



**Федеральное агентство по рыболовству  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Астраханский государственный технический  
университет»**

Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций  
сертифицирована DQS  
по международному стандарту ISO 9001:2015

**Институт информационных технологий и коммуникаций**

**Кафедра «Высшая и прикладная математика»**

**Методические указания  
по выполнению практических работ**

Для обучающихся по направлению  
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

профиля  
«Электропривод и автоматика»

АСТРАХАНЬ – 2022

**Составитель:** доцент,  
**к.т.н. Г.Н.Терновая**

**Рецензент:** к.т.н., доцент, Ильясова А.К.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине (модулю) «Математика» утверждены на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

«31» августа 2022 г., протокол № 7

© Астраханский государственный технический университет

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.....                                  | 4  |
| 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ .....                                      | 31 |
| 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ<br>ФУНКЦИИ.....          | 39 |
| 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ<br>ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....      | 46 |
| 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ<br>НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ..... | 53 |
| 6. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....                                       | 61 |
| 7. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....                                         | 66 |
| 8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ<br>.....                   | 69 |
| 9. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ .....                               | 79 |
| 10. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ .....                            | 86 |
| 11. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО                           | 92 |
| 12. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....                                         | 94 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....                                 | 96 |

# 1. ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## Теоретические сведения.

Совокупность  $m \cdot n$  чисел, расположенных в виде таблицы из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *числовой матрицей*. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы обычно обозначают малыми буквами с двойным индексом:  $a_{ij}$ . Здесь первый индекс  $i$  обозначает номер строки, а второй индекс  $j$  – номер столбца, в котором находится этот элемент.

Обозначения матриц:

1) В виде таблицы чисел: 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

2) Кратко:  $(a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n .;$

3) Заглавной буквой:  $A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n ;$

4) В виде совокупности строк или столбцов.

Опр. Если в матрице  $A \quad m=n$ , то матрица  $A$  называется *квадратной порядка  $n$* . Если в матрице  $A \quad m \neq n$ , тогда говорят, что  $A$  – *прямоугольная матрица* размерностью  $m \times n$  (записывается  $A_{m \times n}$ ).

Матрица, полностью состоящая из нулей, называется *нулевой матрицей*, она обозначается  $O$ .

Опр. Элементы вида  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  составляют главную диагональ квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$ .

Опр. Квадратная матрица, в которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0, называется единичной

матрицей. Она обозначается  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

Опр. Матрицы  $A$  и  $B$  называются равными, если они имеют одинаковые размерности, и равны все их элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е.  $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ .

Пример. Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Если определить  $c_{ij}$  как суточное потребление  $i$ -го вида пищи  $j$ -м животным, то

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей размера  $3 \times 5$ , отражающей общее суточное потребление. Она дает удобный способ ведения записей.

Операции над матрицами.

1). Сложение матриц. Пусть существуют матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$ . Тогда существует матрица  $C_{m \times n} = A + B$ , элементы которой равны суммам стоящих на одинаковых местах элементов матриц  $A$  и  $B$ , т.е.  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$ .

*Свойства:* 1)  $A + B = B + A$ ; 2)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ; 3)  $A + O = A$ .

2) Умножение матрицы на число. Пусть существуют матрица  $A_{m \times n}$  и число  $\alpha$ . Тогда существует матрица  $C_{m \times n} = \alpha \cdot A$ , элементы которой равны произведениям стоящих на соответствующих местах элементов матрицы  $A$  на число  $\alpha$ , т.е.  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \forall i, j$ .

*Свойства:*

1)  $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$ ; 2)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ ; 3)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ .

Матрицу  $(-1) \cdot A$  называют *противоположной матрице*  $A$  и обозначают  $-A$ . Сумма матриц  $B$  и  $-A$  называется *разностью матриц*  $B$  и  $A$ . Обозначается разность  $B - A$ .

3) Умножение матриц. Пусть существуют строка

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и столбец  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ . Количество элементов в

строке  $a$  и столбце  $b$  обязательно должно быть одинаковым. Тогда произведением строки  $a$  на столбец  $b$  называется число  $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ .

Пусть существует матрица  $A_{m \times p} = (a_{ik})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, p$ , и матрица  $B_{p \times n} = (a_{kj})$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Таким образом, количество столбцов первой матрицы (т.е.  $A$ ) совпадает с количеством строк второй матрицы (т.е.  $B$ ). Матрицы, для которых выполняется это свойство, называются *согласованными*.

Произведением матрицы  $A$  на матрицу  $B$  называют матрицу  $A \cdot B = C_{m \times n} = (c_{ij})$ , элементы которой  $c_{ij}$  равны произведению  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$ .

*Свойства* (выполняются только для согласованных матриц):

- 1)  $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ;
- 2)  $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ ;
- 3)  $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ;
- 4)  $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$ ;
- 5)  $A \cdot E = A$ ,  $E \cdot A = A$ ;
- 6)  $A \cdot O = O$ ,  $O \cdot A = O$ .

Примечание. Умножение матриц не коммутативно. Это означает следующее:

1) Если существует матрица  $A \cdot B$ , то матрица  $B \cdot A$  может не существовать;

2) Если существуют матрицы  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ , то в общем случае  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

4) Транспонирование матрицы – это процесс получения из матрицы  $A$  матрицы  $A^T$  путем замены каждой строки матрицы  $A$  ее столбцом с тем же номером.  $A^T$  называется матрицей,

транспонированной по отношению к матрице  $A$ . Таким образом,

если матрица  $A$  имеет вид:  $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , то

матрица  $A^T$  имеет вид:  $A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ . Для

элементов матриц  $A = (a_{ij})$  и  $A^T = (a_{ij}^T)$  выполняется равенство:  $a_{ji}^T = a_{ij}, \forall i, j$ .

Свойства. 1)  $(A^T)^T = A$ ; 2)  $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$ ; 3)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ; 4)  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ .

**Пример.** Вычислить  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии. Предположим, что три человека заболели заразной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем-либо из шести человек второй группы. Определим матрицу  $A = (a_{ij})$  размерностью  $3 \times 6$ , полагая  $a_{ij} = 1$ , если  $j$ -й человек второй группы находился в контакте с  $i$ -м больным из первой группы, и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Аналогично определим матрицу  $B = (b_{ij})$

размерностью  $6 \times 7$ , полагая  $b_{ij} = 1$ , если  $j$ -й человек третьей группы находился в контакте с  $i$ -м человеком из второй группы, и  $b_{ij} = 0$  в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В данном случае  $a_{24} = 1$  означает, что 4-й человек второй группы находился в контакте со 2-м больным первой группы. Аналогично,  $b_{33} = 0$  означает, что 3-й человек третьей группы не соприкасался с 3-м человеком из второй группы.

Нас могут интересовать также не прямые контакты, или контакты второго порядка, между семью людьми третьей группы и тремя больными первой. Эти контакты второго порядка описывает матричное произведение  $C = A \cdot B$ . Элемент

$c_{ij} = \sum_{k=1}^6 a_{ik} \cdot b_{kj}$  дает число контактов второго порядка между  $j$ -м

человеком третьей группы и  $i$ -м человеком из группы больных.

Для заданных матриц  $A$  и  $B$  получаем:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Элемент  $c_{23} = 2$  показывает, что имеется два контакта второго порядка между 3-м человеком третьей группы и 2-м инфекционным больным. Заметим, что у 6-го человека из третьей группы оказалось  $1 + 1 + 2 = 4$  не прямых контактов с зараженной группой. Таких контактов нет только у 5-го человека.

Определитель (или детерминант) матрицы – это определенное число, сопоставленное числовой матрице, которое вычисляется по ее элементам с помощью некоторых заданных правил. Определитель вычисляется только для квадратных матриц. Определитель обозначается значками  $| \quad |$  или  $\det( \quad )$ , т.е.  $|A|$ ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ или } \det(A), \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей:

1) Определитель матрицы порядка 1 равен элементу этой матрицы, т.е.  $\det(A_1) = \det(a_{11}) = a_{11}$ .

2) Определитель матрицы  $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, n > 1$ ,

вычисляется по формуле:  $\det(A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$  (1).

Здесь  $M_{1k}$  – это определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  вычеркиванием первой строки и  $k$ -го столбца, и имеющей порядок  $(n-1)$ .  $M_{1k}$  называется *минором* элемента  $a_{1k}$ . Можно ввести понятие минора для  $\forall$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  как определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $M_{ij}$ ). Также вводят понятие *алгебраического дополнения* элемента  $a_{ij}$  по формуле:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  (2). Т.о., формулу (1) можно записать с учетом формулы (2) следующим образом:  $\det(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$  (3). Формула (3) в общем случае справедлива не только для первой, но и для любой строки матрицы (а также для любого ее столбца). Поэтому можно записать:

$$\det(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \forall i = 1, \dots, n;$$

или

$$\det(A_n) = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, \forall j = 1, \dots, n$$

– разложение определителя по  $i$ -й строке ( $j$ -му столбцу). Таким образом, определитель равен сумме произведений элементов

какой-либо строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.

Рассмотрим важные частные случаи вычисления определителя для небольших порядков  $n$  матрицы  $A$ .

$$n=2. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n=3. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Последняя формула достаточно сложна, поэтому существует наглядная схема для ее составления, приведенная на рисунке 6. Она называется *правило треугольников* или *правило Саррюса*.

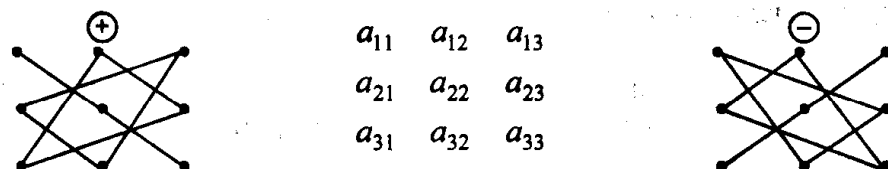


Рис. 6. Вычисление определителя матрицы третьего порядка.

#### Свойства определителей:

- 1)  $|A^T| = |A|$
- 2) Если все элементы некоторого ряда (т.е. строки или столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.
- 3) Если все элементы некоторого ряда матрицы имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
- 4) Определитель, у которого каждый элемент некоторого ряда является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанном ряду стоит первое слагаемое, а у второго – второе слагаемое. Остальные

ряды, параллельные указанному, у этих определителей одинаковые.

5) Если матрица  $B$  получена из матрицы  $A$  перестановкой двух параллельных рядов, то  $|A| = -|B|$ .

6) Если матрица  $A$  имеет два одинаковых параллельных ряда, то  $|A|=0$ .

7) Если матрица  $A$  имеет 2 параллельных пропорциональных ряда, то  $|A|=0$ .

8) Если матрица  $B$  получена из матрицы  $A$  прибавлением к некоторому ряду другого параллельного ему ряда, умноженного на число, то  $|A|=|B|$ . Если  $B$  получена из  $A$  прибавлением к некоторому ряду линейной комбинации других параллельных рядов, то  $|A|=|B|$ .

9) Если в матрице какой-либо ряд есть линейная комбинация других параллельных ему рядов, то ее определитель равен нулю.

Примечание. Если в матрице некоторый ряд может быть представлен в виде суммы  $k$  других параллельных ему рядов, умноженных соответственно на числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , то говорят, что данный ряд является *линейной комбинацией* этих рядов матрицы. Если один из рядов матрицы является линейной комбинацией некоторых других параллельных ему рядов, то все эти ряды называются *линейно зависимыми*, в противном случае – *линейно независимыми*.

**Пример.** Вычислить определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{pmatrix}$ .

По свойствам определителя 3) и 8) имеем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 25 \cdot 13 & -132 \\ 25 \cdot 7 & -60 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 13 & (-12) \cdot 11 \\ 7 & (-12) \cdot 5 \end{vmatrix} = 25(-12) \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -300 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -300 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1800(5 - 7) = 3600. \end{aligned}$$

**Пример.** Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Применив правило треугольников, получим формулу:

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 5 = -15.$$

Вычислим этот же определитель, разложив его по первой строке.

Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

Теперь вычислим определитель по формуле (3):

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 15 = -15.$$

**Пример.** Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Разложим определитель по первому столбцу:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41}.$$

Из-за того, что все элементы первого столбца матрицы равны нулю, кроме элемента  $a_{11}$ , нам достаточно вычислить только алгебраическое дополнение  $A_{11}$ . Найдем его по правилу треугольников.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -3$$

Таким образом, получаем:  $|A| = 1 \cdot A_{11} = 1 \cdot (-3) = -3$ .

Матрица, определитель которой равен 0, называется *вырожденной*, в противном случае – *невырожденной*. Матрица  $B$

называется обратной к матрице  $A$ , если  $B \cdot A = A \cdot B = E$ . Матрицу, обратную к  $A$ , обычно обозначают  $A^{-1}$ .

*Критерий существования обратной матрицы.* Любая квадратная невырожденная матрица имеет обратную матрицу, причем только одну.

*Свойства обратной матрицы.* 1)  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ; 2)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ; 3)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ; 4)  $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ .

**Алгоритм вычисления обратной матрицы.** Пусть существует квадратная невырожденная матрица  $A$ .

1) Вычислим  $\det(A)$ .

2) Для каждого элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  найдем его алгебраическое дополнение  $A_{ij}$ .

3) Запишем  $A_{ij}$  на места элементов  $a_{ij}$ , получим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Транспонируем  $\tilde{A}$  и разделим ее на  $\det(A)$ , получим  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

5) Если  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ , то  $A^{-1}$  вычислена верно.

**Пример.** Найти матрицу, обратную к матрице  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1) Найдем определитель матрицы:  $|A| = 5$ .

2) Найдем алгебраические дополнения  $A_{ij}$  для всех элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

3) Составим матрицу  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4) Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

5) Проверим правильность вычислений:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из  $m$  уравнений с  $n$  переменными называется система уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь числа  $a_{ij}$  – коэффициенты,  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , числа  $b_i$  – свободные члены,  $i = 1, \dots, m$ ;  $x_j$  – переменные (неизвестные). Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь (2) – матрица системы (1), (3) – расширенная матрица системы, (4) – матрица (вектор) свободных членов (правой части системы), (5) – матрица (вектор) переменных (неизвестных).

Тогда система (1) может быть записана в *матричном виде*:

$$A \cdot X = B \quad (6).$$

Множество чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$  называется *решением СЛАУ* (1), если при их подстановке в систему (1) вместо соответствующих  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , они приводят эту систему к тождествам. Если  $c_1, c_2, \dots, c_n$  является решением системы (1), то матрица  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  называется *вектором решений системы* (6).

Далее будем рассматривать СЛАУ с квадратной матрицей  $A$ , у которой  $m=n$ . Если  $\det(A) \neq 0$ , то система (1) имеет единственное решение. Для его нахождения можно использовать следующие основные способы.

1) Матричный метод (метод обратной матрицы). Рассмотрим систему (1), записанную в виде (6). Для вычисления матрицы неизвестных переменных  $X$  нужно найти матрицу,

обратную к  $A$ , и умножить ее слева на матрицу свободных членов  $B$ :

$$X = A^{-1}B \quad (7).$$

2) Метод Крамера. Вычислим определители  $|A_j|$ , которые получаются из  $|A|$  заменой ее  $j$ -го столбца вектором свободных членов  $B$ :

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда элементы вектора неизвестных переменных  $x_j$  вычисляются по формуле:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = 1, 2, \dots, n \quad (8).$$

3) Метод Гаусса. Он состоит в последовательном исключении неизвестных переменных системы (1) и ее приведению к ступенчатому (или треугольному) виду

$$\left. \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\ &\dots \\ x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

с последующим нахождением неизвестных переменных в обратном порядке. Процесс перехода от системы (1) к системе (9) называется *прямым ходом метода Гаусса*. Процесс последовательного нахождения значений неизвестных переменных из систем (9) называется *обратным ходом метода Гаусса*. Осуществляя обратный ход, из предпоследнего уравнения мы найдем  $x_{n-1}$  (с учетом последнего уравнения). Зная  $x_n, x_{n-1}$ , найдем  $x_{n-2}$  и так далее, пока не найдем последнюю переменную  $x_1$  из первого уравнения системы (9).

**Пример.** Решите заданную систему линейных уравнений: а) методом Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 1 - 2 - 6 + 4 = -5.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , система имеет единственное решение. Найдем  $\Delta_1$ , заменяя первый столбец в определителе  $\Delta$  столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -16 + 12 + 1 - 4 - 6 + 8 = -5.$$

Аналогично находим  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 2 + 1 - 8 - 8 = -5.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 - 4 + 8 + 2 - 6 = -5.$$

Таким образом, по формуле (8) получаем:

$$x_1 = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_3 = \frac{-5}{-5} = 1.$$

б) Составим матрицу системы  $A$ , матрицу-столбец  $X$  из неизвестных и матрицу-столбец  $B$  из свободных членов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$ . Для этого вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ .

$$A_{11} = -2, \quad A_{21} = -5, \quad A_{31} = 4,$$

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = 5, \quad A_{32} = -5,$$

$$A_{13} = 1, \quad A_{23} = 5, \quad A_{33} = -7.$$

Теперь найдем искомую матрицу  $X$ :

$$X = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -8-5+8 \\ 0+5-10 \\ 4+5-14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли, что  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ .

в) Чтобы решить систему методом Гаусса, составим расширенную матрицу системы и приведем ее к диагональному виду.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для удобства преобразований желательно, чтобы «ведущий» элемент матрицы  $a_{11}$  был равен 1. Поменяем местами первую и вторую строки.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на  $-2$  и прибавим ко второй строке, а из третьей строки вычтем первую. Получим:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переставим вторую и третью строки:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим 2-ю строку на  $-7$  и прибавим к 3-й:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проделанная операция называется *прямым ходом* схемы Гаусса. *Обратный ход* предполагает получение нулей выше главной диагонали. Для этого умножим вторую строку на 2, третью – на  $-2$  и прибавим к первой строке. Получим:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Отсюда следует, что  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ .

**Пример.** Три вида бактерий сосуществуют в пробирке и потребляют три субстрата. Пусть бактерия  $i$ -го вида в среднем потребляет в день количество  $c_{ij}$   $j$ -го субстрата. Определим  $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$  как вектор потребления для  $i$ -го вида. Пусть  $c_1 = (1, 1, 1)$ ,  $c_2 = (1, 2, 5)$  и  $c_3 = (1, 3, 4)$ . Предположим, что каждый день в пробирку вносят 18000 ед. первого субстрата, 29000 ед. второго и 47000 ед. третьего. Каковы численности популяций трех видов бактерий, которые могут сосуществовать в данной среде, если считать, что бактерии потребляют весь дневной запас субстратов?

Обозначим численности трех видов бактерий, которые могут быть обеспечены субстратами, через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . При этом  $x_1$  особей первого вида потребляют по  $x_1$  ед. каждого субстрата.  $x_2$  бактерий второго вида потребляют  $x_2$ ,  $2x_2$  и  $5x_2$  ед. первого, второго и третьего субстратов соответственно. Аналогичные величины для третьего вида составляют  $x_3$ ,  $3x_3$  и  $4x_3$  ед. Уравнивая общее потребление каждого субстрата с его доступным запасом, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 29000, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 47000. \end{cases}$$

Решив данную систему любым методом, найдем искомые численности популяций  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ :  $x_1 = 10000$ ,  $x_2 = 5000$ ,  $x_3 = 3000$ .

Описание биологических процессов часто предполагает изучение взаимосвязей большого количества переменных величин. Например, при изучении природных экосистем может потребоваться регистрация или моделирование роста и взаимодействия 100 (и более) видов растений и животных. Чтобы следить за всеми необходимыми переменными и сделать возможным математическое описание столь сложных систем, нужно иметь соответствующую систему математических обозначений. Она состоит в использовании матриц и векторов.

Существуют разные подходы к определению понятия «вектор» в зависимости от области применения этого математического объекта. Наиболее общее определение вводит *вектор* как упорядоченное множество. Элементы этого множества называются *элементами* или *компонентами вектора*. Элементы вектора могут иметь разную природу. Это могут быть числа, функции, другие векторы или матрицы, и другие математические объекты.

Более привычное определение рассматривают *вектор с геометрической точки зрения*, и вводит его как направленный отрезок. При этом он будет определяться упорядоченной парой точек  $A$  и  $B$ , причем первая точка  $A$  определяет *начало вектора*, а вторая точка  $B$  – *его конец*. Вектор обычно обозначают либо  $\overrightarrow{AB}$  (первой пишется начальная точка), либо  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , либо жирным шрифтом:  $\mathbf{a}$ . Вводят также *нулевой вектор*, у которого точки начала и конца совпадают. Обозначают его  $\vec{0}$ . На чертеже вектор обозначают стрелкой:  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$ . Начало вектора называется *точкой его приложения*. Расстояние между началом и концом вектора называют его *длиной* или *модулем*. Длина вектора обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\vec{a}|$ .

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору и имеет длину, равную нулю. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Обычно вектор определяется с точностью до точки приложения. Это означает, что выбрав любую точку  $A'$ , мы можем построить вектор  $\overrightarrow{A'B'}$  (причем только один!), равный заданному вектору  $\overrightarrow{AB}$ , т.е. перенести вектора  $\overrightarrow{AB}$  в точку  $A'$ : По сути, мы получим тот же вектор  $\overrightarrow{AB}$ , просто приложенный в другой точке  $A'$ . Таким образом, каждый вектор фактически определяет бесконечное множество равных ему векторов, приложенных в разных точках.

Примечание. Однако, в ряде случаев, например, при использовании векторов в физике, отождествление равных векторов недопустимо. Например, одинаковые силы, описываемые равными векторами, но приложенные в разных точках, могут производить разные действия.

### Операции над векторами.

1) Сложение векторов. Пусть существуют векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построим равные им векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  (т.е. перенесем конец  $\vec{a}$  и начало  $\vec{b}$  в одну точку  $B$ ). Тогда вектор  $\overrightarrow{AC}$  называется *суммой*  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и обозначается  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Примечание. Если выбрать вместо  $B$  другую точку  $B'$ , то в качестве суммы получим вектор  $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ .

2) Умножение вектора на число. Произведение вектора  $\vec{a}$  на вещественное число  $\alpha$  есть вектор  $\vec{b} = \alpha * \vec{a}$ , удовлетворяющий условиям:

а)  $|\vec{b}| = |\alpha| * |\vec{a}|$ ;

б)  $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ;

в) Если  $\alpha > 0$ , то  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  направлены одинаково; если  $\alpha < 0$ , то  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  направлены противоположно. Если  $\alpha = 0$ , то  $\vec{b} = \vec{0}$ .

Выражение вида  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$  называется *линейной комбинацией* векторов  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ . Числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  называются *коэффициентами линейной комбинации*. Линейная комбинация векторов называется *тривиальной*, если ее коэффициенты равны нулю. Линейная комбинация векторов называется *нетривиальной*, если как минимум один ее коэффициент не равен нулю. Тривиальная линейная комбинация любых векторов равна  $\vec{0}$ .

Векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Векторы  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  называются *линейно независимыми*, если равна нулевому вектору только их тривиальная линейная комбинация, т.е. из  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$  следует  $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$ .

### Свойства линейной зависимости векторов.

1) Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы раскладывается в линейную комбинацию остальных.

2) Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и любые два линейно зависимых вектора коллинеарны.

3) Любые три компланарных вектора линейно зависимы, и любые три линейно зависимых вектора компланарны.

*Базис в  $n$ -мерном пространстве* составляют любые  $n$  линейно независимых векторов, взятые в определенном порядке. Любой вектор может быть представлен линейной комбинацией векторов, составляющих базис (*базисных векторов*). Это называется *разложением вектора по базису*. Коэффициенты этой линейной комбинации называются *координатами или компонентами вектора*. Компоненты вектора в каждом базисе будут определены однозначно.

**Пример.** Пусть заданы векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – базис в пространстве, и некоторый вектор  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ . Тогда  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – координаты (компоненты) вектора  $\vec{a}$  в данном базисе:  $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Свойства компонентов вектора.

1) Равные векторы имеют одинаковые компоненты.

2) При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число.

3) При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

Рассмотрим точки  $A$  и  $B$ . Тогда, чтобы найти компоненты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , нужно из координат его конечной точки вычесть соответствующие координаты его начальной точки.

*Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  или  $(\vec{a}, \vec{b})$ . По определению  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ , где  $\varphi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Свойства скалярного произведения:

1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2)  $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ .  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a} = \vec{0}$ .

5)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, или хотя бы один из векторов  $\vec{a}$  или  $\vec{b}$  – нулевой.

Вычисление скалярного произведения через координаты векторов.

Пусть существует  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Тогда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ . Из свойства 4) следует, что

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ . Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}.$$

Три вектора называются *упорядоченной тройкой векторов*, если указано, какой из них является первым, вторым или третьим. Упорядоченная тройка некопланарных векторов называется *правой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму вектору виден против часовой стрелки, и *левой*, если этот поворот виден по часовой стрелке.

*Векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – вектор  $\vec{c}$ , удовлетворяющее условиям:*

- 1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ , где  $\varphi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2) вектор  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 3) вектор  $\vec{c}$  направлен так, что тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  является правой.

Векторное произведение обозначается  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Свойства векторного произведения:

- 1) Векторное произведение  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.
- 2) Модуль векторного произведения  $[\vec{a}, \vec{b}]$  неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$3) [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}].$$

$$4) [\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}].$$

$$5) [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$$

Вычисление векторного произведения через координаты векторов.

Пусть заданы  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Тогда координаты вектора  $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ . Для удобства запоминания, можно использовать формулу:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \text{ Тогда разложение этого определителя по}$$

$$\text{первой строке равно: } [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – это число  $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ . Смешанное произведение обозначается  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .

Свойства смешанного произведения.

$$1) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

2) Смешанное произведение  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны.

3) Смешанное произведение  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , взятому со знаком «+», если упорядоченная тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  – правая, и со знаком «-», если она левая.

Вычисление смешанного произведения через координаты векторов.

Пусть  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ . Тогда смешанное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Пример.** По координатам точек  $A, B$  и  $C$  для указанных векторов найти модуль вектора  $\vec{a}$  и скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \vec{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BA}$$

$$\vec{BA} = (2 - 3, 4 - 1, 3 - (-4)) = (-1, 3, 7).$$

$$\vec{AC} = (-1 - 2, 2 - 4, 2 - 3) = (-3, -2, -1).$$

$$2\vec{BA} = (-2, 6, 14); \quad 4\vec{AC} = (-12, -8, -4).$$

$$\vec{a} = (-2 + (-12), 6 + (-8), 14 + (-4)) = (-14, -2, 10).$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{196 + 4 + 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-14) \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 10 \cdot 7 = 14 - 6 + 70 = 78.$$

**Пример.** По координатам точек  $A, B$  и  $C$  для указанных векторов найти косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{a} + \vec{b}$ .

$$A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \vec{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BA}$$

$$\vec{a} = (-14, -2, 10), \quad \vec{b} = (-1, 3, 7) \quad (\text{см. предыдущий пример}).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 78, \quad |\vec{a}| = 10\sqrt{3} \quad (\text{см. предыдущий пример}).$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 9 + 49} = \sqrt{59}.$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{78}{10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{59}} \approx 0.586$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -14 & 10 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -14 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot (-2 \cdot 7 - 3 \cdot 10) - \vec{j} \cdot (-14 \cdot 7 - 10 \cdot (-1)) +$$

$$+ \vec{k} \cdot (-14 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1)) = -44\vec{i} + 88\vec{j} - 44\vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-14 + (-1), -2 + 3, 10 + 7), \quad = (-15, 1, 17)$$

$$\begin{vmatrix} -14 & -2 & 10 \\ -1 & 3 & 7 \\ -15 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 0, \text{ поскольку III строка} = \text{I строка} + \text{II строка} \text{ (см.}$$

свойство определителей №9).

### Задания для самостоятельного выполнения.

#### Задание 1.

Для заданной матрицы  $A$  вычислить матрицу  $B = A^2 - 3A^T + 2E$ .

#### Варианты:

|                                                                            |                                                                           |                                                                            |                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1.                                                                         | 2.                                                                        | 3.                                                                         | 4.                                                                         |
| $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ |

|                                                                           |                                                                            |                                                                           |                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 5.                                                                        | 6.                                                                         | 7.                                                                        | 8.                                                                       |
| $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

|                                                                            |                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 9.                                                                         | 10.                                                                       |
| $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |

#### Задание 2.

Вычислите определитель заданной матрицы  $A$ .

#### Варианты:

|                                                                            |                                                                            |                                                                            |                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.</b>                                                                  | <b>2.</b>                                                                  | <b>3.</b>                                                                  | <b>4.</b>                                                                  |
| $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  | $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   | $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  |
| <b>5.</b>                                                                  | <b>6.</b>                                                                  | <b>7.</b>                                                                  | <b>8.</b>                                                                  |
| $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  | $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ |
| <b>9.</b>                                                                  | <b>10.</b>                                                                 |                                                                            |                                                                            |
| $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  | $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ |                                                                            |                                                                            |

### **Задание 3.**

Найти матрицу, обратную к заданной матрице  $A$ .

#### **Варианты:**

|                                                                              |                                                                             |                                                                             |                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.</b>                                                                    | <b>2.</b>                                                                   | <b>3.</b>                                                                   | <b>4.</b>                                                                   |
| $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$     | $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   | $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$   | $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ |
| <b>5.</b>                                                                    | <b>6.</b>                                                                   | <b>7.</b>                                                                   | <b>8.</b>                                                                   |
| $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ | $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$    |
| <b>9.</b>                                                                    | <b>10.</b>                                                                  |                                                                             |                                                                             |
| $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$    | $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  |                                                                             |                                                                             |

**Задание 4.**

Проверить совместность системы уравнений  $Ax=b$  и в случае совместности решить ее матричным методом, методами Крамера и Гаусса.

**Варианты:****1.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**2.**

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**3.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**4.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

**5.**

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

**6.**

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**7.**

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

**8.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**9.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ -33 \\ -7 \end{pmatrix}$$

**10.**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \\ -22 \end{pmatrix}$$

### **Задание 5.**

Заданы векторы **a**, **b**.

- 1) Проверить, ортогональны ли векторы **a** и **b**?
- 2) Найти координаты вектора **x**, если  $4\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$ .
- 3) Найти синус угла между векторами  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  и  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ .

#### **Варианты:**

- 1)  $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (5, 1, -3)$ .
- 2)  $\mathbf{a} = (7, 0, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 5, -7)$ .
- 3)  $\mathbf{a} = (-7, 0, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -3, 1)$ .
- 4)  $\mathbf{a} = (4, 2, -2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -5, 1)$ .
- 5)  $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-3, 1, 1)$ .
- 6)  $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -3, -5)$ .
- 7)  $\mathbf{a} = (4, 2, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (-5, -3, 5)$ .
- 8)  $\mathbf{a} = (-2, 0, -2)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, -1, 1)$ .
- 9)  $\mathbf{a} = (6, -4, 6)$ ,  $\mathbf{b} = (9, -1, 9)$ .
- 10)  $\mathbf{a} = (2, -4, -2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 5, -7)$ .

### **Задание 6.**

Заданы координаты точек A, B, C, D.

- а) Проверить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости?
- б) Проверить, является ли треугольник DBA равносторонним?
- в) Вычислить площадь треугольника DBA.

#### **Варианты:**

- 1) A(2, -3, 1), B(0, 1, 4), C(5, 2, -3), D(-1, -4, 6).
- 2) A(3, 3, 3), B(1, -2, 7), C(3, -6, 18), D(-1, -4, 6).
- 3) A(-2, 0, -1), B(0, 3, -2), C(3, 5, -7), D(1, 1, 1).
- 4) A(-1, 0, 1), B(2, -6, 4), C(2, -3, 2), D(3, -2, 1).
- 5) A(-4, 2, -1), B(3, 5, -2), C(0, 1, 5), D(-5, 0, -1).
- 6) A(4, -1, -5), B(1, 3, -4), C(-1, 7, -2), D(5, 2, -1).
- 7) A(4, -1, 3), B(2, 3, -5), C(7, 2, 4), D(4, -3, 2).
- 8) A(4, 2, -3), B(2, 0, 1), C(6, 6, -9), D(-5, 1, 7).
- 9) A(-5, -3, 1), B(-3, -8, -2), C(-2, -4, 1), D(0, -6, 3).
- 10) A(6, -4, 6), B(9, -6, 9), C(1, 0, -8), D(-4, 2, 5).

## 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

### Теоретические сведения.

#### Уравнения прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой:  $Ax + By + C = 0$ , коэффициенты  $A$  и  $B$  – это координаты нормального вектора прямой.  $\vec{n} = \{A; B\}$ .

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0)$  с заданным нормальным вектором  $\vec{n} = \{A; B\}$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси  $Ox$ .

$b$  – отрезок, отсекаемый прямой от оси  $Oy$  – «начальная ордината».

4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. Каноническое уравнение прямой (прямая задана точкой  $M_0(x_0; y_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a} = \{l; m\}$ ):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

5. Уравнение пучка прямых (совокупность прямых, проходящих через данную точку  $M_0(x_0; y_0)$ ):

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

6. Уравнение прямой «в отрезках» ( $a$  и  $b$  – отрезки, отсекаемые прямой на осях координат):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Угол между прямыми.** Угол  $\varphi$ , отсчитанный против часовой стрелки от прямой  $y = k_1x + b_1$  до прямой  $y = k_2x + b_2$ , определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Если прямые заданы общими или каноническими уравнениями, угол между ними вычисляется как угол между нормальными или направляющими векторами (2.4):  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$  или

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|}.$$

Условия параллельности прямых:  $k_1 = k_2$ .

Условия перпендикулярности прямых:  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

**Расстояние  $d$  от точки  $(x_0; y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ :**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Уравнение биссектрис углов между прямыми**

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ :

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

**Уравнение плоскости:**

1. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Коэффициенты  $A, B, C$  являются координатами нормального вектора плоскости, т.е.  $\vec{n} = \{A; B; C\}$ .

2. Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Угол между плоскостями** находится как угол между их нормальными векторами (2.4):  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}.$

Условия параллельности плоскостей:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

**Расстояние от точки до плоскости:**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Уравнения прямой в пространстве.**

1. Общие уравнения:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Всякие две не параллельные между собой плоскости, пересекаясь, определяют прямую в пространстве.

2. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3. Канонические уравнения прямой (прямая задана точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и направляющим вектором  $\mathbf{a} = \{l; m; n\}$ ):

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

4. Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases}$$

где  $t$  – некоторый параметр,  $t \in R$ .

**Угол между прямыми в пространстве** определяется как угол между их направляющими векторами (2.4):  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|}$ .

Условие параллельности прямых:  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ .

Условие перпендикулярности прямых:  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ .

**Угол между прямой и плоскостью.** Углом между прямой и плоскостью называется между этой прямой и ее проекцией на плоскость:

$$\sin \alpha = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:  $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ .

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0.$$

**Точка пересечения прямой и плоскости.**

Написав параметрические уравнения прямой  $x = mt + x_0$ ,  $y = nt + y_0$ ,  $z = pt + z_0$ , подставим в уравнение плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  вместо  $x, y, z$  их выражения через  $t$ . Найдем  $t = t_0$ , а затем координаты точки пересечения  $(x_0; y_0; z_0)$ .

**Пример.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-2; -3)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(-1; 3)$ . Требуется найти: 1) уравнение стороны  $AB$ ; 2) внутренний угол  $B$  треугольника; 3) уравнение медианы  $BM$ ; 4) уравнение и длину высоты  $CD$ .

**Решение.**

- 1) Найдем уравнение стороны  $AB$  (рис. 2.1), воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (2.8):

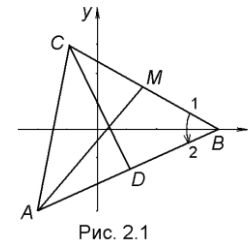


Рис. 2.1

Получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\frac{x + 2}{4 + 2} = \frac{y + 3}{0 + 3}; \quad \frac{x + 2}{6} = \frac{y + 3}{3}; \quad \frac{x + 2}{2} = \frac{y + 3}{1};$$

$$x + 2 = 2y + 6; \quad x - 2y - 4 = 0 \text{ — уравнение}$$

стороны  $AB$  в общем виде.

- 2) Найдем внутренний угол  $B$ , используя формулу (2.12):
- $$\operatorname{tg} B = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \text{где } k_1 \text{ — угловой коэффициент } BC, \quad k_2 \text{ — угловой}$$
- коэффициент  $AB$ . Первый из них найдем по координатам точек  $B$  и  $C$ :

$$k_1 = k_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{3 - 0}{-1 - 4} = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

Второй угловой коэффициент получим из уравнения стороны  $AB$ :  $k_2 = k_{AB} = \frac{1}{2} = 0,5$ . Значит,  $\operatorname{tg} B = \frac{0,5 + 0,6}{1 - 0,5 \cdot 0,6} = \frac{1,1}{0,7} \approx 1,57$ .  $\angle B = 57^\circ 30'$ .

- 3) Найдем уравнение медианы  $AM$ . Пусть точка  $M(\bar{x}; \bar{y})$  — середина отрезка  $BC$ . Согласно (2.6)  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

$$\bar{x} = \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad \bar{y} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad \Rightarrow \quad M(1,5; 1,5).$$

Составляем уравнение медианы  $AM$  по координатам двух точек  $A(-2; -3)$  и  $M(1,5; 1,5)$ .

$$\frac{x + 2}{1,5 + 2} = \frac{y + 3}{1,5 + 3}; \quad \frac{x + 2}{3,5} = \frac{y + 3}{4,5}; \quad 9x + 18 = 7y + 21; \quad 9x - 7y - 3 = 0.$$

$$AM: 9x - 7y - 3 = 0.$$

- 4) Найдем уравнение высоты  $CD$ , используя условие перпендикулярности двух прямых:  $k_1 \cdot k_2 = -1$ . В нашем случае  $CD \perp AB$ , т. е.  $k_{CD} \cdot k_{AB} = -1$ .

Угловой коэффициент прямой  $AB$  известен:  $k_{AB} = 0,5$ .

Следовательно,  $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -2$ .

По точке  $C(-1;3)$  и угловому коэффициенту  $k_{CD} = -2$  составим уравнение высоты  $CD$ : (используя уравнение  $y - y_0 = k(x - x_0)$ )

$$y - 3 = -2(x + 1)$$

$$y - 3 = -2x - 2$$

$2x + y - 1 = 0$  – уравнение высоты  $CD$ .

Длину высоты  $CD$  найдем как расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае длина высоты  $CD$  – это расстояние от точки  $C(-1;3)$  до прямой  $AB$ :  $x - 2y - 4 = 0$ .

$$CD = \frac{|1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-1 - 6 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} \approx 4,9.$$

### Задания для самостоятельного выполнения.

#### Задание 1.

$$\bar{a}_1 = (4, 1, 3, -2)$$

1. Найти  $3\bar{a}_1 + 5\bar{a}_2 - \bar{a}_3$ , где  $\bar{a}_2 = (1, 2, -3, 2)$

$$\bar{a}_3 = (16, 9, 1, -3)$$

2.  $\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + 4\bar{x} = \bar{0}$  Найти координаты  $\bar{x}$ .

$$\bar{a}_1 = (5, -8, -1, 2)$$

$$\bar{a}_2 = (2, -1, 4, -3)$$

$$\bar{a}_3 = (-3, 2, -5, 4)$$

3. Найти длину  $\bar{c} = \bar{a} - 3\bar{b}$ , где  $\bar{a} = (3, 5, 1)$   
 $\bar{b} = (1, 4, 2)$

4. Найти  $\alpha \cdot \beta$ , если векторы  $\vec{a} = (6, \alpha, -2)$  и  $\vec{b} = (3, 2, \beta)$  коллинеарны.
5. Найти  $\vec{c} \cdot \vec{b}$ , если  $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{a} = (3, -1, 0)$  и  $\vec{b} = (2, 1, -1)$
6. Найти косинус угла между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{a} = (3, -1, 4)$  и  $\vec{b} = (2, 1, 3)$
7. Найти  $\alpha$ , если векторы  $\vec{a} = (\alpha, -3, 2)$  и  $\vec{b} = (1, 2, -2)$  взаимно перпендикулярны.
8. Найти  $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  и  $\vec{a} \perp \vec{b}$
9. Найти длину вектора  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол в  $60^\circ$  и  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$
10. Найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны и векторы  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  перпендикулярны.

### Задание 2.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2, -5)$  и параллельную прямой  $3x + 4y + 2 = 0$ .
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $N(3, -1)$  и перпендикулярную прямой  $2x + y + 1 = 0$ .
3. Даны вершины треугольника ABC:  $A(2, 2)$ ,  $B(-2, -8)$ ,  $C(-6, -2)$ . Составить уравнения медиан.
4. Даны вершины треугольника ABC:  $A(0, 1)$ ,  $B(6, 5)$ ,  $C(12, -1)$ . Составить уравнение высоты, проведенной из вершины C.
5. Даны уравнения сторон треугольника:  $x + 3y - 7 = 0$  (AB),  $4x - y - 2 = 0$  (BC),  $6x + 8y - 35 = 0$  (AC). Найти длину высоты, проведенной из вершины B.
6. Даны вершины треугольника ABC:  $A(1, 1)$ ,  $B(10, 13)$ ,  $C(13, 6)$ . Составить уравнение биссектрисы угла A.
7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 4y + 7 = 0$  и  $5x + 2y + 3 = 0$  и параллельную оси ординат.

8. Составить уравнение прямой, параллельной вектору  $\vec{a} = (1, -4)$  и проходящей через точку  $M(2, 3)$ .
9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $2x + 3y - 8 = 0$  и  $5x - y - 3 = 0$  и точку пересечения прямых  $4x - 3y + 3 = 0$  и  $x + y - 1 = 0$ .
10. Даны точки  $A(3, 4)$ ,  $B(2, -1)$ . В какой точке прямая  $AB$  пересекает ось  $OX$ ?

### 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

#### Теоретические сведения.

Если каждому натуральному числу  $n$  по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число  $a_n$ , то множество  $\{a_n\}$  образует *числовую последовательность*. Таким образом, последовательность  $\{a_n\}$  – это функция, заданная на множестве натуральных чисел  $N$ . Сами значения  $a_n$  называются *членами последовательности*. Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$ , как бы мало оно ни было, существует такой номер  $N$ , что для всех  $a_n$  с номерами  $n > N$  справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  все  $a_n$  с номерами  $n > N$  расположены между  $a - \varepsilon$  и  $a + \varepsilon$ .

Последовательность, предел которой – число  $a$ , называется *сходящейся*, и ее предел обозначают  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Если изобразить элементы последовательности  $a_n$  на плоскости точками с координатами  $(n, a_n)$ , то неравенства  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  означают, что все точки  $(n, a_n)$  с номерами  $n > N$  расположены между прямыми  $a - \varepsilon$  и  $a + \varepsilon$ , параллельными оси абсцисс.

Последовательность  $\{a_n\}$ , предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*. Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа  $M$ , как бы велико оно ни было, существует такой номер  $N$ , что для всех  $a_n$  с номерами  $n > N$  справедливо неравенство  $|a_n| > M$ .

**Пример.** Найдем предел последовательности  $(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3})$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Преобразуем это выражение путем умножения на сопряженное и перейдем к пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}) \cdot (\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3})}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3 - n+3}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{(\sqrt{n+3} + \sqrt{n-3})} = 0.$$

**Пример.** Найдем предел последовательности  $\frac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^2}$  при

$n \rightarrow \infty$ .

Вынесен за скобки в числителе и знаменателе члены, содержащие переменную, и перейдем к пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{100} n^{100} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98} n^{100} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{98} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 9 \cdot \frac{\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{98} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} = 9.$$

При изучении различных процессов и явлений – физических, химических, биологических и др. – приходится иметь дело с величинами, связанными между собой некоторой зависимостью. Например, ускорение движения тела зависит от приложенных к нему сил и от его массы, скорость химической реакции – от температуры, скорость размножения бактерий – от условий окружающей среды, которые также могут быть охарактеризованы некоторыми параметрами. Одним из важнейших видов зависимостей между величинами является функциональная зависимость.

Две величины называют связанными *функциональной зависимостью*, если каждому допустимому значению одной из них (например,  $x$ ) по определенному закону соответствует единственное значение другой величины (например,  $y$ ). При этом величину  $y$  называют *значением функции*, а величину  $x$  – ее

аргументом. В самом общем виде функциональную зависимость можно задать аналитически с помощью следующей формулы:  $y = f(x)$ . Множество всех допустимых значений аргумента (т.е. таких значений, для которых существуют значения функции) называют *областью определения функции*, а множество всех соответствующих значений функции – ее *областью значений*.

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную в некоторой окрестности  $(a-\Delta, a+\Delta)$  точки  $a$ ,  $\Delta > 0$ , за исключением, может быть, самой точки  $a$ . Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$*  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если для любой сходящейся к  $a$  последовательности значений аргумента  $\{x_n\}$ ,  $x_n \neq a$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к числу  $A$ . Число  $A$  называют *пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$*  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то для любого положительного числа  $\varepsilon$ , как бы мало оно ни было, существует такое положительное число  $\delta$ , что точки с координатами  $(x_n, f(x_n))$ , для которых  $a - \delta < x < a + \delta$  и  $x_n \neq a$ , лежат на плоскости  $Oxy$  внутри прямоугольника  $a - \delta < x < a + \delta$ ,  $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ .

Если для любой последовательности значений  $x_n \rightarrow a$  соответствующая последовательность значений функции  $f(x_n)$  является бесконечно большой, то функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой в точке  $a$* . Если  $f(x)$  бесконечно большая в точке  $a$ , то для любого положительного числа  $M$ , как бы велико оно ни было, существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ , справедливо неравенство  $|f(x)| > M$ .

Для вычисления пределов, помимо проведения различных преобразований, можно воспользоваться способом сведения пределов заданных функций к уже известным, так называемым *замечательным пределами*:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

и их следствиям:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} = 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a.$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x}$ .

Выполним следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(7 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^4}\right)}{x^4 \left(6 + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}\right)} = \frac{7}{6}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{2x^2 + 2x - 8}$ .

Выделим в числителе и знаменателе множители, получим:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{2x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(5x + 3)}{(x + 2)(3x - 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x + 3}{3x - 4} = \frac{7}{10}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}\right)$ .

Избавимся от корней в числителе. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное числителю (для получения разности квадратов). После преобразований получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 1})}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 + 4x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2}$ .

В данном примере необходимо выделить первый замечательный предел. Для этого можно выполнить, например, следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)}{\alpha^2 \cdot (1 + \cos \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\alpha^2 \cdot (1 + \cos \alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \cdot (1 + \cos \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Пример.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{2x}$ .

В данном примере необходимо выделить второй замечательный предел. Для этого можно выполнить, например, следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = e^6.$$

**Задания для самостоятельного выполнения.**

**Задание 1.**

Найдите пределы последовательностей  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ .

**Варианты:**

| $N$ | $a_n$                                         | $b_n$                                         | $c_n$                                    |
|-----|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1   | $\sqrt[n]{3}$                                 | $(-1)^n \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right)$  | $2 \ln(12n - 2)$                         |
| 2   | $\operatorname{arctg}(n^2)$                   | $(-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$                    | $\sqrt{n+2}$                             |
| 3   | $\sqrt[n]{3.5}$                               | $(-1)^n \left( \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right)$ | $\ln(2n+2)$                              |
| 4   | $\frac{6n^2 + 5}{n^2 + 1}$                    | $(-1)^n \left( 1 - 2^{\frac{1}{n}} \right)$   | $\sqrt[3]{n+2}$                          |
| 5   | $\sqrt[n]{4.3}$                               | $\frac{1}{n} \sin n$                          | $5 \ln(2n+5)$                            |
| 6   | $\operatorname{arctg}(n^2 + 1)$               | $(-1)^n \frac{6n^2 + 5}{n^3 + 1}$             | $\ln(2n^2 - 2n)$                         |
| 7   | $\sqrt[n]{3.7}$                               | $\sin \left( (-1)^n \frac{1}{n} \right)$      | $\sqrt[4]{n^4 + 1}$                      |
| 8   | $\frac{1 - 6n}{n + 1}$                        | $\ln \left( 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \right)$   | $\ln(n^4 - 2n)$                          |
| 9   | $\sqrt[n]{4.8}$                               | $(-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$     | $\sqrt{n^{2.01}} \operatorname{arctg} n$ |
| 10  | $\ln \left( \frac{6n^2 + 5}{n^2 + 1} \right)$ | $(-1)^n \frac{1 - 6n}{n^2 + 1}$               | $2 \ln(n + 10)$                          |

**Задание 2.**

Найдите предел функции.

**Варианты:**

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{3x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln \frac{2x}{\pi}}$$

#### 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

##### Теоретические сведения.

Рассмотрим задачу о скорости роста популяции. Пусть  $p=p(t)$  — функция, которая описывает размер популяции бактерий в момент времени  $t$ . Обозначим через  $\Delta p$  величину прироста популяции за промежуток времени  $\Delta t$  от момента  $t$  до  $t+\Delta t$ , т.е.

$\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t)$ . Отношение  $\frac{\Delta p}{\Delta t}$  называется средней скоростью

роста популяции за время от  $t$  до  $t+\Delta t$ . Чем меньше  $\Delta t$ , т.е. чем короче промежуток времени от  $t$  до  $t+\Delta t$ , тем лучше средняя скорость характеризует прирост популяции в момент времени  $t$ .

Предел этого отношения при стремлении  $\Delta t$  к нулю, т.е.

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$ , есть *мгновенная скорость* роста популяции бактерий в данный момент времени  $t$ .

Рассмотрим, как понятие мгновенной скорости процесса связано с понятием производной функции, характеризующей этот процесс.

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $(a,b)$ , точка  $x_0$  — произвольная точка из области определения функции. Обозначим через  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , т.е. приращение функции в точке  $x_0$ , вызванное приращением  $\Delta x$  независимой переменной  $x$ . Производной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$ ,  $x_0 \in (a,b)$ , называется предел отношения приращения функции  $\Delta f(x_0)$  к приращению  $\Delta x$  при стремлении  $\Delta x$  к нулю, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Здесь  $f'(x_0)$  — производная функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \in (a,b)$ .

Если функция  $f(x)$  определена при  $x \geq x_0$ , то можно определить *правую производную функции  $f(x)$*  в точке  $x_0$ :

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \Delta x > 0.$$

Аналогично определяется *левая производная функции  $f(x)$*  в точке  $x_0$ , если функция  $f(x)$  определена при  $x \leq x_0$ :

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \Delta x < 0.$$

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную  $f'(x_0)$  тогда и только тогда, когда в точке  $x_0$  совпадают ее левая и правая производные:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  есть производная  $f'(x_0)$ . В этом состоит *геометрический смысл производной*.

Производную можно обозначать не только как  $f'(x)$ , но и как  $y'(x)$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ .

**Пример.** Размер популяции бактерий в момент времени  $t$  (здесь время измеряется в часах) задается формулой  $p(t) = 3000 + 100t^2$ . Найдем скорость роста популяции в момент  $t=5$ . Для этого необходимо найти производную функции  $p(t)$ . По определению имеем:

$$\begin{aligned} p'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3000 + 100(t + \Delta t)^2 - 3000 - 100t^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{100(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) - 100t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{100\Delta t \cdot (2t + \Delta t)}{\Delta t} = \\ &= 100 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 200t \end{aligned}$$

Таким образом, при  $t=5$  скорость роста составляет 1000 бактерий в час.

Для удобства нахождения производных различных функций существует ряд известных правил и формул.

Правила дифференцирования и производные  
основных элементарных функций

- |                                                         |                                                       |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $(C)' = 0.$                                          | 9. $(e^u)' = e^u u'.$                                 |
| 2. $(u + v)' = u' + v'.$                                | 10. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$               |
| 3. $(uv)' = u'v + uv'.$                                 | 11. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$                        |
| 4. $(Cu)' = Cu'.$                                       | 12. $(\sin u)' = u' \cos u.$                          |
| 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$ | 13. $(\cos u)' = -u' \sin u.$                         |
| 6. $x'_y = \frac{1}{y'_x}.$                             | 14. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$   |
| 7. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$              | 15. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$ |
| 8. $(a^u)' = a^u u' \ln a.$                             |                                                       |

Для обратных тригонометрических функции используются следующие формулы дифференцирования:

- |                                                |                                                       |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 16. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$  | 18. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$   |
| 17. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$ | 19. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$ |

Здесь  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  — дифференцируемые функции;  $y=f(x)$  и  $x=\varphi(y)$  — взаимно обратные функции, причем  $y=f(x)$  имеет не равную нулю производную.

**Пример.**

$$(x^2 + \operatorname{tg}(x))' = (x^2)' + (\operatorname{tg}(x))' = 2x + \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

**Пример.**

$$(5^x \cdot \sin(x))' = (5^x)' \cdot \sin(x) + 5^x \cdot (\sin(x))' = 5^x \cdot \ln(5) \cdot \sin(x) + 5^x \cdot \cos(x).$$

**Пример.**

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x}{\cos(x)}\right)' &= \frac{(e^x)' \cdot \cos(x) - e^x \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

*Производная сложной функции.* Пусть  $y = f(u)$ , где  $u = \varphi(x)$ , причем  $f(u)$  имеет производную по  $u$ , а  $\varphi(x)$  — производную по  $x$ . Тогда  $y$  будет сложной функцией от  $x$ . Производная  $y$  по  $x$  вычисляется по следующему правилу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

**Пример.** Пусть  $y(x) = \sqrt{\ln(x)}$ . Эта функция сложная. Для нахождения ее производной введем функцию  $u(x) = \ln(x)$ , тогда  $y(u) = \sqrt{u}$ . Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\sqrt{u})'_u \cdot (\ln(x))'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'_u \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

Производная  $y'$  называется также *первой производной* или *производной первого порядка* функции в отличие от так называемых производных высших порядков. Производные порядков выше первого называют *производными высших порядков*. Производная  $n$ -го порядка определяется как производная от производной предыдущего порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Действительно, производная  $y'$  функции  $y = f(x)$  в общем случае представляет собой некоторую новую функцию, которая также может быть дифференцируемой. В этом случае можно найти производную этой функции, представляющую собой производную от производной исходной функции и называемую *второй производной* или *производной второго порядка* исходной

функции. Производную второго порядка обозначают символами

$$f''(x), y''(x), \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производная от производной второго порядка, если таковая существует, называется *третьей производной* или *производной третьего порядка* и обозначают  $f'''(x)$  и т.д. Для обозначения производных четвертого и более высоких порядков используют римские цифры, например:  $y^{(IV)}(x)$ ,  $f^{(V)}(x)$ .

**Пример.** Найдем третью производную функции  $y = \sin^2(x)$ . Для этого сначала необходимо вычислить ее первую производную:

$$y' = \left( (\sin(x))^2 \right)' = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x).$$

Дифференцируя полученный результат, получаем производную второго порядка:

$$y'' = (y')' = (\sin(2x))' = 2 \cos(2x).$$

Производная полученной функции является производной третьего порядка исходной функции:

$$y''' = (y'')' = (2 \cos(2x))' = -4 \sin(2x).$$

**Примечание.** Вторая производная функции представляет собой скорость изменения скорости изменения этой функции при изменении ее аргумента, то есть *ускорение*. В этом состоит физический смысл второй производной функции.

### Задания для самостоятельного выполнения.

#### Задание 1.

Вычислите производную функции.

**Варианты:**

| № | Функция                                            | № | Функция                                    |
|---|----------------------------------------------------|---|--------------------------------------------|
| 1 | $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$ | 2 | $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$ |

|   |                                                      |    |                                                      |
|---|------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------|
| 3 | $y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}.$       | 4  | $y = x + \frac{8}{1+e^{x/4}}.$                       |
| 5 | $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$                    | 6  | $y = \ln^2(x + \cos x).$                             |
| 7 | $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x}.$ | 8  | $y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}.$ |
| 9 | $y = \arcsin \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}.$          | 10 | $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$ |

### Задание 2.

Вычислите производную указанного порядка.

#### Варианты:

| № | Функция                                                    | №  | Функция                                           |
|---|------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------|
| 1 | $y = x \cos x^2, \quad y''' = ?$                           | 2  | $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y''' = ?$ |
| 3 | $y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$                  | 4  | $y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad y^{IV} = ?$         |
| 5 | $y = (2x^3 + 1) \cos x, \quad y^V = ?$                     | 6  | $y = (4x + 3) \cdot 2^{-x}, \quad y^V = ?$        |
| 7 | $y = e^{-x} \cdot (\cos 2x - 3 \sin 2x), \quad y^{IV} = ?$ | 8  | $y = e^{x/2} \cdot \sin 2x, \quad y^{IV} = ?$     |
| 9 | $y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}, \quad y''' = ?$               | 10 | $y = \frac{1}{x} \sin 2x, \quad y''' = ?$         |

### Задание 3.

Покажите, что функция  $y$  удовлетворяет уравнению (1).

#### Варианты:

| № | Функция                                              | № | Функция                                                  |
|---|------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------|
| 1 | $y = x e^{-x^2/2},$<br>$xy' = (1 - x^2)y. \quad (1)$ | 2 | $y = \frac{\sin x}{x},$<br>$xy' + y = \cos x. \quad (1)$ |

|   |                                                                 |    |                                                                 |
|---|-----------------------------------------------------------------|----|-----------------------------------------------------------------|
| 3 | $y = 5e^{-2x} + e^x/3,$<br>$y' + 2y = e^x. \quad (1)$           | 4  | $y = x\sqrt{1-x^2},$<br>$yy' = x - 2x^3. \quad (1)$             |
| 5 | $y = \frac{1+x}{1-x},$<br>$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}. \quad (1)$ | 6  | $y = \sqrt[3]{2+3x-3x^2},$<br>$yy' = \frac{1-2x}{y}. \quad (1)$ |
| 7 | $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2}-1},$<br>$1+y^2 + xyy' = 0. \quad (1)$ | 8  | $y = (x+1)e^{x^2},$<br>$y' - 2xy = 2xe^{x^2}. \quad (1)$        |
| 9 | $y = -x \cos x + 3x,$<br>$xy' = y + x^2 \sin x. \quad (1)$      | 10 | $y = -\sqrt{x^4 - x^2},$<br>$xyy' - y^2 = x^4. \quad (1)$       |

## 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### Теоретические сведения.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Если каждой паре независимых друг от друга чисел  $(x, y)$  из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной  $z$ , то переменная  $z$  называется **функцией двух переменных**.

$$z = f(x, y)$$

Если паре чисел  $(x, y)$  соответствует одно значение  $z$ , то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

**Областью определения** функции  $z$  называется совокупность пар  $(x, y)$ , при которых функция  $z$  существует.

**Окрестностью точки**  $M_0(x_0, y_0)$  радиуса  $r$  называется совокупность всех точек  $(x, y)$ , которые удовлетворяют условию

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

Число  $A$  называется **пределом** функции  $f(x, y)$  при стремлении точки  $M(x, y)$  к точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $r > 0$ , что для любой точки  $M(x, y)$ , для которых верно условие  $MM_0 < r$  также верно и условие

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \quad \text{Записывают: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

Пусть точка  $M_0(x_0, y_0)$  принадлежит области определения функции  $f(x, y)$ . Тогда функция  $z = f(x, y)$  называется **непрерывной** в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

причем точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $M_0(x_0, y_0)$  произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (20.2) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции  $f(x, y)$ . Это может быть в следующих случаях:

- 1) Функция  $z = f(x, y)$  не определена в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .
- 2) Не существует предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ .

- 3) Этот предел существует, но он не равен  $f(x_0, y_0)$ .

**Свойство 1.** Если функция  $f(x, y, \dots)$  определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области  $D$ , то в этой области найдется, по крайней мере, одна точка  $N(x_0, y_0, \dots)$ , такая, что для остальных точек верно неравенство  $f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$  а также точка  $N_1(x_{01}, y_{01}, \dots)$ , такая, что для всех остальных точек верно неравенство  $f(x_{01}, y_{01}, \dots) \leq f(x, y, \dots)$  тогда  $f(x_0, y_0, \dots) = M$  – **наибольшее значение** функции, а  $f(x_{01}, y_{01}, \dots) = m$  – **наименьшее значение** функции  $f(x, y, \dots)$  в области  $D$ .

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области  $D$  достигает, по крайней мере, один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

**Свойство 2.** Если функция  $f(x, y, \dots)$  определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D$ , а  $M$  и  $m$  – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки  $\mu \in [m, M]$  существует точка  $N_0(x_0, y_0, \dots)$  такая, что  $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$ .

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области  $D$  все промежуточные значения между  $M$  и  $m$ . Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа  $M$  и  $m$  разных знаков, то в области  $D$  функция, по крайней мере, один раз обращается в ноль.

**Свойство 3.** Функция  $f(x, y, \dots)$ , непрерывная в замкнутой ограниченной области  $D$ , **ограничена** в этой области, если

существует такое число  $K$ , что для всех точек области верно неравенство  $|f(x, y, \dots)| < K$ .

**Свойство 4.** Если функция  $f(x, y, \dots)$  определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D$ , то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое число  $\Delta > 0$ , что для любых двух точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  области, находящихся на расстоянии, меньшем  $\Delta$ , выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Пусть в некоторой области задана функция  $z = f(x, y)$ . Возьмем произвольную точку  $M(x, y)$  и зададим приращение  $\Delta x$  к переменной  $x$ . Тогда величина  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  называется **частным приращением функции по  $x$** .

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Тогда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$  называется **частной производной** функции

$z = f(x, y)$  по  $x$ . Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по переменной  $y$ .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

**Геометрическим смыслом** частной производной (допустим  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  к сечению поверхности плоскостью  $y = y_0$ .

Для функции  $f(x, y)$  выражение  $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$  называется **полным приращением**.

$$\text{Выражение } \Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

называется **полным приращением** функции  $f(x, y)$  в некоторой точке  $(x, y)$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – бесконечно малые функции при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$  соответственно.

**Полным дифференциалом** функции  $z = f(x, y)$  называется главная линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$  приращения функции  $\Delta z$  в точке  $(x, y)$ .

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

**Пример.** Найти полный дифференциал функции  $u = x^{y^2z}$ .

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

**Пример.** Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{y}{x^2 - y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$$

Пусть  $N$  и  $N_0$  – точки данной поверхности (рис.). Проведем прямую  $NN_0$ . Плоскость, которая проходит через точку  $N_0$ , называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей  $NN_0$  и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние  $NN_0$ .

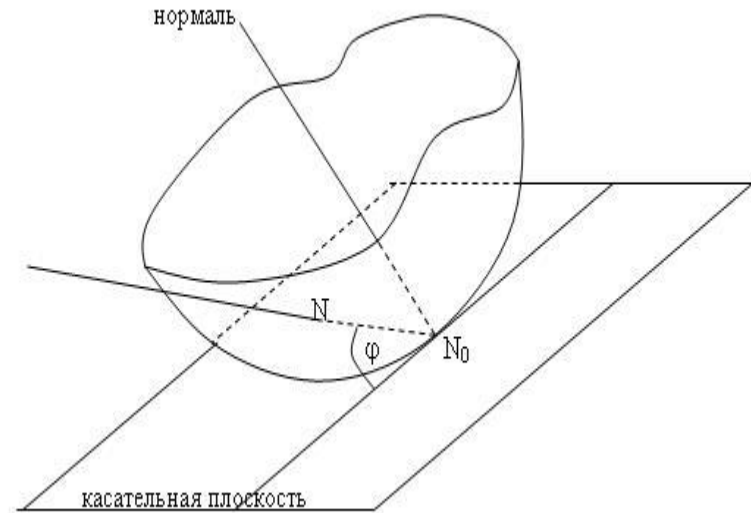


Рисунок. Касательная плоскость к поверхности

**Нормалью** к поверхности в точке  $N_0$  называется прямая, проходящая через точку  $N_0$  перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности. В какой-либо точке поверхность имеет либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  – функция, дифференцируемая в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , касательная плоскость в точке  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

**Геометрическим смыслом** полного дифференциала функции двух переменных  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  является приращение аппликаты (координаты  $z$ ) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки  $(x_0, y_0)$  к точке  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .

**Пример.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$  в точке  $M(1, 1, 1)$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \quad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1};$$

### Задания для самостоятельного выполнения.

**Задание 1.** Найти частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции.

**Варианты:**

$$1. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$2. z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$$

$$3. z = \ln(2x - y)$$

$$4. z = 3xy + \arctg y$$

$$5. z = \sqrt{1-x^3} - \sqrt{1-y^2}$$

$$6. z = \arcsin(y/x)$$

$$7. z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{1-y^2}$$

$$8. z = \sqrt{y \cdot \sin x}$$

$$9. z = \ln(y^2 - x)$$

$$10. z = 2/(x^2 + 2y^2)$$

**Задание 2.** Найти экстремумы функции

**Варианты:**

$$1. z = (x-1)^2 + 2y^2$$

$$2. z = (x-1)^2 - 2y^2$$

$$3. z = x^2 - xy + y^2 - 3x$$

$$4. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

$$5. z = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y$$

$$6. z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$$

$$7. z = 2x^2 + y^2 - 8x - 2y$$

$$8. z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$$

$$9. z = xy - 2x - y$$

$$10. z = \frac{1}{2}x^2 - xy + y$$

**Задание 3.** Найти градиент функции  $z = f(x, y)$  в точке  $A$ .

**Варианты:**

$$1. z = 2x^2 + xy, \quad A(-1; 2)$$

2.  $z = x^3 + xy^2$ ,  $A(1;3)$

3.  $z = x^2 - y^2 + 6xy + 2y + 6$ ,  $A(-4; 2)$

4.  $z = \frac{3x}{y^2}$ ,  $A(3;4)$

5.  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ,  $A(1;-2)$

6.  $z = y^2 - 2xy + 2x - y$ ,  $A(1; -4)$

7.  $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$ ,  $A(1;0)$

8.  $z = 3x^4 + 2x^2y^3$ ,  $A(2;1)$

9.  $z = -x^2 + 4x - 2y + 4$ ,  $A(-1; -3)$

10.  $z = 5x^2 - 2xy + y^2$ ,  $A(-1;-1)$

## 6. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### Теоретические сведения.

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную на промежутке  $x \in (a, b)$ . Дифференцируемая на промежутке  $(a, b)$  функция  $F(x)$ , производная которой в каждой точке  $(a, b)$  равна  $f(x)$ , называется *первообразной функции  $f(x)$* :  $F'(x) = f(x)$ .

Поскольку  $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$  для любой константы  $C$ , то можно говорить о семействе первообразных – множестве функций вида  $F(x) + C$ .

Семейство первообразных  $F(x) + C$  функции  $f(x)$  называется *неопределённым интегралом функции  $f(x)$*  и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

*Основные правила интегрирования:*

$$1) \int f'(x)dx = f(x),$$

$$2) d \int f(x)dx = f(x)dx,$$

$$3) \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$4) \int af(x)dx = a \int f(x)dx,$$

$$5) \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx,$$

$$6) \text{ если } \int f(x)dx = F(x) + c \text{ и } u = u(x), \text{ то } \int f(u)du = F(u) + c,$$

$$7) \text{ если } \int f(x)dx = F(x) + c, \text{ то } \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c.$$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием, т.е.  $(F(x) + c)' = f(x)$

Таблица основных неопределенных интегралов:

$$1) \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad (\alpha \neq -1),$$

$$2) \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c,$$

$$3) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c,$$

$$4) \int e^u du = e^u + c,$$

$$5) \int \sin u du = -\cos u + c,$$

$$6) \int \cos u du = \sin u + c,$$

$$7) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c,$$

$$8) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c,$$

$$9) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + c,$$

$$10) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c = -\arccos \frac{u}{a} + c,$$

$$11) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + c,$$

$$12) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + c,$$

$$13) \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + c = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctgu} \right| + c,$$

$$14) \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tgu} \right| + c,$$

$$15) \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + c,$$

$$16) \int \operatorname{ctg} u du = -\ln |\sin u| + c.$$

Здесь буква  $u$  может обозначать как независимую переменную, так и непрерывную дифференцированную функцию.

Задача нахождения неопределенных интегралов решается методом их сведения к одному из табличных интегралов с помощью алгебраических преобразований подынтегральной функции  $f(x)$  или подведения части ее множителей под знак дифференциала.

**Пример.** Вычислим интеграл  $\int \frac{3-x+\sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx$ . Для этого разделим числитель подынтегральной функции на знаменатель и, используя четвертое и пятое свойства интегралов, а также таблицу, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{3-x+\sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx &= 3 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{x dx}{x^2} + \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2} dx = 3 \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{x} + \\ &: + \int x^{-\frac{4}{3}} dx = 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \ln|x| + \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + c = 3 \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + c = \\ &= -\frac{3}{x} - \ln|x| - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c, \end{aligned}$$

Если  $\int f(x) dx$ , где  $f(x)$  – непрерывная функция, не может быть непосредственно преобразован к виду одного из табличных интегралов, можно применить способ замены переменной интегрирования. Для этого сделаем подстановку  $x=\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда  $f(x) = f(\varphi(t))$ ,  $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t) dt$  и

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*.

**Пример.** Рассмотрим скорость простой химической реакции

первого порядка, которую можно представить как  $\frac{dx}{dt} = -kx$ , где  $x$

– концентрация реагирующего вещества в момент времени  $t$ ,  $k$  – некоторая константа (знак «минус» показывает, что реагирующее вещество исчезает, т. е. концентрация его в ходе реакции

уменьшается). Из формулы имеем  $\frac{dx}{x \cdot dt} = -k$ . Положим  $z = \ln(x)$ ,

тогда  $dz = d(\ln(x)) = \frac{dx}{x}$ . Отсюда  $\frac{dx}{x \cdot dt} = \frac{dz}{dt} = -k$ .

Проинтегрируем эту формулу, получим

$$\int \left( \frac{dz}{dt} \right) dt = \int (-k) dt = -k \cdot \int dt,$$

отсюда

$$z(t) = \ln(x(t)) = -kt + C,$$

и окончательно получаем

$$x(t) = e^C \cdot e^{-kt}.$$

Если мы примем, что  $x=x_0$  при  $t=0$ , то получаем, что  $x_0 = e^C$ .

Тогда  $x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$ . Это соотношение позволяет найти концентрацию вещества  $x$  для любого момента времени  $t$ .

Пусть  $u=u(x)$  и  $v=v(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции. Поскольку  $d(uv) = vdu + u dv$ , то  $u dv = d(uv) - vdu$ . Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

отсюда

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

(произвольная постоянная интегрирования  $C$  здесь включена в слагаемое  $\int v du$ ). Последнее равенство называется *формулой*

интегрирования по частям. Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл  $\int v du$  оказывается более простым для вычисления, чем исходный интеграл  $\int u dv$ .

**Пример.**  $\int x \cdot e^x dx = \int \underset{u}{x} \cdot \underset{dv}{d(e^x)} = x \cdot e^x - \int \underset{v}{e^x} \cdot \underset{du}{d(x)} = x \cdot e^x - e^x + C.$

### Задания для самостоятельного выполнения.

**Задание 1.** Найти неопределенный интеграл.

**Варианты:**

1)  $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$

2)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$

3)  $\int \arctg \sqrt{6x - 1} dx.$

4)  $\int \ln(x^2 + 4) dx.$

5)  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

6)  $\int x \sin^2 x dx.$

7)  $\int (4 - 16x) \sin 4x dx.$

8)  $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^3} dx.$

9)  $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

10)  $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$

## 7. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### Теоретические сведения.

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную на отрезке  $x \in [a, b]$ . Разобьем этот отрезок на  $n$  произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_i.$$

На каждом отрезке  $[x_i, x_{i-1}]$  возьмем произвольную точку  $q_i$  и вычислим в ней значение функции  $f(x)$ . Выражение

$$S = \sum_{i=1}^n f(q_i) \Delta_i$$

называется *интегральной суммой* функции  $f(x)$ . Если существует конечный предел  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S$ , не зависящий ни от способа разбиения

отрезка  $[a, b]$  точками  $x_i, i = 1, \dots, n-1$ , ни от выбора точек  $q_i \in [x_i, x_{i-1}]$ , то этот предел называется *определённым интегралом* от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$ , а саму функцию – интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ . При этом обозначают

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \int_a^b f(x) dx.$$

*Геометрический смысл определённого интеграла:* если  $f(x) > 0$ , то

$\int_a^b f(x) dx$  равен площади фигуры, ограниченной графиком

функции, осью абсцисс и прямыми  $x=a, x=b$ .

**Пример.** *Определение численности популяции.* Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растёт

со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость  $v=v(t)$ . В “старых”, установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста  $v(t)$  мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то  $v(t)$  может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции  $v(t)$ , то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от  $t_0$  до  $T$ . Из определения  $v(t)$  следует, что эта функция является производной от численности популяции  $N(t)$  в момент  $t$ , и, следовательно, численность популяции  $N(t)$  является первообразной для  $v(t)$ . Поэтому

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, то есть  $v(t)=ae^{kt}$ . Популяция в этом случае как бы “не стареет”. Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. В этом случае получим:

$$N(T) = N(t_0) + a \int_{t_0}^T e^{kt} dt = N(t_0) + \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^T = N(t_0) + \frac{a}{k} (e^{kT} - e^{kt_0}).$$

С помощью подобной формулы подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибов, выделяющих пенициллин.

**Задания для самостоятельного выполнения.**

**Задание 1.**

Вычислить определенный интеграл.

**Варианты:**

$$1) \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$2) \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$3) \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$6) \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$7) \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$8) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$9) \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$10) \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

## 8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### Теоретические сведения.

**Обыкновенным дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной  $x$ , неизвестной функции  $y = f(x)$  и её производных или дифференциалы различных порядков, т.е. уравнение:

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  в неявном виде или в виде:  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , где производная высшего порядка выражена через остальные компоненты.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

**Порядком уравнения** называется максимальный порядок  $n$  входящей в него производной (или дифференциала).

*Пример:*

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$  - обыкновенное дифференциальное уравнение  
1 - го порядка.

$x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$  - обыкновенное дифференциальное уравнение  
2 - го порядка.

**Решением уравнения**  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  на интервале  $(a, b)$  конечном или бесконечном называется любая  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , удовлетворяющая этому

уравнению, т.е. обращая уравнение на этом интервале в тождество, в нуль.

Процедуру решения дифференциального уравнения часто называют интегрированием уравнения, при этом интегрировать приходится в общем случае ровно  $n$  раз, и при каждом интегрировании в решение входит очередная произвольная постоянная.

**Общим решением дифференциального уравнения** называется соотношение вида:  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - произвольные постоянные, возникающие в процессе интегрирования.

Мы будем в основном рассматривать дифференциальные уравнения в форме, разрешённой относительно старшей производной:

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  и получать общее решение в форме  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , решённой относительно неизвестной функции.

**Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение  $F(x, y, y') = 0$ , где  $x$  - независимая переменная,  $y(x)$  - неизвестная функция. В форме, разрешённой относительно производной, уравнение первого порядка записывается так:  $y' = f(x, y)$ .

Если пользоваться другим обозначением производной, то можно

записать как  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Общее решение (общий интеграл) уравнения первого порядка имеет вид  $\Phi(x, y, C) = 0$  или  $y = \varphi(x, C)$ .

### **Свойства общего решения:**

1) Т.к. постоянная  $C$  - произвольная величина, то дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях  $x = x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$  существует такое значение  $C = C_0$ , при котором решением дифференциального уравнения является функция  $y = \varphi(x, C_0)$ . Решение вида  $y = \varphi(x, C_0)$  называется **частным решением дифференциального уравнения**.

**Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y(x_0) = y_0$ .

Пусть функция  $f(x, y)$  определена в области  $D$ , точка  $(x_0, y_0) \in D$ . Требуется найти решение уравнения  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

**Теорема Коши (существования и решения задачи Коши).** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в некоторой области  $D$  в плоскости  $XOY$  и имеет в этой области непрерывную частную производную  $y' = f(x, y)$ , то какова бы не была точка  $(x_0, y_0)$  в области  $D$ , существует единственное решение  $y = \varphi(x)$  уравнения  $y' = f(x, y)$ , определенное в некотором интервале, содержащем точку  $x_0$ , принимающее при  $x = x_0$  значение  $\varphi(x_0) = y_0$ , т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

На самом деле для существования решения в окрестности точки  $x_0$  достаточно только непрерывности функции  $f(x, y)$ ; условие непрерывности  $f'_y(x, y)$  обеспечивает единственность этого решения.

**Пример 1:** Найти общее решение дифференциального уравнения  $xy' + y = 0$

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$xy' = -y, \quad x \frac{dy}{dx} = -y$$

Теперь интегрируем:  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0 \quad \text{или} \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C, \quad \ln|y| = \ln \frac{C}{|x|},$$

$y = \frac{C}{x}$  - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия:  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = 2$ , тогда имеем  $2 = \frac{C}{1}; C = 2$ . При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при

заданных начальных условиях (решение задачи Коши):  $y = \frac{2}{x}$

**Интегральной кривой** называется график  $y = \varphi(x)$  решения дифференциального уравнения на плоскости  $XOY$ .

**Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки  $(x, y)$  существует не менее двух интегральных кривых. Особые решения не зависят от постоянной  $C$ . Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной  $C$ . Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается, по крайней мере, одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

**Пример 2:** Найти общее решение дифференциального уравнения:  $y' + y = 0$ . Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad \frac{dy}{y} = -dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int dx, \quad \ln y = -x + C, \quad y = C_1 e^{-x}.$$

При разделении переменных мы делим на  $y \neq 0$ , значит, могли потерять корень. Нужно проверить является ли корнем

первоначального уравнения  $y=0$ , для этого подставляем его в исходное уравнение, то есть, делаем проверку, которая показывает, что данное дифференциальное уравнение имеет особое решение  $y = 0$ . Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение  $y = 0$  можно получить из общего решения при  $C_1 = 0$  ошибочно, ведь  $C_1 = e^C \neq 0$ .

**Уравнения с разделяющимися переменными** - уравнения вида  $f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0$ .

**Алгоритм решения:**

Уравнение  $f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0$  делим на  $f_2(x) g_1(y)$ :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy$$

Если функция  $f_2(x)$  имеет действительные корни  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , функция  $g_1(y)$  имеет действительные корни  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , то функции  $x = x_1, x = x_2, x = x_3, \dots, y = y_1, y = y_2, y = y_3, \dots$  являются решениями исходного уравнения.

**Пример 1:** Найти общий интеграл уравнения  $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$ .

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 1} = -\int \frac{ydy}{y^2 - 1}$$

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = \ln C$$

Общий интеграл имеет вид:  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$

**Пример 2:** Решить уравнение  $y' = x(y^2 + 1)$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = x dx$$

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Получили общее решение.

Так как заданы начальные условия, найдем теперь частное решение, соответствующее данным начальным условиям.

Подставим  $x=0$  и  $y=\frac{\pi}{4}$  в общее решение и найдем  $C$ .

$$C = \arctg \frac{\pi}{4} - \frac{0}{2} = 1$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$$

Получаем частное решение

Функция  $f(x, y)$  называется **однородной  $n$  - го измерения** относительно своих аргументов  $x$  и  $y$ , если для любого значения параметра  $t$  (кроме нуля) выполняется тождество:  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

**Пример 1:** Является ли однородной функция  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция  $f(x, y)$  является однородной 3- го измерения.

Дифференциальное уравнение вида  $y' = f(x, y)$  называется **однородным**, если его правая часть  $f(x, y)$  есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов. Любое уравнение вида  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  является однородным, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  - однородные функции одинакового измерения.

**Алгоритм решения:**

**Решение любого однородного уравнения** основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение  $y' = f(x, y)$ . Т.к. функция  $f(x, y)$  - однородная нулевого измерения, то можно записать:  $f(tx, ty) = f(x, y)$ . Т.к. параметр  $t$  вообще говоря произвольный, предположим, что  $t = \frac{1}{x}$ .

Получаем:  $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента  $u = y/x$ . Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:  $y' = \varphi(u)$ . Далее заменяем  $y = ux$ ,  $y' = u'x + ux$

$$\begin{aligned} u'x + ux &= \varphi(u) \\ u' &= \frac{\varphi(u) - u}{x} \end{aligned}$$

Таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{du}{\varphi(u) - u} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{du}{\varphi(u) - u} &= \int \frac{dx}{x} + C \end{aligned}$$

Далее, заменив вспомогательную функцию  $u$  на ее выражение через  $x$  и  $y$  и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

**Пример 2:** Решить уравнение  $y' = \frac{y}{x} \left( \ln \frac{y}{x} + 1 \right)$

Данное уравнение – однородное, так как правая часть является однородной функцией нулевого измерения. *Проверьте самостоятельно.* Введем вспомогательную функцию  $u$ :

$$u = y/x, y = ux, y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция  $u$  всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее  $\ln u = \ln \frac{y}{x}$ . Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x+u=u(\ln u+1); \quad u'x+u=u\ln u+u; \quad u'x=u\ln u$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, получаем:  $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx}$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции  $y$ , получаем общее решение:  $y = xe^{Cx}$ .

**Линейным уравнением первого порядка** называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производных.

Оно имеет вид:  $y' + p(x)y = q(x)$ , где  $p(x)$ ,  $q(x)$  - заданные непрерывные функции, зависящие от  $x$ , которые в частности могут быть постоянными.

**Алгоритм решения методом Бернулли.**

Делаем подстановку

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + puv = q$$

$$u'v + u(v' + pv) = q$$

Выберем  $u$  так, чтобы  $v' + pv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -pdx \Rightarrow v = C_1 e^{-\int p dx}$

Пусть  $C_1 = 1$ , подставим найденное:

$$v(x) \frac{du}{dx} = q(x) \Rightarrow u = \int \frac{q}{v} dx + C$$

$$y = v \left[ \int \frac{q}{v} dx + C \right]$$

**Пример 1:** Найти общее решение уравнения:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$$

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$$

$$u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x) = \sin x$$

$$v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow v = \sin x$$

$$u'v = \sin$$

$$\frac{x}{u'} \cdot \sin x = \sin x; \quad u = x + C$$

$$y = (x + C) \cdot \sin x$$

**Пример 2:** Решить уравнение с заданными начальными условиями.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Будем решать его **методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)**

Решим соответствующее ему однородное уравнение:

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \quad y' = \frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C; \quad y = Cx$$

Общее решение всего уравнения имеет вид:  $y = C(x)x$ .

Дифференцируя, получаем:  $y' = C'(x)x + C(x)$  Для нахождения функции  $C(x)$  подставляем полученное значение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1$$

$$xC'(x) = x + 1$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; \quad C(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx + C$$

Итого, общее решение:  $y = x(x + \ln x + C)$

С учетом начального условия  $y(1) = 0$  определяем постоянный коэффициент  $C$ .

$$0 = 1 + \ln 1 + C; C = -1.$$

Окончательно получаем:  $y = x^2 + x \ln x - x$ .

### Задания для самостоятельного выполнения.

**Задание 1.** Решить дифференциальное уравнение:

$$1. \quad y - x \frac{dy}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}.$$

$$2. \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

$$3. \quad (x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

$$4. \quad (xy + y) dx + (xy + x) dy = 0.$$

$$5. \quad (1 + e^{2x}) y^2 y' = e^x.$$

$$6. \quad (xy^2 + x) dx + (y - x^2 y) dy = 0.$$

$$7. \quad y' \cdot \cos x = \frac{y}{\ln y}.$$

$$8. \quad y' + \frac{y}{x+1} = x^2.$$

$$9. \quad y' - y \cdot \operatorname{ctg}(x) = \sin(x).$$

$$10. \quad y' - \frac{2y}{x} = 2x^3.$$

## 9. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

### 2. Ряды

#### 2.1.

**Пример 1.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ .

*Решение.* Рассмотрим вспомогательный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  – ряд убывающей геометрической прогрессии с  $q = \frac{1}{2} < 1$ , который сходится. Члены данного ряда меньше членов вспомогательного ряда, т.е.  $u_n \leq v_n$ , следовательно сходится и данный ряд.

**Пример 2.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ .

*Решение.* Сравним данный ряд с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , у которого  $v_n = \frac{1}{n}$ . Найдем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0 \neq \infty$ , следовательно ряд расходится.

**Пример 3.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3+1}$ .

*Решение.* Сравним данный ряд с обобщенно гармоническим рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , где  $v_n = \frac{1}{n^2}$ , который сходится. Члены данного ряда меньше членов вспомогательного ряда, т.е.  $u_n \leq v_n$ , следовательно сходится и данный ряд.

**Пример 4.** Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot (2n-1)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3};$$

Решение.

$$l = \frac{1}{3} < 1, \text{ ряд сходится.}$$

**Пример 5.** Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{2}{1^4} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2;$$

Решение.

$$l = 2 > 1, \text{ ряд расходится.}$$

**Пример 6.** Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}.$$

$$\text{Решение. } u_n = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}; \quad f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln(x+1) \Big|_1^b = \infty.$$

Интеграл расходится, следовательно ряд тоже расходится.

**Пример 7.** Исследовать сходимость рядов:

$$\text{а) } \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{1}{2} < 1,$$

Решение. а) , ряд сходится.

$$\text{б) } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e, \quad l = \frac{e}{2} > 1, \text{ ряд расходится.}$$

## 2.2. Знакопередающие и знакопеременные ряды.

**Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

**Пример 1.** Исследовать сходимость ряда

Решение. Применим признак Лейбница:

$$1) \frac{1}{2} > \frac{2}{2^2+1} > \frac{3}{3^2+1} > \frac{4}{4^2+1} > \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

2) Оба условия выполняются, значит ряд сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

**Пример 2.** Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

*Решение.* Составим ряд из абсолютных величин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ . Этот ряд бесконечно убывающая геометрическая прогрессия,  $q = \frac{1}{2} < 1$ , следовательно он сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно.

### 2.3. Степенные ряды. Интервал и область сходимости

**Пример 1.** Найти область сходимости степенных рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n!} \cdot x^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}.$$

*Решение.* а) Найдем радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{n! \cdot 5^{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{5} \right| = \infty.$$

Интервалом сходимости ряда является вся числовая ось, т.е. ряд сходится при всех значениях  $x$ .

**Ответ:**  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

б) Используем ту же формулу и находим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^n} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 3.$$

Интервал сходимости:  $x \in (-3; 3)$ .

Исследуем ряд на концах интервала. При  $x=3$  получаем гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится. Значит граница не принадлежит области сходимости. При  $x=-3$

получаем знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . На основании признака Лейбница имеем:

$$1. \quad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Оба условия выполняются, следовательно, ряд сходится. Эта граница принадлежит области сходимости. Таким образом, область сходимости ряда является промежуток  $[-3; 3)$ .

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2} \cdot \left( \frac{1}{2^2} \cos \pi x + \frac{1}{4^2} \cos 2\pi x + \frac{1}{6^2} \cos 3\pi x + \dots \right).$$

### Задания

Исследовать на сходимость знакоположительные ряды.

|                                                                             |                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^3}{7^n + 1}$                              | 1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n}{8n+3} \right)^{n^2}$       |
| 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$                               | 1.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^{2n+1}}$                    |
| 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}}$                      | 1.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$     |
| 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$                                | 1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$                    |
| 1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 4}$                         | 1.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$                |
| 1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$                              | 1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^{\frac{1}{2}}}}$              |
| 1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$                             | 1.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$                       |
| 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ | 1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{6+n^5}}$                   |
| 1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{2^n}$                         | 1.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{(n+2)!}$                    |
| 1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$            | 1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^n$ |
| 1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$                              | 1.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n(3n+1)}$                         |
| 1.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{5n+1} \right)^n$                | 1.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$  |
| 1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}$                                 |                                                                        |

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременные ряды.

|         |  |
|---------|--|
| Задания |  |
|---------|--|

|       |                                                                       |  |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|--|
| 2.1.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 1}$                    |  |
| 2.2.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$                 |  |
| 2.3.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^n$      |  |
| 2.4.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{3n}{5n+1} \right)^{n^2}$ |  |
| 2.5.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^n}$                      |  |
| 2.6.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(\ln n)}$                 |  |
| 2.7.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{5n+1}}$                |  |
| 2.8.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)}$              |  |
| 2.9.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[6]{2n+1}}$             |  |
| 2.10. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{3n+1}$                     |  |
| 2.11. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^n$      |  |
| 2.12. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$                       |  |
| 2.13. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{\ln(n+1)}$                   |  |
| 2.14. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$                  |  |

2. Найти области сходимости степенных рядов

| Задания |                                                    |
|---------|----------------------------------------------------|
| 3.1.    | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(n+1)} \cdot x^n$ |
| 3.2.    | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+2)}$         |

|       |                                                         |  |
|-------|---------------------------------------------------------|--|
| 3.3.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2 + 1}$     |  |
| 3.4.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+5)}$                |  |
| 3.5.  | $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$                            |  |
| 3.6.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$               |  |
| 3.7.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$           |  |
| 3.8.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$               |  |
| 3.9.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)}$                 |  |
| 3.10. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{6^n \sqrt[3]{n^2 + 1}}$ |  |
| 3.11. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot x^n}{7n-1}$        |  |
| 3.12. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4n^2 + 1)4^n}$         |  |

3. Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x)$ . Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

#### Задания

|      |                                     |  |
|------|-------------------------------------|--|
| 4.1. | $f(x) = \cos 5x$                    |  |
| 4.2. | $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$ |  |
| 4.3. | $f(x) = \sin x^2$                   |  |
| 4.4. | $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$            |  |
| 4.5. | $f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$        |  |
| 4.6. | $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$           |  |
| 4.7. | $f(x) = e^{3x}$                     |  |

|       |                            |  |
|-------|----------------------------|--|
| 4.8.  | $f(x) = \frac{1}{1+x}$     |  |
| 4.9.  | $f(x) = 2^{-x^2}$          |  |
| 4.10. | $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ |  |

4. Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ . Найти область сходимости полученного ряда к этой функции.

| Задания |                                        |
|---------|----------------------------------------|
| 5.1.    | $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2$         |
| 5.2.    | $f(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = -2$       |
| 5.3.    | $f(x) = e^x, x_0 = 1$                  |
| 5.4.    | $f(x) = \frac{1}{2x+5}, x_0 = 3$       |
| 5.5.    | $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1$    |
| 5.6.    | $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2$ |
| 5.7.    | $f(x) = \ln(5x+3), x_0 = \frac{2}{5}$  |
| 5.8.    | $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$   |

5. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

| Задания |                                                   |
|---------|---------------------------------------------------|
| 6.1.    | $\int_0^1 e^{-x^2} dx$                            |
| 6.2.    | $\int_0^1 \sin x^2 dx$                            |
| 6.3.    | $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$                   |
| 6.4.    | $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ |
| 6.5.    | $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx$                    |
| 6.6.    | $\int_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$              |

## **10. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

**Пример 1.** Изменить порядок интегрирования :

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

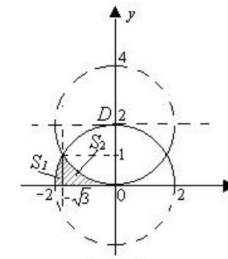
*Решение.* Построим область  $S_1$ , ограниченную линиями

$$x = -2, \quad x = -\sqrt{3}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{4-x^2}.$$

Область  $S_2$  ограничена линиями  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = 0$ ,  $y = 0$  и

$$y = 2 - \sqrt{4-x^2}.$$

Последняя представляет собой нижнюю часть окружности с центром в точке  $D(0,2)$  и радиусом 2. Покажем эти области на рисунке (рис. 1).



(рис. 1)

Полученная  
кривыми

область  $S = S_1 \cup S_2$  ограничена

$$x = \varphi_1(y) = -\sqrt{4-y^2}, \quad x = \varphi_2(y) = -\sqrt{4y-y^2}, \quad y = 0, \quad y = 1, \text{ причем всюду на отрезке } [0;1]$$

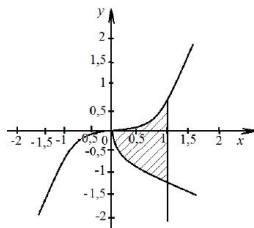
функции  $\varphi_1(y)$  и  $\varphi_2(y)$  непрерывны и  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ . Поэтому для нового порядка интегрирования обойдемся одним интегралом. Формулы преобразование тройного интеграла к сферическим координатами имеет вид:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y) dx.$$

**Пример 2.** Вычислить  $\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy$ ;  $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$ .

*Решение.* Изобразим область интегрирования на рисунке. При  $x \in [0;1]$  функции

$$y_1 = -\sqrt{x} \text{ и } y_2 = x^3 \text{ непрерывны и } y_1 \leq y_2.$$



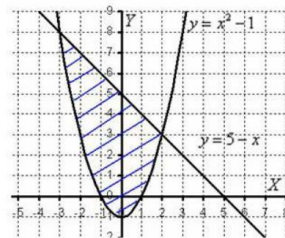
Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dy &= \int_0^1 (18x^2y^3 + 30x^4y^5) \Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \\ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dy &= \int_0^1 (18x^2y^3 + 30x^4y^5) \Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \\ \int_0^1 (18x^{11} + 30x^{19} + 18x^{\frac{7}{2}} + 30x^{\frac{13}{2}}) dx &= \left( \frac{3}{2}x^{12} + \frac{3}{2}x^{20} + 4x^{\frac{9}{2}} + 4x^{\frac{15}{2}} \right) \Big|_0^1 = 11. \end{aligned}$$

**Пример 3.** С помощью двойного интеграла, вычислить площадь плоской фигуры  $D$ , ограниченной линиями

$$y = x^2 - 1, \quad x + y = 5.$$

*Решение.* Изобразим область  $D$  на чертеже.



Площадь фигуры вычислим с помощью двойного интеграла по формуле:  $S = \iint_D dx dy$ .

Выберем следующий порядок обхода области:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\leq y \leq 5 - x \\ -3 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-3}^2 dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy.$$

1. С помощью формулы Ньютона-Лейбница вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{x^2-1}^{5-x} dy = (y) \Big|_{x^2-1}^{5-x} = 5 - x - (x^2 - 1) = 6 - x - x^2.$$

2. Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл:

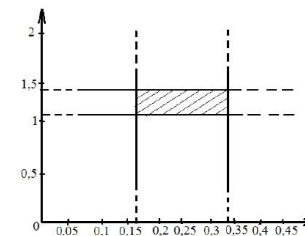
$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx &= \left( 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 = 12 - 2 - \frac{8}{3} - \left( -18 - \frac{9}{2} + 9 \right) = \\ &= 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = 19 + \frac{27-16}{6} = 19 + \frac{11}{6} = 19 + 1\frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $S = 20\frac{5}{6} \text{ед}^2$ .

**Пример 4.** Вычислить

$$\iint_D 12ye^{6xy} dx dy; \quad D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

*Решение.* Область интегрирования представляет собой прямоугольник, изобразим его на рисунке.



### Задания

Изменить порядок интегрирования в интеграле. Область интегрирования изобразить на чертеже.

$$1. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y) dy$$

$$2. \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$$

$$3. \int_0^{\frac{3}{4}} dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy$$

$$4. \int_1^2 dy \int_0^{y^2} f(x,y) dx$$

$$5. \int_1^2 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx$$

$$6. \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y) dx$$

$$7. \int_0^2 dx \int_0^{3-x} f(x,y) dy$$

$$8. \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx$$

$$9. \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x,y) dy$$

$$10. \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y) dy$$

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$11. y=x^2, y=6-x, y=0.$$

$$12. y=6-x, y=\frac{5}{x}.$$

$$13. y=x^2-3x, y=0.$$

$$14. y=e^x, x=-1, x=1, y=0.$$

$$15. y=\frac{1}{x+1}, x=0, x=2, y=0.$$

$$16. y=\sqrt{x}, y=0, x=1, x=4.$$

$$17. y=x^2, y=-x+2.$$

$$18. y=-x^2+2x+3, y=4x, y=0.$$

$$19. y=(x+1)^2, x=-4, y=0.$$

$$20. y=2-\frac{1}{4}x^3, x=0, y=0.$$

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Данное тело и его проекцию на плоскость  $xOy$  изобразить на чертежах.

$$21. z=0, z=x^2, x+y=2, y=0.$$

$$22. z=0, z=x, x=\sqrt{4-y^2}.$$

$$23. z=0, x^2+y^2=9, z=5-x-y.$$

$$24. z=0, z=x^2+y^2, x=0, y=0, x+y=2.$$

$$25. z=0, z=2y, y=\sqrt{9-x^2}.$$

$$26. z=0, z=3x, y^2=2-x.$$

27.  $z=0, z=\sqrt{y}, y=3x, x=2.$

28.  $z=0, z=y^2, y=2x, x=3.$

29.  $z=0, z=\sqrt{y}, y=2x, y=3, x=0.$

30.  $z=0, z=x^2, y=2x, x=4, y=0.$

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Параметр  $a$  положителен.

31.  $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2+4y^2).$

32.  $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2).$

33.  $(x^2+y^2)^3=a^4y^2.$

34.  $(x^2+y^2)^3=a^4x^2.$

35.  $(x^2+y^2)^2=a^2(5x^2+3y^2).$

36.  $(x^2+y^2)^2=a^2(7x^2+5y^2).$

37.  $x^4=a^2(x^2-y^2).$

38.  $x^6=a^2(x^2+y^2)(x^2-3y^2).$

39.  $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2.$

40.  $x^6=a^2(3x^2-y^2)(x^2+y^2).$

41. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями:  $y-x=0, x+y-4=0, x-2y-4=0.$

42. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями:  $y=x^2, x+y=2.$

43. Найти центр тяжести однородной пластины, ограниченной линиями:  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1.$

44. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой  $\mu.$

$$y=x^2, y=x^3, \mu=2x+3y^2;$$

45. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой  $\mu.$

$$y=x, y=2-x, x=0, \mu=x^2;$$

46. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой  $\mu.$

$$y=\sqrt{2-x^2}, y=x^2, \mu=xy;$$

47. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой  $\mu.$

$$x=\ln y, x=e^y, y=1, y=2, \mu=5;$$

48. Найти массу пластинки, ограниченной данными линиями, плотность которой  $\mu.$

$$x^2+y^2=1, x^2+y^2=5, y=x, x=0 (x \geq 0),$$

$$\mu=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

49. Найти момент инерции однородной пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $x+y+z=4$ , относительно оси  $Ox.$

50. Найти момент инерции однородной пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $x+y+z=3$ , относительно оси  $Oy.$

## 11. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

### 4. Комплексные числа и действия над ними

**Пример 1.** Найти значение выражения  $(z_1 + 2z_2) \cdot z_3$ , если  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 3 + 2i$ ,  $z_3 = 5 - 2i$ .

*Решение.* Последовательно вычисляем:

$$2z_2 = 6 + 4i$$

$$z_1 + 2z_2 = (2 + 3i) + (6 + 4i) = 8 + 7i$$

$$(z_1 + 2z_2) \cdot z_3 = (8 + 7i) \cdot (5 - 2i) = 40 - 16i + 35i + 14 = 54 + 19i.$$

**Пример 2.** Даны комплексные числа  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ ,  $z_3 = 1 - 2i$ .

$$z = \frac{(z_1 + z_2) \cdot z_3}{z_3}$$

Найти число

*Решение.* Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_3 = (3 + 5i) + (1 - 2i) = 4 + 3i$$

$$(z_1 + z_3) \cdot z_2 = (4 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 12 + 9i - 16i + 12 = 24 - 7i$$

$$\frac{(z_1 + z_3) \cdot z_2}{1 - 2i} = \frac{24 - 7i}{1 - 2i} = \frac{(24 - 7i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{24 - 7i + 48i + 14}{5} = \frac{38 + 41i}{5} = \frac{38}{5} + \frac{41}{5}i.$$

**Пример 3.** Изобразить комплексные числа векторами, представить их в тригонометрической и показательной формах: а)  $z = 2$ , б)  $z = -2$ ,

в)  $z = 3i$ , г)  $z = -3i$ .

а)  $z = 2$ . *Решение.*  $z = 2 = 2 + i \cdot 0$ ,  $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$ ,  
 $\varphi = \arctg \frac{0}{2} = \arctg 0$ , так как радиус-вектор совпадает с направлением  
 оси  $OX$ , то  $\varphi = 0$ ,  $z = 2 = 2 (\cos 0 + i \sin 0) = 2 \cdot e^{i0}$  (рис. 1).

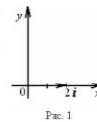


Рис. 1

б)  $z = -2$ . *Решение.*  $z = -2 = -2 + 0i$ ,  $r = 2$ ,

$\varphi = \arctg \frac{0}{-2} = \arctg 0$ , так как радиус-вектор противоположен направлению  
 оси  $OX$ , то  $\varphi = \pi$ ,  $z = -2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = 2 \cdot e^{i\pi}$  (рис. 2).

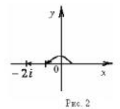


Рис. 2

в)  $z = 3i$ . *Решение.*  $z = 3i = 0 + 3i$ ,  $r = 3$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  
 совпадает с положительным направлением  
 оси  $OY$ , то

$$z = 3i = 3 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

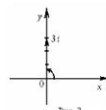


Рис. 3

в)  $z+2=x+2+iy$ , тогда  $|z+2|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$  и неравенство можно записать в виде  $\sqrt{(x+2)^2+y^2}<1$  или  $(x+2)^2+y^2<1$ .

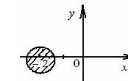


Рис. 7

### Задачи

1. Найти значение выражения:

$$\text{а) } \frac{(2-i) \cdot 5i}{5-2i}, \quad \text{б) } \frac{(2+i) \cdot (1-4i)}{3i},$$

$$\text{в) } \frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}, \text{ если } z_1=4+5i, z_2=1+i, z_3=7-9i,$$

$$\text{г) } \frac{z_1+z_2 \cdot z_3}{z_2}, \text{ если } z_1=4+8i, z_2=1-i, z_3=9+13i.$$

2. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

$$\text{а) } z=-1-i\sqrt{3}, \quad \text{б) } z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$\text{в) } z=-1+i, \quad \text{г) } z=1+3i.$$

3. Представить в показательной форме комплексные числа:

$$\text{а) } z=-2, \quad \text{б) } z=-1-i\sqrt{3},$$

$$\text{в) } z=i.$$

4. Изобразить комплексные числа векторами, представить их в тригонометрической и показательной формах:

$$\text{а) } z=1+i, \quad \text{б) } z=4i,$$

$$\text{в) } z=-\sqrt{3}-i, \quad \text{г) } z=-5.$$

5. Вычислить:

$$\text{а) } (1-i)^6, \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt{3}+i}, \quad \text{в) } \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^9.$$

6. Решить уравнения:

$$\text{а) } z^2-16=0, \quad \text{б) } z^2+8z+17=0,$$

$$\text{в) } z^8-1=0.$$

## 12. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Задания

- 1.1. В бассейне содержится 20 окуней и 15 карасей. Какова вероятности того, что 3 наугад выловленные рыбы окажутся либо только карасями, либо только окунями?
- 1.2. На рыбокомбинате работают 3 автоматические линии по разделке рыбы. Вероятность того, что работает в данный момент первая линия равна 0,8, вторая – 0,7, третья – 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работают только две линии.
- 1.3. Консервы поступают с конвейера на проверку к одному из двух контролеров. Вероятность того, что проверяемая банка попадет к первому контролеру равна 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что банка будет признана стандартной при проверке первым контролером равна 0,85, а вторым – 0,95. Банка при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что банка была проверена вторым контролером.
- 1.4. Работают три конвейера по изготовлению консервов. Вероятность поступления брака с первого конвейера равна 0,1, со второго – 0,2, а с третьего – 0,15. Найти вероятность того, что в данный момент брак поступает только с одного конвейера.
- 1.5. Рабочий работает на трех станках. Вероятность безотказной работы в течение смены первого станка равна 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент не работает хотя бы один из станков.
- 1.6. В первой коробке содержится 20 банок консервов, из них 4 банки с браком, во второй коробке находится 16 банок, из них 5 банок с браком. Из второй коробки произвольно взята одна банка и переложена в первую коробку. Затем из первой коробки случайно извлечена одна банка. Найти вероятность того, что эта извлеченная банка из первой коробки, окажется без брака.
- 1.7. В бассейне находится 30 карасей, 15 окуней, 20 карпов. Найти вероятность того, что из пяти случайно пойманных рыб две рыбы окажутся окунями, а три – карпами.
- 1.8. Вероятность своевременного прибытия первого автобуса равна 0,6, второго – 0,7, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в определенное время только

- один из трех автобусов опоздает.
- 1.9. В бассейне находятся 20 мальков судака, 30 мальков сазана, 15 мальков карпа. Какова вероятность того, что из двух наугад пойманных мальков окажутся либо оба мальками судака, либо оба мальками карпа?
- 1.10. Из 100 изделий 10 изделий имеют дефект вида  $A$ , 6 изделий имеют дефект вида  $B$ , 8 изделий имеют дефект вида  $C$ . Найти вероятность того, что два случайно взятых изделия оба окажутся либо с дефектом вида  $B$  либо с дефектом вида  $C$ .

2. Рабочий за смену изготавливает  $n$  деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта равна  $P$ . Найти вероятность того, что из  $n$  деталей первого сорта будет а) ровно  $m$  штук; б) не менее  $m_1$  штуки и не более  $m_2$  штуки.

- 2.1.  $n=400$ ,  $p=0,8$ ,  $m=330$ ,  $m_1=200$ ,  $m_2=300$ .
- 2.2.  $n=300$ ,  $p=0,75$ ,  $m=240$ ,  $m_1=150$ ,  $m_2=200$ .
- 2.3.  $n=600$ ,  $p=0,6$ ,  $m=375$ ,  $m_1=400$ ,  $m_2=500$ .
- 2.4.  $n=400$ ,  $p=0,9$ ,  $m=372$ ,  $m_1=250$ ,  $m_2=340$ .
- 2.5.  $n=650$ ,  $p=0,64$ ,  $m=370$ ,  $m_1=450$ ,  $m_2=500$ .
- 2.6.  $n=192$ ,  $p=0,75$ ,  $m=150$ ,  $m_1=100$ ,  $m_2=150$ .
- 2.7.  $n=225$ ,  $p=0,8$ ,  $m=165$ ,  $m_1=120$ ,  $m_2=200$ .
- 2.8.  $n=100$ ,  $p=0,9$ ,  $m=96$ ,  $m_1=70$ ,  $m_2=90$ .
- 2.9.  $n=150$ ,  $p=0,6$ ,  $m=75$ ,  $m_1=100$ ,  $m_2=130$ .
- 2.10.  $n=625$ ,  $p=0,8$ ,  $m=510$ ,  $m_1=520$ ,  $m_2=600$ .

3. Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$  (в первой строке таблицы даны возможные значения величины  $X$ , а во второй строке указаны вероятности  $p=P(X=x_i)$  этих возможных значений). Найти: 1) функцию распределения  $F(x)$ ;

2) математическое ожидание  $M(X)$ ;

3) дисперсию  $D(X)$ .

3.1.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 23  | 25  | 28  | 29  | 31  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

3.2.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 10  | 12  | 20  | 25  | 30  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 |

3.3.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 8   | 12  | 18  | 24  | 30  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

3.4.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 21  | 25  | 32  | 40  | 50  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

3.5.

|              |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|
| $X$          | 10,2 | 12,4 | 16,5 | 18,1 | 20,0 |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,2  | 0,2  | 0,4  | 0,1  | 0,1  |

3.6.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 11  | 15  | 20  | 25  | 32  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

3.7.

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$          | 13  | 17  | 22  | 27  | 30  |
| $p=P(X=x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баврин И.И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. – М.: Физматлит, 2003. – 328 с.
2. Гроссман С, Тернер Дж. Математика для биологов. – М.: Высш. школа, 1983. – 383 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Ч.2. – М.: Высш. школа, 2002.
4. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики: Учебник. – М.: Медицина, 1998. – 232 с.
5. Соловьева Н.В., Исаева А.С. Математика в упражнениях и задачах. Методическое пособие для студентов финансово-экономических специальностей. Часть I. – Астрахань: АГТУ, 2008. – 128 с.