	259	395	539	695	873	1,083
13	128	259	394	538	694	870	1,079
14	128	258	393	537	692	868	1,076
15	128	258	393	536	691	866	1,074
16	128	258	392	535	690	865	1,071
17	128	257	392	534	689	863	1,069
18	127	257	392	534	688	862	1,067
19	127	257	391	533	688	861	1,066
20	127	257	391	533	687	860	1,064
21	127	257	391	532	686	859	1,063
22	127	256	390	532	686	858	1,061
23	127	256	390	532	685	858	1,060

24	127	256	390	531	685	857	1,059
25	127	256	390	531	684	856	1,058
26	127	256	390	531	684	856	1,058
27	127	256	389	531	684	855	1,057
28	127	256	389	530	683	855	1,056
29	127	256	389	530	683	854	1,055
30	127	256	389	530	683	854	1,055
40	126	255	388	529	681	851	1,050
60	126	254	387	527	679	848	1,046
120	126	254	386	526	677	845	1,041
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036

Продолжение таблицы 5

v						
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,080	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79

23	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,289	1,658	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,282	1,645	1,96	2,33	2,58	3,29

Таблица 6. Значения F распределения Фишера
(для уровня значимости $\beta = 0,05$)

v_2	v_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	225	230	234	237	239	241	242
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,3	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35

24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83

Продолжение таблицы 6

v₂	v₁									
	11	12	13	16	20	30	40	50	75	100
1	243	244	245	246	248	250	251	252	253	253
2	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,46	19,47	19,47	19,48	19,49
3	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,62	8,60	8,58	8,57	8,56
4	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66
5	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,50	4,46	4,44	4,42	4,40
6	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71
7	3,60	3,57	3,52	3,49	3,44	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28
8	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98
9	3,10	3,07	3,02	2,98	2,93	2,86	2,82	2,80	2,77	2,76
10	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59
11	2,82	2,79	2,74	2,70	2,65	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45
12	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35
14	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19
16	2,45	2,42	2,37	2,33	2,28	2,20	2,16	2,13	2,09	2,07
20	2,31	2,28	2,23	2,18	2,12	2,04	1,99	1,96	1,92	1,90

24	2,22	2,18	2,13	2,09	2,02	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80
30	2,12	2,09	2,04	1,99	1,93	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69
40	2,04	2,00	1,95	1,90	1,84	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59
50	1,98	1,95	1,90	1,85	1,78	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52
70	1,93	1,89	1,84	1,79	1,72	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45
100	1,88	1,85	1,79	1,75	1,68	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39
200	1,83	1,80	1,74	1,69	1,62	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32
400	1,81	1,78	1,72	1,67	1,60	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28
∞	1,79	1,75	1,69	1,64	1,57	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей – М.: Наука, 1964 – 576с.
2. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972 – 345с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1971 – 400с.
4. Белько И.В., Свирид Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Новое знание, 2004 – 251с.
5. Юсупов Р.А. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Астрахань: Издательство «Хазар», 2002 – 180с.
6. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. – Мн.: Высшая школа, 2006 – 336с.
7. Гусак А.А. Теория вероятностей. – Мн.: ТетраСистемс, 2002 – 288с.
8. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2007 – 576с.

