



Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций
сертифицирована DQSp по международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Механика и инженерная графика»

МЕХАНИКА. КУРС ЛЕКЦИЙ.
РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
для студентов направления
21.03.01 Нефтегазовое дело

Астрахань 2021

УДК 531.8

Хахов А.А.

Механика. Курс лекций. Раздел 1. Теоретическая механика. Для студентов направления 21.03.01 Нефтегазовое дело. – Астрахань: АГТУ, 2021. – 118с.

Пособие предназначено для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» при подготовке к аттестации по курсу «Механика».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»

Протокол заседания кафедры № 7 от 30.08.2021г.

Рецензент: Славин Б.М., заведующий кафедрой «Механика и инженерная графика», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2021

© Астраханский государственный
технический университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
-----------------------	----------

РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

1 Основные понятия и определения.....	7
1.1 Аксиомы статики.....	8
1.2 Свободное и несвободное тело. Реакция связи.....	10
1.3 Основные виды связей без трения.....	11
1.4 Распределенные силы	13
2 Система сходящихся сил.....	14
2.1 Теорема о равновесии трех непараллельных сил	15
2.2 Проекция силы на ось	15
2.3 Аналитическое определение равнодействующей сходящейся системы сил.....	16
3 Момент силы относительно центра, точки и оси	17
3.1 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей	19
3.2 Уравнение линии действия равнодействующей плоской системы сил.....	20
4 Теория пар сил	22
4.1 Сложение двух параллельных сил.....	22
4.2 Пара сил. Момент пары сил	23
4.3 Свойства пар	24
4.4 Сложение пар, лежащих в пересекающихся плоскостях	24
5 Приведение системы сил к данному центру (точке).....	26
5.1 Теорема Пуансо о параллельном переносе силы.....	26
5.2 Приведение системы сил к данному центру	26
6 Аналитические условия равновесия систем сил	32
7 Ферма.....	36
7.1 Леммы о нулевых стержнях	37
8 Статически определимые и неопределимые задачи. Составные конструкции. Рычаг	38
8.1 Статически определимые и статически не определимые задачи.....	38
8.2 Определение реакций опор составных конструкций	39
8.3 Рычаг. Устойчивость при опрокидывании	40
9 Трение.....	42

9.1 Трение скольжения. Сцепление.....	42
9.2 Угол и конус трения.....	43
9.3 Трение качения	43
10 Центр тяжести. Координаты центра тяжести	45
10.1 Центр параллельных сил	45
10.2 Центр тяжести твердого тела	46
10.3 Центр тяжести плоской фигуры	47
10.4 Центр тяжести линии	47
10.5 Методы определения центра тяжести.....	48

РАЗДЕЛ II. КИНЕМАТИКА

1 Способы задания движения точки.....	53
1.1 Векторный способ задания движения.....	53
1.2 Координатный способ задания движения	55
1.3 Естественный способ задания движения	59
1.4 Взаимосвязь естественного и координатного способов	64
2 Простейшие движения твердого тела	66
2.1 Поступательное движение твердого тела	66
2.2 Вращательное движение твердого тела	68
3 Плоскопараллельное движение тела.....	70
3.1 Различные случаи определения положения МЦС	73
3.2 Теорема об ускорениях точек плоской фигуры	74
3.3 Мгновенный центр ускорений	75
4 Сложное движение точки	76
4.1 Относительное, переносное и абсолютное движения точки	76
4.2 Теорема о сложении скоростей.....	77
4.3 Теорема о сложении ускорений.....	79

РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА

1 Законы динамики материальной точки.....	83
1.1 Закон инерции (Закон Галилея-Ньютона)	83
1.2 Закон пропорциональности силы и ускорения	83
1.3 Закон равенства действия и противодействия	84
1.4 Закон независимости действия сил	85
2 Дифференциальные уравнения движения. Основные задачи динамики.....	85
2.1 Первая (прямая) задача динамики	86

2.2 Вторая (обратная) задача динамики	87
2.3 Интегрирование дифференциальных уравнений прямолинейного движения	88
3 Колебательное движение материальной точки	89
3.1 Гармонические колебания	89
4 Дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки	92
4.1 Частные случаи относительного движения материальной точки	93
5 Динамика механической системы	95
5.1 Классификация сил, действующих на материальные точки механической системы	95
5.2 Дифференциальные уравнения движения механической системы ...	96
5.3 Центр масс механической системы	97
5.4 Осевые моменты инерции твердого тела	97
5.5 Моменты инерции некоторых однородных тел	99
6 Общие теоремы динамики	101
6.1 Теорема о движении центра масс механической системы	101
6.2 Теорема об изменении количества движения	102
6.3 Теорема об изменении момента количества движения	104
6.4 Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела	105
7 Теорема об изменении кинетической энергии	106
7.1 Работа и мощность сил	106
7.2 Теорема об изменении кинетической энергии	111
8 Принцип д'Аламбера (принцип кинетостатики)	113
9 Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)	115
9.1 Классификация связей	115
9.2 Возможные перемещения. Принцип Лагранжа	116
10 Общее уравнение динамики (Принцип д'Аламбера-Лагранжа)	117
Литература	118

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Под движением в механике понимается изменение положения твердого тела в пространстве и во времени, относительно других тел.

Пространство в классической механике рассматривается как абсолютное, трехмерное, в котором все построения базируются на геометрии Евклида.

Время в классической механике так же абсолютно.

Тела, относительно которых мы рассматриваем движение данного тела, называются *телами отсчета*. Тело отсчета со скрепленными с ним осями координат называется *системой отсчета*.

Система отсчета, которая находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, называется *инерциальной*.

Абсолютно твердое тело – тело, в котором расстояния между любыми точками остается неизменным при взаимодействии с другими телами.

На основе законов механики базируются дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика, инженерные конструкции и т.д.

Механика состоит из трех основных разделов:

- статика;
- кинематика;
- динамика.

РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика – раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел или систем тел, под действием приложенных к ним сил.

Покой (равновесие) – состояние тела, при котором его положение относительно инерциальной системы отсчета остается неизменным.

Одним из основных понятий в теоретической механике является понятие силы.

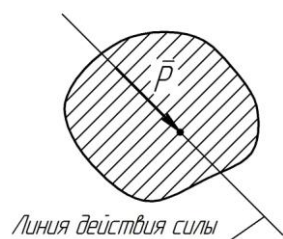


Рисунок 1.1

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел.

Геометрически сила изображается вектором (рисунок 1.1), который характеризуется:

- 1) числовым значением (модулем);
- 2) направлением;
- 3) линией действия, которая пролегает вдоль вектора силы в оба направления.

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется **системой сил**.

Если одну систему сил можно заменить другой, и при этом тело не изменит своего кинематического состояния, то эти системы считаются **эквивалентными**.

Уравновешенными системами сил называются системы сил, которые будучи приложенными к покоящемуся телу не изменяют его кинематического состояния, т.е. эквивалентные нулю.

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются **внешними**.

Силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга, называются **внутренними**.

Основной **задачей статики** является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

1.1 Аксиомы статики

1. Аксиома инерции. Под действием взаимно уравновешенных сил тело находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

2. Аксиома равновесия двух сил (рисунок 1.2). Две силы, приложенные к твердому телу, уравновешены только в том случае, если они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

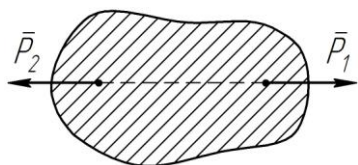


Рисунок 1.2

$$|\bar{P}_2| = |\bar{P}_1|, \quad \bar{P}_2 = -\bar{P}_1.$$

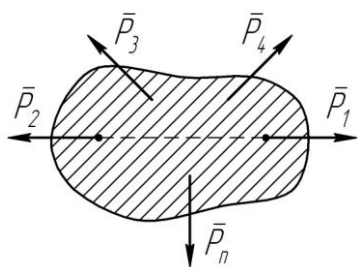


Рисунок 1.3

3. Аксиома присоединения и исключения уравновешенных сил (рисунок 1.3). Кинематическое состояние тела не изменяется, если к нему присоединить или отбросить уравновешенную систему сил $(\bar{P}_3, \bar{P}_4, \dots, \bar{P}_n)$.

Если $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ эквивалентна нулю, то система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \dots, \bar{P}_n)$ эквивалентна $(\bar{P}_3, \bar{P}_4, \dots, \bar{P}_n)$.

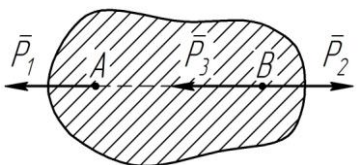


Рисунок 1.4

Следствие. Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль ее линии действия, сохраняя неизменными ее модуль и направление.

Доказательство (рисунок 1.4). К телу, на которое в точке A действует сила $\bar{P}_1$, прикладываем в точке B уравновешенную систему сил $(\bar{P}_2, \bar{P}_3)$, направленных вдоль линии действия силы $\bar{P}_1$, причем $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$, $|\bar{P}_1| = |\bar{P}_2| = |\bar{P}_3|$. Согласно третьей аксиоме, кинематическое состояние тела не изменилось. Теперь рассмотрим получившуюся систему сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$. По условию они равны по модулю, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, т.е. эта система эквивалентна 0. Поскольку они уравновешены, то по третьей аксиоме эту систему сил можно отбросить и тогда, тело окажется под действием одной силы $\bar{P}_3$, приложенной в точке B . Так как $\bar{P}_1 = \bar{P}_3$, то, фактически, мы перенесли силу $\bar{P}_1$ вдоль линии ее действия в точку B .

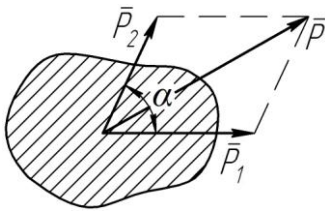


Рисунок 1.5

4. Аксиома параллелограмма сил (рисунок 1.5). Две силы, приложенные под углом, эквивалентны одной силе (равнодействующей), которая приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах. Сила $\bar{P}$ эквивалентна $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$:

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2;$$

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}.$$

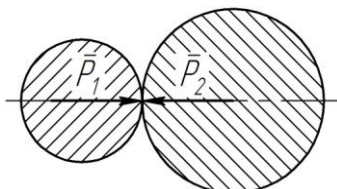


Рисунок 1.6

5. Аксиома равенства действия и противодействия (рисунок 1.6). Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие:

$$\bar{P}_1 = -\bar{P}_2.$$

Силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ не уравновешены, так как приложены к разным телам.

6. Аксиома затвердевания. Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании. (Не имеет обратного действия).

1.2 Свободное и несвободное тело. Реакция связи

Свободное тело – тело, перемещение которого ничем не ограничено.

Несвободное тело – тело, перемещение которого ограничено другими телами.

Тело, ограничивающее перемещение рассматриваемого тела, является по отношению к нему **связью**.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние разделяются на *задаваемые* или *активные* силы и *реакции связей*.

Активная сила – сила, стремящаяся изменить кинематическое состояние тела.

Пассивная сила – реакция связи (возникающая от действия активной силы).

Одним из основных положений механики является принцип **освобождаемости твердых тел от связей**, согласно которому всякое несвободное тело условно можно считать свободным, если мысленно отбросить связь, наложенную на тело, заменив ее действие **реакцией связи**.

Реакция связи – сила, с которой связь действует на данное тело; по модулю она равняется силе, с которой рассматриваемое тело действует на связь.

Направление реакции связи зависит от характера связи.

1.3 Основные виды связей без трения

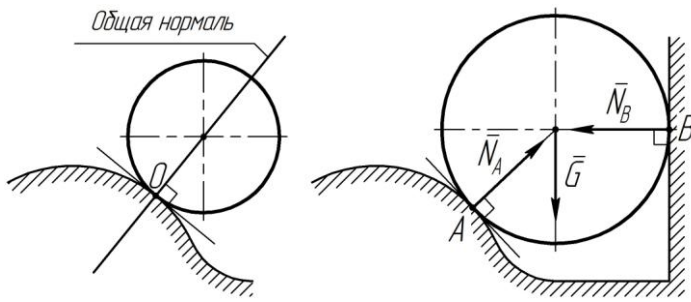


Рисунок 1.7

1. Идеальная гладкая поверхность (рисунок 1.7)

Реакция направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел.

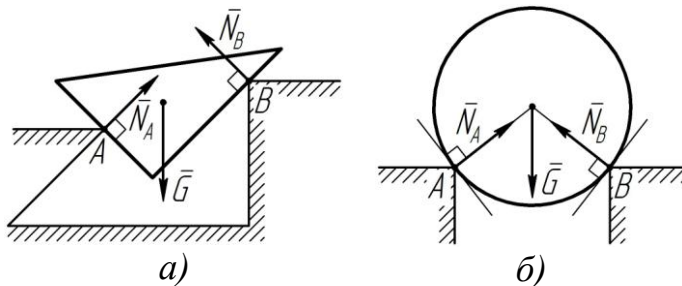


Рисунок 1.8

2. Ребро (связь в виде острия) (рисунок 1.8 а, б)

Реакция направлена по нормали к поверхности тела.

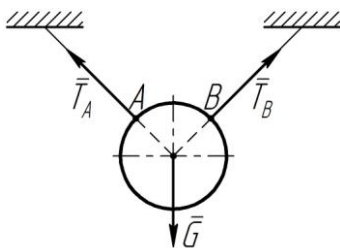


Рисунок 1.9

3. Гибкая связь (нерастяжимая нить, трос, канат, цепь) (рисунок 1.9)

Реакция (натяжение $\bar{T}$) направлена вдоль связи, от рассматриваемого тела.

4. Цилиндрический шарнир (рисунок 1.10)

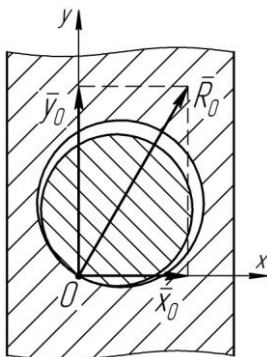
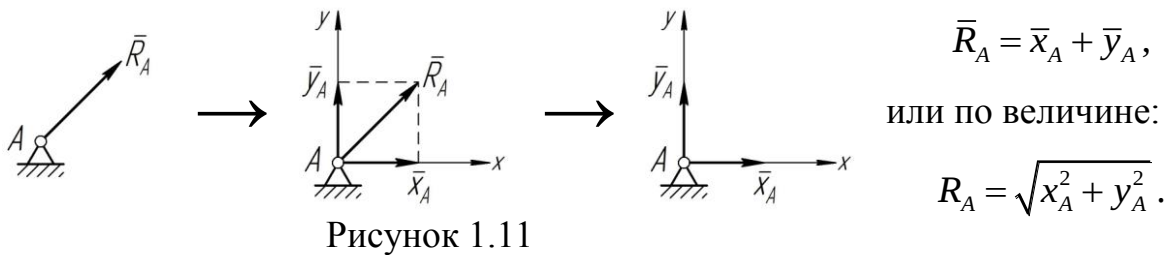


Рисунок 1.10

Реакция $\bar{R}_O$ цилиндрического шарнира лежит в плоскости перпендикулярной оси шарнира. Она проходит через центр C шарнира и точку O контакта соприкасающихся поверхностей, положение которой обычно не известно, поэтому реакцию шарнира раскладывают на две неизвестные составляющие $\bar{x}_O$ и $\bar{y}_O$, которые, обычно направляют вдоль взаимно перпендикулярных осей x и y . Тогда полная реакция R_O определится уравнением: $R_O = \sqrt{x_O^2 + y_O^2}$.

5. Неподвижный цилиндрический шарнир (рисунок 1.11)



6. Подвижная шарнирная опора или шарнирная опора на катках (рисунок 1.12).

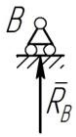


Рисунок 1.12

Реакция всегда будет направлена перпендикулярно направляющей поверхности. Применяются в мостовых и других конструкциях для снятия температурных напряжений.

7. Неподвижный сферический шарнир (рисунок 1.13). Подпятник (рисунок 1.14). Полная реакция $\bar{R}_O$ раскладывается на три неизвестные составляющие $\bar{x}_O$, $\bar{y}_O$, $\bar{z}_O$, направленные вдоль трех взаимно перпендикулярных осей x , y , z .

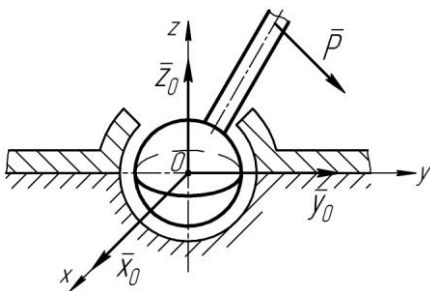


Рисунок 1.13

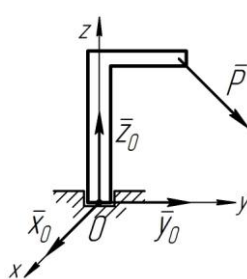


Рисунок 1.14

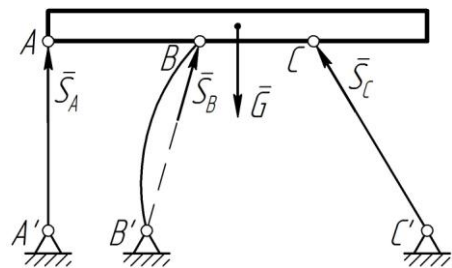


Рисунок 1.15

8. Жесткий невесомый стержень (рисунок 1.15)

Реакция $\bar{S}$ невесомого стержня направлена вдоль прямой, проходящей через оси шарниров, соответственно A, A' , B, B' , C, C' , стержня.

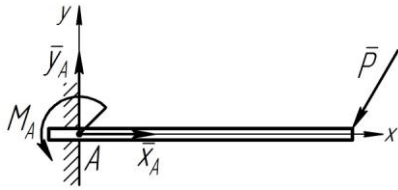


Рисунок 1.16

9. Жесткая заделка (защемление)

(рисунок 1.16)

Реактивные факторы в плоскости сводятся к двум неизвестным составляющим реакции – $\bar{x}_A$ и $\bar{y}_A$, и к реактивному моменту заделки M_A .

1.4 Распределенные силы

1. Равномерно-распределенная нагрузка (рисунок 1.17)

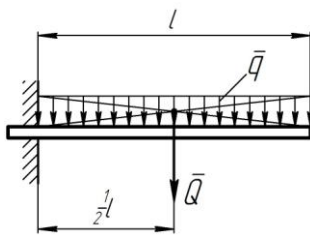


Рисунок 1.17

Характеризуется интенсивностью $\bar{q}$ распределенной нагрузки, $[q] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$. Для удобства расчета заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной силой $\bar{Q}$, приложенной в центре участка приложения

распределенной нагрузки и направленной в ту же сторону, что и распределенная нагрузка:

$$Q = ql; \quad [Q] = [\text{Н}].$$

Если нагрузка будет равномерно распределена по площади, тогда размерность $[q] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$.

2. Линейно-распределенная нагрузка (рисунок 1.18)

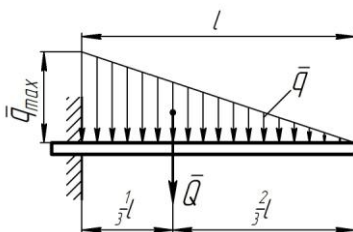


Рисунок 1.18

Характеризуется максимальным значением $q_{\max}$ интенсивности $\bar{q}$ распределенной нагрузки, которая заменяется сосредоточенной силой $\bar{Q}$, приложенной на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от максимального значения интенсивности $\bar{q}$:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l.$$

2 СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

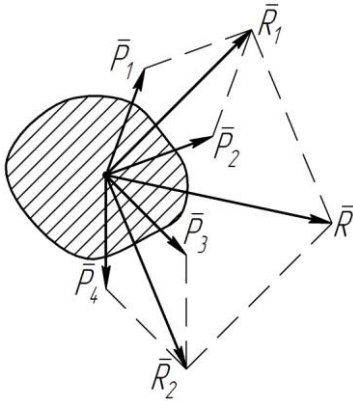


Рисунок 2.1

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Пусть тело находится под действием сходящейся системы сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4)$, (рисунок 2.1). Найдем равнодействующую $\bar{R}$ этой системы сил, для этого силы можно сложить с помощью параллелограмма:

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R}_1;$$

$$\bar{P}_3 + \bar{P}_4 = \bar{R}_2;$$

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \bar{R},$$

или последовательного сложения векторов сил (рисунок 2.2):

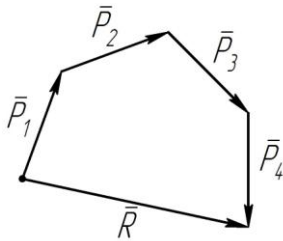


Рисунок 2.2

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 = \bar{R};$$

при этом вектор равнодействующей $\bar{R}$ системы сил исходит из начала первого вектора в конец последнего.

Для системы, состоящей из n сил $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$.

В дальнейшем, для упрощения записи, вместо $\sum_{i=1}^n$ пишем $\sum$.

При равновесии сходящейся системы сил должно выполняться условие:

$$\bar{R} = \sum \bar{P}_i = 0 \text{ — геометрическое условие равновесия.}$$

Следовательно, силовой многоугольник должен быть замкнут, т.е. конец последнего вектора должен прийти в начало первого вектора.

2.1 Теорема о равновесии трех непараллельных сил

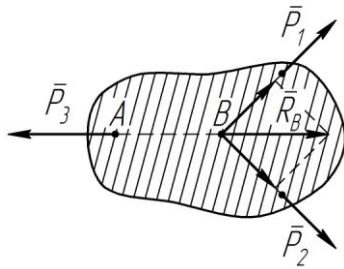


Рисунок 2.3

Если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Доказательство (рисунок 2.3). Пусть на тело, находящееся в равновесии, действуют система из трех непараллельных сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$. Следовательно $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 0$. Заменяем силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ силой $\vec{R}_B$. Тогда получим уравновешенную систему двух сил $(\vec{P}_3, \vec{R}_B)$ эквивалентную нулю. Согласно второй аксиоме силы $\vec{P}_3$ и $\vec{R}_B$ уравновешены в том случае, если они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, т.е. $|\vec{P}_3| = |\vec{R}_B|$, $\vec{P}_3 = -\vec{R}_B$.

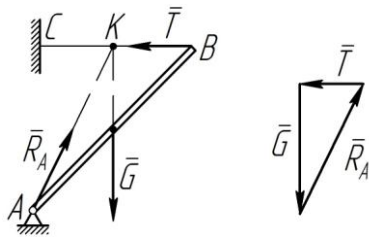


Рисунок 2.4

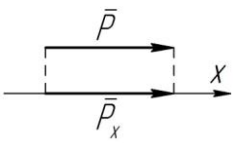
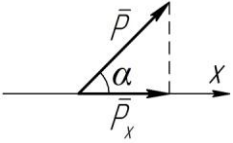
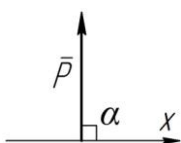
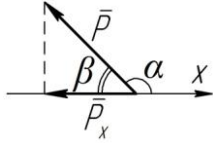
Пример. Определить реакцию в опоре балки (точке A) весом G и натяжение нити BC (рисунок 2.4).

Балка AB закреплена в точке A неподвижным шарниром и в точке B нитью BC . Показываем вес балки. Связи заменяем реакциями связей. Реакция нити будет направлена вдоль прямой BC . Согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил линия действия реакции шарнира в точке A будет проходить через точку пересечения линий действий сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$ (точку K).

2.2 Проекция силы на ось

Проекция силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси (см. таблицу 2.1).

Таблица 2.1 – Проекция силы на ось x при различном расположении вектора $\bar{P}$ относительно оси

			
$\alpha = 0^\circ$ $P_x = P \cos \alpha = P$	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $P_x = P \cos \alpha$	$\alpha = 90^\circ$ $P_x = P \cos \alpha = 0$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $P_x = P \cos \alpha = -P \cos \beta$

2.3 Аналитическое определение равнодействующей сходящейся системы сил

Проекция равнодействующей *сходящейся системы сил* на ось равна сумме проекций всех сил, входящих в эту систему, на ту же ось, т.е.

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum P_{ix} ;$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum P_{iy} ;$$

$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + \dots + P_{nz} = \sum P_{iz} .$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum P_{ix}\right)^2 + \left(\sum P_{iy}\right)^2 + \left(\sum P_{iz}\right)^2} ;$$

Направление вектора равнодействующей $\bar{R}$ сходящейся системы сил по отношению к координатным осям определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \alpha = (\bar{R}, \bar{i}) = (\bar{R}, \bar{R}_x);$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \beta = (\bar{R}, \bar{j}) = (\bar{R}, \bar{R}_y);$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad \gamma = (\bar{R}, \bar{k}) = (\bar{R}, \bar{R}_z),$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль соответствующих осей x , y , z .

При равновесии сходящейся системы сил равнодействующая $R=0$, тогда **аналитическое условие равновесия** для сходящейся системы сил примет вид:

$$\begin{cases} R_x = \sum P_{ix} = 0; \\ R_y = \sum P_{iy} = 0; \\ R_z = \sum P_{iz} = 0. \end{cases}$$

Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси равнялись нулю.

3 МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА, ТОЧКИ И ОСИ

В дальнейшем «**центром**» будем называть точку в пространстве, а «**точкой**» – точку на плоскости.

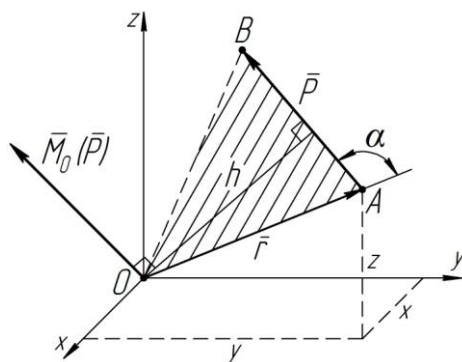


Рисунок 3.1

Момент силы относительно центра

– векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из этого центра в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}.$$

Вектор $\bar{M}_O(\bar{P})$ (рисунок 3.1) приложен в центре O и направлен перпендикулярно плоскости OAB , в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть силу $\bar{P}$ стремящуюся вращать плоскость OAB против хода часовой стрелки.

По модулю момент силы $\bar{P}$ относительно центра O будет равен:

$$M_O(\bar{P}) = |\bar{r} \times \bar{P}| = rP \sin(\bar{r}, \bar{P}) = Pr \sin \alpha = Ph,$$

где h – плечо, м.

Размерность момента силы $[H \cdot m]$.

Момент силы относительно точки – произведение модуля силы на плечо:

$$M_A(\bar{P}) = \pm Ph - \text{момент силы } \bar{P} \text{ относительно точки } A.$$

Плечом (h) называется кратчайшее расстояние от точки (полюса), относительно которой определяем момент, до линии действия силы.

Момент силы считается положительным «+», если мы условно видим обход заданного вектора силы $\bar{P}$ вокруг полюса (точки A) против хода часовой стрелки, и отрицательным «-» – если по ходу часовой стрелки.

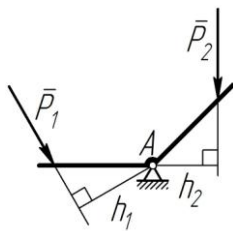


Рисунок 3.2

Пример. Определить моменты сил $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ относительно точки A (рисунок 3.2).

$$M_A(\bar{P}_1) = P_1 h_1;$$

$$M_A(\bar{P}_2) = -P_2 h_2.$$

Свойства момента силы относительно точки (центра):

- 1) значение момента силы не изменится, если силу переместить вдоль линии ее действия в любую точку;
- 2) момент силы относительно точки (центра) равен нулю, если линия действия силы проходит через полюс.

Момент силы относительно оси (рисунок 3.3). Чтобы найти момент

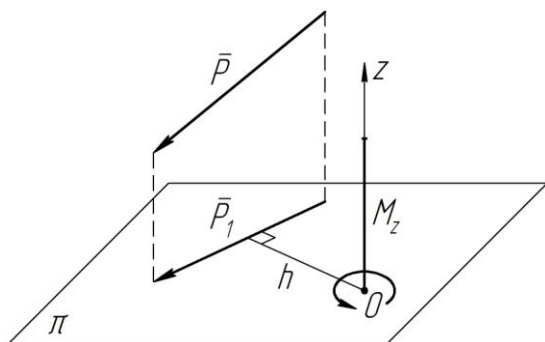


Рисунок 3.3

силы $\bar{P}$ относительно оси z , необходимо спроецировать силу на плоскость π (плоскость вращения), перпендикулярную оси вращения z , и найти момент полученной проекции $\bar{P}_1$ относительно точки O пересечения оси с плоскостью.

Момент силы относительно оси – произведение модуля проекции $\bar{P}_1$ силы $\bar{P}$ на плоскость π , перпендикулярную оси z , на ее плечо h , относительно точки O пересечения оси с плоскостью:

$$M_z = P_1 h.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, когда:

1) линия действия силы параллельна оси, относительно которой определяется момент силы;

2) линия действия силы пересекает ось, относительно которой определяется момент силы;

т.е. момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось лежат в одной плоскости.

3.1 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Момент равнодействующей системы сил относительно какого-либо центра равняется геометрической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно того же центра:

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i) \text{ – относительно центра } O.$$

Момент равнодействующей системы сил относительно точки или оси равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих эту систему, относительно той же точки или оси:

$$M_A(\bar{R}) = \sum M_A(\bar{P}_i) \text{ – относительно точки } A;$$

$$M_x(\bar{R}) = \sum M_x(\bar{P}_i) \text{ – относительно оси } x.$$

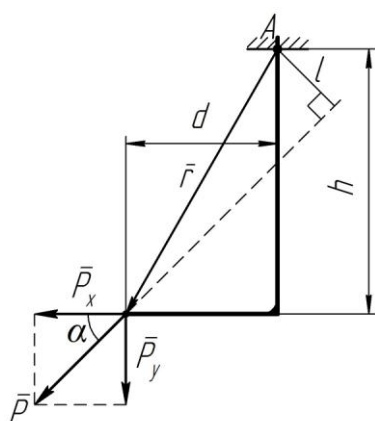


Рисунок 3.4

Пример (рисунок 3.4). Пусть к телу приложена сила $\bar{P}$. Определить момент этой силы относительно точки A .

Момент силы $\bar{P}$ относительно точки A будет равен:

$$\bar{M}_A(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}.$$

Так как $\bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_y$, то

$$\bar{M}_A(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}_x + \bar{r} \times \bar{P}_y.$$

По модулю момент силы $\bar{P}$ относительно точки A будет равен:

$$M_A(\bar{P}) = -P \cdot l.$$

Если силу $\bar{P}$ разложить на составляющие, то момент этой силы относительно точки A будет равен алгебраической сумме моментов этих составляющих относительно той же точки:

$$M_A(\bar{P}) = -P_x \cdot h + P_y \cdot d = -P \cos \alpha \cdot h + P \sin \alpha \cdot d.$$

3.2 Уравнение линии действия равнодействующей плоской системы сил

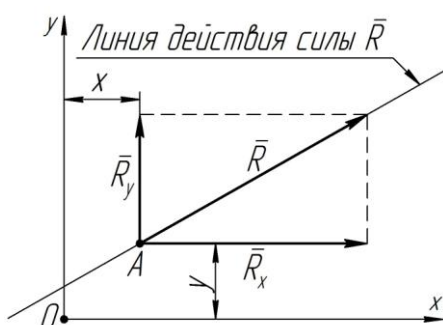


Рисунок 3.5

Пусть равнодействующая $\bar{R}$ плоской системы сил приложена в точке A (рисунок 3.5). Вектор $\bar{R}$ расположен таким образом, что его проекции $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$ на координатные оси x и y направлены в стороны положительных направлений соответствующих осей.

Согласно теореме Вариньона:

$$M_O(\bar{R}) = R_y x - R_x y; \quad (3.1)$$

$$R_y x - R_x y - M_o(\bar{R}) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) есть уравнение линии действия равнодействующей.

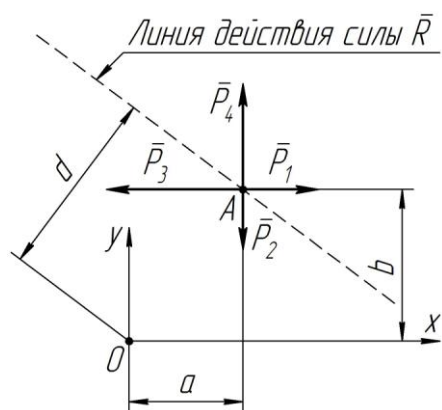


Рисунок 3.6

Пример. Определить уравнение линии действия равнодействующей $\bar{R}$ плоской сходящейся системы сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4)$, приложенных в точке A (рисунок 3.6), если $P_1 = 10$ Н, $P_2 = 8$ Н, $P_3 = 18$ Н, $P_4 = 14$ Н, $a = 3$ м, $b = 4$ м.

Сначала определяем проекции равнодействующей на координатные оси:

$$R_x = \sum P_{ix} = P_1 - P_3 = 10 - 18 = -8 \text{ Н};$$

$$R_y = \sum P_{iy} = -P_2 + P_4 = -8 + 14 = 6 \text{ Н}.$$

Далее определяем сумму моментов всех сил относительно произвольной точки, например, относительно начала координат (точки O):

$$\sum M_o(\bar{P}_i) = -P_1 b - P_2 a + P_3 b + P_4 a;$$

$$\sum M_o(\bar{P}_i) = -10 \cdot 4 - 8 \cdot 3 + 18 \cdot 4 + 14 \cdot 3 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Так как $\sum M_o(\bar{P}_i) = M_o(\bar{R})$, согласно формуле (3.1), получим:

$$\sum M_o(\bar{P}_i) = R_y x - R_x y;$$

$$50 = 6x - (-8)y;$$

$$6x + 8y - 50 = 0;$$

$$3x + 4y - 25 = 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, получили уравнение (3.3) линии действия равнодействующей $\bar{R}$, которая находится на расстоянии d от моментной точки O:

$$d = \frac{M_o(\bar{R})}{R}.$$

По величине сила $\bar{R}$ будет равна:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10 \text{ Н}.$$

Тогда кратчайшее расстояние d от моментной точки O до линии действия силы $\bar{R}$ составит:

$$d = \frac{M_o(\bar{R})}{R} = \frac{50}{10} = 5 \text{ м}.$$

4 ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

4.1 Сложение двух параллельных сил

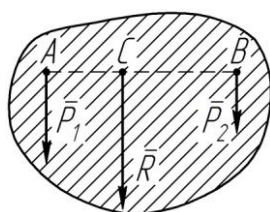


Рисунок 4.1

Равнодействующая $\bar{R}$ двух параллельных сил $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ одного направления (рисунок 4.1) имеет такое же направление, а ее модуль равен алгебраической сумме модулей слагаемых сил:

$$R = P_1 + P_2.$$

Точка C приложения равнодействующей делит отрезок AB на части обратно пропорциональные модулям сил:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}.$$

По свойству пропорций:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{P_1 + P_2}{BC + AC}$$

Откуда следует равенство:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (4.1)$$

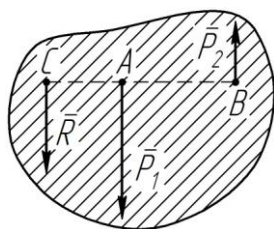


Рисунок 4.2

Равнодействующая $\bar{R}$ двух параллельных сил $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ противоположного направления (рисунок 4.2) имеет направление силы, большей по модулю, и модуль, равный разности модулей этих сил:

$$R = P_1 - P_2.$$

Точка C приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка AB за точкой приложения большей силы:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (4.2)$$

4.2 Пара сил. Момент пары сил

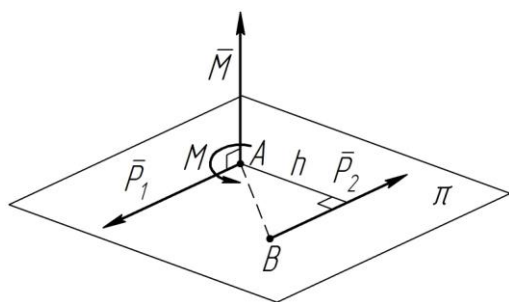


Рисунок 4.3

Пара сил – совокупность двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рисунок 4.3).

Пара сил – это самостоятельный, не упрощаемый элемент статики, характеризующийся:

- 1) плоскостью действия;
- 2) направлением вращения;
- 3) модулем (величиной) момента пары.

$$\bar{P}_2 = -\bar{P}_1; \quad \bar{P}_1 \parallel \bar{P}_2.$$

$$\bar{M}(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = \overline{AB} \times \bar{P}_2 = \overline{BA} \times \bar{P}_1;$$

$$M(\bar{P}_1, \bar{P}_2) = P_1 h = P_2 h,$$

где h – кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, м.

Размерность момента пары сил $[\text{Н} \cdot \text{м}]$.

Момент пары сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ изображают вектором $\bar{M}$, который перпендикулярен плоскости действия пары и направлен в ту сторону, откуда видно пару сил стремящуюся вращать плоскость ее действия против хода часовой стрелки.

Момент пары сил считается положительным «+», если пара сил стремится вращать плоскость в сторону противоположную ходу часовой стрелки, и отрицательным «-» – если в сторону хода часовой стрелки.

Момент положителен « + »

Момент отрицателен « - »



4.3 Свойства пар

Проекция пары на любую ось равна нулю, что следует из определения пары сил.

Не изменяя действия пары на твердое тело, пару можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары, а так же изменять ее силы и плечо, сохраняя неизменным модуль и направление момента пары.

Таким образом, момент пары сил, есть вектор свободный, т.е. не имеющий определенной точки приложения.

4.4 Сложение пар, лежащих в пересекающихся плоскостях

Заменим сходящиеся силы в точках A и B их равнодействующими (рисунок 4.4):

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{R};$$

$$\bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 = \bar{R}'.$$

Так как $|\bar{P}_1| = |\bar{P}'_1|$ и $|\bar{P}_2| = |\bar{P}'_2|$, то

$$|\bar{R}| = |\bar{R}'|.$$

$$\bar{M}_1(\bar{P}_1, \bar{P}_1') = \overline{AB} \times \bar{P}_1; \quad \bar{M}_2(\bar{P}_2, \bar{P}_2') = \overline{AB} \times \bar{P}_2.$$

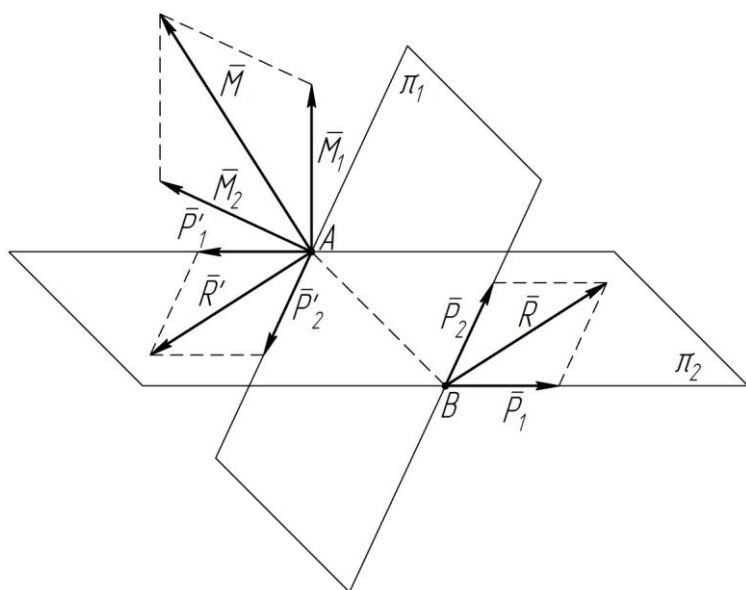


Рисунок 4.4

Две пары $(\bar{P}_1, \bar{P}_1')$ и $(\bar{P}_2, \bar{P}_2')$, лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой $(\bar{R}, \bar{R}')$, момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых сил:

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2;$$

$$\bar{M} = \overline{AB} \times \bar{P}_1 + \overline{AB} \times \bar{P}_2.$$

При сложении нескольких пар получим:

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i.$$

Если тело под действием системы пар находится в равновесии, то момент результирующей пары равняется нулю:

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0.$$

В проекции на оси координат получим:

$$\begin{cases} \sum M_{ix} = 0; \\ \sum M_{iy} = 0; \\ \sum M_{iz} = 0. \end{cases}$$

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. Момент результирующей пары определится как алгебраическая сумма моментов пар:

$$M = \sum M_i.$$

5 ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ (ТОЧКЕ)

5.1 Теорема Пуансо о параллельном переносе силы

Не изменяя кинематического состояния твердого тела, силу, приложенную к нему в какой-либо точке, можно переносить параллельно ей самой в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом $\bar{M}$, равным моменту переносимой силы относительно точки, в которую переносится сила.

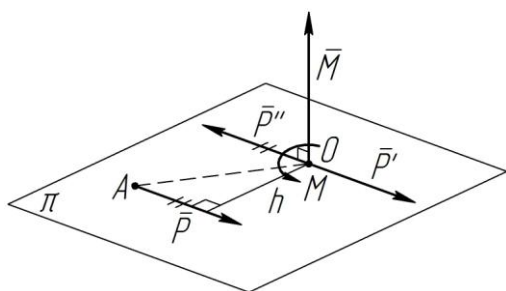


Рисунок 5.1

Пусть в точке A приложена сила $\bar{P}$ (рисунок 5.1). В произвольную точку O приложим уравновешенные силы $\bar{P}'$ и $\bar{P}''$, причем $|\bar{P}| = |\bar{P}'| = |\bar{P}''|$ и линии действия сил параллельны. Тогда получим силу $\bar{P}'$ и пару сил $(\bar{P}, \bar{P}'')$,

момент которой равен моменту силы $\bar{P}$ относительно точки O :

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P};$$

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \overline{OA} \times \bar{P};$$

$$M_O(\bar{P}) = Ph.$$

5.2 Приведение системы сил к данному центру

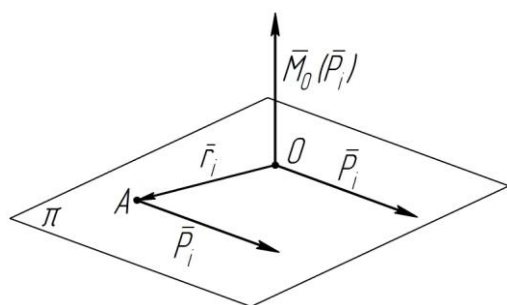


Рисунок 5.2

Приведем систему n сил к центру O (рисунок 5.2), для этого, на основании леммы Пуансо, перенесем каждую силу $\bar{P}_i$ в центр O , добавляя при этом пары сил, моменты которых равны:

$$\bar{M}_O(\bar{P}_i) = \bar{r}_i \times \bar{P}_i.$$

В результате приведения к центру O получим сходящуюся систему сил, которую можно заменить главным вектором $\bar{R}^*$ и получим n число присоединенных пар, которые можно заменить одной парой с моментом равным главному моменту $\bar{M}_O^*$ системы сил, относительно центра O (рисунок 5.3):

$$\bar{R}^* = \sum \bar{P}_i;$$

$$\bar{M}_O^* = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i).$$

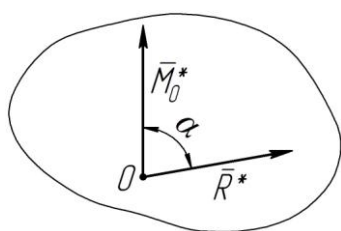


Рисунок 5.3

Любую систему сил, действующую на абсолютно твердое тело, можно привести к одному центру и заменить одной силой $\bar{R}^*$ (главный вектор системы сил) и одним моментом $\bar{M}_O^*$ (главный момент системы сил).

По модулю главный вектор $\bar{R}^*$ и главный момент $\bar{M}_O^*$ системы сил будут равны:

$$R^* = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + (\sum P_{iy})^2 + (\sum P_{iz})^2};$$

$$M_O^* = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + (\sum M_{iy})^2 + (\sum M_{iz})^2}.$$

Хотя, по записи, главный вектор и равнодействующая одинаковы, необходимо различать эти два понятия.

1. Главный вектор не зависит от центра приведения.
2. Главный момент зависит от центра приведения, так как от его положения зависят величина и направление радиус-вектора.
3. Главный вектор заменяет систему сил только в совокупности с главным моментом, т.е. он не эквивалентен данной системе сил.

4. Равнодействующая может быть только у сходящейся системы сил (однако если $\bar{M}_O^* \perp \bar{R}^*$ или $M_O^* = 0$, то данная система сил приводится к равнодействующей).
5. Равнодействующая имеет определенную линию действия.
6. Равнодействующая одна заменяет сходящуюся систему сил, т.е. она эквивалентна ей.

Для того чтобы система сил находилась в равновесии необходимо и достаточно чтобы главный вектор $\bar{R}^*$ и главный момент $\bar{M}_O^*$ равнялись нулю:

$$\begin{aligned}\bar{R}^* &= 0; \\ \bar{M}_O^* &= 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}R^* &= \sqrt{\left(\sum P_{ix}\right)^2 + \left(\sum P_{iy}\right)^2 + \left(\sum P_{iz}\right)^2} = 0; \\ M_O^* &= \sqrt{\left(\sum M_{ix}\right)^2 + \left(\sum M_{iy}\right)^2 + \left(\sum M_{iz}\right)^2} = 0.\end{aligned}$$

Пример приведения системы сил к заданному центру O .

Пусть на твердое тело действует пространственная произвольная система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ (рисунок 5.4 а).

Приведем данную систему сил к заданному центру O (*центр приведения*), используя теорему Пуансо о параллельном переносе силы.

В результате приведения получим систему сходящихся сил $(\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \dots, \bar{P}'_n)$ и систему векторов моментов $(\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n)$, исходящих из центра O (рисунок 5.4 б). По величине моменты будут соответственно равны:

$$M_1 = P_1 b; \quad M_2 = P_2 a; \quad M_n = P_n a.$$

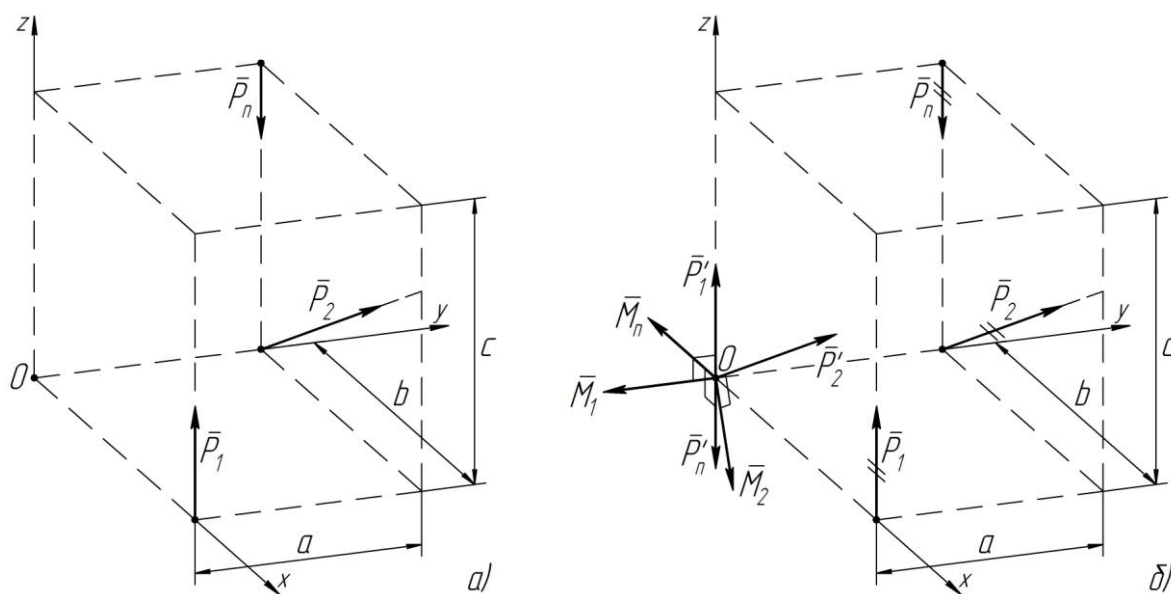


Рисунок 5.4

Векторы сил $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \dots, \bar{P}'_n$ можно заменить одним вектором, – *главным вектором $\bar{R}^*$ системы сил* (рисунок 5.5 а), – равным их геометрической сумме:

$$\bar{R}^* = \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \dots + \bar{P}'_n.$$

Так как $\bar{P}'_1 = \bar{P}_1, \bar{P}'_2 = \bar{P}_2, \bar{P}'_n = \bar{P}_n$, то:

$$\bar{R}^* = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum \bar{P}_i.$$

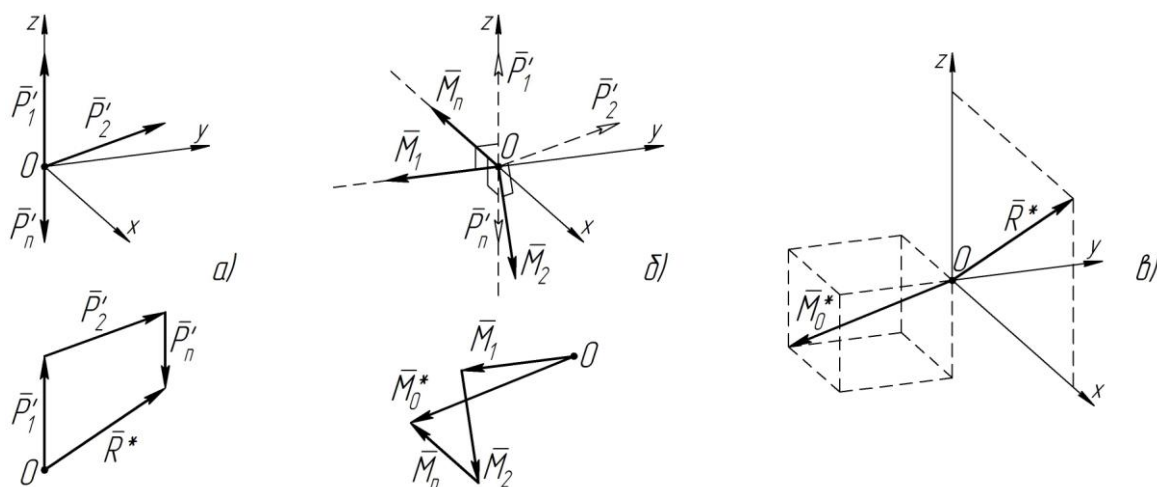


Рисунок 5.5

Векторы моментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ можно заменить одним вектором, – *главным моментом* $\bar{M}_O^*$ *системы сил* (рисунок 5.5 б), – равным их геометрической сумме:

$$\bar{M}_O^* = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i).$$

Тогда получим одну силу $\bar{R}^*$, приложенную в центре приведения O и пару сил с моментом $\bar{M}_O^*$ (рисунок 5.5 в).

Возможные случаи приведения сил

При приведении сил, произвольно расположенных в пространстве, к заданному центру O возможны следующие случаи.

Случай I. $\bar{R}^* = 0; \bar{M}_O^* = 0$.

Если главный вектор системы сил и ее главный момент относительно центра приведения равны нулю, то силы взаимно уравниваются.

Случай II. $\bar{R}^* = 0; \bar{M}_O^* \neq 0$.

Если главный вектор системы сил равен нулю и ее главный момент относительно центра приведения не равен нулю, то силы приводятся к паре сил.

Случай III. $\bar{R}^* \neq 0; \bar{M}_O^* = 0$.

Если главный вектор системы сил не равен нулю и ее главный момент относительно центра приведения равен нулю, то силы приводятся к равнодействующей.

Случай IV. $\bar{R}^* \neq 0; \bar{M}_O^* \neq 0; \bar{R}^* \perp \bar{M}_O^*$.

Если главный вектор системы сил и ее главный момент относительно центра приведения не равны нулю и перпендикулярны между собой (рисунок 5.6 а), то силы приводятся к равнодействующей $\bar{R}$.

Представим вектор $\bar{M}_O^*$ парой сил $(\bar{R}_1^*, \bar{R})$ (рисунок 5.6 б), причем $\bar{R}_1^* = -\bar{R}^*$. Модуль момента этой пары будет равен:

$$M_O^* = R^* d \quad \text{или} \quad M_O^* = R_1^* d.$$

Согласно третьей аксиоме, уравновешенную систему сил $(\bar{R}_1^*, \bar{R}^*)$ можно отбросить. Тогда останется только сила $\bar{R}$ (равнодействующая), линия действия которой проходит на расстоянии d от центра приведения O (рисунок 5.6 в):

$$d = \frac{M_O^*}{R^*}.$$

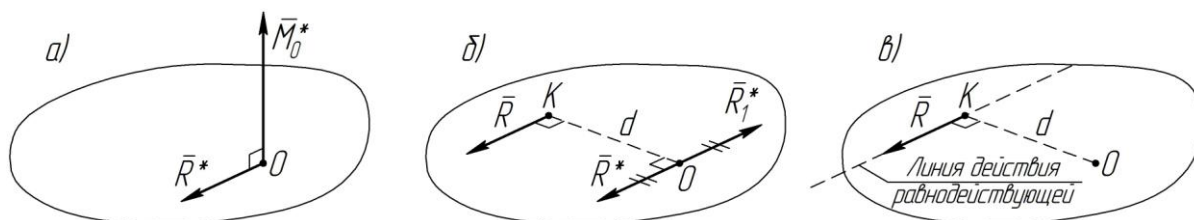


Рисунок 5.6

Случай V. $\bar{R}^* \neq 0$; $\bar{M}_O^* \neq 0$; $\bar{R}^* \not\perp \bar{M}_O^*$.

Если главный вектор системы сил и ее главный момент относительно центра приведения не равны нулю и не перпендикулярны между собой, то силы приводятся к двум скрещивающимся силам, – к силовому винту (динаме), – т.е. к совокупности силы и пары сил, плоскость действия которой перпендикулярна силе.

Случаи I – IV возможны при расположении сил в одной плоскости.

6 АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

1. Равновесие пространственной произвольной системы сил, т.е. системы сил, линии действия которых произвольно расположены в пространстве (рисунок 6.1).

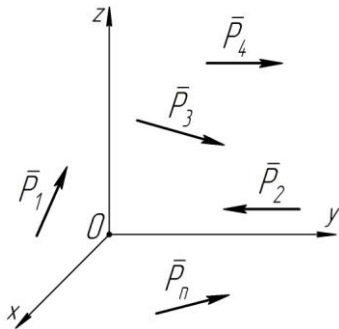


Рисунок 6.1

$$\begin{aligned} \sum P_{ix} &= 0; & \sum M_x(\bar{P}_i) &= 0; \\ \sum P_{iy} &= 0; & \sum M_y(\bar{P}_i) &= 0; \\ \sum P_{iz} &= 0; & \sum M_z(\bar{P}_i) &= 0. \end{aligned}$$

Для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси (x , y , z) и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю.

Примечание. Оси, относительно которых составляются уравнения, не должны лежать в одной плоскости и быть параллельны.

2. Равновесие пространственной параллельной системы сил, т.е. системы сил расположенных в пространстве, линии действия которых параллельны (рисунок 6.2).

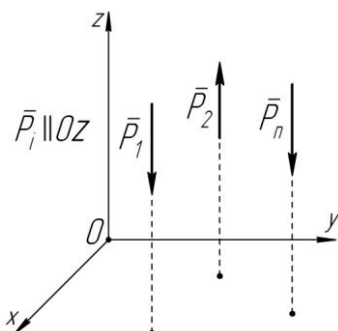


Рисунок 6.2

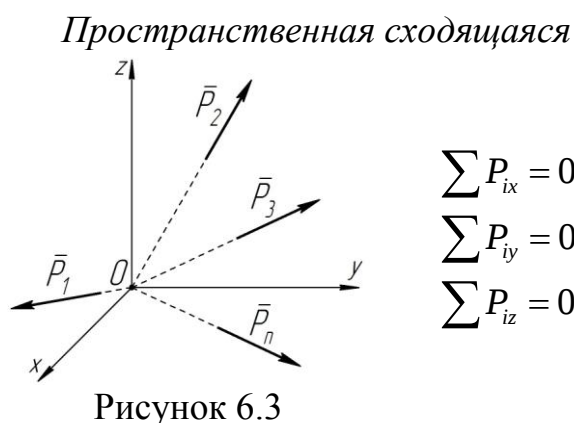
Пусть линии действия всех сил параллельны оси Oz , тогда:

$$\begin{aligned} \sum P_{iz} &= 0; \\ \sum M_x(\bar{P}_i) &= 0; \\ \sum M_y(\bar{P}_i) &= 0. \end{aligned}$$

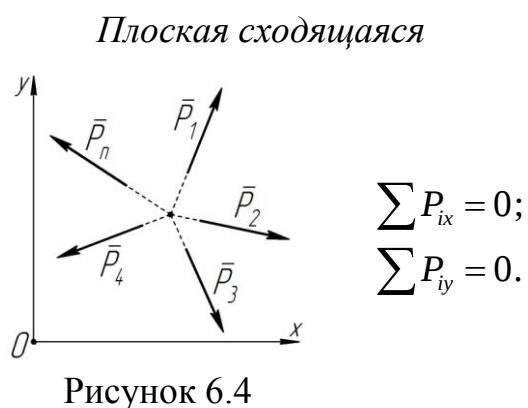
См. рисунок 6.2

Для равновесия пространственной параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось параллельную линиям действия сил (ось Oz) равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух оставшихся осей (x , y) также равнялись нулю.

3. Равновесие сходящихся систем сил, т.е. систем сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рисунки 6.3 и 6.4).



$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= 0; \\ \sum P_{iy} &= 0; \\ \sum P_{iz} &= 0.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= 0; \\ \sum P_{iy} &= 0.\end{aligned}$$

См. рисунок 6.3

Для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси (x , y , z) равнялись нулю.

См. рисунок 6.4

Для равновесия плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две координатные оси (x, y или x, z или y, z) равнялись нулю.

4. Равновесие плоской произвольной системы сил, т.е. системы сил произвольно расположенных на плоскости (рисунок 6.5).

Существует III вида (формы) условий равновесия плоской произвольной системы сил.

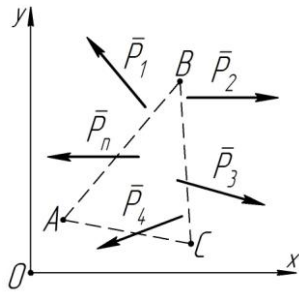


Рисунок 6.5

Первый вид
(основной):
 $\sum P_{ix} = 0;$
 $\sum P_{iy} = 0;$
 $\sum M_O(\bar{P}_i) = 0.$

Второй вид:
 $\sum P_{ix} = 0;$
 $\sum M_A(\bar{P}_i) = 0;$
 $\sum M_B(\bar{P}_i) = 0,$
 прямая
 $AB \not\perp OX.$

Третий вид:
 $\sum M_A(\bar{P}_i) = 0;$
 $\sum M_B(\bar{P}_i) = 0;$
 $\sum M_C(\bar{P}_i) = 0,$
 точки A, B и C
 $\notin$ одной прямой.

I. Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две оси, лежащие в плоскости действия системы сил, равнялись нулю, и сумма моментов относительно любой точки (например точки O), принадлежащей данной плоскости, также равнялась нулю.

II. Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на любую ось, принадлежащую плоскости действия системы сил (например ось OX), равнялась нулю, и суммы моментов всех сил относительно двух любых точек, принадлежащих данной плоскости (например точки A и B), также равнялись нулю.

Примечание. Прямая AB не должна быть перпендикулярна оси OX.

III. Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A, B и C), равнялись нулю.

Примечание. Точки A, B и C не должны лежать на одной прямой.

5. Равновесие плоской параллельной системы сил, т.е. системы сил расположенных на плоскости, линии действия которых параллельны (рисунок 6.6).

Существуют II вида (формы) условий равновесия плоской параллельной системы сил.

Пусть линии действия всех сил параллельны оси Oy .

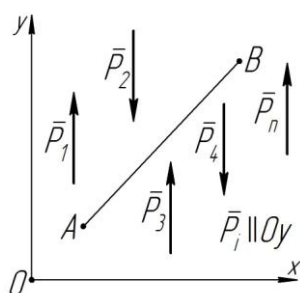


Рисунок 6.6

Первый вид
(основной):
 $\sum P_{iy} = 0;$
 $\sum M_O(\bar{P}_i) = 0.$

Второй вид:
 $\sum M_A(\bar{P}_i) = 0;$
 $\sum M_B(\bar{P}_i) = 0,$
 прямая $AB \nparallel Oy$.

I. Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную линиям действия сил (например Oy), равнялась нулю, и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки, принадлежащей плоскости действия системы сил (например точки O), также равнялась нулю.

II. Для равновесия плоской параллельной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек, принадлежащих плоскости действия системы сил (например точек A и B), равнялись нулю.

Примечание. Точки A и B не должны лежать на прямой параллельной линиям действия сил.

7 ФЕРМА

Ферма – это шарнирно-стержневая, геометрически неизменяемая конструкция. Фермы бывают *плоские* и *пространственные*.

Ферма состоит из стержней (обозначенных цифрами) и узлов (обозначенных буквами). Рассмотрим плоскую ферму (рисунок 7.1).

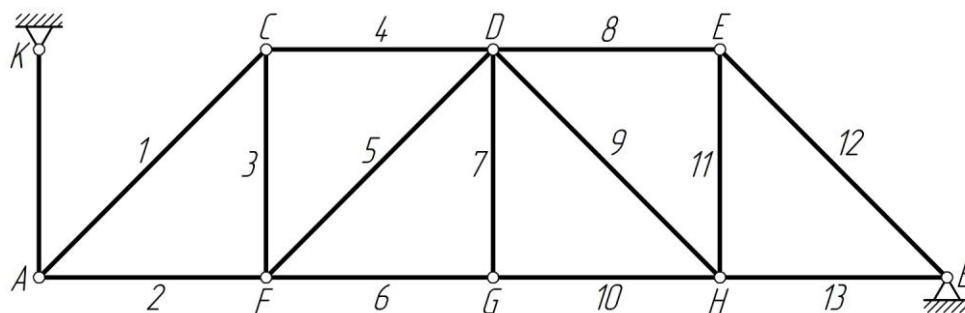


Рисунок 7.1

1, 4, 8, 12 – стержни верхнего пояса.

2, 6, 10, 13 – стержни нижнего пояса.

3, 7, 11 – стойки.

5, 9 – раскосы.

Стержень AK называется *опорным*.

Расстояние AB – *пролет фермы*.

Расчет фермы сводится к определению усилий в опорах фермы и в ее стержнях под действием внешних нагрузок. Для упрощения расчета фермы принимаем некоторые допущения:

- 1) стержни, из которых состоит ферма, прямолинейны и невесомы;
- 2) узлы выполнены в виде шарниров без трения;
- 3) внешние нагрузки приложены к узлам.

Вследствие этих допущений, усилия в стержнях направлены вдоль осей стержней, т.е. стержни работают только на растяжение или на сжатие.

Перед началом расчета фермы необходимо вычислить **статическую определимость фермы**:

$$k = 2m - 3,$$

где k – число стержней (опорные стержни не учитываются);

m – число узлов.

Если $k < 2m - 3$, то ферма нежесткая.

Если $k > 2m - 3$, то ферма статически неопределима.

Существует несколько методов (способов) расчета ферм:

- 1) метод вырезания узлов (аналитический и графический);
- 2) метод Риттера (метод сечений);
- 3) метод Максвелла-Кремоны.

7.1 Леммы о нулевых стержнях

Существуют способы позволяющие определить нагрузку в некоторых стержнях фермы без расчета.

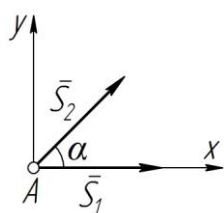


Рисунок 7.2

1. Если в незагруженном узле сходятся два стержня под углом $\alpha \neq 180^\circ$, то усилия в них равны нулю (рисунок 7.2): $S_1 = 0$; $S_2 = 0$.

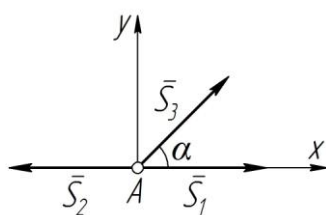


Рисунок 7.3

2. Если в незагруженном узле сходятся три стержня, причем два из них лежат на одной прямой, а третий под углом к ним ($\alpha \neq 180^\circ$), то усилие в третьем равно нулю, а усилия в первых двух будут равны между собой (рисунок 7.3): $S_1 = S_2$; $S_3 = 0$.

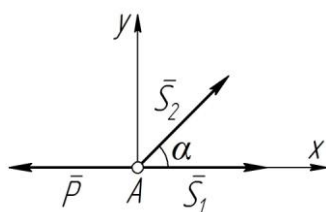


Рисунок 7.4

3. Если в загруженном узле сходятся два стержня под углом $\alpha \neq 180^\circ$, причем линия действия внешней силы совпадает с осью одного из стержней, то усилие во втором будет равно нулю, а в первом равно внешней силе (рисунок 7.4): $S_1 = P$; $S_2 = 0$.

Пример. Определить нулевые стержни с помощью лемм (рисунок 7.5).

BK – опорный стержень.

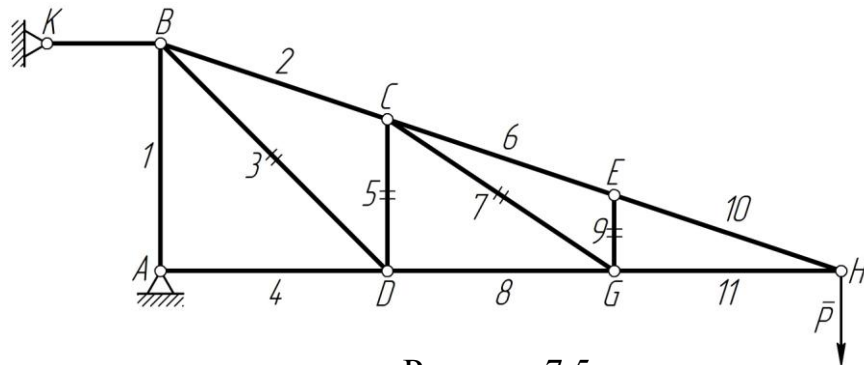


Рисунок 7.5

Рассматривая поочередно узлы E , G , C , и D получим, что стержни 9, 7, 5, 3 – нулевые, согласно второй лемме.

8 СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ. СОСТАВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. РЫЧАГ

8.1 Статически определимые и статически не определимые задачи

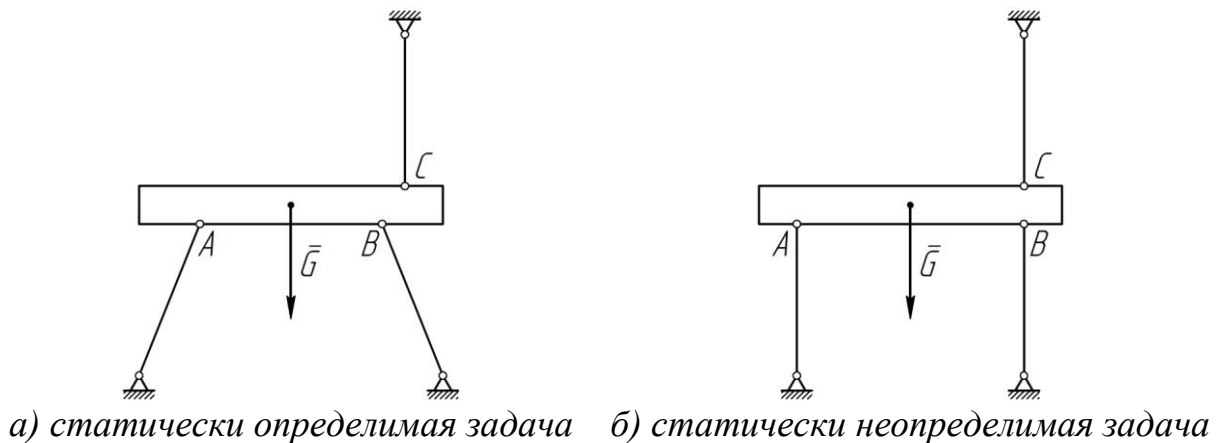


Рисунок 8.1

Статически определимые задачи – задачи, которые можно решать методами статики твердого тела, т.е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил (рисунок 8.1 а).

Статически неопределимые задачи – задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, т.е. задачи, для решения которых нужно учитывать деформации тела, обусловленные внешними нагрузками (рисунок 8.1 б).

8.2 Определение реакций опор составных конструкций

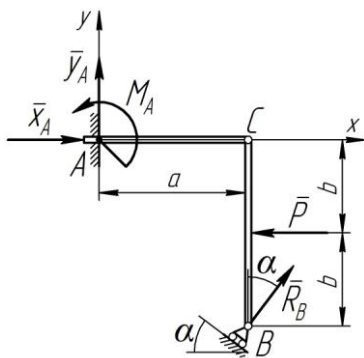


Рисунок 8.2

Составной называется конструкция, представляющая собой совокупность отдельных твердых тел, связанных между собой. Связи, соединяющие ее части называют внутренними (рисунок 8.2). Для рассмотрения равновесия такой конструкции ее расчленяют, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями, и рассматривают равновесие каждой части

отдельно, а так же конструкции целиком (при необходимости).

Реакции внутренней связи шарнира C, приложенные к телам AC и CB, попарно равны по модулям и противоположны по направлениям, так как выражают действие и противодействие. Векторным равенствам $\vec{x}'_C = -\vec{x}_C$ и $\vec{y}'_C = -\vec{y}_C$ соответствуют алгебраические равенства $x'_C = x_C$ и $y'_C = y_C$, применяемые при решении задачи.

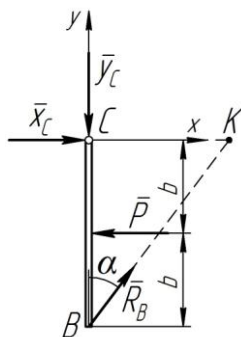


Рисунок 8.3

Рассмотрим равновесие балки CB (рисунок 8.3):

$$\sum M_B(\bar{P}_i) = -x_C \cdot 2b + P \cdot b = 0;$$

$$\sum M_C(\bar{P}_i) = R_B \sin \alpha \cdot 2b - P \cdot b = 0;$$

$$\sum M_K(\bar{P}_i) = y_C \cdot CK - P \cdot b = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CK}{2b} \Rightarrow CK = 2b \operatorname{tg} \alpha;$$

$$x_C = \frac{P}{2}; \quad y_C = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \quad R_B = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

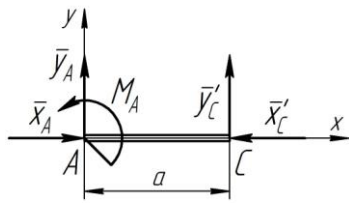


Рисунок 8.4

Рассмотрим равновесие балки AC (рисунок 8.4):

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = M_A + y'_C \cdot a = 0;$$

$$\sum P_{ix} = x_A - x'_C = 0;$$

$$\sum P_{iy} = y_A + y'_C = 0.$$

$$M_A = -y'_C \cdot a = -\frac{P \cdot a}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \quad x_A = x'_C = \frac{P}{2}; \quad y_A = -y'_C = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Проверка. Составим уравнение моментов для всей конструкции (рисунок 8.2) относительно точки C:

$$\sum M_C(\bar{P}_i) = M_A - y_A \cdot a - P \cdot b + R_B \sin \alpha \cdot 2b = 0.$$

Подставим в полученное уравнение значения выраженных величин:

$$-\frac{Pa}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \left(-\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) a - P \cdot b + \frac{P}{2 \sin \alpha} \sin \alpha \cdot 2b = 0;$$

$$-\frac{P \cdot a}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{P \cdot a}{2 \operatorname{tg} \alpha} - P \cdot b + P \cdot b = 0 \Rightarrow \underline{0=0}.$$

8.3 Рычаг. Устойчивость при опрокидывании

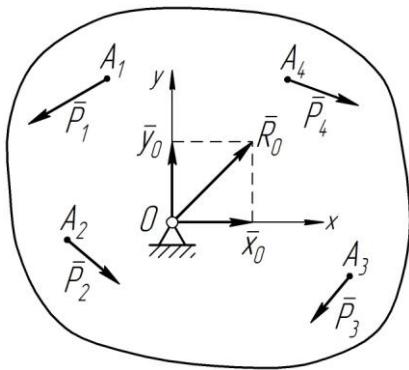


Рисунок 8.5

Рычаг – твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения, находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси (рисунок 8.5).

Точка пересечения плоскости действия сил и неподвижной оси вращения рычага называется *опорной точкой* (точка O).

Если рычаг находится в покое, то алгебраическая сумма моментов всех активных сил, приложенных к рычагу, относительно опорной точки равна нулю:

$$\sum M_O(\bar{P}_i) = 0.$$

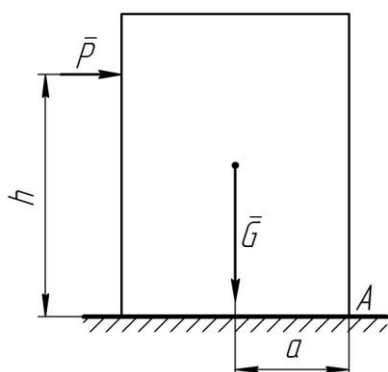


Рисунок 8.6

Из условия равновесия рычага определяется условие устойчивости тел при опрокидывании.

Допустим, что к прямоугольному параллелепипеду (рисунок 8.6) весом $\bar{G}$ на высоте h приложена горизонтальная сила $\bar{P}$, которая может не только сдвинуть тело, но и опрокинуть его при вращении вокруг ребра A .

Считая, что сила $\bar{P}$ недостаточно велика, чтобы сдвинуть тело, рассмотрим ее опрокидывающее действие:

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = 0;$$

$$Ga - Ph = 0;$$

$$Ga = Ph.$$

$Ga = M_{уд.}$ – удерживающий момент;

$Ph = M_{опр.}$ – опрокидывающий момент;

$k = \frac{M_{уд.}}{M_{опр.}}$ – коэффициент устойчивости.

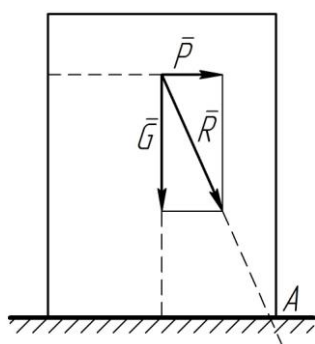


Рисунок 8.7

Найдем равнодействующую $\bar{R}$ сил $\bar{P}$ и $\bar{G}$ (рисунок 8.7). Если линия действия силы $\bar{R}$ проходит:

- 1) слева от ребра A , то состояние тела устойчиво $k > 1$;
- 2) через ребро A , то состояние тела предельно устойчиво $k = 1$;
- 3) справа от ребра A , то тело опрокинется $k < 1$.

9 ТРЕНИЕ

9.1 Трение скольжения. Сцепление

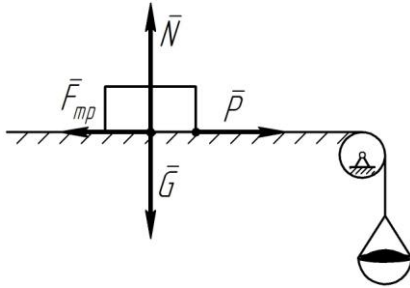


Рисунок 9.1

Основные законы трения носят приближенный характер. Они установлены Кулоном для сухого трения.

Пусть тело, весом $\vec{G}$, лежит на горизонтальной шероховатой поверхности (рисунок 9.1). Приложим к телу силу $\vec{P}$. Если значение силы $\vec{P}$ будет незначительное, то тело будет оставаться неподвижным, т.е. в равновесии. Следовательно, появляется некая сила, до некоторого момента равная по модулю и противоположно направленная вектору $\vec{P}$, удерживающая тело. Эта сила называется **силой трения** $\vec{F}_{mp}$.

При отсутствии скольжения силу трения называют силой сцепления, которая изменяется:

$$0 \leq \vec{F}_{mp} \leq \vec{F}_{mp}^{\max}.$$

Максимальная сила сцепления пропорциональна нормальному давлению тела:

$$F_{mp}^{\max} = fN.$$

где f – коэффициент трения покоя (коэффициент сцепления).

Максимальная сила сцепления в широких пределах не зависит от площади трущихся поверхностей, а коэффициент сцепления зависит от характера трущихся поверхностей, а так же от их агрегатного состояния.

После того, как тело начнет перемещаться, сила трения скольжения будет частично компенсировать действие силы $\vec{P}$. Модуль силы трения скольжения будет несколько меньше, чем модуль максимальной силы сцепления так как $f > f_{ск}$.

9.2 Угол и конус трения

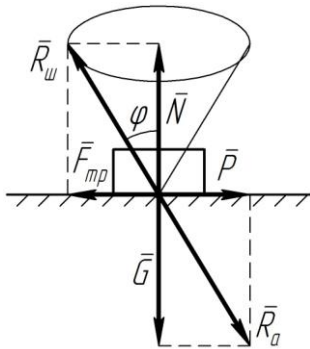


Рисунок 9.2

Пусть на тело, находящееся в покое (рисунок 9.2), действуют активные силы: $\bar{G}$ – вес тела; $\bar{P}$ – горизонтальная сила, пытающаяся сдвинуть тело; $\bar{R}_a$ – результирующий вектор от активных сил:

$$\bar{R}_a = \bar{G} + \bar{P}.$$

Так как тело под действием результирующей $\bar{R}_a$ остается в равновесии, значит, существует сила, равная по модулю $\bar{R}_a$ и противоположно ей направленная – *реакция шероховатой поверхности*: $\bar{R}_u = \bar{N} + \bar{F}_{mp}$.

При $\bar{F}_{mp} = \bar{F}_{mp}^{\max}$, угол φ называют *углом трения*.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{\max}}{N} = f.$$

В общем случае вектор силы $\bar{P}$ можно направить как угодно в плоскости параллельной поверхности трения, поэтому вектор $\bar{R}_u$, отклоняющийся на угол φ от вектора $\bar{N}$, образует *конус трения*. До тех пор, пока линия действия результирующего вектора от активных сил $\bar{R}_a$ будет лежать в пределах конуса трения, тело будет оставаться неподвижным.

9.3 Трение качения

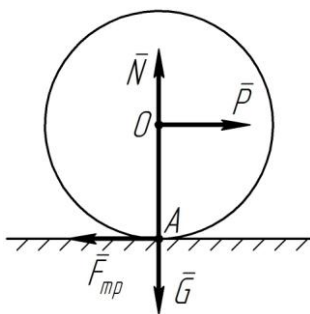


Рисунок 9.3

На рисунке 9.3, на первый взгляд, пара сил $\bar{P}$ и $\bar{F}_{mp}$ ничем не уравновешенны, поэтому цилиндр должен начать катиться при любой малой активной силе $\bar{P}$. Но это идеальные условия! В действительности, качение начинается при достижении силой $\bar{P}$ определенного предельного значения.

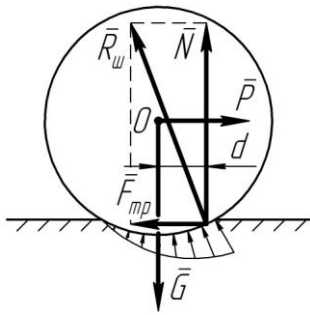


Рисунок 9.4

На рисунке 9.4 видно, что контакт цилиндра с поверхностью, по которой он катится, происходит по дуге. Поэтому, нормальная реакция $\bar{N}$ отстоит от центра цилиндра на расстоянии d , которое зависит от физических свойств поверхности. Предельное значение плеча d называется **коэффициентом трения качения**:

$$\delta = d_{\max}.$$

В отличие от коэффициента трения сцепления (скольжения), который является безразмерной величиной, коэффициент трения качения измеряется в единицах длины [м].

На рисунке 9.5 дана схема сил исходя из абсолютной твердости тел, но с учетом момента сопротивления качению:

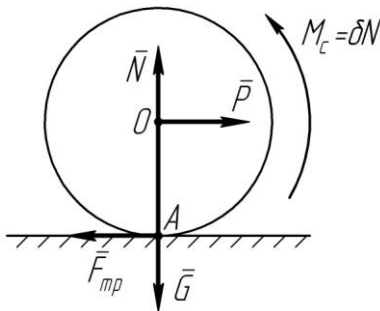


Рисунок 9.5

$$M_c = \delta N.$$

Рассмотрим предельное равновесие катка, с учетом трения сцепления и трения качения:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = P - F_{mp}^{\max} = 0; \\ \sum P_{iy} = N - G = 0; \\ \sum M_A(\bar{P}_i) = -PR + M_c = 0. \end{cases}$$

Из данных уравнений видно, что скольжение начнется, если $P > F_{mp}^{\max}$, т.е. $P > fN$.

Качение начнется, если $P > \frac{M_c}{R}$ или $P > \frac{\delta N}{R}$.

Но так как, обычно $\frac{\delta}{R} \ll f$, то качение начнется раньше скольжения.

В связи с этим, в машиностроении энергетически выгодно заменять подшипники скольжения подшипниками качения.

10 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

10.1 Центр параллельных сил

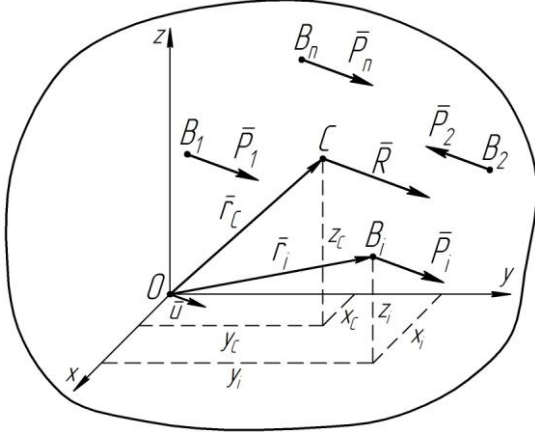


Рисунок 10.1

Центр параллельных сил – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Рассмотрим систему параллельных сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, приложенных в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$, приводящуюся к

равнодействующей $\bar{R}$, приложенной в точке C (рисунок 10.1).

На основании теоремы Вариньона запишем:

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i) = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i.$$

В свою очередь $\bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{r}_C \times \bar{R}$;

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i}{\bar{R}}.$$

Если ввести единичный вектор $\bar{u} \parallel \bar{P}_i$, тогда после преобразований получим:

$$\bar{P}_i = \bar{u} P_i; \quad \bar{R} = \sum \bar{P}_i = \bar{u} \sum P_i = \bar{u} R;$$

$$\bar{r}_C \times \bar{R} = \sum \bar{r}_i \times \bar{P}_i; \quad \bar{r}_C \times \bar{u} R = \sum \bar{r}_i \times \bar{u} P_i; \quad \bar{r}_C R \times \bar{u} = \sum \bar{r}_i P_i \times \bar{u};$$

$$(\bar{r}_C R - \sum \bar{r}_i P_i) \times \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{r}_C R - \sum \bar{r}_i P_i = 0;$$

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_i P_i}{R}.$$

В проекции на координатные оси получим:

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{R}; \quad y_C = \frac{\sum y_i P_i}{R}; \quad z_C = \frac{\sum z_i P_i}{R}.$$

10.2 Центр тяжести твердого тела

Вблизи поверхности Земли линии действия векторов сил тяжестей отдельных тел можно считать параллельными, так как на расстоянии 31 м угол между ними равен $0^{\circ}01'$.

Центр тяжести тела – фиксированная в данном теле точка, через которую проходит равнодействующая параллельных сил тяжести всех частиц этого тела при любом положении тела. Необходимо отметить, что эта точка не обязательно будет принадлежать самому телу.

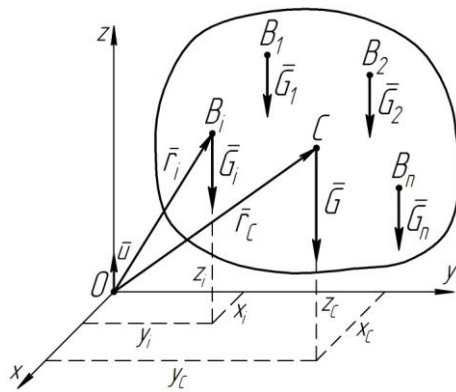


Рисунок 10.2

Рассмотрим тело произвольной формы с центром тяжести в точке C (рисунок 10.2). Представим тело, как совокупность бесконечно малых объемов V_i , каждый из которых имеет свой вес G_i .

Если тело однородное, то:

$$G = \gamma V, \quad G_i = \gamma V_i,$$

где V – объем тела, м^3 ;

γ – вес единицы объема Н/м^3 .

Согласно пункту (10.1):

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_i G_i}{G},$$

или в проекции на декартовы оси координат

$$x_C = \frac{\sum x_i G_i}{G}; \quad y_C = \frac{\sum y_i G_i}{G}; \quad z_C = \frac{\sum z_i G_i}{G},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центров тяжести элементарных объемов, м.

Тогда

$$x_C = \frac{\sum x_i G_i}{G} = \frac{\sum x_i \gamma V_i}{\gamma V} = \frac{\gamma \sum x_i V_i}{\gamma V} = \frac{\sum x_i V_i}{V}.$$

$$x_C = \frac{\sum x_i V_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum y_i V_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum z_i V_i}{V}.$$

10.3 Центр тяжести плоской фигуры

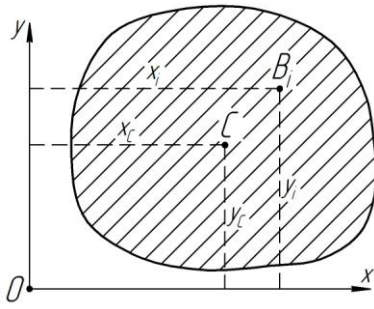


Рисунок 10.3

Положение центра тяжести плоской фигуры определяется двумя координатами x_c , y_c . Разобьем фигуру (рисунок 10.3) на элементарные площадки B_i весом G_i и площадью F_i . Вес фигуры определится по формуле $G = \nu F$, а вес каждой площадки $G_i = \nu F_i$,

где F – площадь фигуры, м^2 ;

ν – вес единицы площади фигуры, Н/м^2 .

Тогда

$$x_c = \frac{\sum x_i G_i}{G} = \frac{\sum x_i \nu F_i}{\nu F} = \frac{\nu \sum x_i F_i}{\nu F} = \frac{\sum x_i F_i}{F}.$$

$$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum y_i F_i}{F},$$

где x_i , y_i – координаты центров тяжести элементарных площадок, м.

10.4 Центр тяжести линии

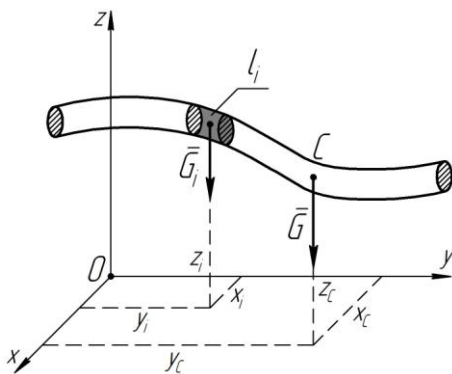


Рисунок 10.4

Определим положение центра тяжести однородного тела, имеющего большую протяженность при сравнительно малой площади поперечного сечения, т.е. линии (рисунок 10.4).

Вес линии выразим формулой $G = \rho L$,

где ρ – вес единицы длины линии, Н/м ;

L – длина линии, м.

Разобьем линию на элементарные участки длиной l_i и весом $G_i = \rho l_i$.

Тогда

$$x_c = \frac{\sum x_i G_i}{G} = \frac{\sum x_i \rho l_i}{\rho L} = \frac{\rho \sum x_i l_i}{\rho L} = \frac{\sum x_i l_i}{L}.$$

$$x_C = \frac{\sum x_i l_i}{L}; \quad y_C = \frac{\sum y_i l_i}{L}; \quad z_C = \frac{\sum z_i l_i}{L},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центров тяжести элементарных участков, м.

10.5 Методы определения центра тяжести

1. Метод симметрии

Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

2. Метод разбиения (рисунок 10.5)

Сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2}.$$

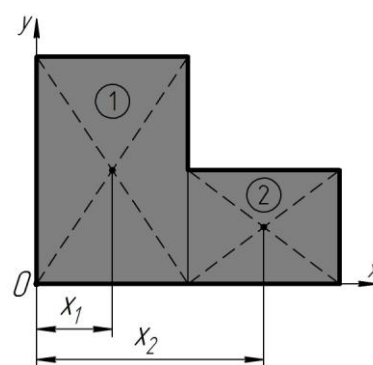


Рисунок 10.5

3. Метод отрицательных площадей (рисунок 10.6)

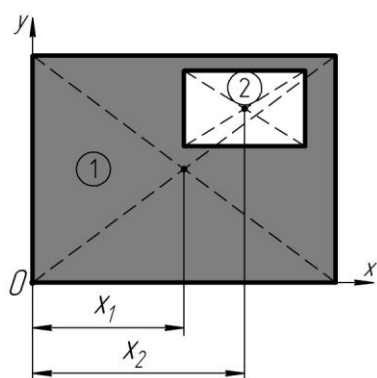


Рисунок 10.6

Так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, но отверстия или пустоты представляют в виде «отрицательных» областей.

Например, вместо разбиения фигуры на 4 обычных прямоугольника, ее можно представить как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 (-F_2)}{F_1 + (-F_2)}.$$

4. Метод интегрирования

Выполняется аналитическое интегрирование или численные методы интегрирования. Используется при наличии у фигуры контура описываемым известным уравнением.

5. Метод подвешивания (экспериментальный) (рисунок 10.7)

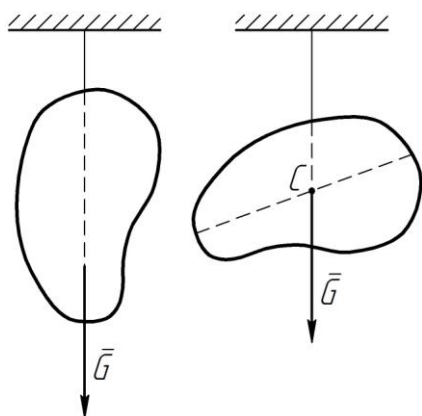


Рисунок 10.7

Основан на том, что при подвешивании тела за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса.

Для определения положения центра C тяжести плоской фигуры достаточно подвесить ее поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.

6. Метод взвешивания (экспериментальный) (рисунки 10.8–10.10)

Этот метод применяется для определения центра тяжести сложных объемных тел.

Пример. Определить центр C тяжести грузовика по заданным его геометрическим параметрам (AB , HD , d).

1. Определим вес грузовика, взвешивая поочередно переднюю ось и заднюю ось.

При этом узнаем вес, приходящийся на каждую ось грузовика ($\bar{G}_A = -\bar{N}_A$ и $\bar{G}_B = -\bar{N}_B$). Вес $\bar{G}$ всего грузовика будет равен алгебраической сумме:

$$G = G_A + G_B.$$

2. Определим плоскость действия силы $\bar{G}$.

Взвесив заднюю ось (рисунок 10.8), определили модуль реакции $\bar{N}_B$.

Тогда, составив сумму моментов всех сил относительно точки A , получим:

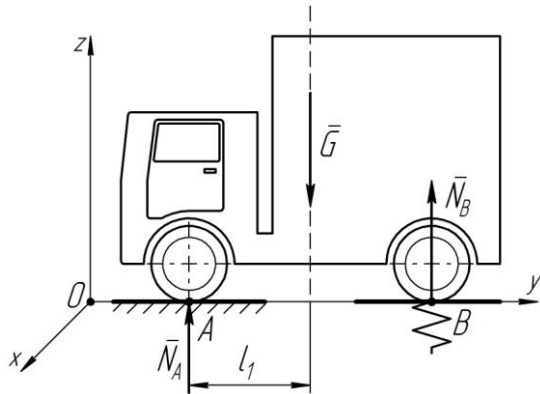


Рисунок 10.8

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = -Gl_1 + N_B AB = 0.$$

Откуда определим удаление l_1 плоскости действия силы $\bar{G}$ от передней оси грузовика (плоскость $\parallel xOz$):

$$l_1 = \frac{N_B AB}{G}.$$

3. Для определения линии действия силы $\bar{G}$ взвешиваем одну из сторон грузовика (рисунок 10.9). Тогда:

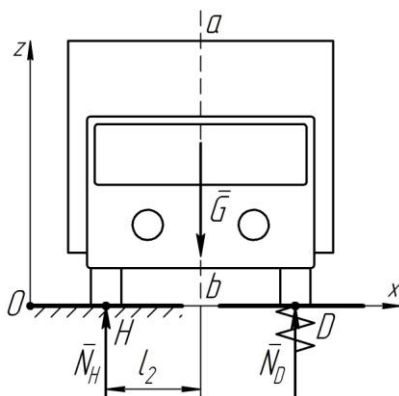


Рисунок 10.9

$$\sum M_H(\bar{P}_i) = -Gl_2 + N_D HD = 0.$$

Откуда определим удаление l_2 плоскости действия силы $\bar{G}$ от оси (линии действия $\bar{N}_H$) левой стороны грузовика (плоскость $\parallel yOz$):

$$l_2 = \frac{N_D HD}{G}.$$

Пересечение полученных плоскостей определяет прямую ab , на которой лежит центр тяжести S грузовика.

4. Для определения положения центра тяжести (точки C) на прямой ab , повторим опыт, но при этом расположим грузовик, как показано на рисунке 10.10. При этом:

$$\sum M_L(\bar{P}_i) = -Gl_3 + N_K d = 0.$$

Тогда определим удаление l_3 плоскости действия силы $\bar{G}$ от линии действия $\bar{N}_L$ (плоскость $\parallel yOz$, которая в плоскости xOz изображена линией fe):

$$l_3 = \frac{N_K d}{G}.$$

Пересечение линий ab и de определяет положение центра C тяжести.

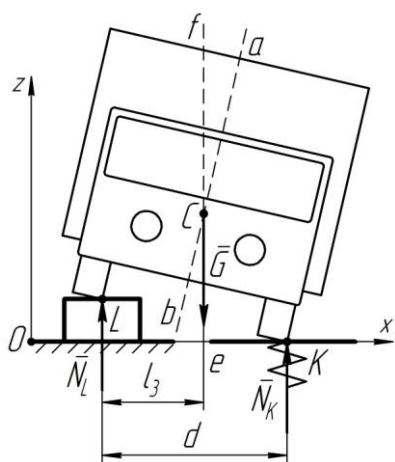


Рисунок 10.10

РАЗДЕЛ II. КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, изучающий движение материальных точек (тел) в пространстве с геометрической точки зрения, без учета их масс и сил вызывающих это движение.

Материальная точка – точка имеющая массу.

Тело конечной массы, размерами и различием движения отдельных точек которого можно пренебречь в условиях данной задачи, принимают за материальную точку.

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию – геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета. Эта линия называется **траекторией точки**.

По виду траектории все движения точки делятся на *прямолинейные* и *криволинейные*.

Изучение движения точки заключается в определении основных кинематических параметров этого движения: положение точки, ее скорость и ускорение. Эта задача решается различными способами.

Существуют три основных способа задания движения точки:

- векторный;
- координатный;
- естественный.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1.1 Векторный способ задания движения

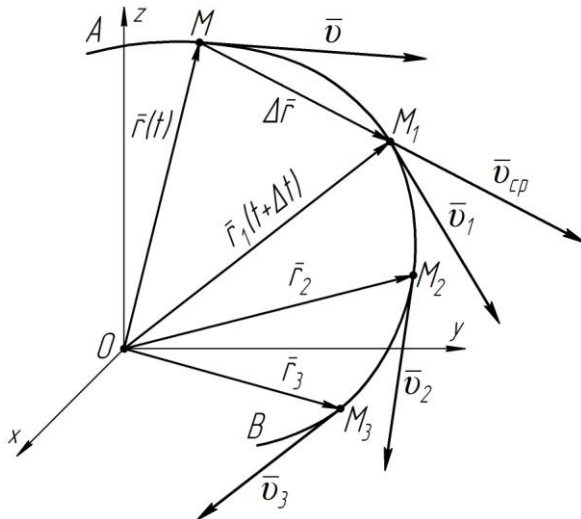


Рисунок 1.1

Положение точки M в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рисунок 1.1).

Для определения движения точки задается вектор-функция $\vec{r}$ аргумента t , которая должна быть однозначной, непрерывной и дважды дифференцируемой:

$$\vec{r} = f(t). \quad (1.1)$$

Кривая AB – траектория точки.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется **годографом** этого вектора.

Следовательно, траектория точки M является годографом ее радиус-вектора $\vec{r}$.

Скорость – векторная величина, характеризующая изменение положения точки в единицу времени.

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения M в положение M_1 (рисунок 1.1). Отношение вектора перемещения $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt представляет собой вектор средней скорости $\vec{v}_{cp}$ воображаемого движения точки по хорде MM_1 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор средней скорости $\bar{v}_{cp}$ направлен так же, как вектор $\Delta\bar{r}$. При $\Delta t \rightarrow 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону движения точки.

Для определения вектора скорости точки в момент времени t переходим к пределу:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'. \quad (1.2)$$

Таким образом, вектор скорости $\bar{v}$ определяется как первая производная от радиус-вектора $\bar{r}$ по времени t .

Вектор скорости $\bar{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

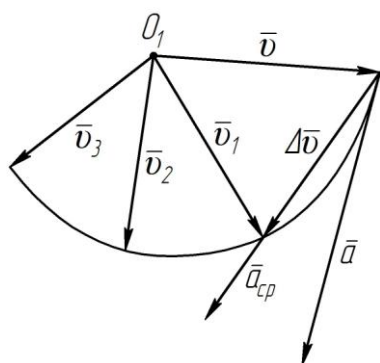


Рисунок 1.2

Годограф скорости. Ускорение

Годограф скорости – линия, которую описывают точки концов векторов скорости, отложенных из одного центра O_1 (рисунок 1.2).

Уравнения годографа скорости показаны в пункте 1.2.

Ускорение – векторная величина, характеризующая изменение скорости по величине и направлению в единицу времени.

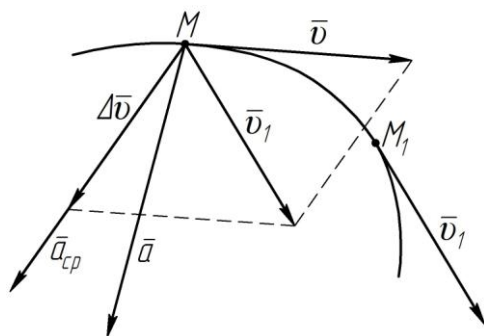


Рисунок 1.3

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась из положения M в положение M_1 , и вектор скорости изменился на величину $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$ (рисунок 1.3).

Разделив приращение вектора скорости $\Delta \bar{v}$ на промежуток времени Δt , получим вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Вектор среднего ускорения будет сонаправлен с направлением приращения вектора скорости $\Delta \bar{v}$. Покажем это на годографе скорости.

Предел, к которому стремится вектор среднего ускорения $\bar{a}_{cp}$, когда $\Delta t \rightarrow 0$, является вектором ускорения точки в данный момент времени t :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt};$$

Учитывая, что скорость является вектор-функцией от времени $\bar{v} = f(t)$ и что $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{r}'' . \quad (1.3)$$

Вектор ускорения в данный момент равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора по времени.

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен по касательной к годографу скорости в сторону вогнутости траектории.

1.2 Координатный способ задания движения

Положение точки в пространстве определяется координатами x , y , z , являющиеся функциями времени (рисунок 1.4):

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} . \quad (1.4)$$

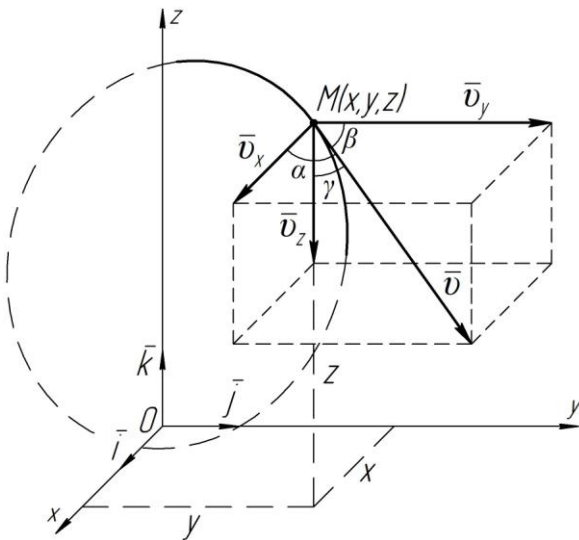


Рисунок 1.4

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$

должны быть однозначными, непрерывными и дважды дифференцируемыми.

Уравнения (1.4) являются уравнениями движения точки, а также уравнениями траектории точки в параметрической форме, так как зависят от параметра t . Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, необходимо

из уравнений (1.4) исключить параметр t :

$$t = f(x) \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= f_2[f(x)] \\ z &= f_3[f(x)] \end{aligned} \right\}.$$

Пример. Определить уравнение траектории точки, если она движется в плоскости xu по закону: $x = 4t^2$; $y = 10t^2$.

Тогда уравнение траектории определим разделив уравнения друг на друга:

$$\frac{y}{x} = \frac{10t^2}{4t^2} \Rightarrow y = 2,5x,$$

или подстановкой, выраженного из уравнения $x = 4t^2$ значения t^2 , в уравнение $y = 10t^2$:

$$x = 4t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{x}{4};$$

$$y = 10\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow y = 2,5x.$$

Координатный и векторный способы взаимосвязаны: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль соответствующих осей x, y, z ;

x, y, z – проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на неподвижные координатные оси.

Скорость точки

Согласно теореме: *проекция производной от вектора на ось, неподвижную в данной системе отсчета, равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось*, – запишем:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}; \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Проекция скорости точки на неподвижные декартовы оси координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

По модулю скорость будет равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.\tag{1.6}$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами (рисунок 1.4):

$$\cos(\bar{v}, \bar{v}_x) = \cos \alpha = \frac{v_x}{v};$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{v}_y) = \cos \beta = \frac{v_y}{v};$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{v}_z) = \cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Уравнения годографа скорости (рисунок 1.2) в параметрической форме можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_{\Gamma} = v_x(t) = \dot{x}(t); \\ y_{\Gamma} = v_y(t) = \dot{y}(t); \\ z_{\Gamma} = v_z(t) = \dot{z}(t). \end{cases}$$

Исключив параметр t , получим уравнения годографа скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(t) \\ v_y &= f_2(t) \\ v_z &= f_3(t) \end{aligned} \right\}; \quad t = f(v_x) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} v_y &= f_2[f(v_x)] \\ v_z &= f_3[f(v_x)] \end{aligned} \right\}.$$

Пример. Определить уравнение годографа скорости, если точка движется в плоскости xu по закону: $x = 5t^2 + 2t$; $y = 2t^3 - 1$.

Определим проекции скорости на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5t^2 + 2t)' = 10t + 2;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (2t^3 - 1)' = 6t^2.$$

Таким образом, получили уравнения годографа скорости в параметрической форме:

$$\begin{cases} v_x = 10t + 2; \\ v_y = 6t^2. \end{cases}$$

Исключив параметр t , получим уравнение годографа скорости, т.е. уравнение вида $v_y = f(v_x)$:

$$t = \frac{v_x - 2}{10} \quad \Rightarrow \quad v_y = 6 \left(\frac{v_x - 2}{10} \right)^2;$$

$$v_y = \frac{3(v_x - 2)^2}{50}.$$

Ускорение точки

Так как $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, а $\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$, тогда

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k}.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (1.7)$$

Проекции ускорения точки на неподвижные декартовы оси координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

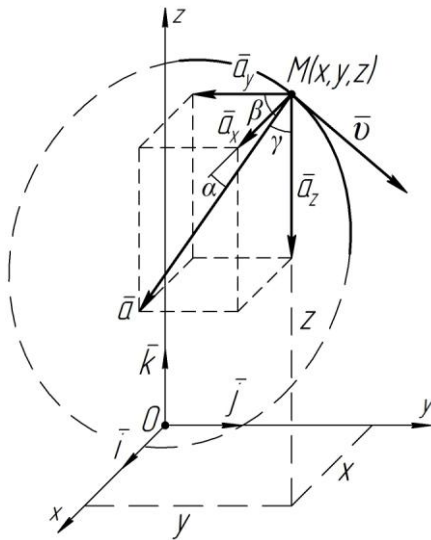


Рисунок 1.5

По модулю ускорение будет равно:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (1.8)$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами (рисунок 1.5):

$$\cos(\bar{a}, \bar{a}_x) = \cos \alpha = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{a}_y) = \cos \beta = \frac{a_y}{a};$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{a}_z) = \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

1.3 Естественный способ задания движения

Для задания движения естественным способом необходимо знать (рисунок 1.6):

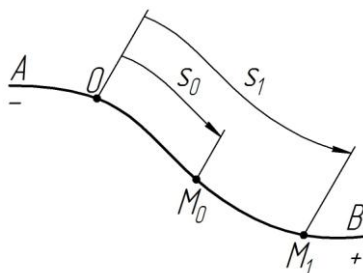


Рисунок 1.6

1) траекторию точки (AB), т.е. уравнение траектории $x = f(y, z)$;

2) начало отсчета (точка O) с указанием направления движения («+» и «-»);

3) закон движения $s = f(t)$ – дуговая координата в функции времени, которая должна быть однозначна, непрерывна и дважды дифференцируема.

Следует различать путь и дуговую координату.

Дуговая координата определяет положение точки на траектории относительно начала отсчета (точки O , см. рисунок 1.6).

Путь – расстояние пройденное точкой за некоторый промежуток времени вдоль траектории.

Допустим, за время t_1 точка переместилась из начального положения M_0 в положение M_1 (рисунок 1.5), а за время t_2 из M_1 в точку O (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Отличие дуговой координаты от пути

Время	Перемещение	Путь	Дуговая координата
t_0	0	0	$s = s_0 = OM_0$
t_1	$M_0 \rightarrow M_1$	M_0M_1	$s = s_1 = OM_1$
t_2	$M_1 \rightarrow O$	M_1O	$s = 0$
$t_1 + t_2$	$M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow O$	$M_0M_1 + M_1O$	$s = 0$

При естественном способе задания движения вводится система взаимно перпендикулярных осей (τ , n , b), движущихся вместе с точкой и меняющих свое положение в пространстве – *естественная система координат* (рисунок 1.7).

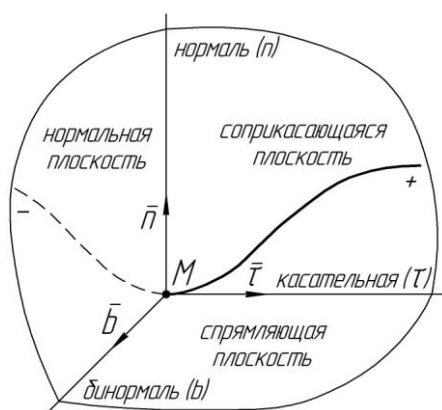


Рисунок 1.7

Совокупность взаимно перпендикулярных плоскостей, определяемых осями этой системы, называют *подвижным трехгранником*.

$\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ – единичные векторы (орты) соответствующих осей:

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}.$$

Орт $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты.

Орт $\bar{n}$ направлен перпендикулярно касательной оси τ во внутрь вогнутой части траектории.

Орт $\bar{b}$ перпендикулярен $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$, и направлен в ту сторону, откуда виден кратчайший переход от $\bar{\tau}$ к $\bar{n}$ против хода часовой стрелки.

При движении точки, траектория всегда находится в соприкасающейся плоскости, образованной осями τ и n .

Скорость точки

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}. \quad (1.9)$$

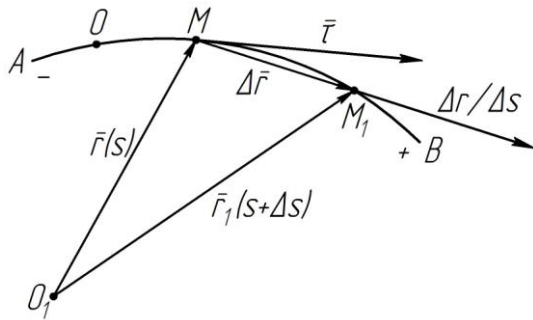


Рисунок 1.8

Вектор $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$ направлен также, как вектор $\Delta\bar{r}$ (рисунок 1.8). При $\Delta s \rightarrow 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону увеличения дуговой координаты s . Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\overline{MM_1}}{MM_1} = 1.$$

Таким образом, вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты. Вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ является ортом $\bar{\tau}$ этого направления:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}.$$

Тогда уравнение (1.9) примет вид:

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}.$$

Производная $\frac{ds}{dt}$ есть проекция вектора скорости на касательную ось τ , т.е. определяет алгебраическую величину скорости:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.10)$$

Ускорение точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \bar{\tau} \right) = \frac{d}{dt} (v \bar{\tau}) = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + v \frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Производная $\frac{dv}{dt}$ есть проекция вектора ускорения на касательную ось τ :

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}} \text{ — касательное (тангенциальное) ускорение, м/с}^2.$$

$$v \frac{d\bar{\tau}}{dt} = v \frac{d\bar{\tau}}{dt} \frac{ds}{ds} = v \frac{ds}{dt} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = v^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds}; \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{K} = \frac{1}{\rho} \bar{n},$$

где $\bar{K}$ — вектор кривизны траектории;

ρ — мгновенный радиус кривизны траектории, м.

$$v \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}.$$

Отношение $\frac{v^2}{\rho}$ есть проекция вектора ускорения на нормальную ось n :

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \text{ — нормальное (центростремительное) ускорение, м/с}^2.$$

Проекция вектора ускорения $\bar{a}$ на бинормальную ось b равна нулю, так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости.

Тогда вектор полного ускорения будет равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}.$$

По модулю ускорение равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (1.11)$$

На рисунке 1.9 показаны векторы касательного $\vec{a}_\tau$, нормального $\vec{a}_n$ и полного $\vec{a}$ ускорений движущейся точки M .

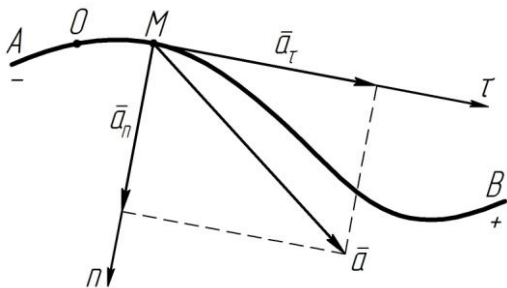


Рисунок 1.9

Касательное ускорение существует только при неравномерном движении точки и характеризует изменение скорости по величине.

Нормальное ускорение существует только при криволинейном движении точки и характеризует изменение скорости по направлению.

Касательное ускорение равно нулю, когда:

- 1) скорость постоянна по модулю;
- 2) скорость достигает экстремальных значений.

Нормальное ускорение равно нулю, когда:

- 1) скорость равна нулю;
- 2) траектория движения точки – прямая;
- 3) движущаяся точка совпадает с точкой перегиба траектории.

1.4 Взаимосвязь естественного и координатного способов

Скорость при естественном способе задания движения определяется уравнением:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

из которого, выразив дуговую координату s (при $s_0 = 0$), получим:

$$\int ds = \int v dt;$$

$$s = \int v dt.$$

Так как скорость в координатном способе задания движения равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Тогда дуговая координата определится выражением:

$$s = \int \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt. \quad (1.12)$$

Пример. Точка движется в плоскости xu по закону: $x = 2t^2$; $y = 1,5t^2$.

Определить уравнение дуговой координаты $s = f(t)$.

$$v_x = (2t^2)' = 4t;$$

$$v_y = (1,5t^2)' = 3t.$$

$$s = \int \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt;$$

$$s = \int \sqrt{(4t)^2 + (3t)^2} dt;$$

$$s = 5 \int t dt.$$

После интегрирования получим уравнение дуговой координаты в функции времени:

$$s = 2,5t^2 + C.$$

Вычисление a_τ в заданный момент времени t

Так как касательное ускорение есть производная от скорости по времени, то подставив выражение для определения скорости в координатном способе задания движения, получим:

$$\begin{aligned}
 a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right); \\
 a_\tau &= \frac{1}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2); \\
 a_\tau &= \frac{1}{2v} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2); \\
 a_\tau &= \frac{1}{2v} \left(2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right); \\
 a_\tau &= \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}. \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Вычисление a_n в заданный момент времени t

Ускорение материальной точки $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, откуда $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

С учетом того, что $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}$, получим:

$$a_n = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - \frac{(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z)^2}{v^2}}.$$

Приведя к общему знаменателю подкоренное выражение, расписав квадрат суммы $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ и заменив в числителе v^2 на $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, получим девять слагаемых, которые можно представить в виде трех выражений вида $a^2 - 2ab + b^2$ и заменить на $(a - b)^2$:

$$a_n = \frac{\sqrt{(\nu_x a_y - \nu_y a_x)^2 + (\nu_x a_z - \nu_z a_x)^2 + (\nu_y a_z - \nu_z a_y)^2}}{\nu}. \quad (1.14)$$

Если материальная точка движется, к примеру, в плоскости xy , то нормальное ускорение будет равно:

$$a_n = \frac{|\nu_x a_y - \nu_y a_x|}{\nu}. \quad (1.15)$$

2 ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоскопараллельное (плоское);
- сферическое;
- общий случай движения твердого тела.

Из них простейшими являются *поступательное* и *вращательное*.

2.1 Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение – движение, при котором любая прямая, проведенная в теле остается параллельной своему первоначальному положению.

Поступательное движение характеризуется:

- линейным перемещением ($s, \bar{r}$);
- скоростью ($\bar{v}$);
- ускорением ($\bar{a}$).

Теорема. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Проведем из произвольного неподвижного центра O в точки A, B, A_1, B_1 радиус-векторы $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_{A_1}, \vec{r}_{B_1}$ (рисунок 2.1). Из $\triangle OAB$ устанавливаем равенство

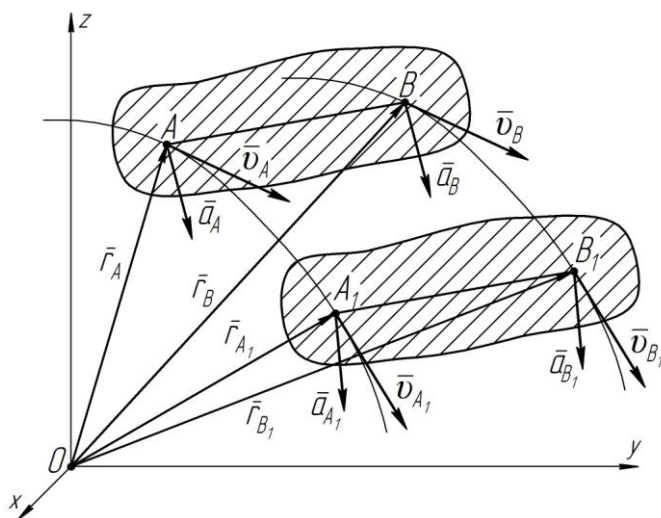


Рисунок 2.1

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB},$$

которое будет справедливым во все время движения тела.

Определим вектор скорости точки B как производную от радиус-вектора этой точки по времени:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Так как вектор $\overline{AB}$ постоянен по величине и направлению, то $\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$, тогда:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A,$$

т.е. скорости точек A и B геометрически равны.

Определим вектор ускорения точки B как производную от вектора скорости этой точки по времени:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A,$$

т.е. ускорения точек A и B геометрически равны.

Установленные свойства позволяют свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки этого тела, т.е. к задаче кинематики точки. Обычно рассматривают движение центра тяжести этого тела.

2.2 Вращательное движение твердого тела

Вращательное движение – такое движение, при котором все точки тела, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, называемой осью вращения, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.

При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Вращательное движение характеризуется *углом поворота φ* , *угловой скоростью ω* и *угловым ускорением ε* .

Для задания вращательного движения необходимо знать угол поворота φ в функции времени t , т.е. *уравнение вращательного движения*:

$$\varphi = f(t). \quad (2.1)$$

Угловая скорость – величина, характеризующая изменение угла поворота φ в единицу времени, $[\omega] = [\text{с}^{-1}]$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.2)$$

Угловое ускорение – величина, характеризующая изменение угловой скорости ω по величине в единицу времени, $[\varepsilon] = [\text{с}^{-2}]$:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2.3)$$

Угловую скорость и угловое ускорение удобно представлять в виде скользящих векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ лежащих вдоль оси вращения (рисунок 2.2 а, б).

Вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту сторону, откуда видно вращение тела (по ω), происходящее против хода часовой стрелки.

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется аналогично.

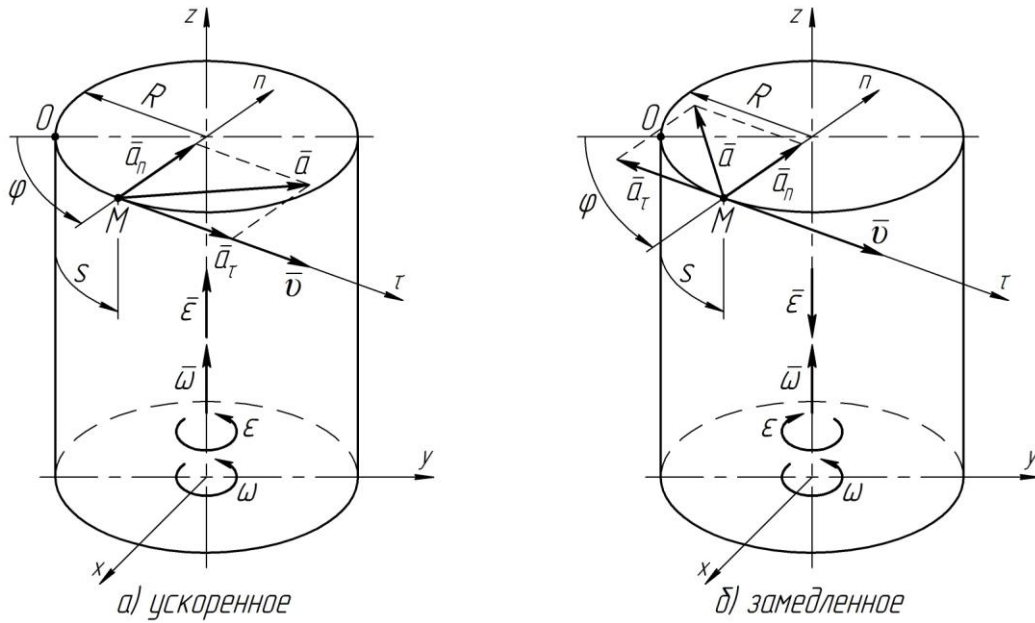


Рисунок 2.2

Если векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ сонаправлены, то вращение ускоренное (рисунок 2.2 а).

Если векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ противоположно направлены, то вращение замедленное (рисунок 2.2 б).

*Определение линейных скорости и ускорения точки М
вращающегося тела (рисунок 2.2 а, б)*

$$\text{Так как } s = \varphi R, \text{ то } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\varphi R)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R,$$

где R – расстояние от рассматриваемой точки вращающегося тела до оси вращения, м.

Скорость любой точки вращающегося тела равняется произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения, т.е.:

$$v = \omega R. \quad (2.4)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R. \quad (2.5)$$

Касательное ускорение равняется произведению углового ускорения тела на расстояние от рассматриваемой точки вращающегося тела до оси вращения.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.6)$$

Нормальное ускорение равняется произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от рассматриваемой точки вращающегося тела до оси вращения.

Тогда полное ускорение соответственно определится:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.7)$$

3 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Плоскопараллельное движение (плоское) – движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Исходя из этого, движение тела можно описать движением плоской фигуры, получающейся в сечении этого тела одной из параллельных плоскостей.

В свою очередь, движение фигуры в своей плоскости можно описать движением произвольного отрезка AB , принадлежащего этой фигуре.

В общем случае плоское движение представляется совокупностью поступательного движения вместе с некоторым полюсом, и вращательного – поворот тела вокруг этого полюса.

Таким образом, плоское движение тела определяется уравнениями:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

в которых $x_A = f_1(t)$ и $y_A = f_2(t)$ – характеризуют поступательную часть движения, а $\varphi = f_3(t)$ – вращательную.

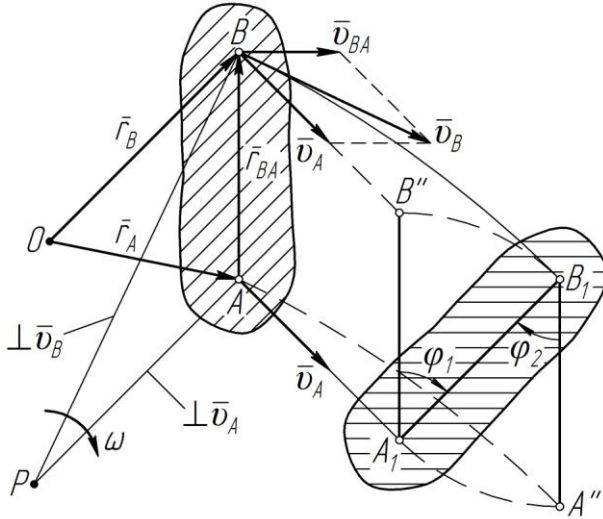


Рисунок 3.1

Допустим, что тело переместилось из положения AB в положение A_1B_1 (рисунок 3.1).

При этом поступательная часть движения зависит от выбора полюса, а вращательная, т.е. угол поворота (по величине и направлению), – не зависит ($\varphi_1 = \varphi_2$).

Если за полюс взять точку A , то положение произвольной точки B определится равенством

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{BA}. \quad (3.2)$$

Определим вектор скорости точки B как производную от радиус-вектора $\bar{r}_B$ по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_B}{dt} &= \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{BA}}{dt}; \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вектор скорости некоторой точки B плоской фигуры равен геометрической сумме скорости полюса (точки A) и скорости этой точки (точки B) в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

$\bar{v}_{BA}$ – вектор относительной (вращательной) скорости точки B вокруг полюса A .

Вектор скорости $\bar{v}_{BA}$ всегда направлен перпендикулярно $\overline{AB}$ в сторону угловой скорости ω и определяется векторным произведением:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}. \quad (3.4)$$

По модулю относительная скорость $\bar{v}_{BA}$ будет равна:

$$v_{BA} = |\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}| = \omega r_{BA} \sin(\underbrace{\bar{\omega}, \bar{r}_{BA}}_{90^\circ});$$

$$v_{BA} = \omega l_{AB}, \quad (3.5)$$

где l_{AB} – длина отрезка AB , м.

Зачастую удобно пользоваться следующей **теоремой** (рисунок 3.2):

При плоском движении проекции абсолютных скоростей двух точек плоской фигуры на линию, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

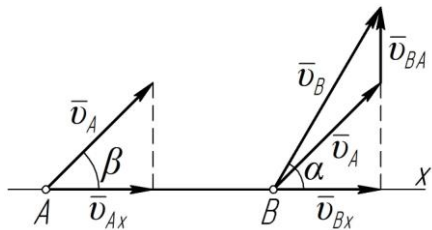


Рисунок 3.2

Так как вектор $\bar{v}_{BA}$ всегда перпендикулярен AB , то проецируется на эту линию (ось x) в точку. Тогда, спроецировав уравнение (3.3) на линию AB , получим:

$$v_{Bx} = v_{Ax};$$

$$v_A \cos \beta = v_B \cos \alpha.$$

В любой момент движения плоской фигуры, в ее плоскости существует точка скорость которой, в данный момент времени, равна нулю. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей (МЦС)**.

Для определения положения МЦС необходимо восстановить перпендикуляры к векторам абсолютных скоростей точек плоской фигуры, проведенных из этих точек. На пересечении этих линий будет находиться МЦС (точка P), т.е. точка, относительно которой в данный момент времени тело совершает мгновенный поворот. Мгновенная угловая скорость тела соответственно определится:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (3.6)$$

3.1 Различные случаи определения положения МЦС

Случай 1 (рисунок 3.3). Восстанавливаем перпендикуляры из этих точек A и B к векторам скоростей этих точек, на пересечении которых находится МЦС (точка P).

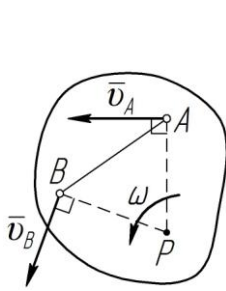


Рисунок 3.3

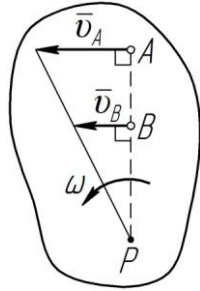


Рисунок 3.4

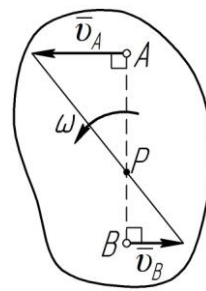


Рисунок 3.5

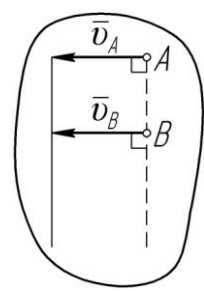


Рисунок 3.6

Случаи 2 и 3 (рисунки 3.4 и 3.5). Если векторы скоростей точек A и B параллельны между собой, то для определения МЦС должны быть известны их модули. Проводим линии через точки A и B , перпендикулярные векторам скоростей и линию соединяющую концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ – на их пересечении будет находиться МЦС (точка P).

Случай 4 (рисунок 3.6). Если векторы скоростей точек A и B плоской фигуры равны по модулю и параллельны между собой, то МЦС находится в бесконечности ($AP = \infty$; $BP = \infty$), а мгновенная угловая скорость равна:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0,$$

т.е. тело совершает мгновенное поступательное движение.

Случай 5 (рисунок 3.7). Если тело катится без скольжения по некоторой неподвижной плоскости, то МЦС (точка P) будет находиться в точке соприкосновения с этой неподвижной плоскостью. Мгновенная угловая скорость тела определится

соответственно: $\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_D}{DP}$.

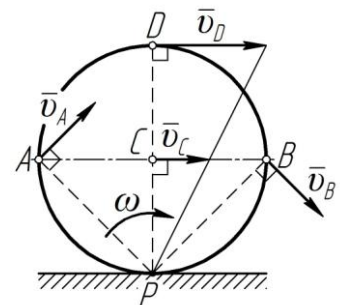


Рисунок 3.7

3.2 Теорема об ускорениях точек плоской фигуры

Определим ускорение произвольной точки B плоской фигуры, взяв за полюс точку A (рисунок 3.8). Для этого уравнение (3.3) представим в виде:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}. \quad (3.7)$$

Производная по времени от выражения (3.7) будет равна:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA})}{dt};$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{BA}}{dt}.$$

Так как $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ и $\frac{d\bar{r}_{BA}}{dt} = \bar{v}_{BA}$, то:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA},$$

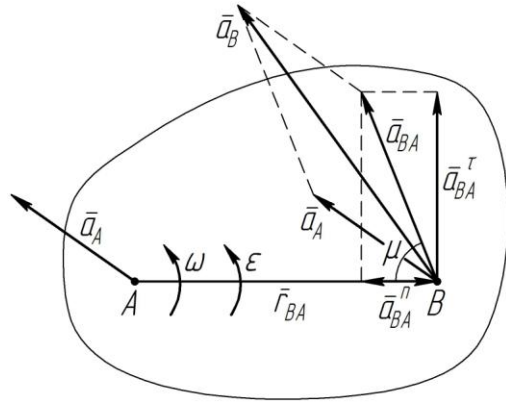


Рисунок 3.8

где $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau}$ – вращательное ускорение точки B во вращении вокруг полюса A , по модулю равное:

$$a_{BA}^{\tau} = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{BA}| = \varepsilon r_{BA} \sin(\underbrace{\bar{\varepsilon}, \bar{r}_{BA}}_{90^\circ}) = \varepsilon l_{AB}; \quad (3.8)$$

$\bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n$ – центростремительное ускорение точки B во вращении вокруг полюса A , по модулю равное:

$$a_{BA}^n = |\bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}| = \omega v_{BA} \sin(\underbrace{\bar{\omega}, \bar{v}_{BA}}_{90^\circ}) = \omega v_{BA} = \omega^2 l_{AB}. \quad (3.9)$$

Тогда ускорение точки B определится уравнением:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n, \quad (3.10)$$

где $\bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n = \bar{a}_{BA}$ – ускорение точки B в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса A , по модулю равное:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^n)^2} = \sqrt{(\varepsilon l_{AB})^2 + (\omega^2 l_{AB})^2} = l_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.11)$$

Таким образом, ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \quad (3.12)$$

Угол μ между векторами $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}$ определится из равенства:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3.13)$$

3.3 Мгновенный центр ускорений

При плоском движении тела в плоскости его движения существует точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений** (МЦУ)

Положение МЦУ можно определить, если известны: ускорение какой-либо точки тела, а также величины угловой скорости и углового ускорения этого тела.

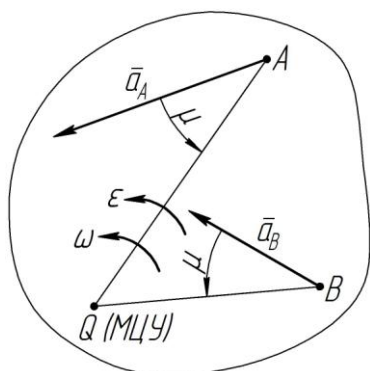


Рисунок 3.9

Для этого, используя формулу $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$, вычисляют величину угла μ . Далее, под углом μ к вектору известного абсолютного ускорения $\bar{a}_A$ точки A, в сторону углового ускорения ε , откладывают отрезок AQ (рисунок 3.9), равный:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (3.14)$$

Ускорение произвольной точки B этого тела в данный момент времени равно ее ускорению во вращательном движении вокруг МЦУ, при этом ускорения точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ},$$

а направлены они под тем же углом μ к прямым (AQ и BQ), соединяющим эти точки и МЦУ.

4 СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

4.1 Относительное, переносное и абсолютное движения точки

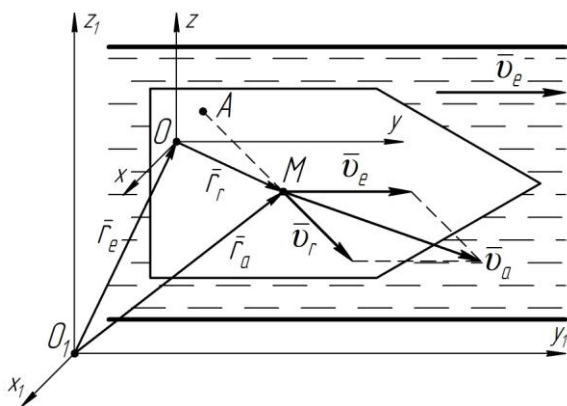


Рисунок 4.1

Сложным называется движение, при котором точка (тело) одновременно участвует в двух или более движениях.

Например, катящийся шар (из положения A в положение M) по палубе плывущего парохода (рисунок 4.1).

Движение рассматриваемой точки (тела) относительно подвижной системы отсчета называется **относительным**. Характеризуется траекторией относительного движения, относительной скоростью $\bar{v}_r$, относительным ускорением $\bar{a}_r$.

Движение подвижной системы отсчета и неизменно связанной с ней рассматриваемой точкой (тела) относительно неподвижной системы отсчета называется **переносным**. Характеризуется траекторией переносного движения, переносной скоростью $\bar{v}_e$, переносным ускорением $\bar{a}_e$.

Движение рассматриваемой точки (тела) относительно неподвижной системы отсчета называется **абсолютным**. Характеризуется траекторией абсолютного движения, абсолютной скоростью $\bar{v}_a$, абсолютным ускорением $\bar{a}_a$.

Абсолютное движение складывается из относительного и переносного:

$$\bar{r}_a = \bar{r}_r + \bar{r}_e. \quad (4.1)$$

4.2 Теорема о сложении скоростей

Рассмотрим сложное движение точки M в случае, когда подвижная система отсчета связана с твердым телом, совершающим произвольное движение в пространстве (рисунок 4.2). Неподвижную систему отсчета обозначим $O_1x_1y_1z_1$, подвижную – $Oxyz$.

Вектор абсолютной скорости точки M определится:

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_a}{dt};$$

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_r}{dt} + \frac{d\bar{r}_e}{dt}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим отдельно производные $\frac{d\bar{r}_r}{dt}$ и $\frac{d\bar{r}_e}{dt}$.

Представив $\bar{r}_r$ в виде $(x_r\bar{i} + y_r\bar{j} + z_r\bar{k})$,

получим:

$$\frac{d\bar{r}_r}{dt} = \left(\frac{dx_r}{dt} \bar{i} + \frac{dy_r}{dt} \bar{j} + \frac{dz_r}{dt} \bar{k} \right) + \left(\frac{d\bar{i}}{dt} x_r + \frac{d\bar{j}}{dt} y_r + \frac{d\bar{k}}{dt} z_r \right). \quad (4.3)$$

В правой части уравнения (4.3) первое слагаемое представляет собой относительную скорость:

$$\left(\frac{dx_r}{dt} \bar{i} + \frac{dy_r}{dt} \bar{j} + \frac{dz_r}{dt} \bar{k} \right) = \bar{v}_{rx} \bar{i} + \bar{v}_{ry} \bar{j} + \bar{v}_{rz} \bar{k} = \bar{v}_r. \quad (4.4)$$

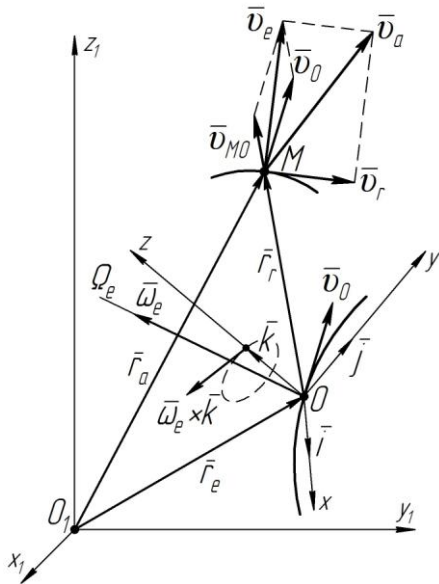


Рисунок 4.2

Орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ оставаясь неизменными по модулю, вращаются вокруг мгновенной оси Ω_e с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$, поэтому производная от соответствующего орта по времени определяет вращательную скорость его конца. Вектор этой скорости будет равен векторному произведению вектора $\bar{\omega}_e$ и вектора соответствующего орта:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}. \quad (4.5)$$

Тогда, в правой части уравнения (4.3) второе слагаемое будет равно:

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt} x_r + \frac{d\bar{j}}{dt} y_r + \frac{d\bar{k}}{dt} z_r \right) = \bar{\omega}_e \times (x_r \bar{i} + y_r \bar{j} + z_r \bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}_r. \quad (4.6)$$

С учетом (4.4) и (4.6), производная $\frac{d\bar{r}_r}{dt}$, определяемая выражением (4.3), будет равна:

$$\frac{d\bar{r}_r}{dt} = \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_r, \quad (4.7)$$

где $\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r = \bar{v}_{MO}$ – скорость точки M при ее вращении вокруг мгновенной оси Ω_e , проходящей через полюс O , в переносном движении.

Так как вектор $\bar{r}_e$ связан с неподвижной системой отсчета $O_1x_1y_1z_1$, то $\frac{d\bar{r}_e}{dt} = \bar{v}_O$ – скорость полюса O в переносном движении, м/с.

Подставляя (4.7) в (4.2), получим:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_r + \frac{d\bar{r}_e}{dt}; \quad (4.8)$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{MO} + \bar{v}_O, \quad (4.9)$$

где $\bar{v}_{MO} + \bar{v}_O = \bar{v}_e$ – переносная скорость.

Тогда уравнение (4.9) примет вид:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \quad (4.10)$$

Таким образом, *абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей.*

Модуль абсолютной скорости будет равен:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\bar{v}_r, \bar{v}_e)}. \quad (4.11)$$

4.3 Теорема о сложении ускорений

Вектор абсолютного ускорения точки M определится:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt}.$$

Тогда уравнение (4.8) примет вид:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d(\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r)}{dt} + \frac{d^2 \bar{r}_e}{dt^2}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим производные $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$ и $\frac{d(\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r)}{dt}$, входящие в уравнение (4.12), отдельно.

Представив $\bar{v}_r$ в виде $\bar{v}_{rx}\bar{i} + \bar{v}_{ry}\bar{j} + \bar{v}_{rz}\bar{k}$, производная $\frac{d\bar{v}_r}{dt}$, с учетом (4.5), будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_r}{dt} &= \frac{d(\bar{v}_{rx}\bar{i} + \bar{v}_{ry}\bar{j} + \bar{v}_{rz}\bar{k})}{dt}; \\ \frac{d\bar{v}_r}{dt} &= \left(\frac{d\bar{v}_{rx}}{dt}\bar{i} + \frac{d\bar{v}_{ry}}{dt}\bar{j} + \frac{d\bar{v}_{rz}}{dt}\bar{k} \right) + \left(\frac{d\bar{i}}{dt}\bar{v}_{rx} + \frac{d\bar{j}}{dt}\bar{v}_{ry} + \frac{d\bar{k}}{dt}\bar{v}_{rz} \right); \\ \frac{d\bar{v}_r}{dt} &= (\bar{a}_{rx}\bar{i} + \bar{a}_{ry}\bar{j} + \bar{a}_{rz}\bar{k}) + \bar{\omega}_e \times (\bar{v}_{rx}\bar{i} + \bar{v}_{ry}\bar{j} + \bar{v}_{rz}\bar{k}); \\ \frac{d\bar{v}_r}{dt} &= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\bar{a}_r$ – относительное ускорение точки M .

Рассмотрим производную по времени от векторного произведения $\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r$:

$$\frac{d(\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r)}{dt} = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{r}_r + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{r}_r}{dt}.$$

Так как $\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} = \bar{\varepsilon}_e$, а производная $\frac{d\bar{r}_r}{dt}$ согласно (4.7) равна $\bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_r$,

получим:

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r)}{dt} &= \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r}_r); \\ \frac{d(\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r)}{dt} &= \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r). \end{aligned} \quad (4.14)$$

С учетом (4.13) и (4.14) уравнение (4.12) примет вид:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r) + \frac{d^2 \bar{r}_e}{dt^2},$$

или в такой последовательности

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \frac{d^2 \bar{r}_e}{dt^2} + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r) + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r), \quad (4.15)$$

где $\frac{d^2 \bar{r}_e}{dt^2} = \bar{a}_O$ – ускорение полюса O в переносном движении;

$\bar{\varepsilon}_e \times \bar{r}_r = \bar{a}_{MO}^r$ – вращательное ускорение точки M во вращении вокруг мгновенной оси Ω_e , проходящей через полюс O , в переносном движении;

$\bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}_r) = \bar{a}_{MO}^n$ – центростремительное ускорение точки M во вращении вокруг мгновенной оси Ω_e , проходящей через полюс O , в переносном движении;

$2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = \bar{a}_k$ – кориолисово ускорение.

С учетом этого получим:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^r + \bar{a}_{MO}^n + \bar{a}_k, \quad (4.16)$$

где $\bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^r + a_{MO}^n = \bar{a}_e$ – переносное ускорение точки M .

Тогда уравнение (4.16) примет вид:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_\kappa. \quad (4.17)$$

Равенство (4.17) выражает теорему Кориолиса о сложении ускорений: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного переносного и кориолисова ускорений.*

Модуль абсолютного ускорения, в общем случае, определяется методом проекций. Для этого определяем алгебраические суммы проекций всех ускорений на координатные оси:

$$a_{ax} = a_{rx} + a_{ex} + a_{\kappa x};$$

$$a_{ay} = a_{ry} + a_{ey} + a_{\kappa y};$$

$$a_{az} = a_{rz} + a_{ez} + a_{\kappa z}.$$

Тогда модуль абсолютного ускорения будет равен:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}.$$

Модуль и направление вектора кориолисова ускорения

Кориолисово (поворотное) ускорение $\bar{a}_\kappa$, стремится изменить направление вектора относительной скорости $\bar{v}_r$ в направлении переносной угловой скорости ω_e .

По модулю кориолисово ускорение будет равно:

$$a_\kappa = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r).$$

Чтобы найти направление вектора Кориолисова ускорения необходимо мысленно перенести вектор переносной угловой скорости $\bar{\omega}_e$ в рассматриваемую точку M , а затем следовать одному из правил (рисунок 4.2).

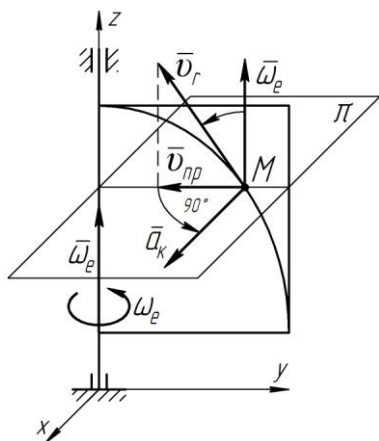


Рисунок 4.2

Правило векторной алгебры

Вектор $\bar{a}_k$ перпендикулярен векторам $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$ и направлен в ту сторону, откуда виден кратчайший переход от $\bar{\omega}_e$ к $\bar{v}_r$ против хода часовой стрелки.

Правило Жуковского

Вектор относительной скорости $\bar{v}_r$ проецируем в плоскость π перпендикулярную оси переносного вращения z и поворачиваем полученную проекцию $\bar{v}_{pr}$ в сторону переносного вращения (по ω_e) на 90° .

Кориолисово ускорение равно нулю, если:

- 1) $\omega_e = 0$, т.е. переносное движение поступательно;
- 2) $v_r = 0$, т.е. относительная скорость в данный момент времени равна нулю;
- 3) $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 0$, т.е. в случае когда $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 0$ или $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 180^\circ$, иначе – когда вектор $\bar{v}_r \parallel \bar{\omega}_e$.

РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА

Динамика – раздел механики, изучающий движение материальных точек (тел) в зависимости от действующих на них сил.

Динамика делится на два подраздела:

- динамика материальной точки;
- динамика механической системы.

1 ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 Закон инерции (Закон Галилея-Ньютона)

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние:

$$\bar{v} = \text{const}.$$

Первый закон характеризует стремление тела сохранить неизменной скорость своего движения или, иначе, сохранить приобретенное им ранее механическое движение. Это свойство тела называется его **инертностью**.

Система отсчета, для которой справедлив закон инерции, называется **инерциальной** и условно считается не подвижной.

1.2 Закон пропорциональности силы и ускорения

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе, имеет одинаковое с ней направление и обратно пропорционально ее массе (рисунок 1.1):

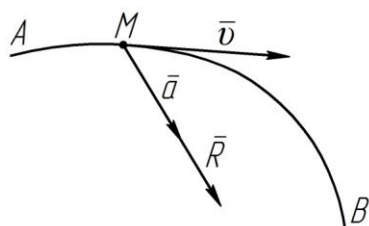


Рисунок 1.1

$$\bar{a} = \frac{\bar{R}}{m};$$

$$m\bar{a} = \bar{R}, \quad (1.1)$$

где $\bar{R}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, Н;

$\bar{a}$ – вектор ускорения, м/с²;

m – масса, кг.

Выражение (1.1) является **основным уравнением динамики**.

Масса – мера инертности тела в поступательном движении. От латинского слова «*inertia*» – лень.

Если на данное тело действует сила, то обязательно должно существовать другое тело, в результате взаимодействия с которым появляется эта сила.

Величина действующих сил определяется физическими законами взаимодействия тел (законы трения, тяготения, деформации, сопротивления среды).

Статический эффект проявления силы – деформация.

Динамический эффект проявления силы – ускорение.

1-й и 2-й законы справедливы только в инерциальной системе отсчета.

1.3 Закон равенства действия и противодействия

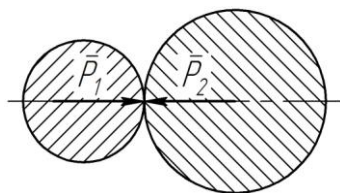


Рисунок 1.2

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие:

$$\bar{P}_1 = -\bar{P}_2.$$

Силы не уравновешены, так как приложены к разным телам (рисунок 1.2).

$$\begin{cases} P_1 = m_1 a_1; \\ P_2 = m_2 a_2, \end{cases} \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow a_2 = a_1 \frac{m_1}{m_2}.$$

1.4 Закон независимости действия сил

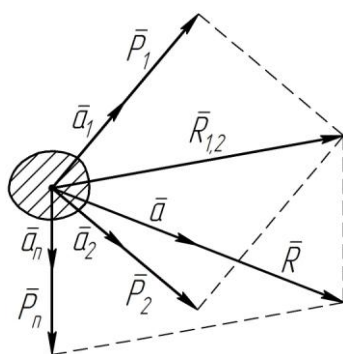


Рисунок 1.3

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщала бы ей одна сила, равная их геометрической сумме (рисунок 1.3):

$$\bar{a}_i = \frac{\bar{P}_i}{m}; \quad \bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \frac{\bar{R}}{m}.$$

3-й и 4-й законы справедливы в любой системе отсчета.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Пусть свободная материальная точка массой m движется по пространственной кривой под действием сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$. Тогда согласно уравнению (1.1):

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i = \bar{R}. \quad (2.1)$$

Так как $\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$, тогда получим дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{R}. \quad (2.2)$$

Спроецируем уравнение (2.1) на декартовы оси координат (рисунок 2.1):

$$ma_x = R_x; \quad ma_y = R_y; \quad ma_z = R_z.$$

Так как $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$; $a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$; $a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$, тогда получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x; \\ m\ddot{y} = R_y; \\ m\ddot{z} = R_z. \end{cases} \quad (2.3)$$

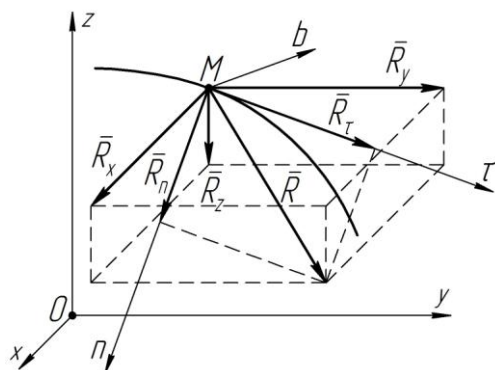


Рисунок 2.1

Спроецируем уравнение (2.1) на естественные оси координат (рисунок 2.1):

$$ma_\tau = R_\tau; \quad ma_n = R_n; \quad ma_b = R_b.$$

$$\text{Так как } a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

тогда получим дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественной системе координат:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = R_\tau; \\ m \frac{v^2}{\rho} = R_n; \\ 0 = R_b. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1 Первая (прямая) задача динамики

Зная массу и закон движения объекта (точка, тело, система тел) определить модуль и направление равнодействующей сил, вызывающих это движение.

Дано: m ; $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$.

Определить: $\bar{R}$.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x; \\ m\ddot{y} = R_y; \\ m\ddot{z} = R_z. \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Направление вектора $\bar{R}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{m\ddot{x}}{m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

где α – угол между векторами $\bar{R}$ и $\bar{R}_x$, град.;

β – угол между векторами $\bar{R}$ и $\bar{R}_y$, град.;

γ – угол между векторами $\bar{R}$ и $\bar{R}_z$, град.

2.2 Вторая (обратная) задача динамики

Зная массу и силы, действующие на объект, а также начальные условия, определить закон его движения.

Дано: m ; $\bar{R}$.

Определить: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x; \\ m\ddot{y} = R_y; \\ m\ddot{z} = R_z. \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{R_x}{m}; \quad \ddot{y} = \frac{R_y}{m}; \quad \ddot{z} = \frac{R_z}{m}. \quad (2.5)$$

Сила может быть постоянна по модулю и направлению или быть функцией нескольких переменных $\bar{R} = f(t, \bar{r}, \bar{v})$ (времени, положения точки в пространстве, скорости).

Проинтегрировав дважды полученные дифференциальные уравнения (2.5) и определив постоянные интегрирования ($C_1, C_2, \dots, C_n$), получим кинематические уравнения движения материальной точки – $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$.

2.3 Интегрирование дифференциальных уравнений прямолинейного движения

Условие прямолинейности движения

Движение материальной точки будет прямолинейным, когда действующая на нее сила (или равнодействующая приложенных сил) имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент времени равна нулю или направлена вдоль силы.

1. $\bar{P} = \text{const}$ (сила тяжести вблизи поверхности земли)

$$m\bar{a} = \bar{P}; \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}; \quad d\bar{v} = \frac{\bar{P}}{m} dt; \quad \int_{(v)} d\bar{v} = \frac{\bar{P}}{m} \int_{(t)} dt.$$

2. $\bar{P} = f(t)$ (силы, при работе машин или механизмов)

$$m\bar{a} = \bar{P}(t); \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}(t); \quad d\bar{v} = \frac{\bar{P}(t)}{m} dt; \quad \int_{(v)} d\bar{v} = \frac{1}{m} \int_{(t)} \bar{P}(t) dt.$$

3. $P = f(x, y, z)$ (сила тяготения, сила упругости)

$$m\bar{a} = \bar{P}(x, y, z).$$

К примеру, в проекции на ось x : $m \frac{dv_x}{dt} = P_x(x).$

Умножив полученное равенство на dx получим:

$$m \frac{dv_x}{dt} dx = P_x(x) dx; \quad m v_x dv_x = P_x(x) dx; \quad v_x dv_x = \frac{P_x(x)}{m} dx;$$

$$\int_{(v)} v_x dv_x = \frac{1}{m} \int_{(x)} P_x(x) dx.$$

4. $\bar{P} = f(\bar{v})$ (силы сопротивления среды)

$$m\bar{a} = \bar{P}(\bar{v}); \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}(\bar{v}); \quad \frac{d\bar{v}}{\bar{P}(\bar{v})} = \frac{dt}{m}; \quad \int_{(v)} \frac{d\bar{v}}{\bar{P}(\bar{v})} = \frac{1}{m} \int_{(t)} dt.$$

3 КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку, отклоненную от положения покоя, действует сила, стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется восстанавливающей.

Колебательное движение может быть свободным и вынужденным.

В свою очередь:

- свободные колебания разделяются на колебания под действием только восстанавливающей силы и колебания под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению;
- вынужденные колебания разделяются на колебания под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой возмущающей силой, и колебания под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления движению.

3.1 Гармонические колебания

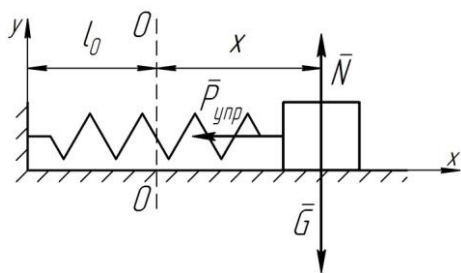


Рисунок 3.1

Гармонические колебания – это свободные колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы (рисунок 3.1).

$F_{упр} = cx$ – восстанавливающая сила

(сила упругости); пропорциональна отклонению материальной точки (тела) от положения статического равновесия (линии $O-O$), Н;

c – коэффициент пропорциональности (упругости), Н/м;

l_0 – длина недеформированной пружины, м.

Запишем второй закон динамики в векторном виде для данной системы сил:

$$m\bar{a} = \bar{P}_{\text{упр}} + \bar{N} + \bar{G}.$$

В проекции на ось x уравнение примет вид:

$$ma_x = -P_{\text{упр}}; \quad m\ddot{x} = -cx; \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Обозначив $\frac{c}{m} = k^2$, получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, называемое дифференциальным уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (3.1)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – циклическая (круговая) частота собственных колебаний, с^{-1} .

Величина k показывает, сколько полных колебаний совершит материальная точка (тело) в единицу времени.

Промежуток времени в течение которого материальная точка совершает одно полное колебание называется **периодом колебаний** (T) – величина обратная циклической частоте, которая определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \quad [T] = [\text{с}].$$

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3.2)$$

Чтобы определить значения постоянных C_1 и C_2 , найдем уравнение, определяющее скорость точки, продифференцировав уравнение (3.2):

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (3.3)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка имеет координату x_0 и проекцию скорости на ось x , равную $\dot{x}_0$. Тогда подставив начальные условия в уравнения (3.2) и (3.3), найдем:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (3.2), получим уравнение движения:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно записать в более компактном виде, положив

$$C_1 = A \sin \beta; \quad C_2 = A \cos \beta.$$

При этом получим:

$$x = A(\sin \beta \cdot \cos kt + \cos \beta \cdot \sin kt)$$

или
$$x = A \sin(kt + \beta), \quad (3.5)$$

где A – амплитуда колебаний, м;

β – начальная фаза колебаний.

Уравнение (3.5) является *уравнением гармонического колебательного движения материальной точки*.

Амплитуда A и начальная фаза β колебаний зависят как от начальных условий, (x_0, v_0) так и от физико-механических свойств колебательной системы (c, m) , и определяются по начальным условиям движения.

Период T и частота k зависят только от физико-механических свойств колебательной системы (c, m) .

Уравнение, определяющее скорость, соответственно примет вид:

$$\dot{x} = kA \cos(kt + \beta). \quad (3.6)$$

4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Второй закон динамики для несвободной материальной точки по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета имеет вид:

$$m\bar{a} = \bar{P}^a + \bar{N}, \quad (4.1)$$

где $\bar{P}^a$ – результирующий вектор активных сил, приложенных к точке, Н;

$\bar{N}$ – результирующий вектор реактивных сил, Н;

$\bar{a}$ – вектор абсолютного ускорения, м/с².

$$\bar{P}^a + \bar{N} = \bar{R}.$$

Рассмотрим движение точки относительно неинерциальной (подвижной) системы отсчета, которая в свою очередь движется относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета, т.е. рассмотрим сложное движение точки (рисунок 4.1). В этом случае вектор абсолютного ускорения $\bar{a}$ определится по формуле:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k.$$

Тогда уравнение (4.1) примет вид:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k) = \bar{P}^a + \bar{N};$$

$$m\bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k),$$

где $(-m\bar{a}_e) = \bar{\Phi}_e$ – переносная сила инерции, Н;

$(-m\bar{a}_k) = \bar{\Phi}_k$ – кориолисова сила инерции, Н.

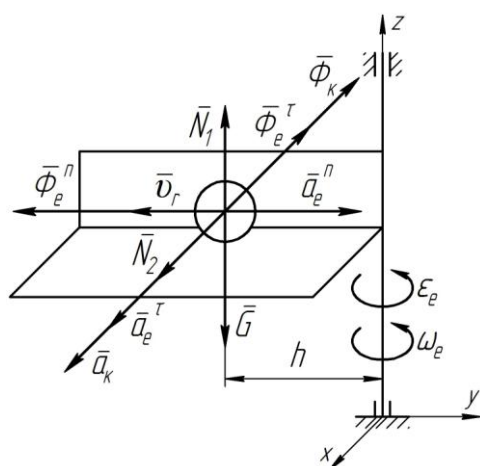


Рисунок 4.1

$$m\bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) представляет собой **основное уравнение динамики относительного движения материальной точки**.

Сравнивая уравнения (4.1) и (4.2) видно, что:

1) в инерциальной системе отсчета ускорение возникает под действием динамической причины (под действием сил);

2) в неинерциальной системе отсчета ускорение возникает вследствие динамической и кинематической причины, т.е. под действием сил и за счет движения самой системы отсчета.

4.1 Частные случаи относительного движения материальной точки

В случаях 1–5 в относительном движении $v_r \neq 0$ и $a_r \neq 0$.

1. Переносное движение – неравномерное вращение вокруг неподвижной оси $\omega_e \neq 0$; $\varepsilon_e \neq 0$.

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n;$$

$$\Phi_e^\tau = m a_e^\tau = m \varepsilon_e h; \quad \Phi_e^n = m a_e^n = m \omega_e^2 h;$$

$$\Phi_\kappa = m a_\kappa = 2m \omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r).$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$m \bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_\kappa.$$

2. Переносное движение – равномерное вращение вокруг неподвижной оси $\omega_e = \text{const}$.

$$\bar{\Phi}_e^\tau = 0; \quad \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n;$$

$$\Phi_e^n = m a_e^n = m \omega_e^2 h;$$

$$\Phi_\kappa = m a_\kappa = 2m \omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r).$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$m \bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_\kappa.$$

3. Переносное движение – поступательное неравномерное криволинейное $\omega_e = 0$; $a_e^\tau \neq 0$; $a_e^n \neq 0$.

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n; \quad \bar{\Phi}_\kappa = 0;$$

$$\Phi_e^\tau = ma_e^\tau = m \frac{dv_e}{dt} = m \frac{d^2 s_e}{dt^2};$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m \frac{v_e^2}{\rho}.$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n.$$

4. Переносное движение – поступательное равномерное криволинейное $\omega_e = 0$; $v_e = \text{const}$; $a_e^n \neq 0$.

$$\bar{\Phi}_e^\tau = 0; \quad \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n; \quad \bar{\Phi}_\kappa = 0;$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m \frac{v_e^2}{\rho}.$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^n.$$

5. Переносное движение – поступательное равномерное прямолинейное $\omega_e = 0$; $v_e = \text{const}$; $a_e^n = 0$.

$$\bar{\Phi}_e = 0; \quad \bar{\Phi}_\kappa = 0.$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{P}^a + \bar{N}. \quad (4.3)$$

Сравнивая выражения (4.1) и (4.3) можно сделать вывод: *всякая система отсчета, движущаяся поступательно равномерно прямолинейно, является инерциальной.*

6. Случай относительного покоя или относительного равновесия

Точка находится в покое относительно подвижной системы отсчета когда $v_r = 0$; $a_r = 0$.

$$m\bar{a}_r = 0; \quad \bar{\Phi}_\kappa = 0.$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$0 = \bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi}_e - \text{уравнение относительного покоя}.$$

5 ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механическая система – это совокупность взаимодействующих между собой материальных точек (тел).

5.1 Классификация сил, действующих на материальные точки механической системы

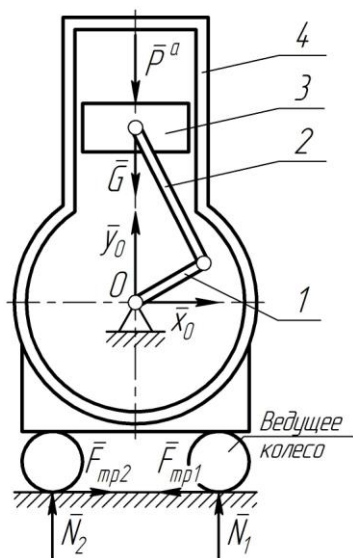


Рисунок 5.1

Силы, действующие на механическую систему, разделяют на:

- внешние ($\bar{P}^e$) и внутренние ($\bar{P}^j$);
- активные ($\bar{P}^a$) и реакции связей (реактивные) ($\bar{N}$).

Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней, в зависимости от того какие тела входят в рассматриваемую систему.

Например, рассмотрим механическую систему (рисунок 5.1), состоящую из: кривошипа 1; шатуна 2; поршня 3; корпуса 4. Определим внешние и внутренние силы, активные и реакции связей (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Разделение сил, действующих на механическую систему

Сила	Система тел	
	<i>поршень – шатун – кривошип</i>	<i>корпус – поршень – шатун – кривошип</i>
$\bar{G}$	внешняя активная	внешняя активная
$\bar{P}^a$	внешняя активная	внутренняя активная
$\bar{x}_O, \bar{y}_O$	внешние реактивные	внутренние реактивные
$\bar{N}_1, \bar{N}_2$	—	внешние реактивные
$\bar{F}_{mp1}$	—	внешняя активная
$\bar{F}_{mp2}$	—	внешняя реактивная

Свойства внутренних сил:

1) так как внутренние силы попарны и равны по величине, то главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю:

$$\bar{R}^j = \sum \bar{P}_i^j = 0; \quad \bar{M}_O^j = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i^j) = 0;$$

2) внутренние силы не уравновешены, так как приложены к разным телам.

5.2 Дифференциальные уравнения движения механической системы

Для механической системы, состоящей из n материальных точек, можно составить n векторных дифференциальных уравнений движений:

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{P}_i^e + \bar{P}_i^j. \quad (5.1)$$

В проекциях на оси координат необходимо составить $3n$ дифференциальных уравнений. Для случаев, когда $n > 3$ решение уравнений имеют значительные математические трудности.

Избежать этого помогут общие теоремы динамики для механической системы, основывающиеся на понятиях центра масс механической системы и момента инерции.

5.3 Центр масс механической системы

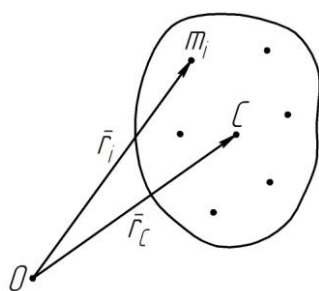


Рисунок 5.2

Масса механической системы m равна сумме масс m_i всех точек (тел) входящих в эту систему (рисунок 5.2):

$$m = \sum m_i .$$

Из статики известно (см. раздел I, тема 10, пункт 10.2):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i G_i}{G} .$$

Так как $G = mg$; $G_i = m_i g$, то

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_i m_i g}{mg} = \frac{\cancel{g} \sum \vec{r}_i m_i}{m \cancel{g}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{m} . \quad (5.2)$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой определяется равенством (5.2).

В проекции на координатные оси получим:

$$x_C = \frac{\sum x_i m_i}{m} ;$$

$$y_C = \frac{\sum y_i m_i}{m} ;$$

$$z_C = \frac{\sum z_i m_i}{m} .$$

5.4 Осевые моменты инерции твердого тела

Характер распределения массы тел относительно плоскости, оси или центра существенно влияет на движение этих тел (системы тел) и характеризуется соответствующим моментом инерции. Ограничимся рассмотрением моментов инерции относительно оси (рисунок 5.3).

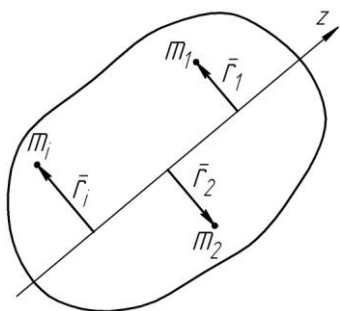


Рисунок 5.3

Момент инерции тела относительно оси – это сумма произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от оси до точки:

$$J_z = \sum m_i r_i^2, \quad [J_z] = [\text{кг} \cdot \text{м}^2].$$

Для тонкостенного кольца (рисунок 5.4) расстояние r_i есть величина постоянная равная R :

$$J_z = \sum m_i r_i^2 = R^2 \sum m_i = mR^2.$$

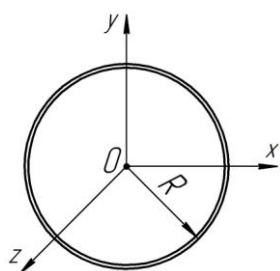


Рисунок 5.4

Момент инерции любого тела можно представить в виде:

$$J_z = m\rho^2,$$

где $\rho = i_z$ – **радиус инерции** – расстояние от оси вращения, на котором необходимо разместить массу тела, чтобы момент инерции размещенной массы равнялся моменту инерции тела относительно этой оси, м.

Для сложных тел, для которых момент инерции математически выразить затруднительно, определяется и задается именно радиус инерции.

Момент инерции тела относительно оси проходящей через его центр масс (*центральной оси*) всегда наименьший.

Теорема Гюйгенса-Штейнера (рисунок 5.5)

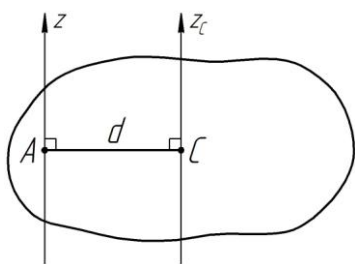


Рисунок 5.5

Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр его масс плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями:

$$J_z = J_{z_c} + md^2.$$

5.5 Моменты инерции некоторых однородных тел

1. Тонкий стержень (рисунок 5.6)

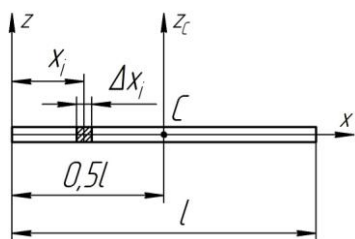


Рисунок 5.6

Предположим, что стержень длиной l имеет постоянное весьма малое сечение F и плотность ρ . Его масса определится:

$$m = \rho V = \rho Fl,$$

где V – объем тела, м^3 .

Разобьем стержень на элементарные участки длиной Δx_i , массы которых $m_i = \rho F \Delta x_i$. Тогда момент инерции относительно оси z , проходящей перпендикулярно стержню через его край, будет равен:

$$J_z = \sum m_i x_i^2 = \sum \rho F x_i^2 \Delta x_i = \rho F \sum x_i^2 \Delta x_i.$$

Перейдя к пределу суммы, получаем определенный интеграл:

$$J_z = \rho F \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho Fl^3}{3} = \rho Fl \frac{l^2}{3} = \frac{ml^2}{3}.$$

С помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера определим момент инерции стержня J_{z_c} относительно центральной оси z_c параллельной оси z :

$$J_{z_c} = J_z - md^2 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси z :

$$\boxed{J_z = \frac{ml^2}{3}}.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси z_c , проходящей через центр масс:

$$\boxed{J_{z_c} = \frac{ml^2}{12}}.$$

2. Круглый диск малой толщины и цилиндр (рисунок 5.7)

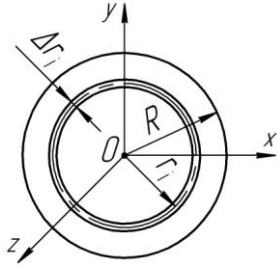


Рисунок 5.7

Предположим, что круглый диск радиусом R имеет весьма малую толщину h и плотность ρ .

$$m = \rho V = \rho h F = \rho h \pi R^2.$$

Разобьем диск на элементарные кольца шириной Δr_i , массы которых $m_i = \rho h F_i$.

$$F_i = \pi \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right)^2 - \pi \left(r_i - \frac{\Delta r_i}{2} \right)^2 = 2\pi r_i \Delta r_i;$$

$$m_i = 2\rho h \pi r_i \Delta r_i.$$

$$J_z = \sum m_i r_i^2 = \sum 2\rho h \pi r_i^3 \Delta r_i = 2\rho h \pi \sum r_i^3 \Delta r_i.$$

Перейдя к пределу суммы, получаем определенный интеграл:

$$J_z = 2\rho h \pi \int_0^R r^3 dr = 2\rho h \pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi \frac{R^4}{2} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{m R^2}{2}.$$

Момент инерции круглого диска относительно оси z :

$$J_z = \frac{m R^2}{2}. \quad (5.3)$$

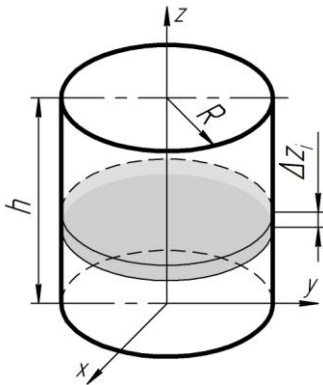


Рисунок 5.8

Для круглого цилиндра (рисунок 5.8) момент инерции J_z определим как сумму моментов инерций ΔJ_z элементарных пластинок толщиной Δz_i , масса которых m_i , относительно той же оси, пользуясь формулой (5.3):

$$J_z = \sum \Delta J_z = \sum \frac{m_i R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \sum m_i = \frac{m R^2}{2}.$$

Момент инерции круглого цилиндра относительно оси z :

$$\boxed{J_z = \frac{m R^2}{2}}.$$

6 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

6.1 Теорема о движении центра масс механической системы

Суммируя уравнение (5.1) получим:

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{P}_i^e + \sum \bar{P}_i^j ;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum \bar{r}_i m_i = \sum \bar{P}_i^e + \sum \bar{P}_i^j .$$

Согласно свойству внутренних сил $\sum \bar{P}_i^j = 0$, с учетом уравнения (5.2)

$\bar{r}_C m = \sum \bar{r}_i m_i$, запишем:

$$m \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \sum \bar{P}_i^e ;$$

$$m \bar{a}_C = \sum \bar{P}_i^e = \bar{R}^e , \quad (6.1)$$

т.е. произведение массы механической системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил или главному вектору этих сил.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Следствие: законы сохранения движения центра масс механической системы.

Если $\sum \bar{P}_i^e = \bar{R}^e = 0$, то центр масс механической системы находится в покое или движется равномерно прямолинейно:

$$v_C = const .$$

6.2 Теорема об изменении количества движения

Количество движения – векторная мера, характеризующая способность одних тел передавать движение другим телам тоже в виде механического движения.

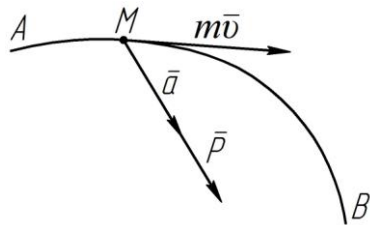


Рисунок 6.1

Запишем 2-й закон динамики в дифференциальном виде для движущейся под действием силы $\bar{P}$ материальной точки M (рисунок 6.1):

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P};$$

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{P},$$

где $m\bar{v} = \bar{q}$ – количество движения материальной точки, $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Тогда получим:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{P}. \quad (6.2)$$

Производная по времени от количества движения материальной точки равна силе, приложенной к этой точке.

Проинтегрировав по времени уравнение (6.2) получим теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральном виде:

$$\int_{(v)} d\bar{q} = \int_{(t)} \bar{P} dt \quad \xrightarrow{\text{при } t_0=0} \quad \bar{q} - \bar{q}_0 = \bar{S},$$

где $\bar{S} = \int_{(t)} \bar{P} dt$ – импульс силы $\bar{P}$ за промежуток времени $t - t_0$, Н·с.

Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно импульсу силы, приложенной к материальной точке, за тот же промежуток времени.

Количество движения механической системы $\bar{Q}$ равно геометрической сумме количеств движения $\bar{q}_i$ ее точек:

$$\bar{Q} = \sum \bar{q}_i = \sum m_i \bar{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum \bar{r}_i m_i \right).$$

С учетом выражения (5.2) $\bar{r}_C m = \sum \bar{r}_i m_i$, получим, что $\bar{Q} = m \frac{d\bar{r}_C}{dt} = m \bar{v}_C$.

Найдем производную по времени от $\bar{Q}$:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{v}_C)}{dt} = m \frac{d\bar{v}_C}{dt} = m \bar{a}_C.$$

Согласно выражению (6.1) $m \bar{a}_C = \sum \bar{P}_i^e = \bar{R}^e$, тогда:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{P}_i^e. \quad (6.3)$$

Производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к механической системе.

Следствие: если главный вектор $\bar{R}^e$ внешних сил $\bar{P}_i^e$ равен нулю, то количество движения механической системы $\bar{Q}$ остается неизменным:

$$\bar{Q} = const.$$

Проинтегрировав по времени уравнение (6.3) получим теорему об изменении количества движения механической системы в интегральном виде:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_i^e.$$

Изменение количества движения механической системы за конечный промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил приложенных к механической системе, за тот же промежуток времени.

6.3 Теорема об изменении момента количества движения

Пусть материальная точка M движется под действием силы $\bar{P}$ (рисунок 6.2). Момент этой силы относительно произвольного неподвижного центра O определится:

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \bar{r} \times \bar{P}.$$

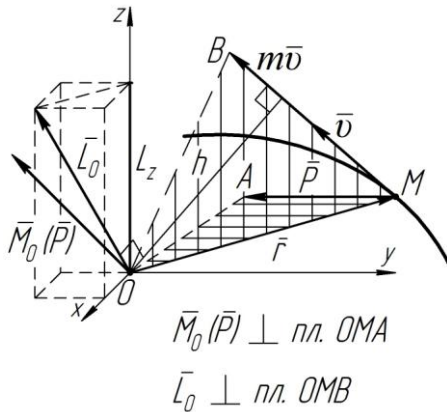


Рисунок 6.2

Момент количества движения $\bar{L}_O$ относительно этого же центра будет соответственно равен:

$$\bar{M}_O(m\bar{v}) = \bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{v},$$

или по модулю:

$$L_O = mvr \sin(\bar{r}, m\bar{v}) = mvh,$$

$$[L_O] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right].$$

Найдем производную по времени от $\bar{L}_O$:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a}.$$

Так как векторы $\bar{v}$ и $m\bar{v}$ направлены по одной прямой, то $\bar{v} \times (m\bar{v}) = 0$. Тогда, с учетом того что $m\bar{a} = \bar{P}$, получим:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{M}_O(\bar{P}). \quad (6.4)$$

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно произвольного неподвижного центра равна моменту силы, действующей на материальную точку, относительно того же центра.

Кинетический момент механической системы $\bar{K}_O$ равен геометрической сумме моментов количеств движения $\bar{L}_{iO}$ ее точек:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{L}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i.$$

Тогда просуммировав выражение (6.4), с учетом того что $\sum \bar{M}_O(\bar{P}_i^j) = 0$, получим:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{P}_i^e).$$

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно произвольного неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на механическую систему относительно того же центра.

Относительно, например, оси z :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{P}_i^e). \quad (6.5)$$

6.4 Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела

Определим кинетический момент твёрдого тела относительно оси его вращения (оси z), рассмотрев движение точки M_i массой m_i , принадлежащей телу и движущейся в плоскости перпендикулярной оси z на расстоянии r_i (рисунок 6.3).

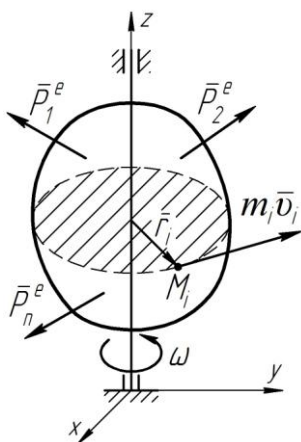


Рисунок 6.3

Момент количества движения точки M_i относительно оси z будет равен:

$$L_{iz} = m_i v_i r_i.$$

Так как $v_i = \omega r_i$, то

$$L_{iz} = m_i \omega r_i^2.$$

Тогда кинетический момент определится:

$$K_z = \sum L_{iz} = \sum m_i \omega r_i^2 = \omega \sum m_i r_i^2 = J_z \omega.$$

Производная от кинетического момента по времени будет равна:

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z \omega) = J_z \frac{d\omega}{dt}.$$

С учетом уравнения (6.5) получим:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{P}_i^e) \quad \text{или} \quad J_z \varepsilon = \sum M_z(\bar{P}_i^e). \quad (6.6)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на производную по времени от угловой скорости его вращения равно сумме моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

Из выражения (6.6) видно, что момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса тела при поступательном движении, т.е. является мерой инертности тела.

7 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

7.1 Работа и мощность сил

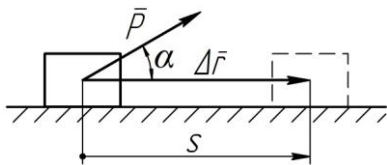


Рисунок 7.1

Если тело движется поступательно прямолинейно, а сила, приложенная к нему, постоянна по модулю и направлению (рисунок 7.1), то работа силы определится скалярным произведением

вектора силы $\bar{P}$ на вектор перемещения $\Delta\bar{r}$ точки приложения силы:

$$A = \bar{P} \cdot \Delta\bar{r} \quad \text{или по модулю} \quad A = P \cdot \Delta r \cdot \cos(\bar{P}, \Delta\bar{r}).$$

Так как $|\Delta\bar{r}| = s$, то

$$A = P s \cos \alpha, \quad [A] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = [\text{Дж}].$$

Если $0 \leq \alpha < 90^\circ$, то работа положительна.

Если $\alpha = 90^\circ$, то работа равна нулю.

Если $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, то работа отрицательна.

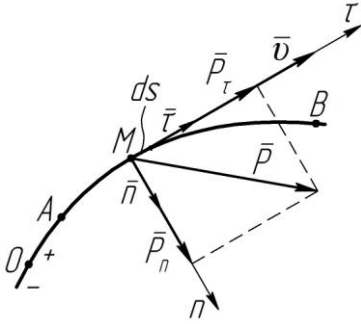


Рисунок 7.2

Если движение криволинейно, а сила изменяется по величине и направлению (рисунок 7.2), то траекторию движения следует разбить на бесконечно малые элементарные участки ds . Тогда элементарная работа δA силы $\bar{P}$ определится:

$$\delta A = P ds \cos(\bar{P}, \bar{\tau}),$$

где ds – приращение дуговой координаты (алгебраическая величина).

Разложим силу $\bar{P}$ на составляющие (проекции на естественные оси):

$$P_\tau = P \cos(\bar{P}, \bar{\tau});$$

$$P_n = P \cos(\bar{P}, \bar{n}).$$

Тогда элементарная работа будет равна:

$$\delta A = P_\tau ds. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) показывает, что работу на элементарном участке ds совершает только касательная составляющая $\bar{P}_\tau$ силы $\bar{P}$; работа нормальной составляющей $\bar{P}_n$, перпендикулярной направлению вектора скорости $\bar{v}$ точки M , равна нулю.

Представим элементарную работу силы как скалярное произведение:

$$\delta A = \bar{P} \cdot d\bar{r},$$

где $d\bar{r}$ – элементарное перемещение.

Тогда в проекции на декартовы оси координат получим:

$$\delta A = P_x dx + P_y dy + P_z dz.$$

Полная работа силы на каком-либо конечном перемещении AB равна:

$$A = \int_A^B \delta A = \int_A^B (P_x dx + P_y dy + P_z dz). \quad (7.2)$$

Работа силы тяжести

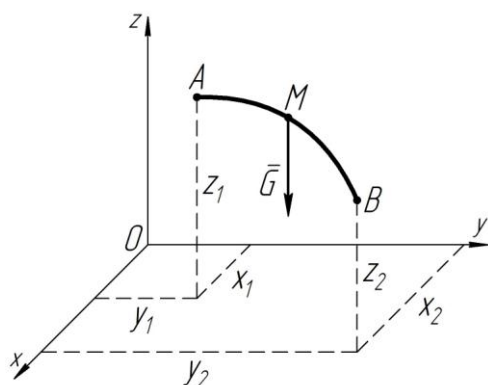


Рисунок 7.3

Определим работу силы тяжести $\bar{G}$, действующей на материальную точку M , на перемещении AB , величина которого мала по сравнению с радиусом Земли (рисунок 7.3). В этом случае модуль и направление силы тяжести постоянны.

Воспользуемся выражением (7.2).

Для этого определим проекции силы

$\bar{G}$ на декартовы оси координат:

$$G_x = 0;$$

$$G_y = 0;$$

$$G_z = -G.$$

Тогда работа силы $\bar{G}$ при перемещении материальной точки M из положения A в положение B будет равна:

$$A = \int_{z_1}^{z_2} (-G) dz = -G \int_{z_1}^{z_2} dz = -G(z_2 - z_1) = G(z_1 - z_2),$$

где $z_1 - z_2 = h$ – величина вертикального перемещения точки M , м.

Таким образом, работа силы тяжести определяется выражением:

$$A = \pm Gh.$$

Знак «+» соответствует перемещению материальной точки вниз, а знак «-» – перемещению материальной точки вверх.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой движется точка ее приложения, а зависит лишь от расстояния между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положения точки приложения силы.

Работа силы упругости

Рассмотрим пружину AB , конец A которой закреплен неподвижно (рисунок 7.4).

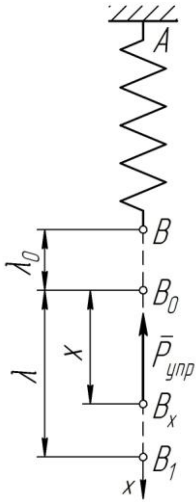


Рисунок 7.4

При растяжении пружины будет возникать сила, стремящаяся вернуть ее в положение равновесия – сила упругости, модуль которой пропорционален удлинению пружины и равен

$$P_{упр} = cx,$$

где x – величина удлинения пружины, м.

Определим проекции силы $\bar{P}_{упр}$ на декартовы оси

$$\text{координат: } P_{упр(x)} = -cx; \quad P_{упр(y)} = 0; \quad P_{упр(z)} = 0.$$

Тогда работа силы $\bar{P}_{упр}$ при удлинении пружины на λ будет равна:

$$A = \int_{\lambda_0}^{\lambda} (-cx) dx = A = -c \int_{\lambda_0}^{\lambda} x dx = -\frac{c}{2} (\lambda^2 - \lambda_0^2) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda^2),$$

где λ_0 и λ – соответственно начальное и конечное удлинения пружины, м.

Работа силы при вращательном движении тела

Согласно уравнению (7.1), элементарная работа внешней силы, приложенной к i -й точке тела вращающегося вокруг вертикальной оси z (рисунок 7.5), определится:

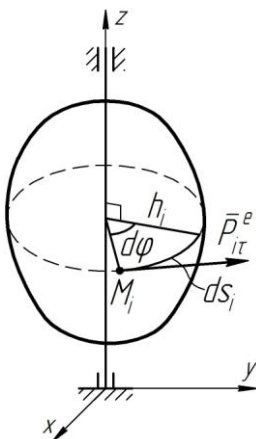


Рисунок 7.5

$$\delta A_i^e = P_{ir}^e ds_i.$$

Так как $ds_i = h_i d\varphi$, то

$$\delta A_i^e = P_{ir}^e h_i \cdot d\varphi = M_z (\bar{P}_{ir}^e) \cdot d\varphi.$$

При действии нескольких сил:

$$\delta A^e = \sum \delta A_i^e;$$

$$\delta A^e = \sum M_z(\bar{P}_{ir}^e) \cdot d\varphi = M_z^e d\varphi,$$

где M_z^e – главный момент внешних сил относительно оси z , Н·м.

Согласно свойству внутренних сил $M_z^j = 0$, тогда полная работа на конечном угловом перемещении тела будет равна:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^e d\varphi.$$

Если $M_z^e = \text{const}$, то

$$A = M_z^e \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = M_z^e (\varphi - \varphi_0).$$

Мощность силы – работа, совершаемая силой в единицу времени.

Средняя мощность определяется выражением:

$$N_{cp} = \frac{A}{t};$$

$$[N] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{с}} \right] = [\text{Вт}].$$

Истинная мощность в данный момент времени определится по формуле:

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

При поступательном движении $\delta A = \bar{P} \cdot d\bar{r}$:

$$N = \frac{\bar{P} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{v} = P v \cos(\bar{P}, \bar{v}).$$

При вращательном движении $\delta A^e = M_z^e d\varphi$:

$$N = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = M_z^e \omega.$$

7.2 Теорема об изменении кинетической энергии

Пусть материальная точка массой m движется под действием сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$. Согласно второму закону динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i. \quad (7.3)$$

Спроецируем уравнение (7.3) на касательную ось и умножим обе его части на приращение дуговой координаты ds :

$$ma_\tau ds = \sum P_{i\tau} ds. \quad (7.4)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (7.4):

$$ma_\tau ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv = md \left(\frac{v^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

Согласно (7.1) $\sum P_{i\tau} ds = \sum \delta A_i$, тогда уравнение (7.4) примет вид:

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \sum \delta A_i, \quad (7.5)$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки, Дж.

Проинтегрировав выражение (7.5) получим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральном виде:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i. \quad (7.6)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на том же перемещении.

Для механической системы

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на механическую систему на том же перемещении:

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j, \quad (7.7)$$

где T_0 и T – соответственно кинетические энергии механической системы в ее начальном и конечном положениях, Дж;

$\sum A_i^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к механической системе, на ее перемещение из начального положения в конечное, Дж;

$\sum A_i^j$ – сумма работ внутренних сил механической системы на том же перемещении, Дж.

Вычисление кинетической энергии твердого тела при различных видах движения

При поступательном движении:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

При вращательном движении:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

При плоскопараллельном движении:

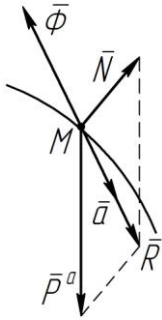
$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}.$$

Где J_z – момент инерции тела относительно оси его вращения, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

v_C – скорость центра масс, м/с;

J_C – момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения тела, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

8 ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА (ПРИНЦИП КИНЕТОСТАТИКИ)



Пусть несвободная материальная точка M массой m движется под действием активной силы $\bar{P}^a$ (рисунок 8.1), тогда:

$$m\bar{a} = \bar{P}^a + \bar{N}. \quad (8.1)$$

Запишем выражение (8.1) в виде:

Рисунок 8.1

$$\bar{P}^a + \bar{N} + (-m\bar{a}) = 0,$$

где $(-m\bar{a}) = \bar{\Phi}$ – **сила инерции**, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение ($\Phi = ma$) и направленная в сторону, противоположную ускорению.

Тогда получим принцип д'Аламбера для несвободной материальной точки:

$$\bar{P}^a + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0. \quad (8.2)$$

В любой момент движения материальной точки, действующие на нее, активная сила и реакция связи уравниваются условно приложенной силой инерции.

Для механической системы

При движении механической системы геометрическая сумма активных сил, реакций и условно приложенных сил инерций равна нулю:

$$\sum \bar{P}_i^a + \sum \bar{N}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0, \quad (8.3)$$

где $\sum \bar{P}_i^a$ – геометрическая сумма активных сил, под действием которых движется механическая система, Н;

$\sum \bar{N}_i$ – геометрическая сумма реактивных сил (реакций связей), возникающих от действия активных сил, Н;

$\sum \bar{\Phi}_i$ – геометрическая сумма условно приложенных сил инерций, Н.

Принцип д'Аламбера – это условный, формальный прием, позволяющий рассматривать задачи динамики методами статики.

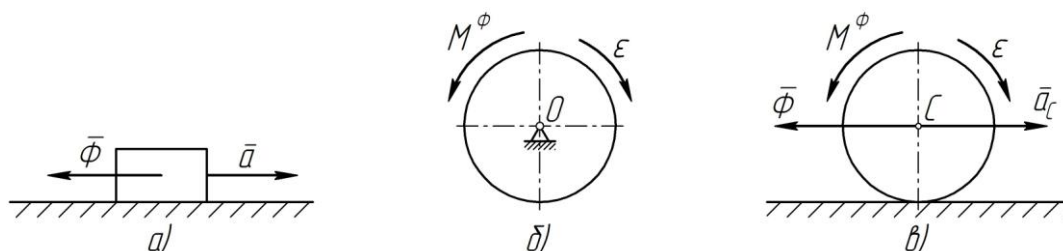


Рисунок 8.2

При *поступательном движении* (рисунок 8.2 а) прикладывается только сила инерции $\bar{\Phi}$, равная по модулю:

$$\Phi = ma.$$

При *вращательном движении* (рисунок 8.2 б), относительно оси проходящей через центр масс тела, прикладывается только момент сил инерций M^Φ , направленный противоположно ε и равный произведению момента инерции тела J_O , относительно оси O его вращения, на угловое ускорение ε тела:

$$M^\Phi = J_O \varepsilon.$$

При *плоскопараллельном движении* (рисунок 8.2 в) прикладываются сила инерции (к центру масс тела) и момент сил инерций, направленные противоположно ускорениям и равные:

$$\Phi = ma_C;$$

$$M^\Phi = J_C \varepsilon,$$

где a_C – ускорение центра масс тела, м/с²;

J_C – момент инерции тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения тела, кг · м².

9 ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА)

В общем случае на систему могут быть наложены внешние и внутренние связи. На практике эти связи реализуются в виде шарниров, нитей, стержней, поверхностей, направляющих и т.д., но их можно представить в виде геометрических линий, математических поверхностей, плоскостей, которые описываются уравнениями или неравенствами.

9.1 Классификация связей

1. Стационарные связи

Связи, которые не меняются с течением времени, называются стационарными. Уравнения этих связей не зависят явным образом от времени.

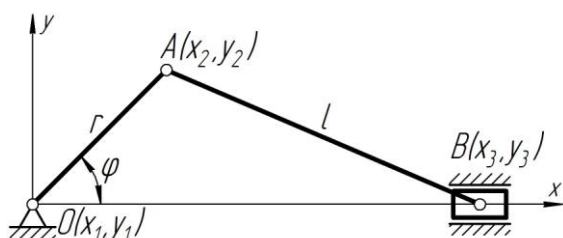


Рисунок 9.1

Пример. Кривошипно-шатунный механизм (рисунок 9.1).

Для определения произвольного положения КШМ необходимо определить положения трех точек (O , A , B), для этого необходимо

составить систему уравнений:

$$x_1 = y_1 = y_3 = 0;$$

$$x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0;$$

$$(x_3 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0.$$

В эти уравнения явно не входит параметр t , поэтому этот вид связи можно считать стационарным.

2. Удерживающие связи

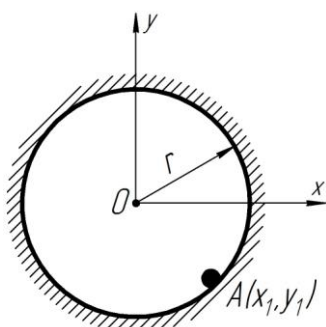


Рисунок 9.2

Удерживающая связь – это связь, при которой в любой момент движения точка остается на поверхности связи. Уравнения удерживающих связей определяется равенствами, а неудерживающих связей – неравенствами.

Положение точки А (рисунок 9.2) при данном виде связи определится неравенством:

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 \leq 0,$$

т.е. данная связь является неудерживающей.

3. Идеальные связи

Связи без трения (см. раздел I, тема 1, пункт 1.3).

4. Голономные и неголономные связи

Голономными называются связи, которые накладывают ограничение только на перемещение точек механической системы.

В уравнения этих связей входят только координаты точек системы и не входят производные от них (проекции скоростей).

Неголономными называются связи, которые накладывают ограничения на скорости точек механической системы.

В уравнения неголономных связей помимо координат точек системы входят их скорости.

9.2 Возможные перемещения. Принцип Лагранжа

Возможным перемещением ($\delta \vec{r}$) называется всякое воображаемое бесконечно малое перемещение точек системы, которое могли бы совершить эти точки, в данный момент из данного положения, не нарушая наложенных на них связей.

В виду малости перемещение $\delta \vec{r}$ совпадает с приращением дуговой координаты δs (см. раздел II, тема 1, пункт 1.3 – *скорость точки*).

Понятие возможного перемещения точки или механической системы есть понятие чисто геометрическое и не зависит от действующих на точку или систему сил, а зависит только от характера наложенных связей.

Действительное перемещение это одно из возможных перемещений.

Перемещение, при котором точка или система покидает наложенные связи, не является «возможным».

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно чтобы сумма элементарных работ активных сил на возможных перемещениях механической системы равнялась нулю:

$$\sum \delta A_i^a = 0. \quad (9.1)$$

Возможные перемещения (виртуальные, бесконечно малые) – то, что можно совершить не нарушая связи.

10 ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ (ПРИНЦИП Д’АЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА)

При движении механической системы сумма элементарных работ активных сил и условно приложенных сил инерций на возможных перемещениях механической системы равна нулю:

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^p = 0. \quad (10.1)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика: учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.
2. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 2. Динамика: учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики Т. 1. Статика и кинематика. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
4. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика системы материальных точек: учеб. пособие. – 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.
5. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. / Н.Н. Бухгольц. В 2-х ч. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки: учеб. пособие. – 10-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 480 с.
6. Лачуга Ю.Ф. Теоретическая механика / Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Колос, 2005. – 576 с.
7. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник / Н.Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 720 с.
8. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
9. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Ч. I Статика. Кинематика. Ч. II Динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 15-е изд., стер. – М.: КноРус, 2010. – 608 с.