

**Синельщиков А.В., Пономарёва Е.В.,
Хохлова О.А., Корнеева Н.Н.**

**ПРАКТИКУМ.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СТАТИКА**

Астрахань
Издательство АГТУ
2021

УДК 531.2
ББК 22.21

Синельщиков, А. В. Практикум. Теоретическая механика. Статика / А.В. Синельщиков, Е.В. Пономарёва, О.А. Хохлова, Н.Н. Корнеева. – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2021. – 156 с.

Разработаны многовариантные задания разного уровня сложности для выполнения индивидуальных расчётно-графических работ по разделу «Статика» в объёме требований программ по курсу «Теоретическая механика» для технических специальностей высшего профессионального образования.

Для студентов и преподавателей технических и строительных вузов.

УДК 531.2
ББК 22.21

ISBN

© Синельщиков А.В., 2021
© Пономарёва Е.В., 2021
© Хохлова О.А., 2021
© Корнеева Н.Н., 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА.....	7
1.1 Задания по теме: «Определение реакций опор твёрдого тела».....	7
1.1.1 Задания С-1 (1 – 30)	7
1.1.2 Задания С-2 (1 – 30)	15
1.1.3 Задания С-3 (1 – 30)	28
1.1.4 Задания С-4 (1 – 30)	47
1.1.5 Задания С-5.....	64
1.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к твёрдому телу	67
1.3 Примеры решения задач по теме: «Определение реакций опор твёрдого тела»	68
2 РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ	77
2.1 Задания на тему: «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)»	77
2.1.1 Задания СК-1 (1 – 30)	77
2.1.2 Задания СК-2 (1 – 30)	92
2.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил	105
3 РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ.....	112
3.1 Задания на тему: «Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы»	112
3.1.1 Задание Ф-1	112
3.1.2 Задание Ф-2	114
3.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия плоской фермы.....	116
3.3 Пример определения реакций опор и сил в стержнях плоской фермы..	116
3.3.1 Расчёт плоской фермы методом вырезания узлов	117
3.3.2 Проверка результатов расчёта фермы методом сечений.....	121
3.3.3 Построение диаграммы Максвелла-Кремоны	122
4 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ.....	125
4.1 Задания по теме: «Определение реакций опор пространственной конструкции»	125
4.1.1 Задание СПр-1	125
4.1.2 Задание СПр-2	128
4.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил	131

4.3	Примеры решения задач на тему: «Определение реакций опор пространственной конструкции».....	131
5	ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ	135
5.1	Задания по теме: «Центр тяжести».....	135
5.1.1	Задания ЦТ-1 (1 – 30).....	135
5.2	Методические указания к решению задач по определению положения центров тяжести однородных тел.....	142
5.3	Примеры решения задач на тему: «Центр тяжести»	143
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	148
	ПРИЛОЖЕНИЯ.....	149

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплины естественнонаучного и общепрофессионального цикла играют большую роль в подготовке будущих современных инженеров. К таким дисциплинам относится и *теоретическая механика*, являющаяся базой для изучения родственных технических дисциплин механического профиля (технической механики, прикладной механики, сопротивления материалов, теории механизмов и машин, деталей машин, строительной механики и др.).

Целью освоения учебной дисциплины "Теоретическая механика" является приобретение студентом компетенций в области механического взаимодействия, равновесия и движения материальных тел, т.к. её изучение выполняет мировоззренческую функцию, развивает логическое мышление и даёт понимание широкого круга природных явлений. Кроме того, теоретическая механика является научной базой современной техники и фундаментом инженерного образования.

Механикой в широком смысле этого слова является наука, посвящённая решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами.

Курс теоретической механики разделён на три раздела: статику, кинематику и динамику. Изучение этих разделов не заканчивается рассмотрением общих закономерностей. Приобретение навыков самостоятельного решения практических задач - неперенное условие овладения курсом теоретической механики. Данное пособие позволяет студенту получить определённый навык решения задач первого раздела полного курса - статики. Статика - это раздел теоретической механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твёрдому телу. Предлагаемый практикум является полным и целостным изложением всех базовых задач и методов теоретической механики в приложении к статике. Он отличается от существующих на данный момент учебных пособий по теоретической механике как по поиску материала, так и по способу его изложения. Основное внимание направлено на рассмотрение самых содержательных задач по различным темам.

Практикум не исключает изучение курса по источникам, в которых более подробно изложены основные понятия, доказательства теорем, определения, что способствует развитию логического мышления и более успешному закреплению материала, а также умения самостоятельного решения задач, возникающих не только в ходе обучения студентов, но и в их будущей профессиональной деятельности.

Обилие имеющейся литературы по курсу теоретической механике [1, 2, 8-11, 14, 42, 44] способствует хорошему усвоению теории, твёрдые навыки в решении задач можно получить, работая со сборниками заданий, задачками практикумами [3-6, 13, 15, 16, 35].

Авторами предпринята попытка разработать сборник многовариантных заданий разного уровня сложности по разделу «Статика» теоретической механики.

В сборнике представлено 330 заданий по пяти основным темам: 1) равновесие твёрдого тела, определение реакций опор твёрдого тела (120 заданий); 2) равновесие плоской системы сил, определение реакций в опорах составной конструкции (система двух тел) (60 заданий); 3) пространственная система сил (60 заданий); 4) расчёт плоской фермы (60 заданий); 5) центр тяжести (30 заданий).

По каждой теме даны методические рекомендации по решению задач, разобраны особенности, предложен порядок выполнения действий. Показаны примеры решения типовых задач каждого вида с проверкой правильности решения.

Приведённые задания могут использоваться как для проведения текущего и итогового контроля знаний обучаемых, так и для формирования индивидуальных вариантов для выполнения расчётно-графических работ.

Книга предназначена для студентов университетов, технических и строительных вузов, изучающих курс теоретической механики (раздел «Статика»), магистрантов, аспирантов, преподавателей.

1 РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

1.1 Задания по теме: «Определение реакций опор твёрдого тела»

1.1.1 Задания С-1 (1 – 30)

Условие задачи: Горизонтальная балка закреплена в точке A при помощи жёсткой заделки (варианты 1-15) либо в точке A шарнирно-неподвижной опорой, в точке B – шарнирно-подвижной опорой (варианты 16-30). На балку действует распределённая нагрузка интенсивностью q (Н/м) (диапазон значений от $q_{\min}$ до $q_{\max}$), пары сил с моментами M_1 и M_2 (Нм) и сосредоточенные силы P_1 и P_2 (Н). *Определите* реакции, возникающие в опорах. Выполните проверку правильности решения. Исходные данные приведены в табл. 1, схемы – в табл. 2.

Таблица 1

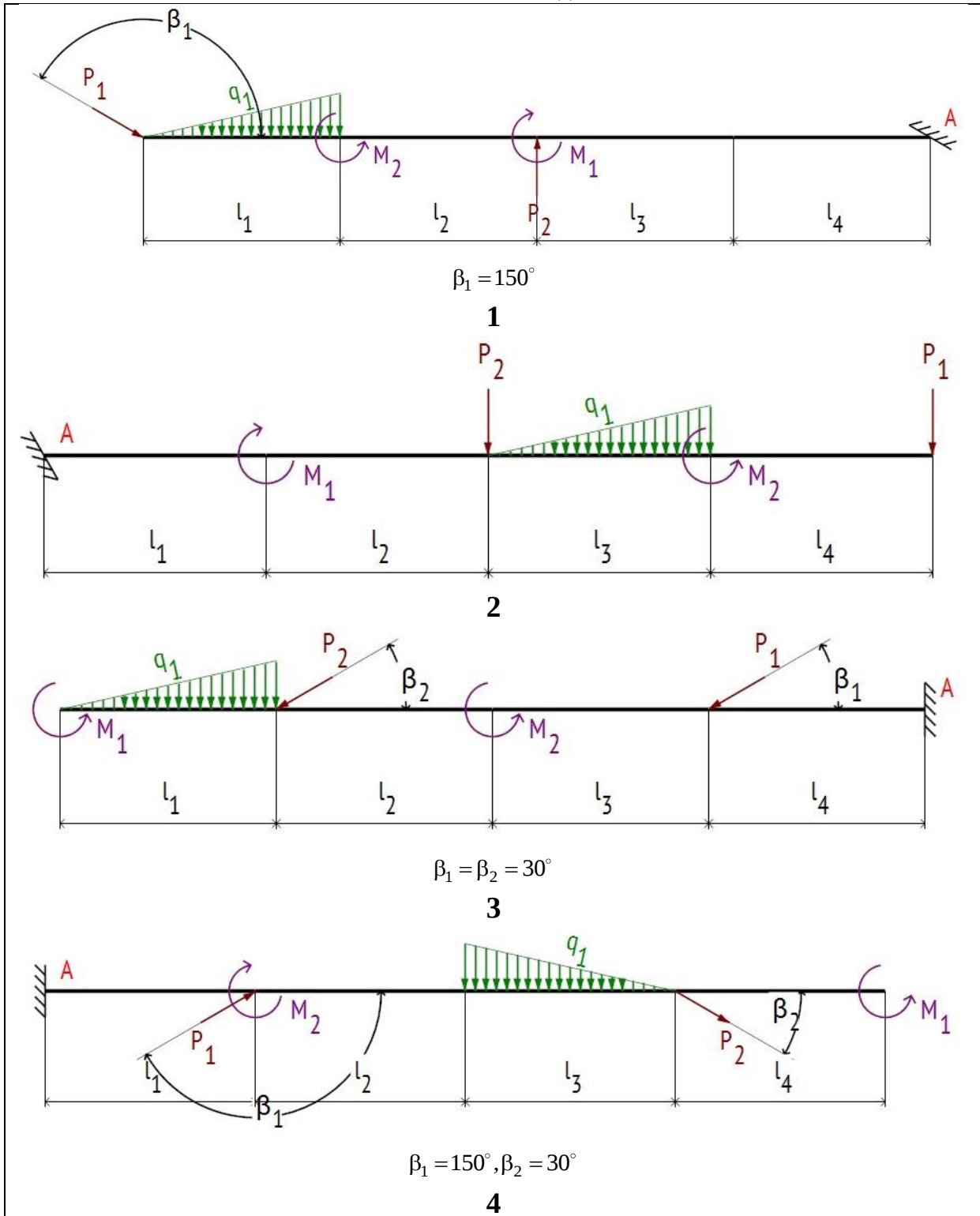
Исходные данные к заданиям С-1, С-2, С-3, С-4

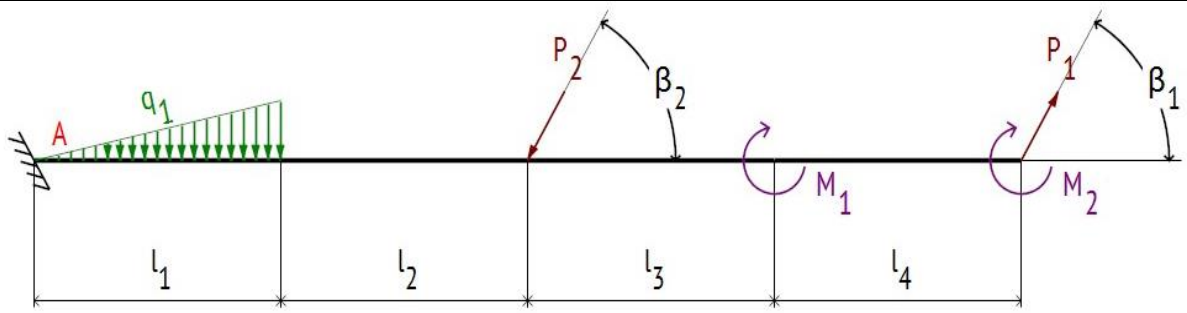
№	Размеры участков, м				Силы, Н		Моменты, Нм		Интенсивность распределённой нагрузки, Н/м	
	l_1	l_2	l_3	l_4	P_1	P_2	M_1	M_2	$q_{\min}$	$q_{\max}$
1	0,1	0,15	0,49	0,50	1	60	10	128	0	2
2	0,2	0,25	0,48	0,51	2	59	12	126	0	4
3	0,3	0,35	0,47	0,52	3	58	14	124	0	5
4	0,4	0,45	0,46	0,53	4	57	16	122	0	6
5	0,5	0,55	0,45	0,54	5	56	18	120	0	8
6	0,6	0,65	0,44	0,55	6	55	20	118	4	4
7	0,7	0,75	0,43	0,56	7	54	22	116	12	12
8	0,8	0,85	0,42	0,57	8	53	24	114	14	14
9	0,9	0,95	0,41	0,58	9	52	26	112	16	16
10	1,0	1,05	0,40	0,59	10	51	28	110	4	4
11	1,1	1,15	0,39	0,60	11	50	30	108	12	20
12	1,2	1,25	0,38	0,61	12	49	31	106	4	8
13	1,3	1,35	0,37	0,62	13	48	34	104	2	8
14	1,4	1,45	0,36	0,63	14	47	36	102	12	22
15	1,5	1,55	0,35	0,64	15	46	38	100	1	2
16	1,6	1,65	0,34	0,65	16	45	40	98	0	4
17	1,7	1,75	0,33	0,66	17	44	42	96	0	24
18	1,7	1,75	0,32	0,67	18	43	44	94	0	20
19	1,9	1,95	0,31	0,68	19	42	46	92	0	26
20	2,0	2,05	0,30	0,69	20	41	48	90	0	8
21	2,1	2,15	0,29	0,70	21	40	50	88	2	2
22	2,2	2,25	0,28	0,71	22	39	52	86	10	10
23	2,3	2,35	0,27	0,72	23	38	54	84	2	2
24	2,4	2,45	0,26	0,73	24	37	56	82	14	14
25	2,5	2,55	0,25	0,74	25	36	58	80	16	16

26	2,6	2,65	0,24	0,75	26	35	60	78	2	20
27	2,7	2,75	0,23	0,76	27	34	62	76	2	38
28	2,8	2,85	0,22	0,77	28	33	64	74	2	12
29	2,9	2,95	0,21	0,78	29	32	66	72	2	10
30	3,0	3,05	0,20	0,79	30	31	68	70	2	40

Таблица 2

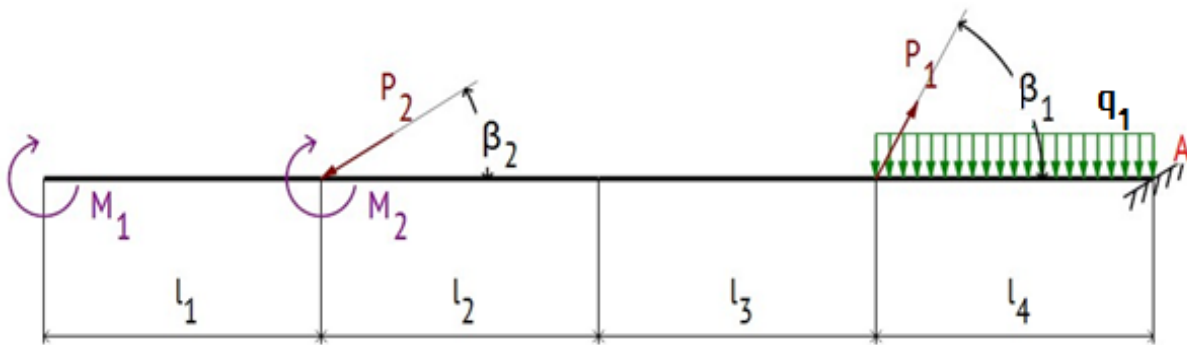
Расчётные схемы к заданию С-1





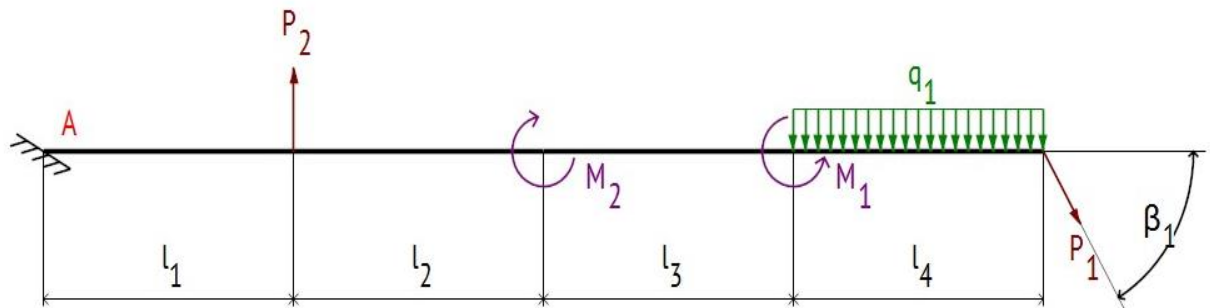
$$\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$$

5



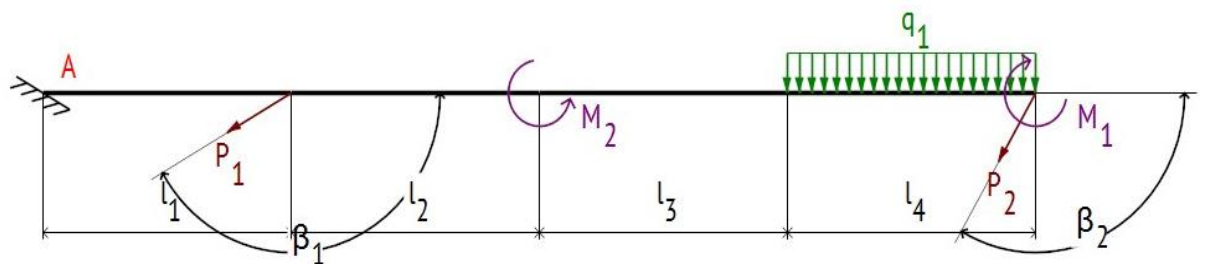
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 30^\circ$$

6



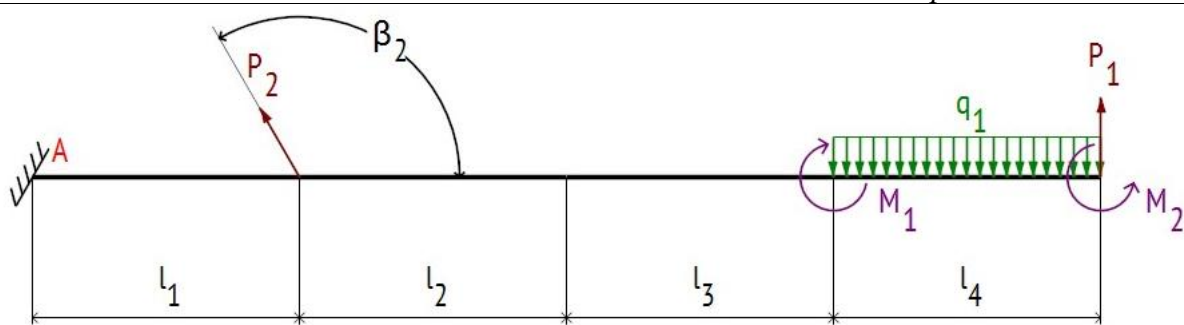
$$\beta_1 = 60^\circ$$

7

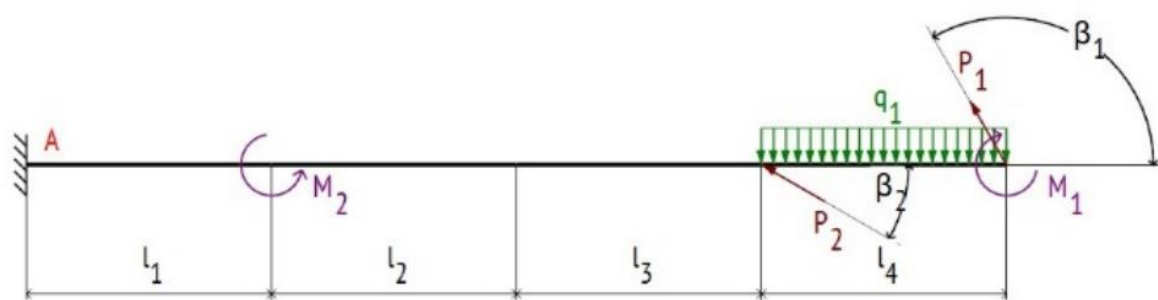


$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

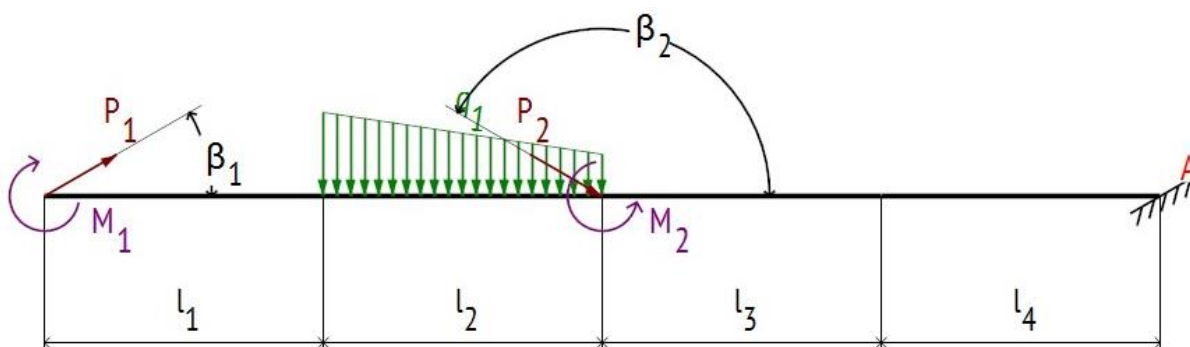
8



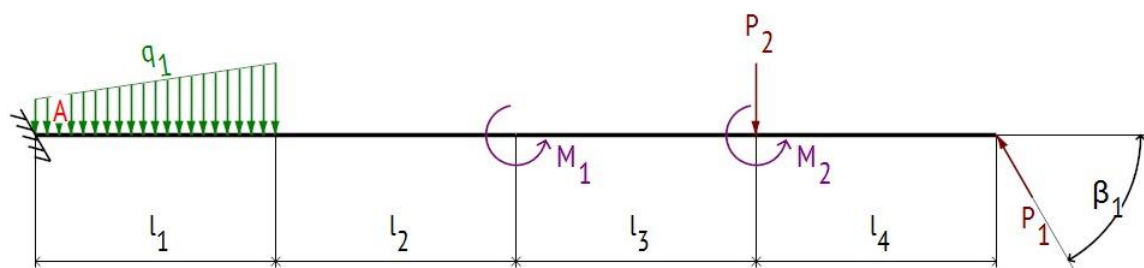
$$\beta_2 = 120^\circ$$

9

$$\beta_1 = 120^\circ, \beta_2 = 30^\circ$$

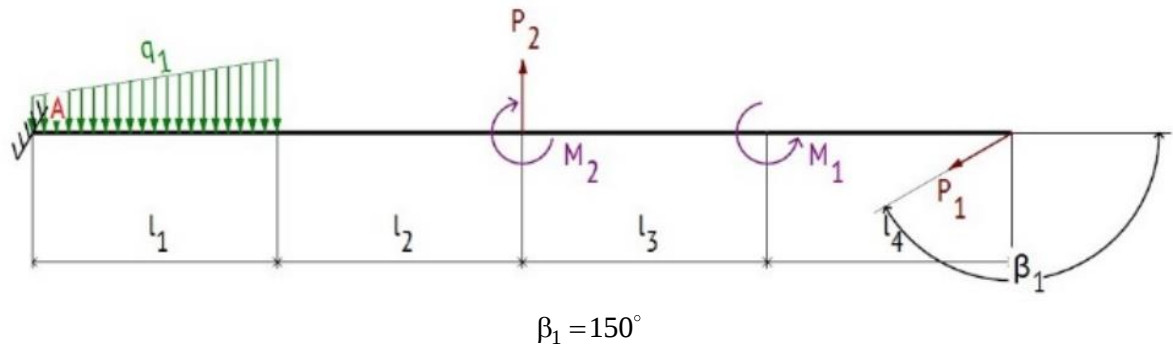
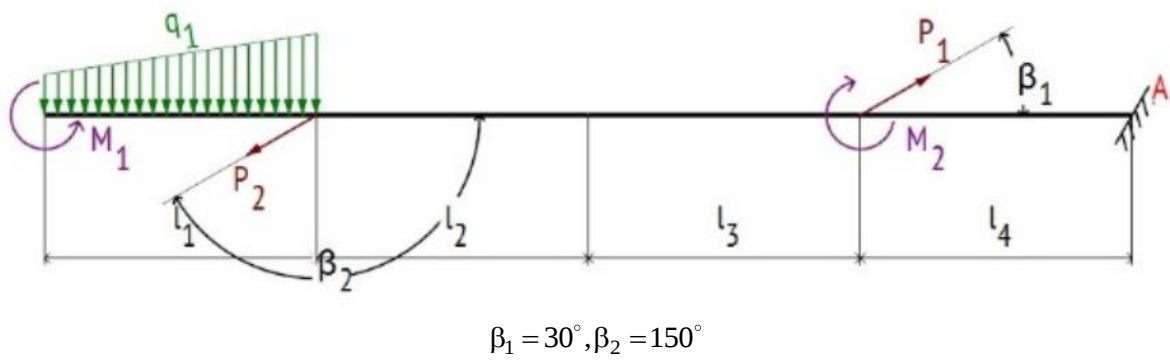
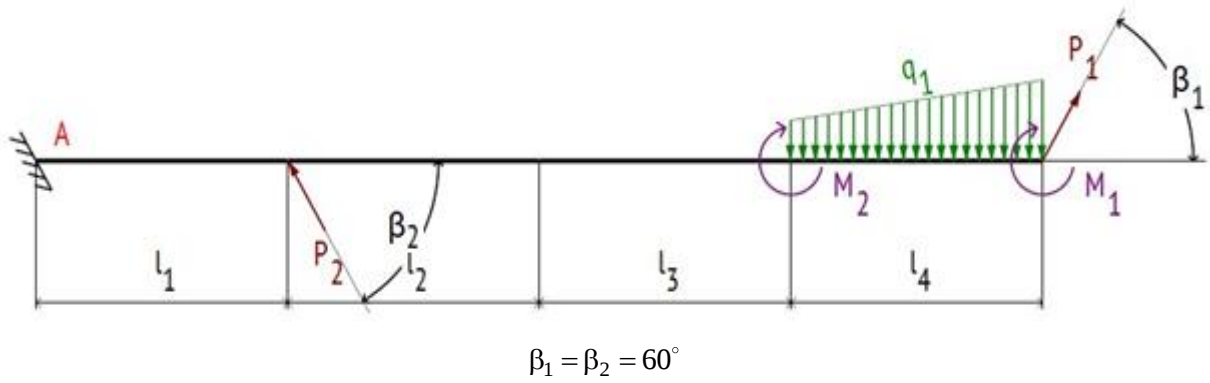
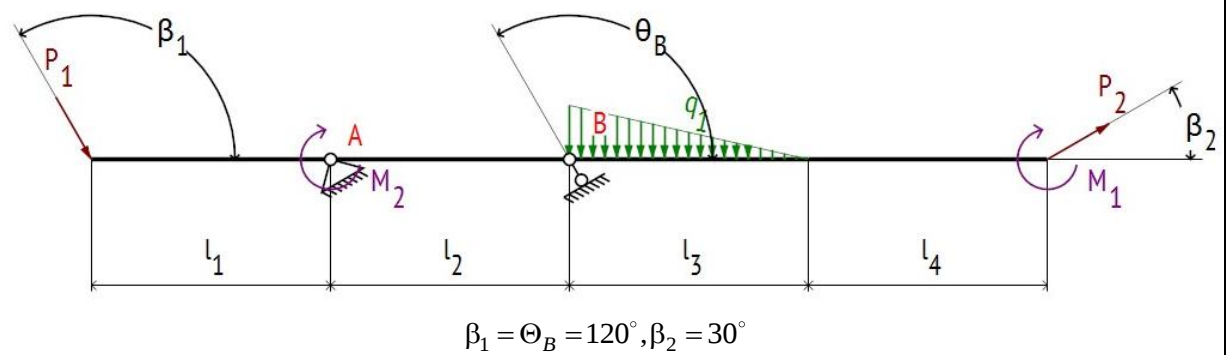
10

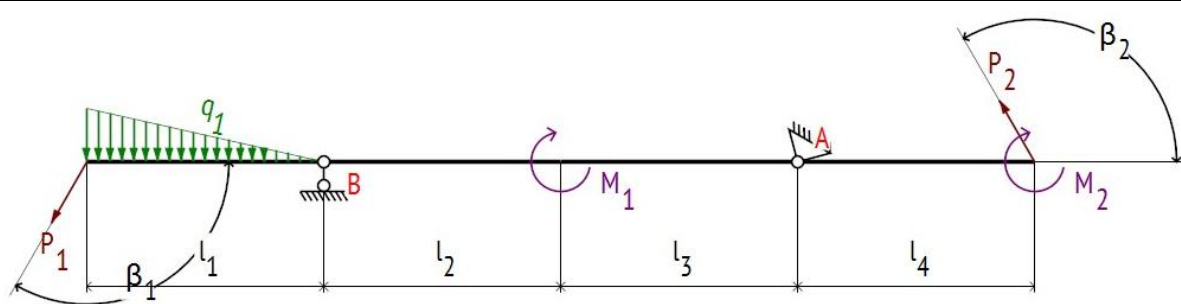
$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = 150^\circ$$

11

$$\beta_1 = 60^\circ$$

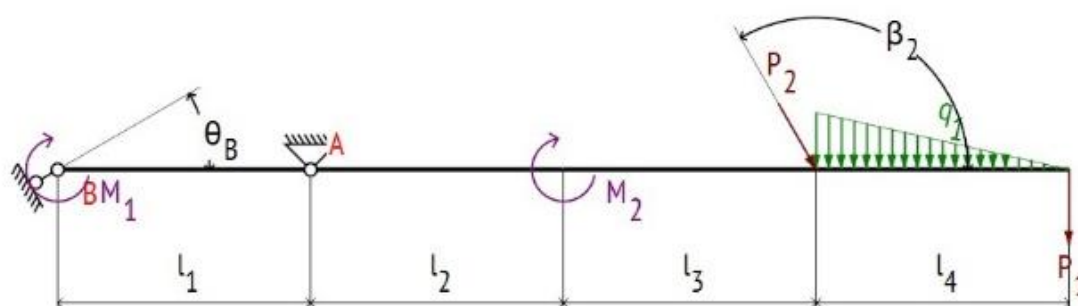
12

**13****14****15****16**



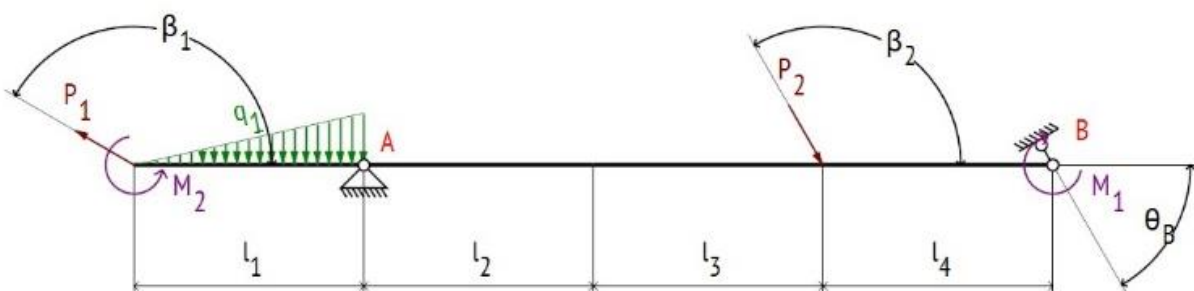
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

17



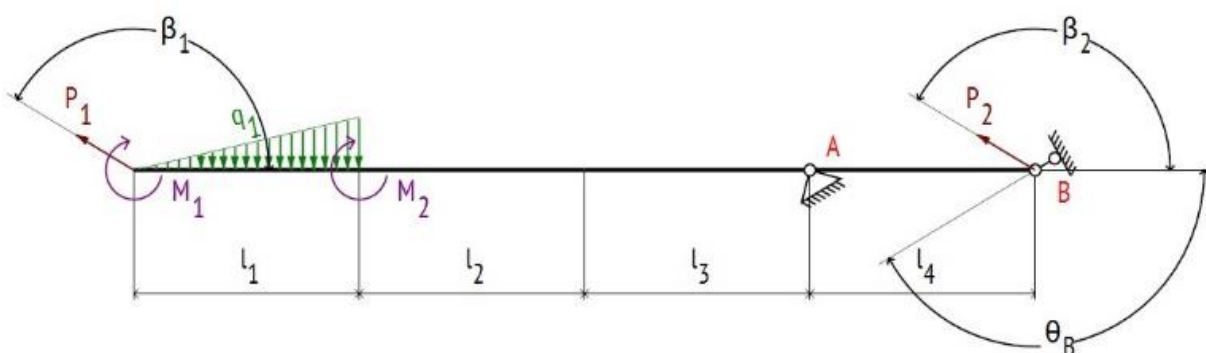
$$\Theta_B = 30^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

18



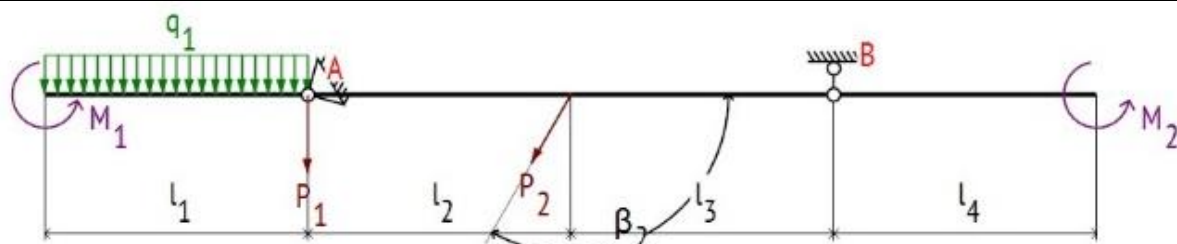
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ, \Theta_B = 60^\circ$$

19



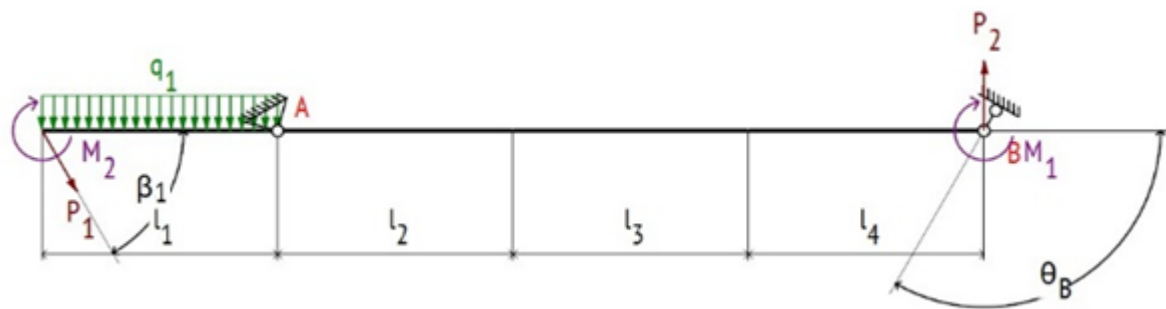
$$\beta_1 = \beta_2 = \Theta_B = 150^\circ$$

20



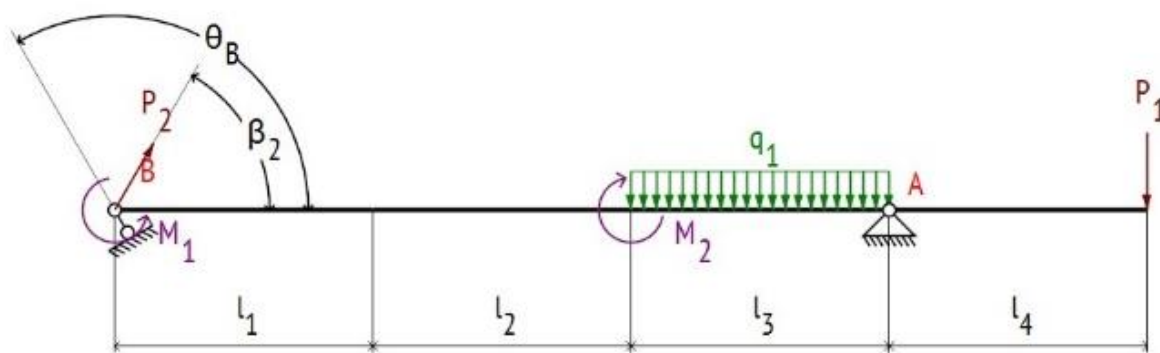
$$\beta_2 = 120^\circ$$

21



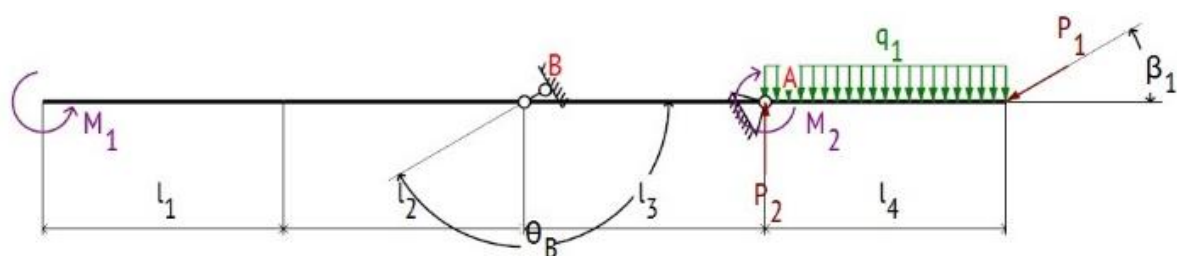
$$\beta_1 = 60^\circ, \Theta_B = 120^\circ$$

22



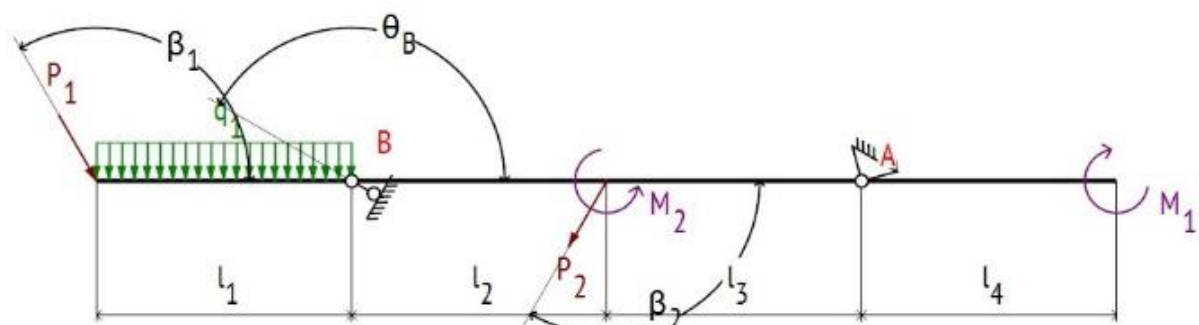
$$\beta_2 = 60^\circ, \Theta_B = 120^\circ$$

23



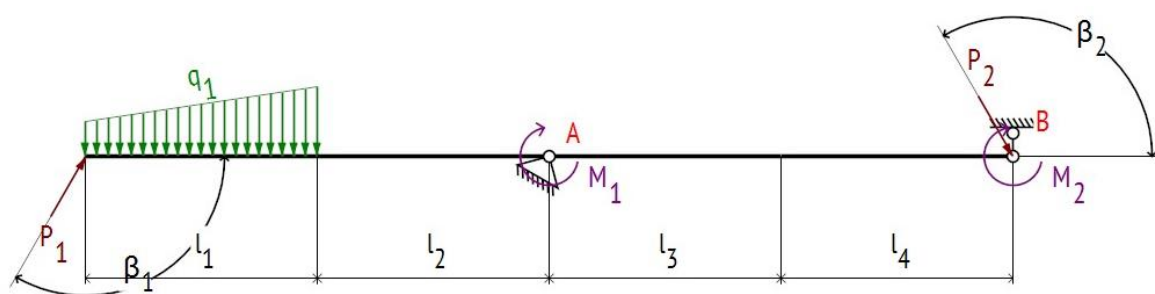
$$\beta_1 = 30^\circ, \Theta_B = 150^\circ$$

24



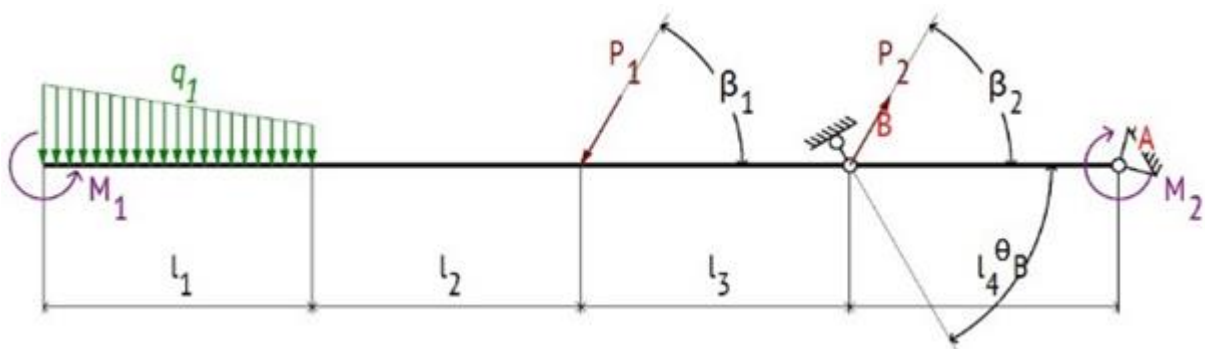
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ, \Theta_B = 150^\circ$$

25



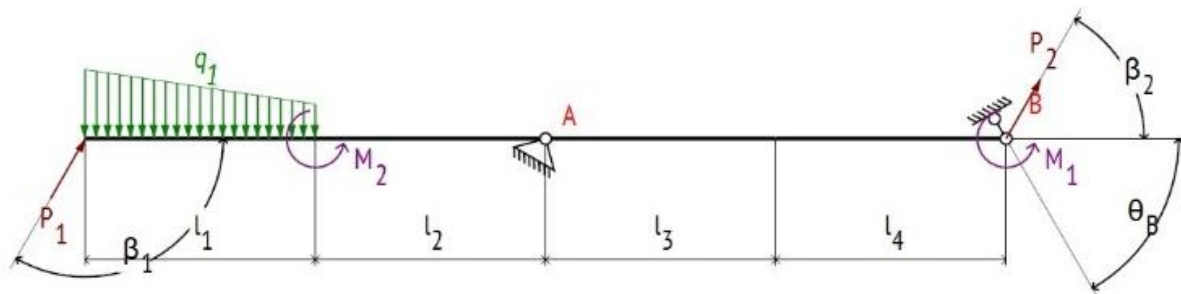
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

26



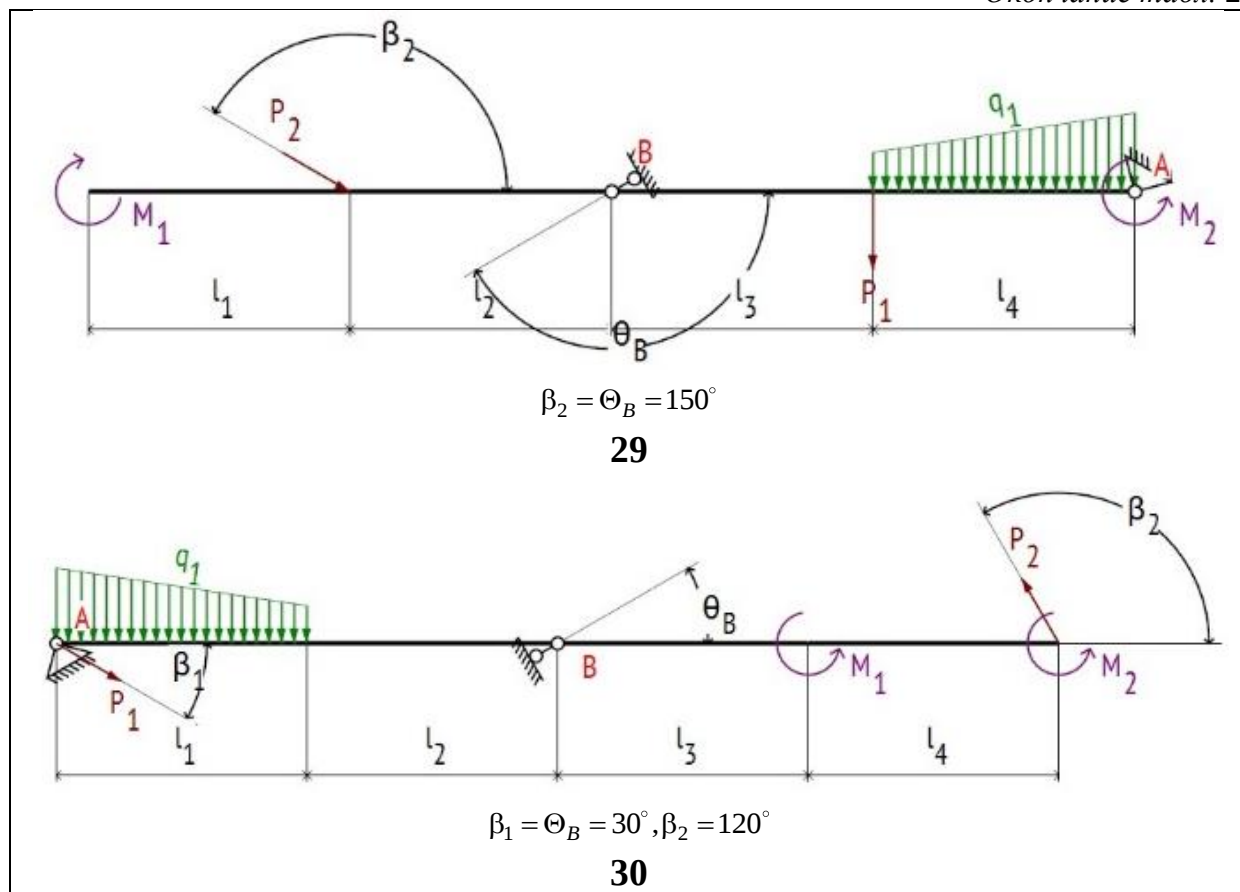
$$\beta_1 = \beta_2 = \Theta_B = 60^\circ$$

27



$$\beta_1 = 120^\circ, \Theta_B = \beta_2 = 60^\circ$$

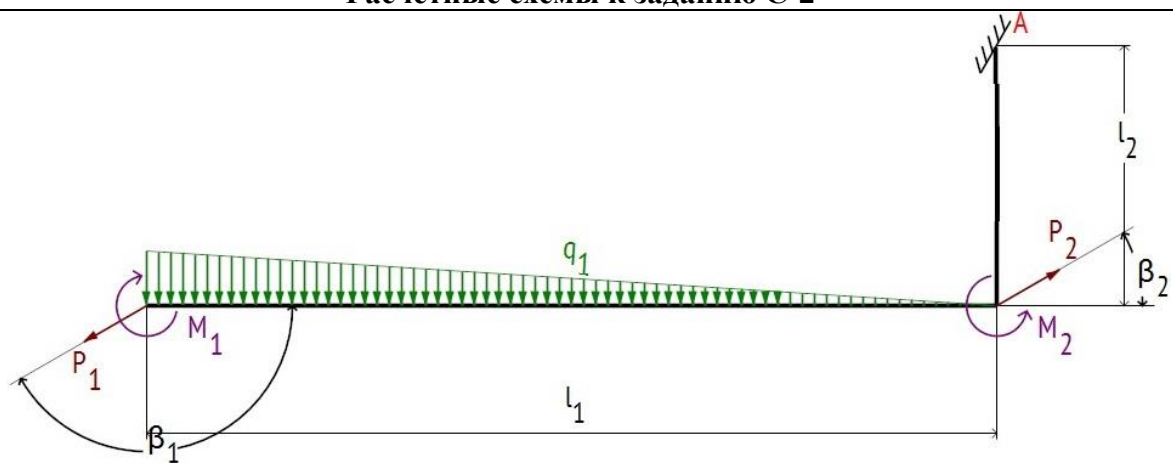
28



1.1.2 Задания С-2 (1 – 30)

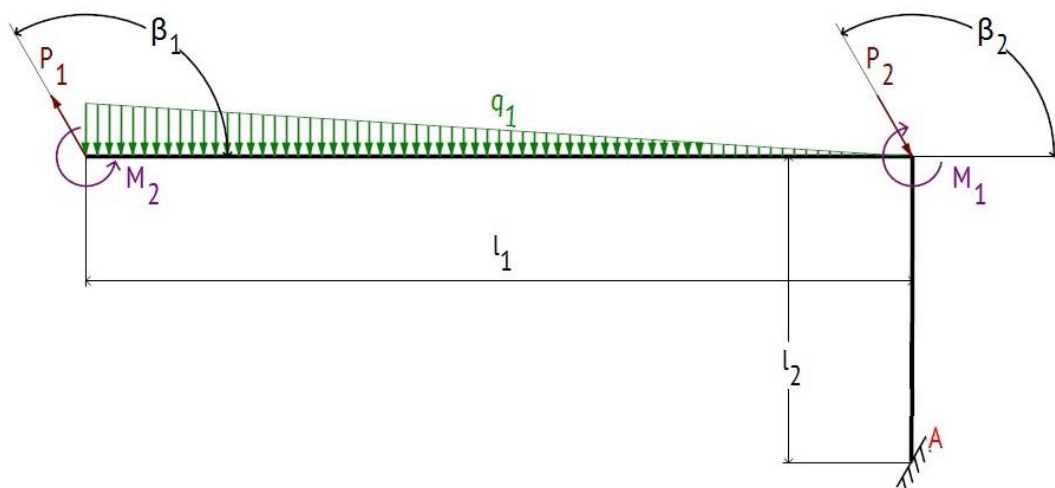
Условие задачи: Жёсткая рама закреплена в точке A при помощи жёсткой заделки (варианты 1-15) либо в точке A при помощи шарнирно-подвижной опоры, в точке B – при помощи шарнирно-неподвижной опоры (варианты 16-30). К раме приложены силы P_1 и P_2 (Н), пары сил с моментами M_1 и M_2 (Нм), распределённая нагрузка интенсивностью q_1 (Н/м) (диапазон значений от $q_{1\min}$ до $q_{1\max}$). *Определите* реакции, возникающие в опорах. Выполните проверку правильности решения. Исходные данные приведены в табл. 1, схемы – в табл. 3.

Расчётные схемы к заданию С-2



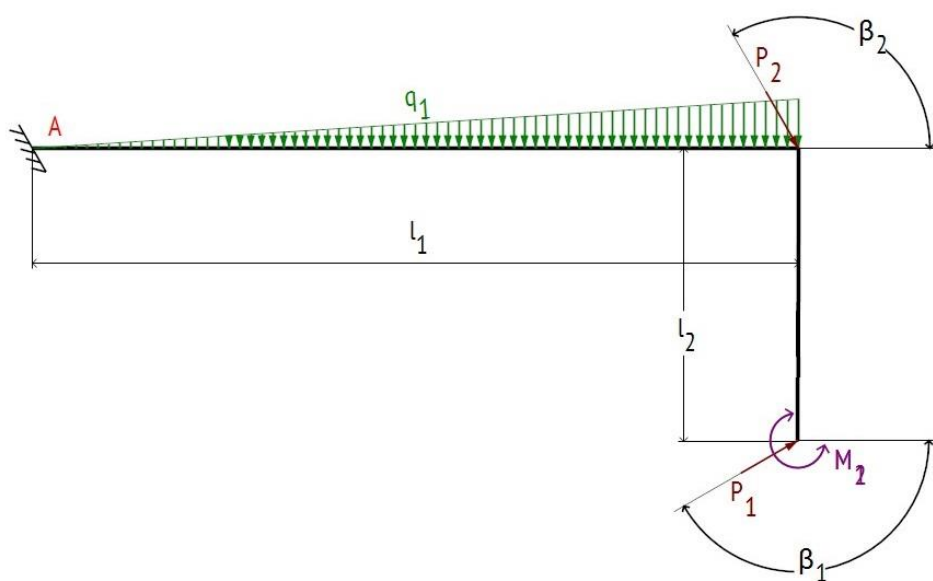
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 30^\circ$$

1



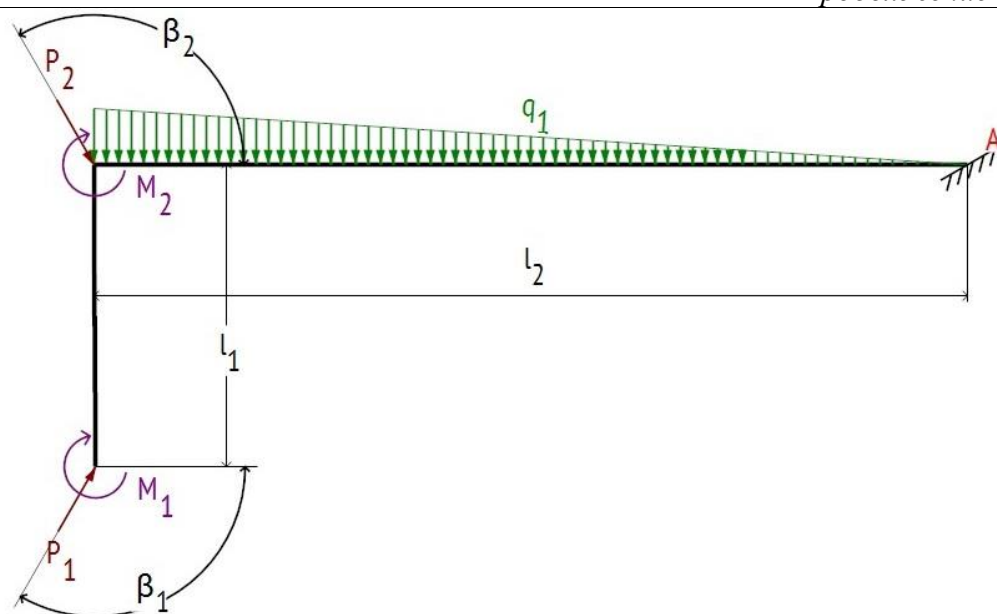
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

2



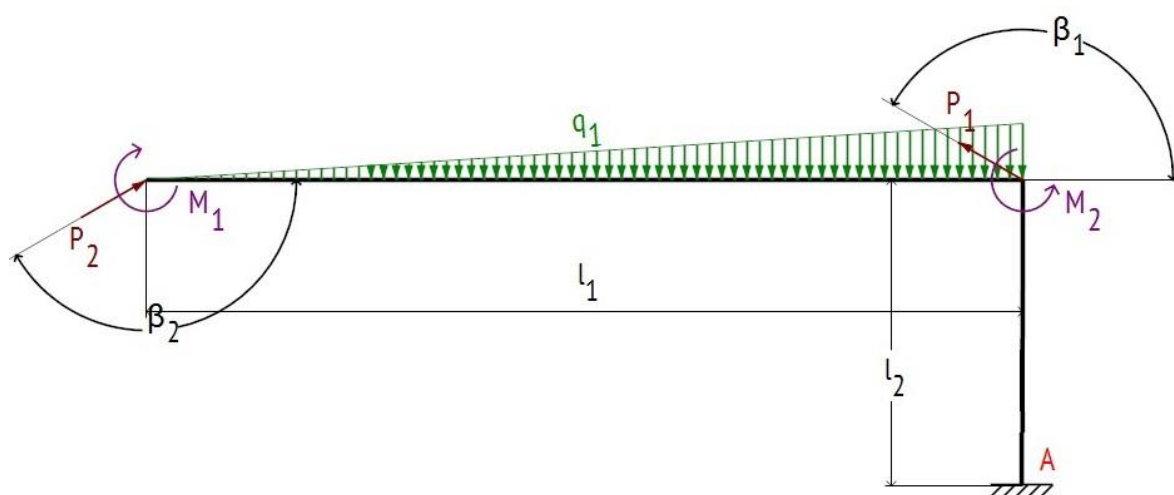
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

3



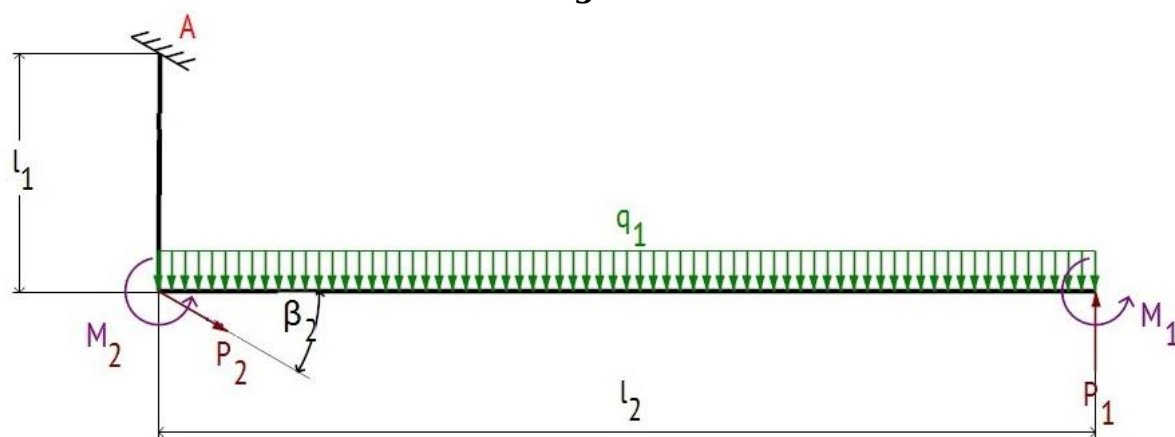
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

4



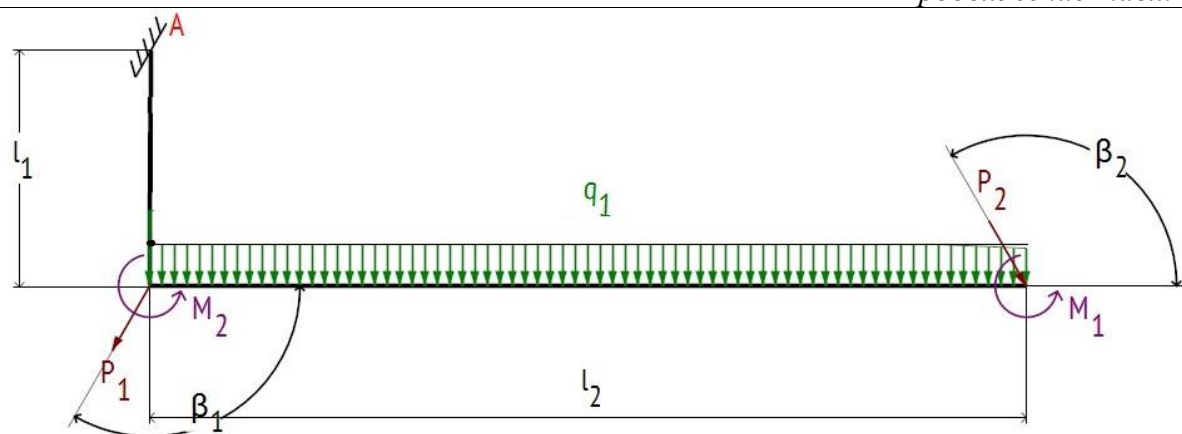
$$\beta_1 = \beta_2 = 150^\circ$$

5



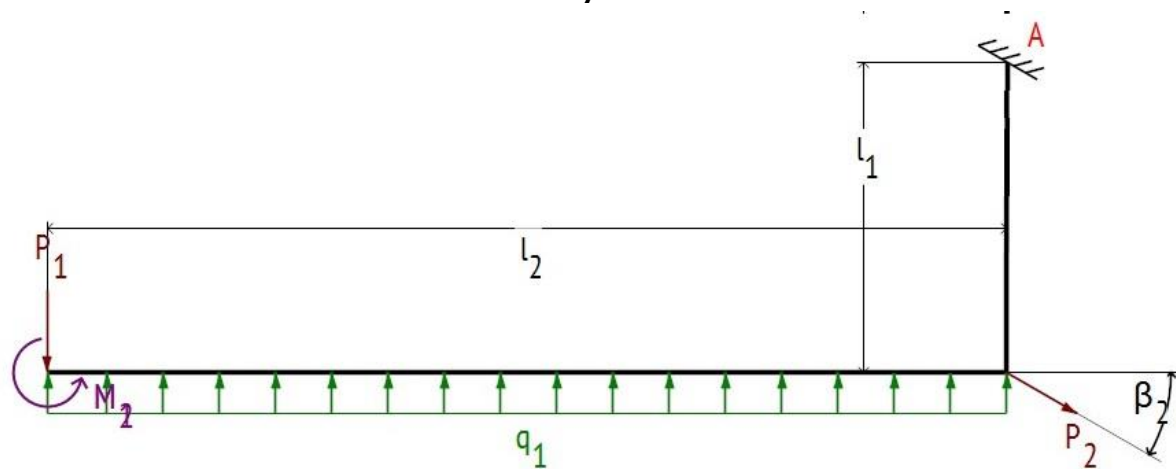
$$\beta_2 = 30^\circ$$

6



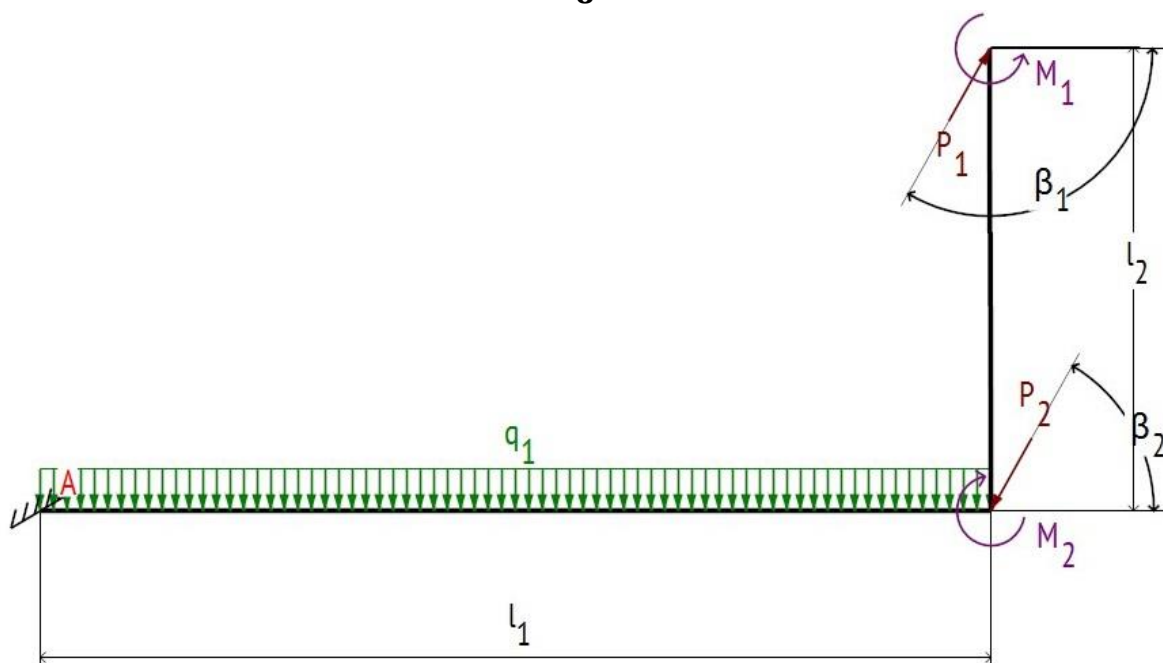
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

7



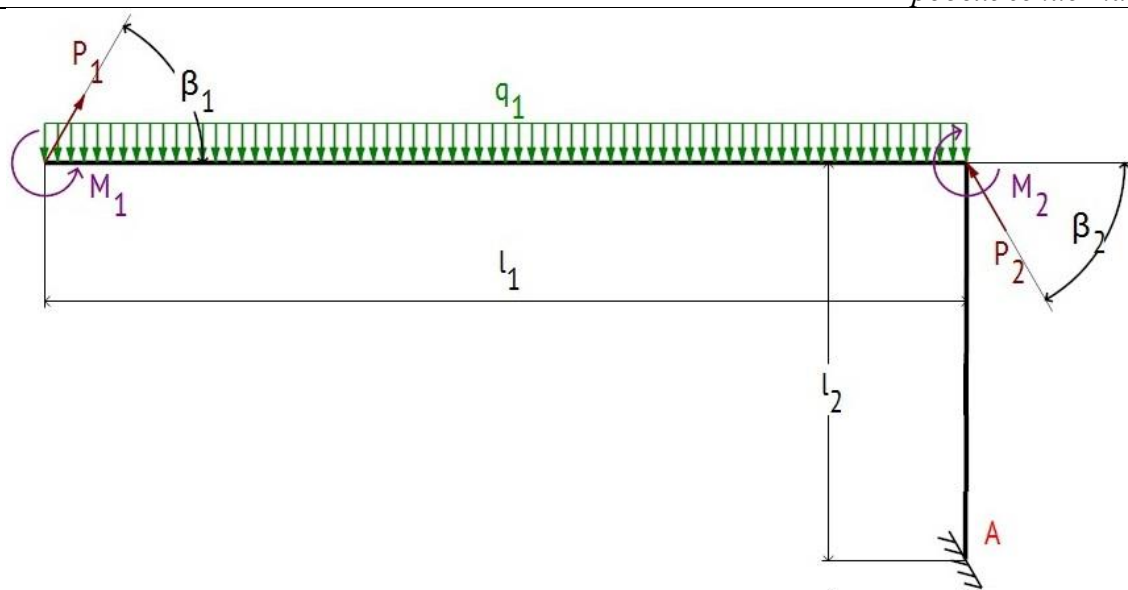
$$\beta_2 = 30^\circ$$

8

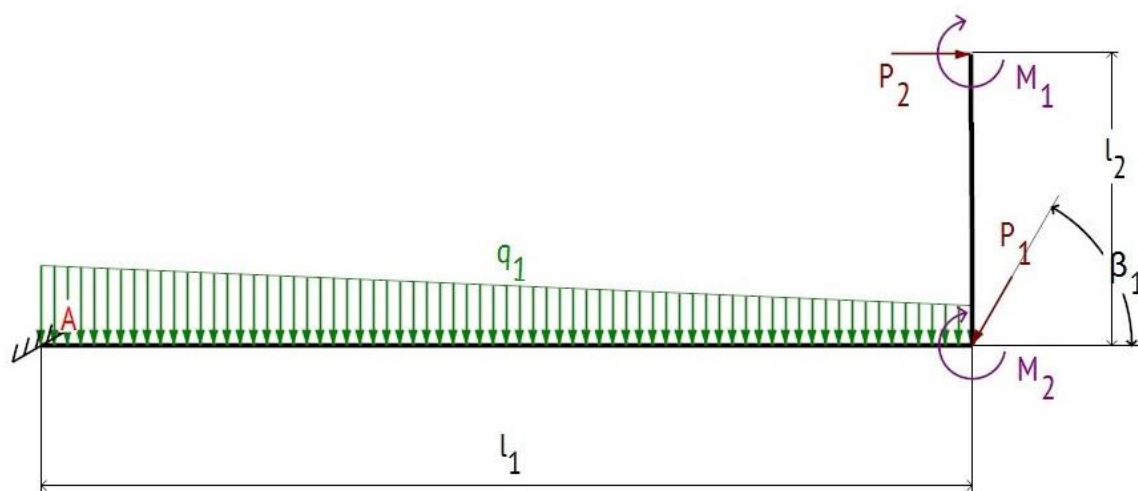


$$\beta_1 = 120^\circ, \beta_2 = 60^\circ$$

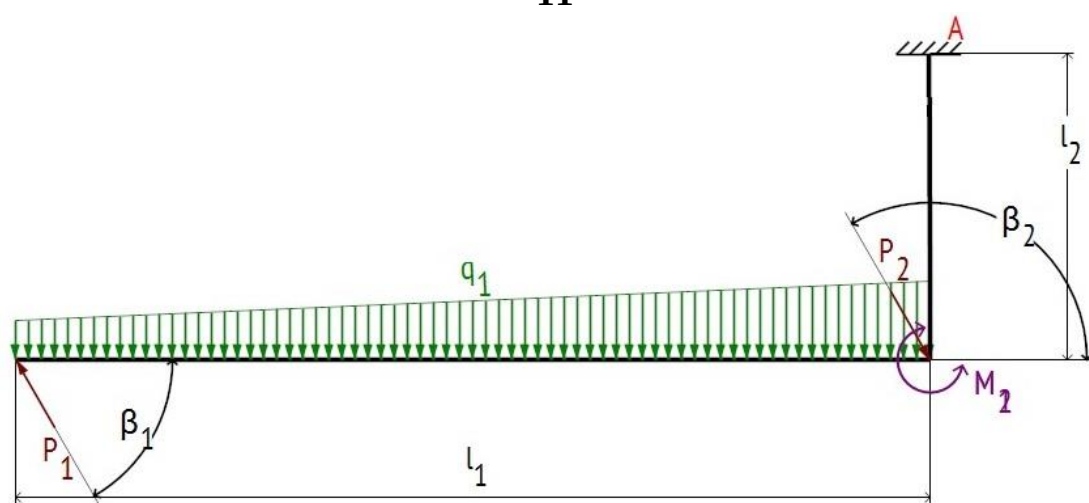
9



$$\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$$

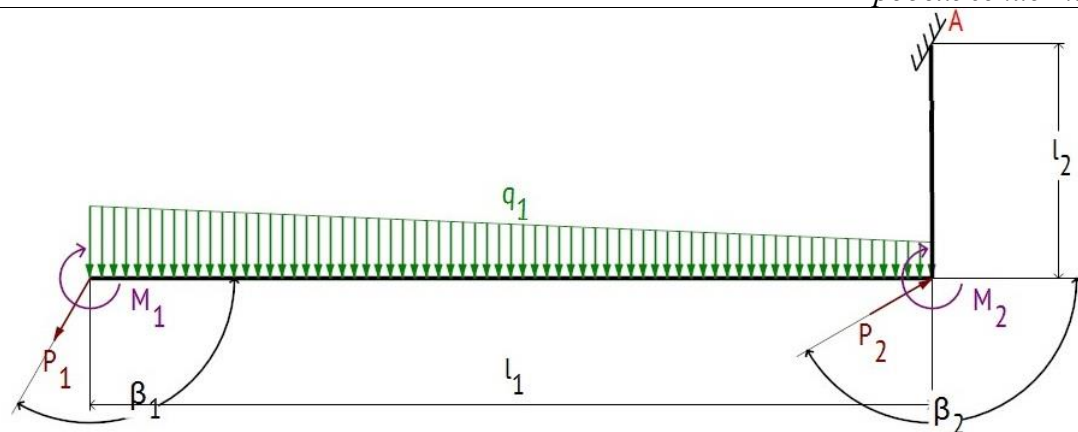
10

$$\beta_1 = 60^\circ$$

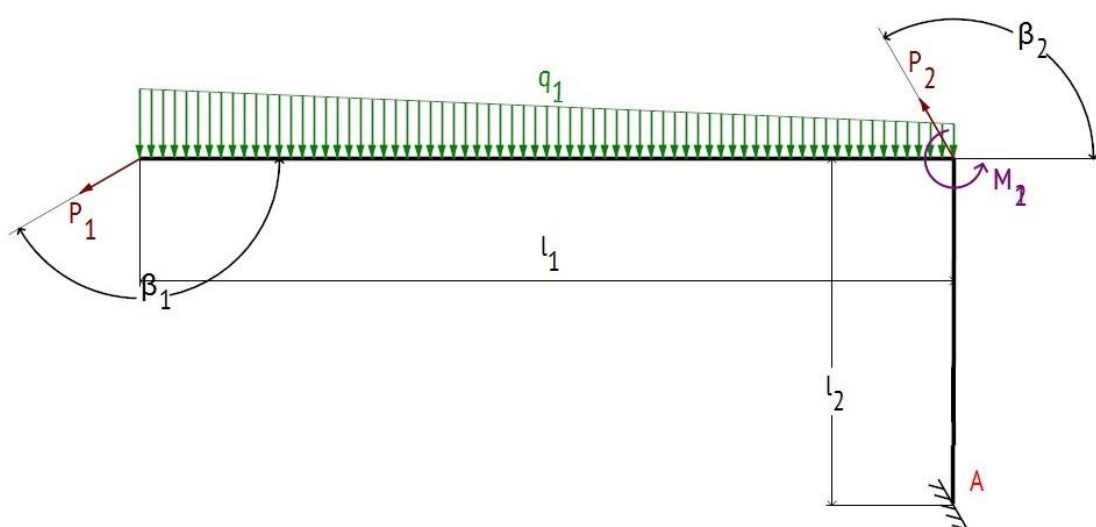
11

$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

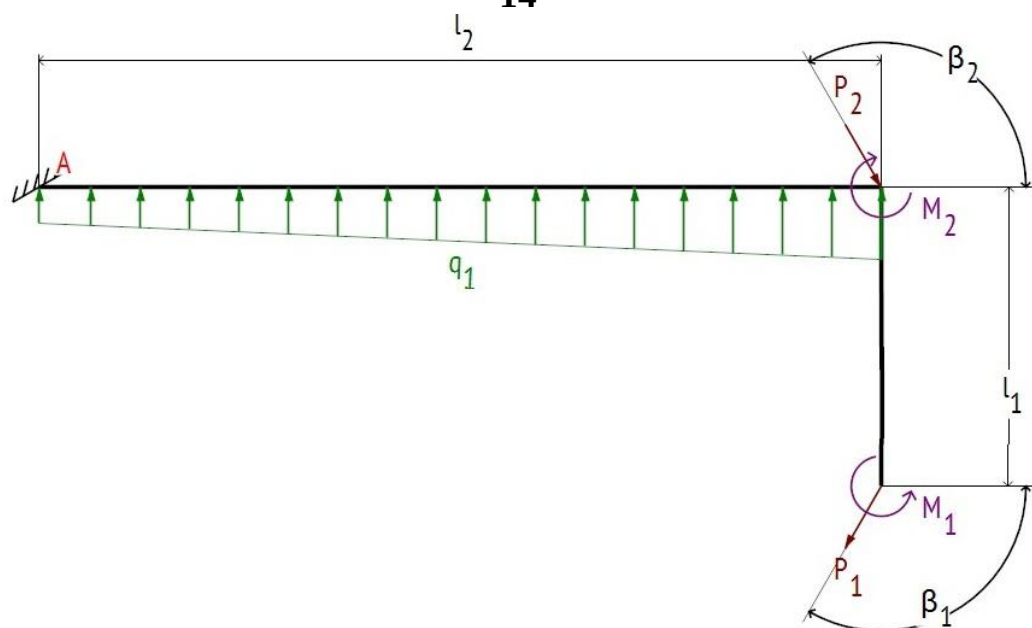
12



$$\beta_1 = 120^\circ, \beta_2 = 150^\circ$$

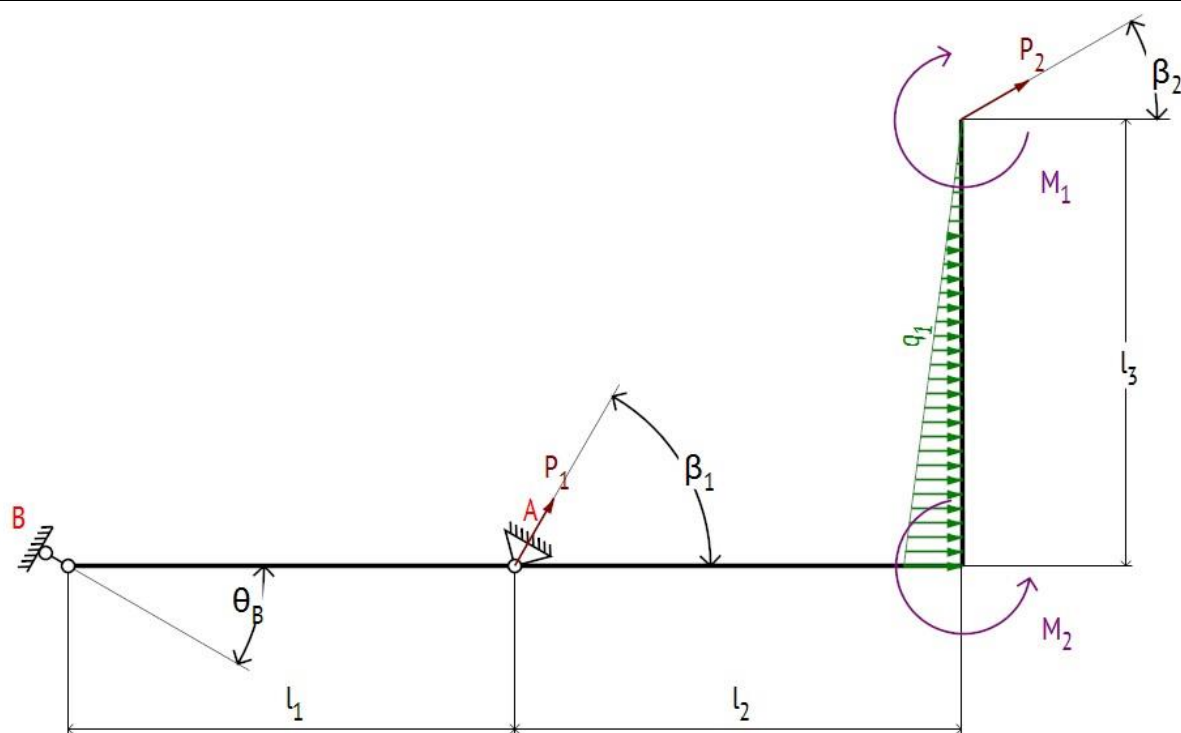
13

$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

14

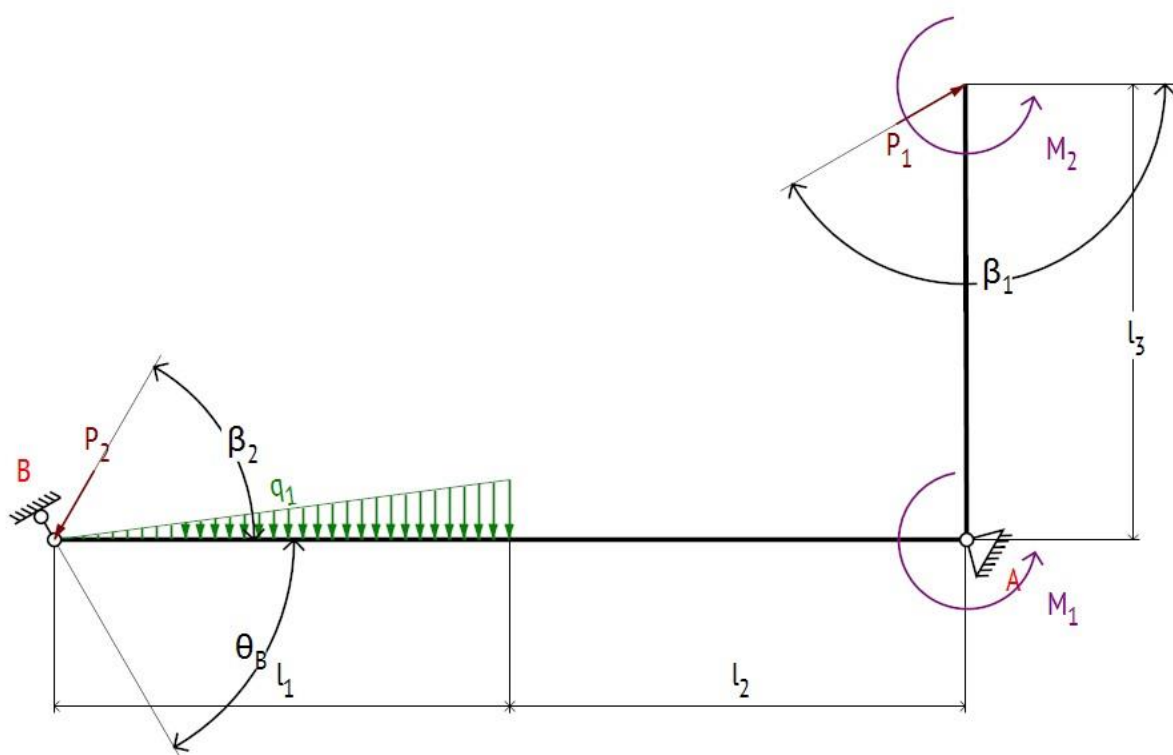
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

15



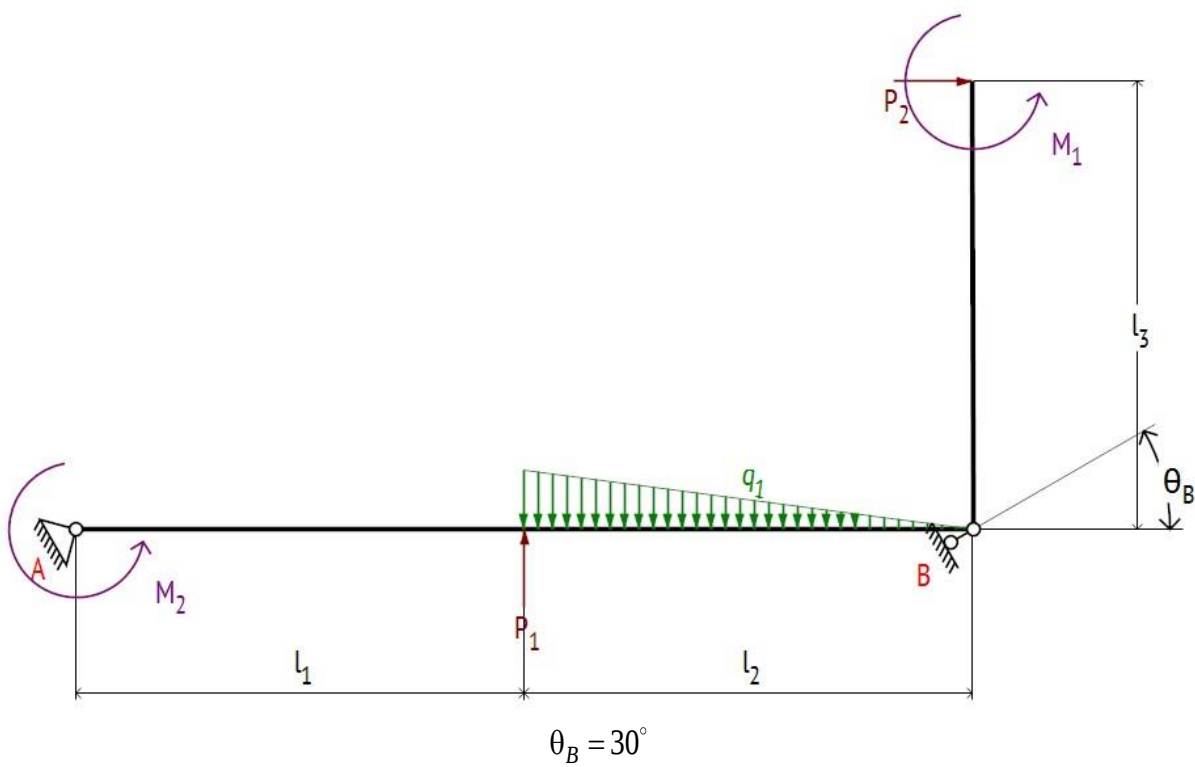
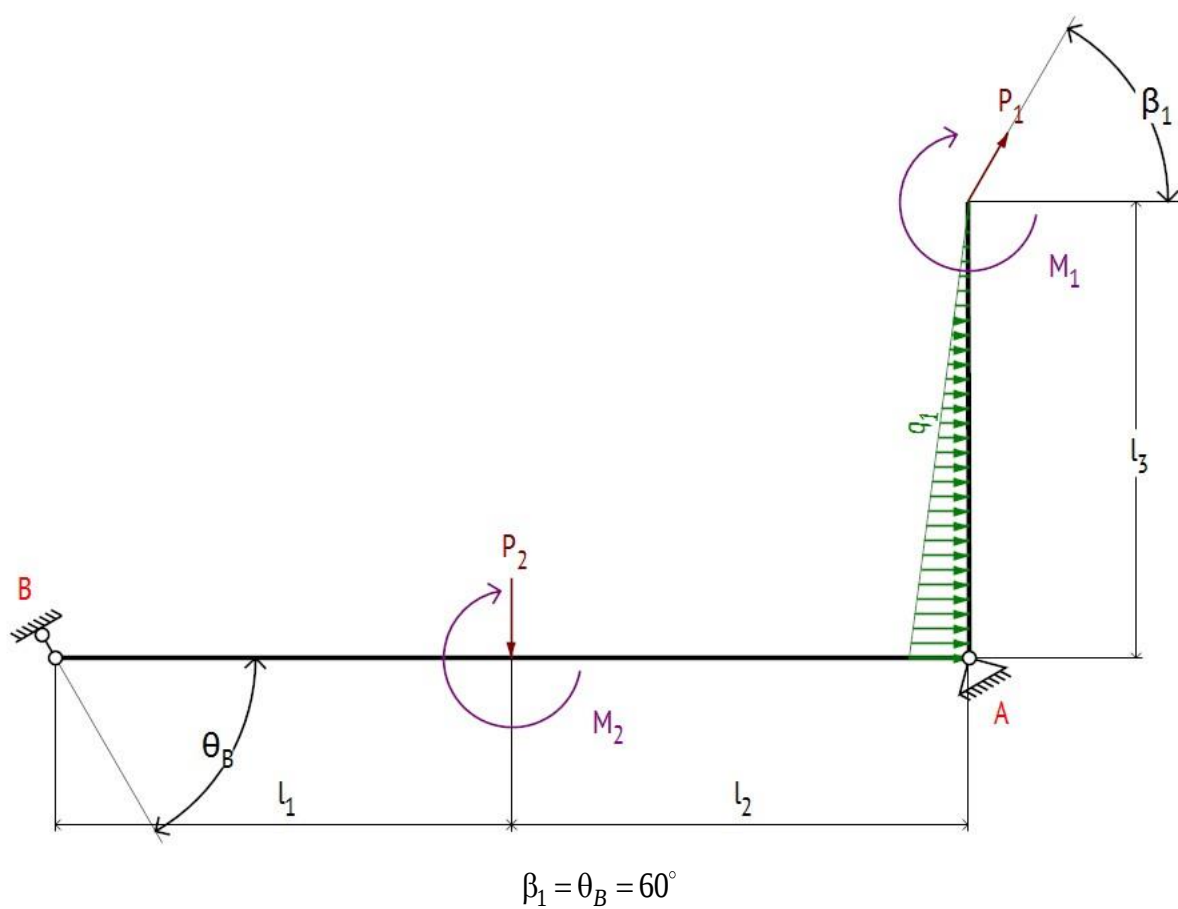
$$\beta_2 = \theta_B = 30^\circ, \beta_1 = 60^\circ$$

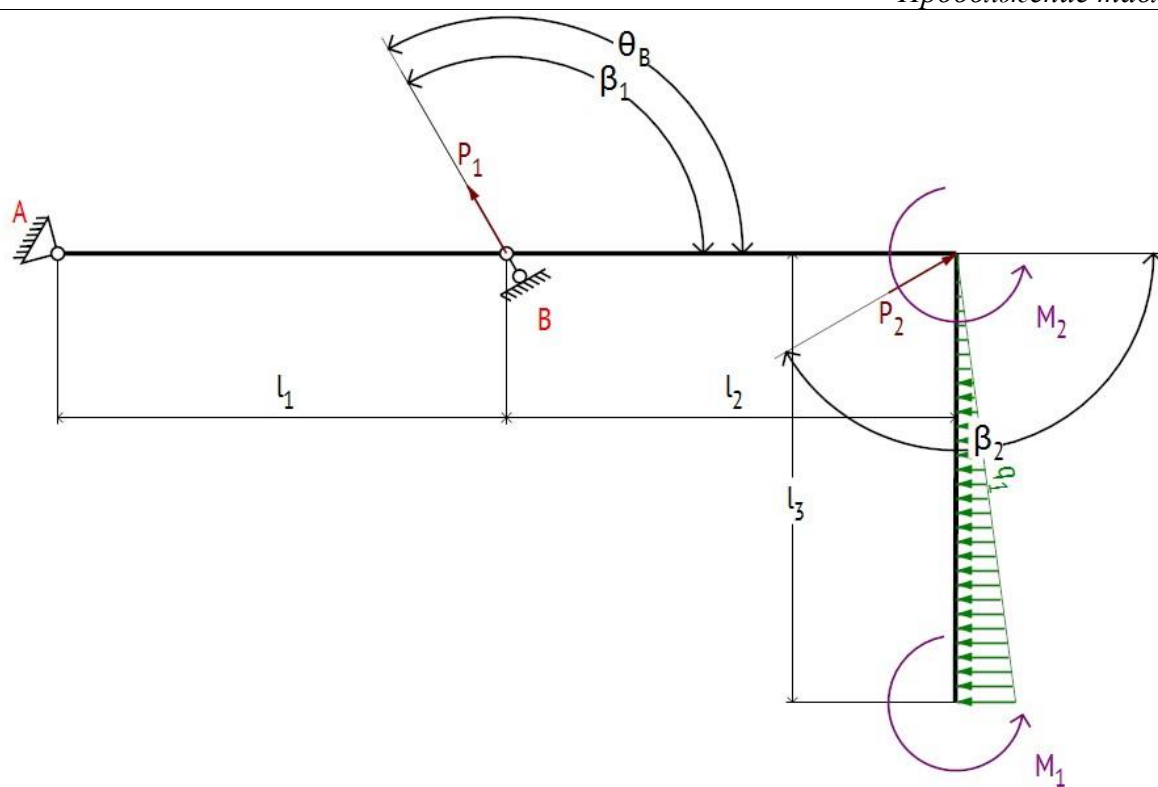
16



$$\beta_2 = \theta_B = 60^\circ, \beta_1 = 150^\circ$$

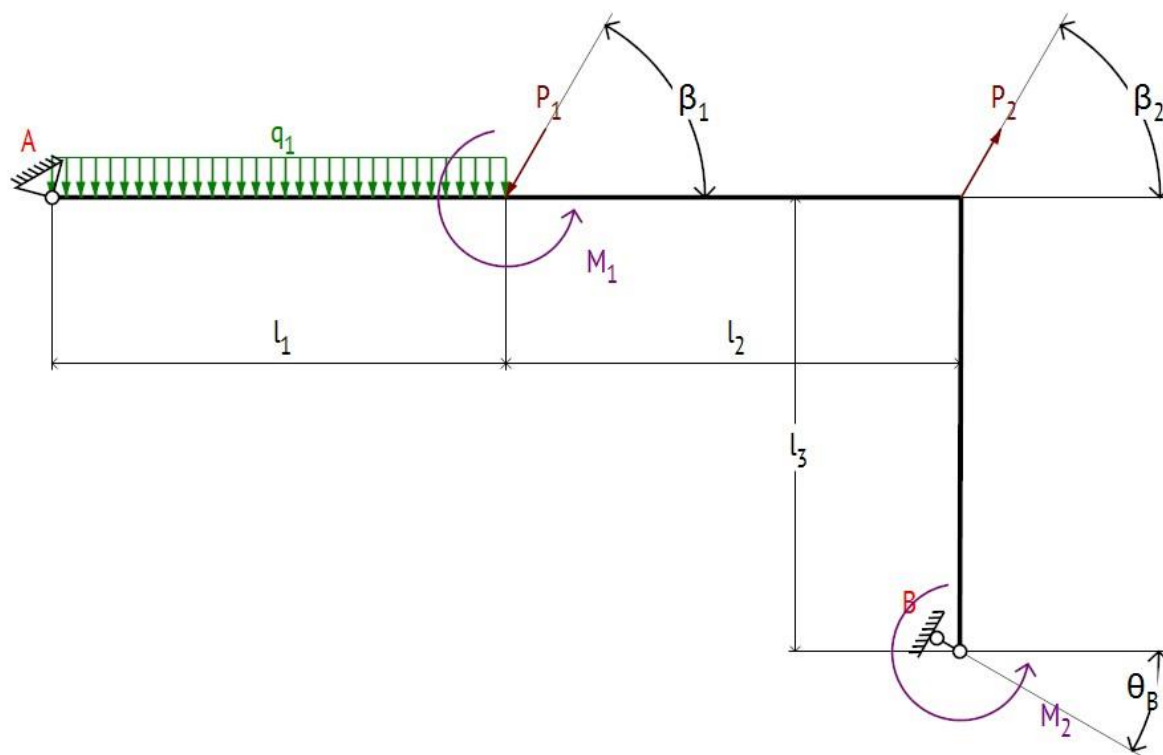
17

**18****19**



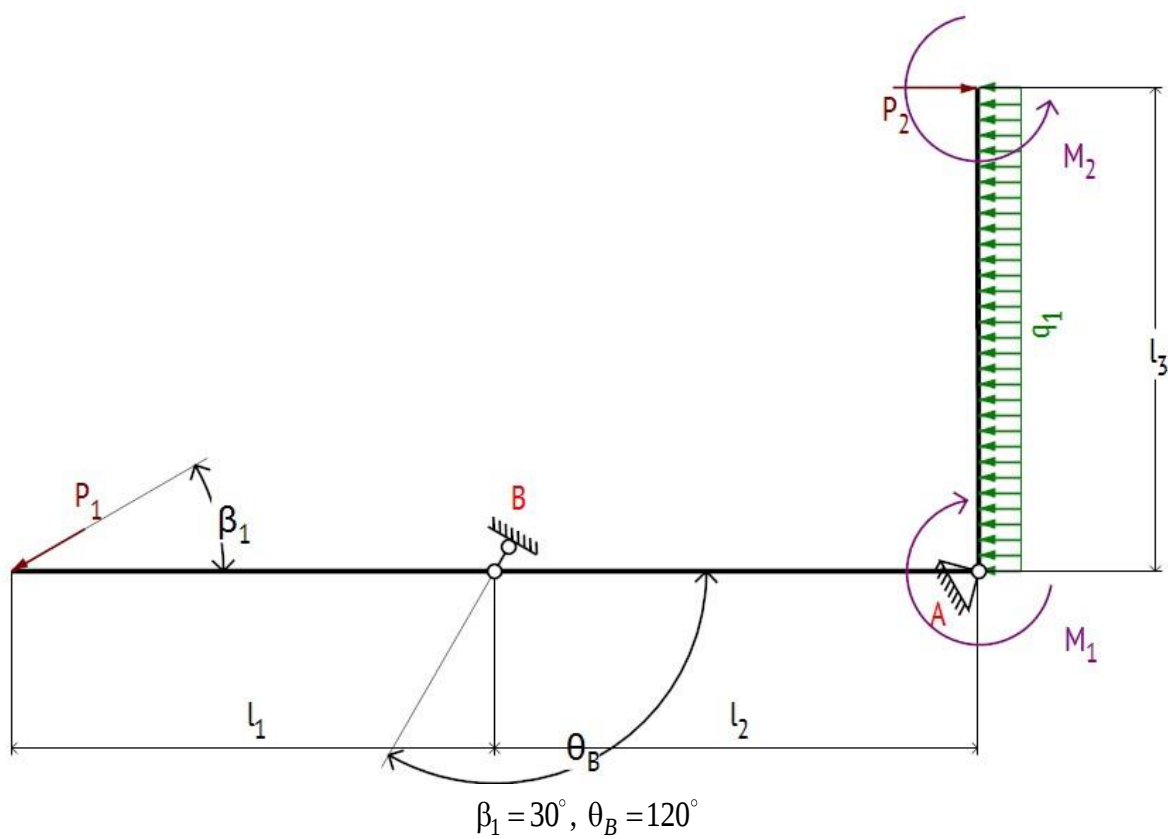
$$\beta_1 = \theta_B = 120^\circ, \beta_2 = 150^\circ$$

20

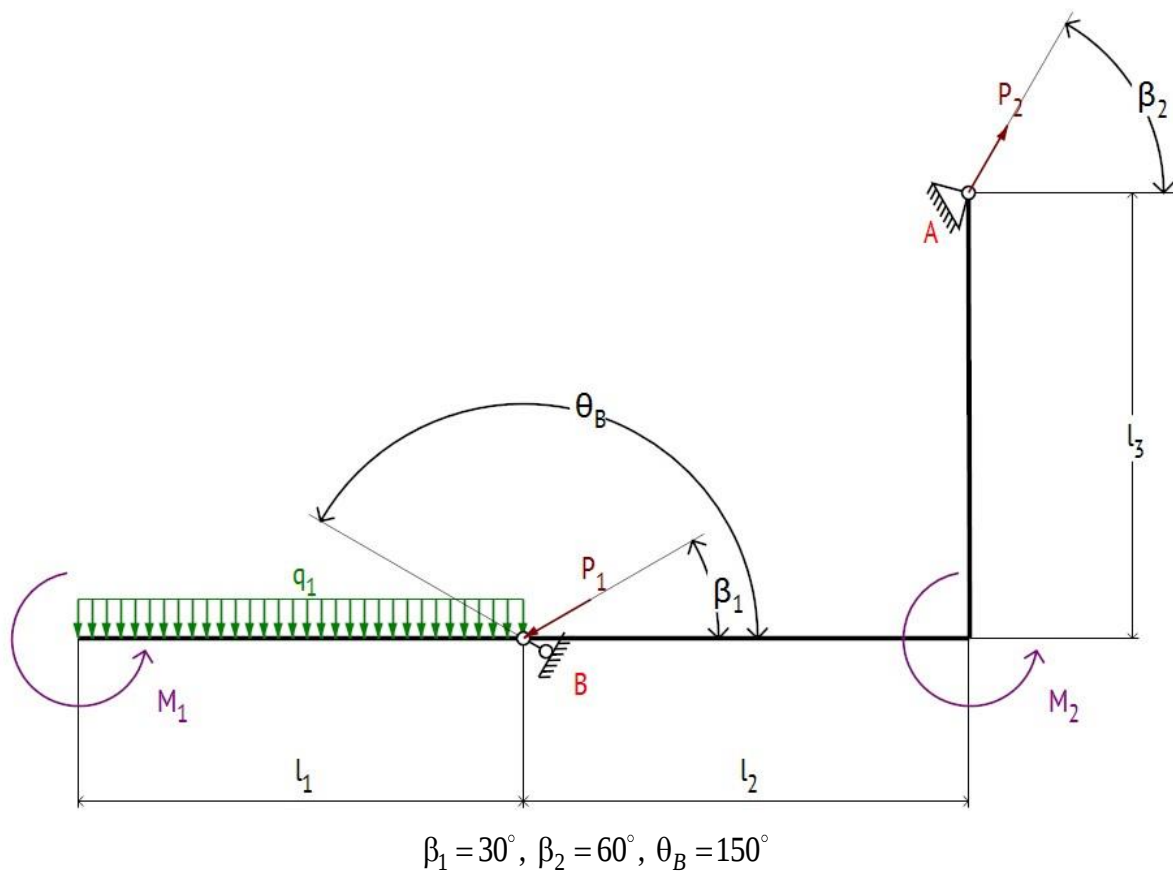


$$\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ, \theta_B = 30^\circ$$

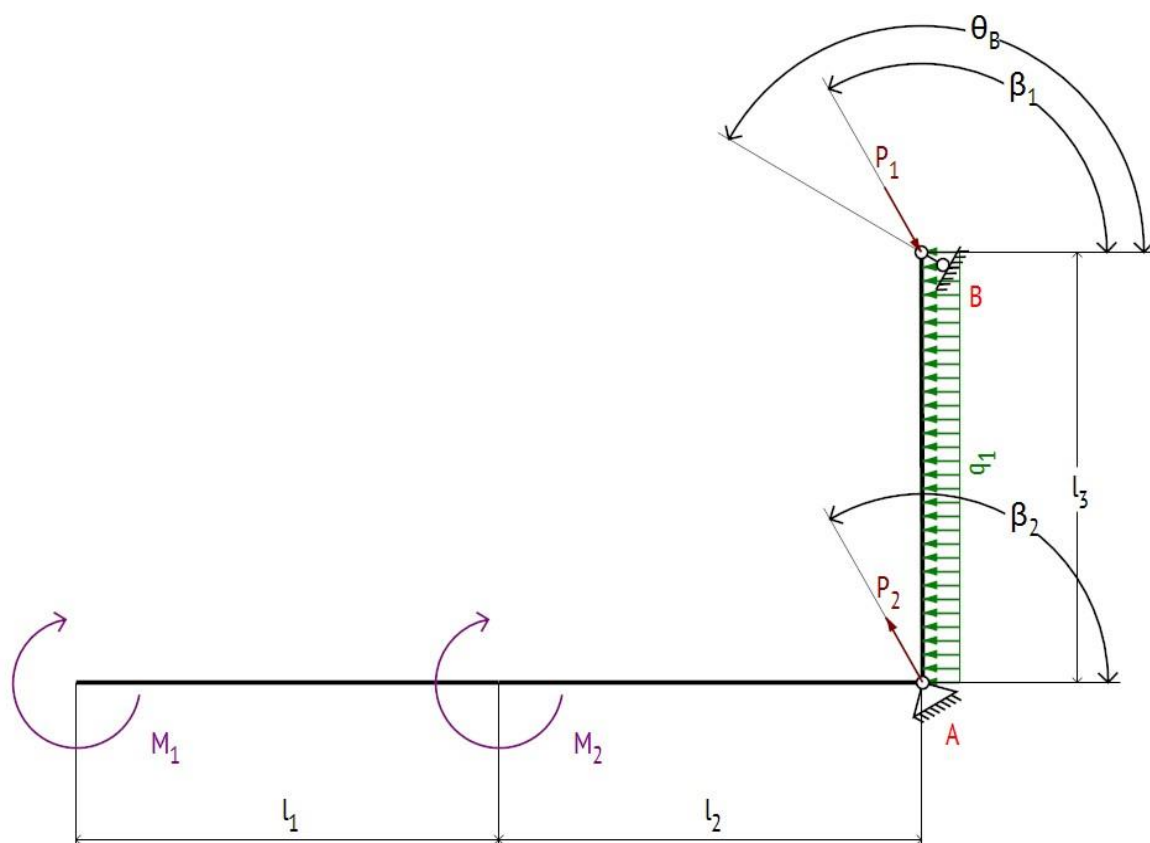
21



22

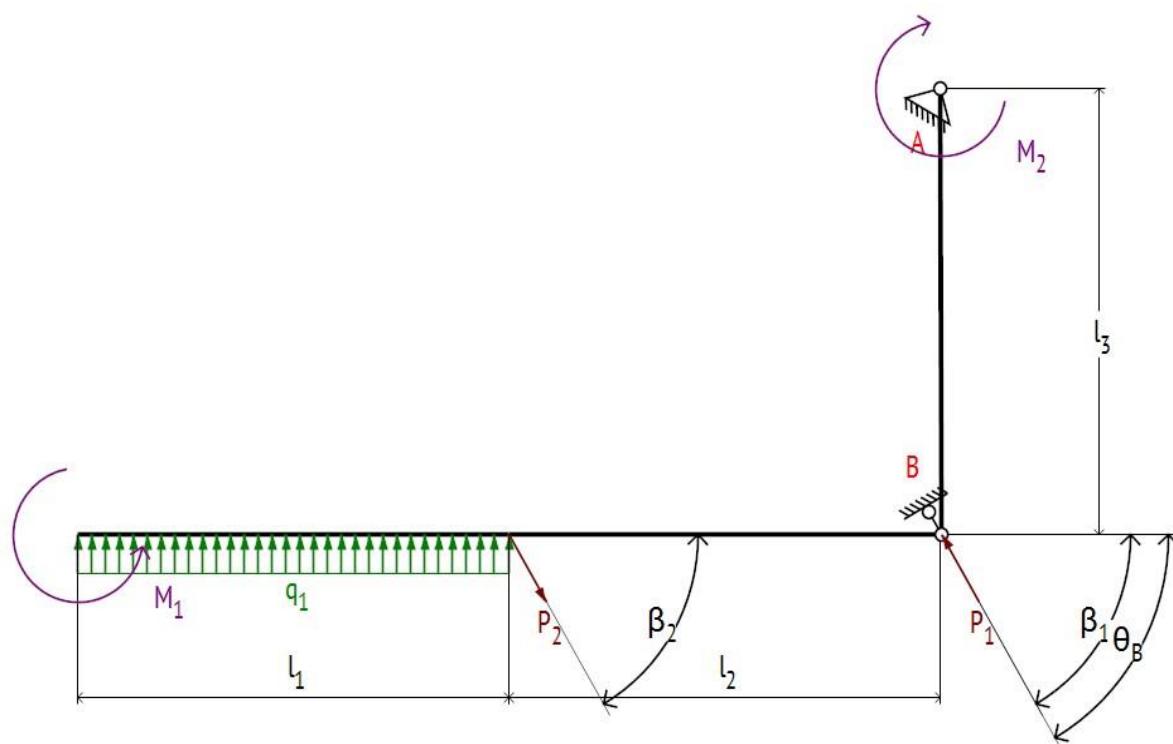


23



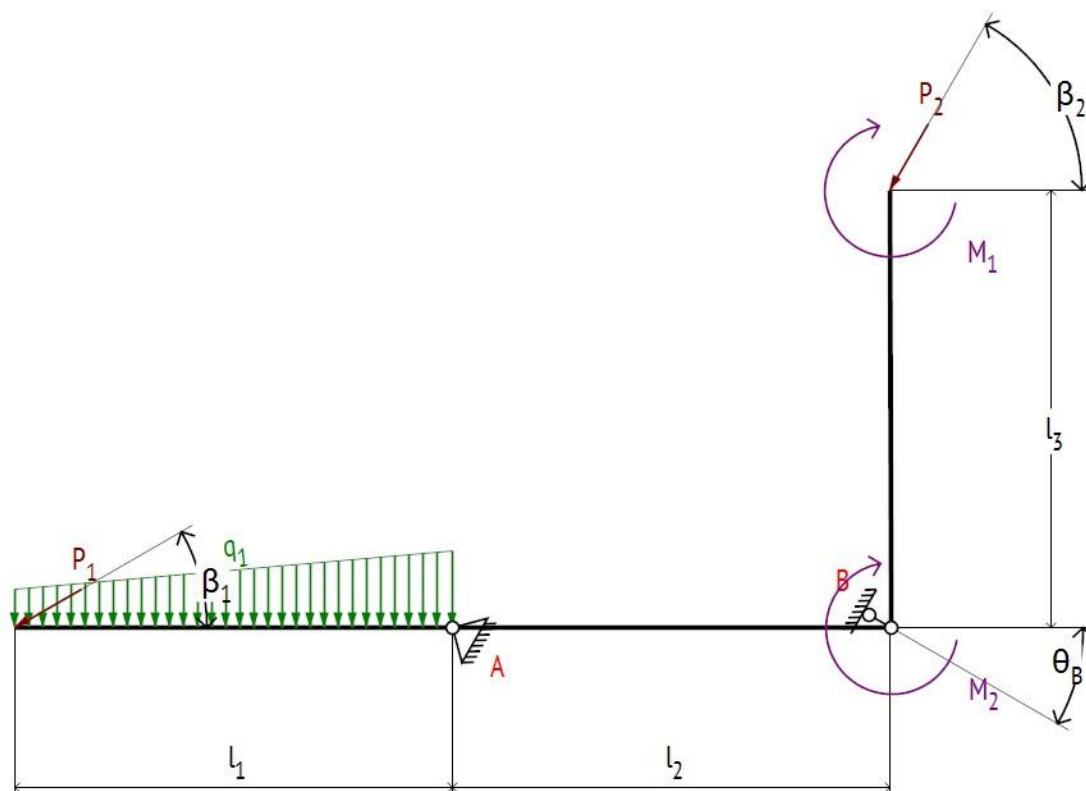
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ, \theta_B = 150^\circ$$

24



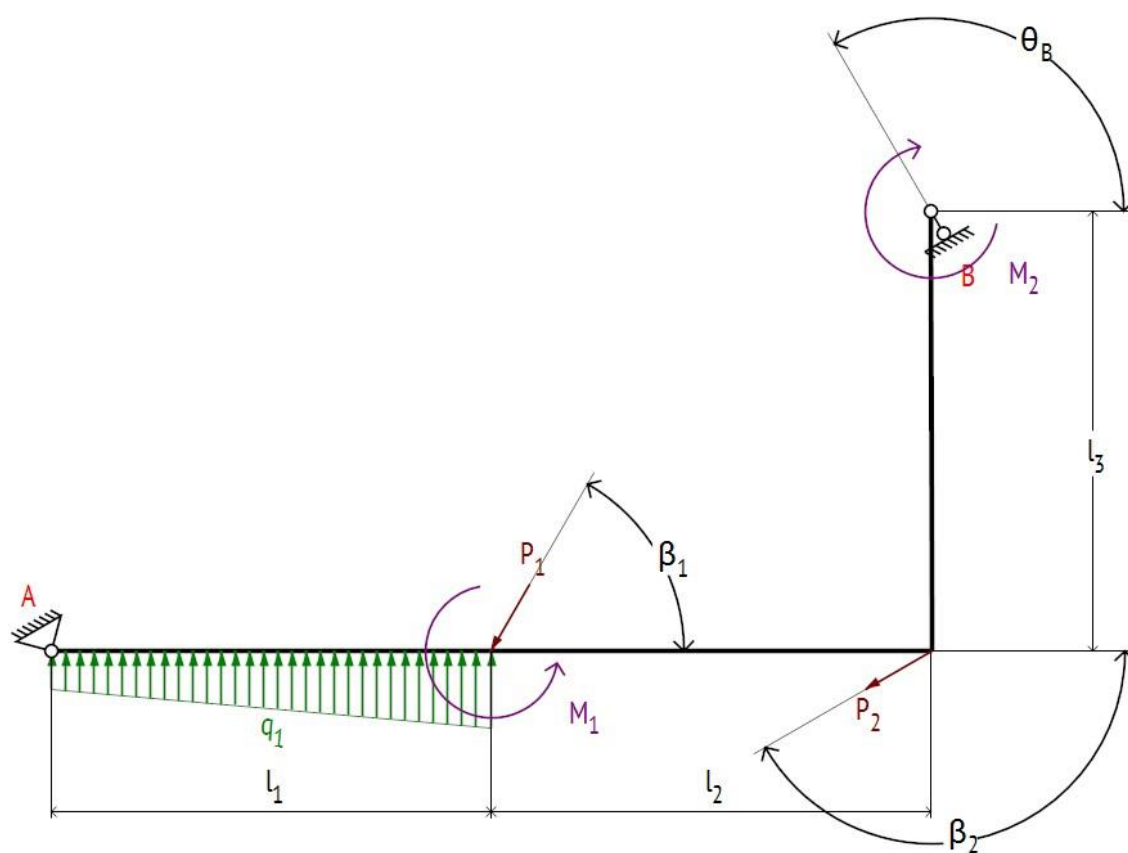
$$\beta_1 = \beta_2 = \theta_B = 60^\circ$$

25



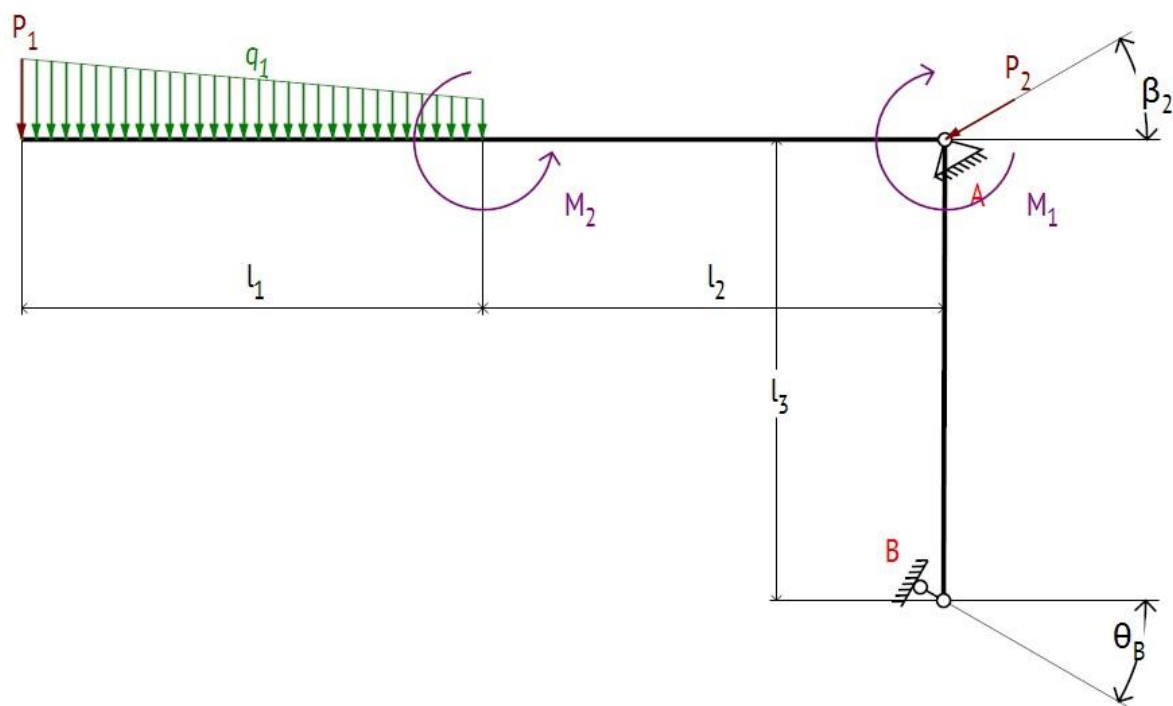
$$\beta_1 = \theta_B = 30^\circ, \beta_2 = 60^\circ$$

26



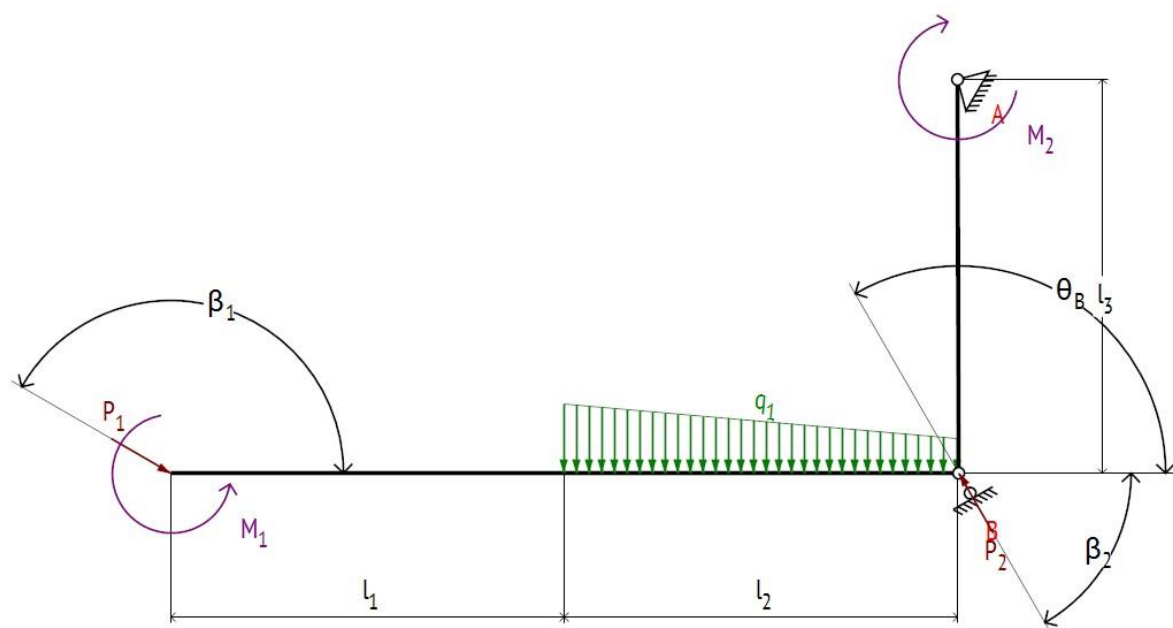
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 150^\circ, \theta_B = 120^\circ$$

27



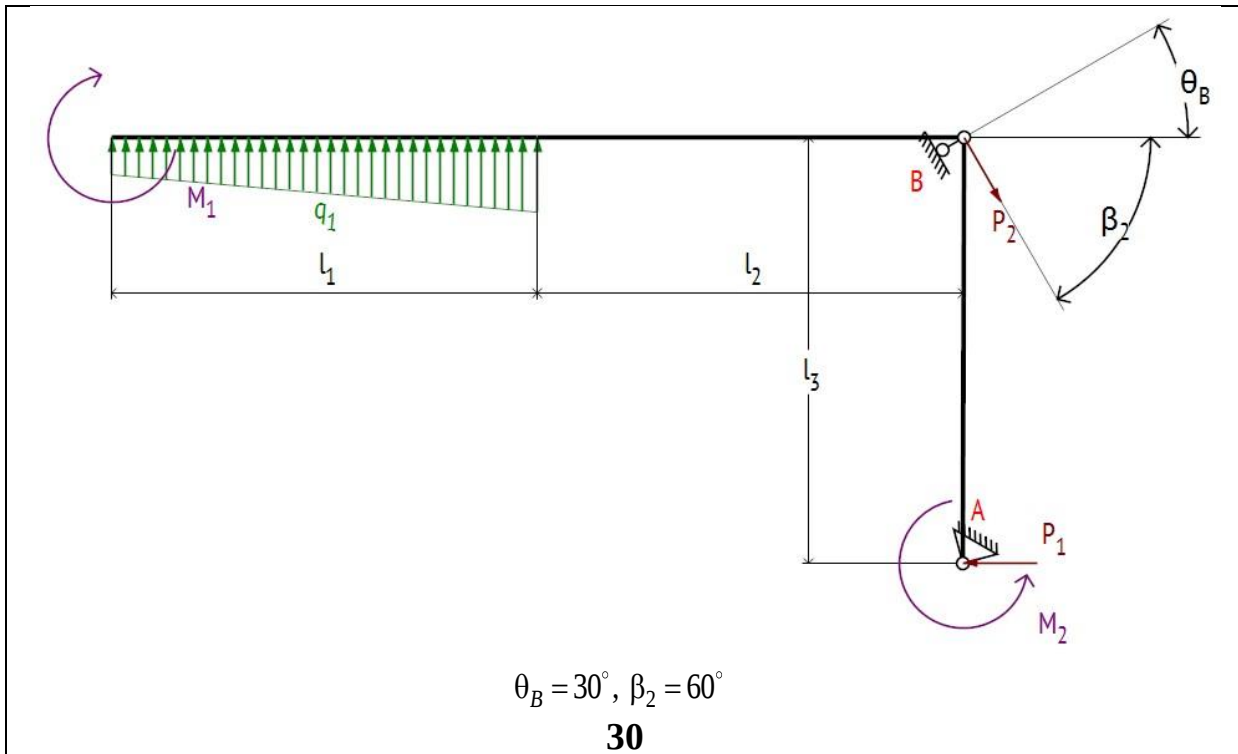
$$\beta_2 = \theta_B = 30^\circ$$

28



$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 60^\circ, \theta_B = 120^\circ$$

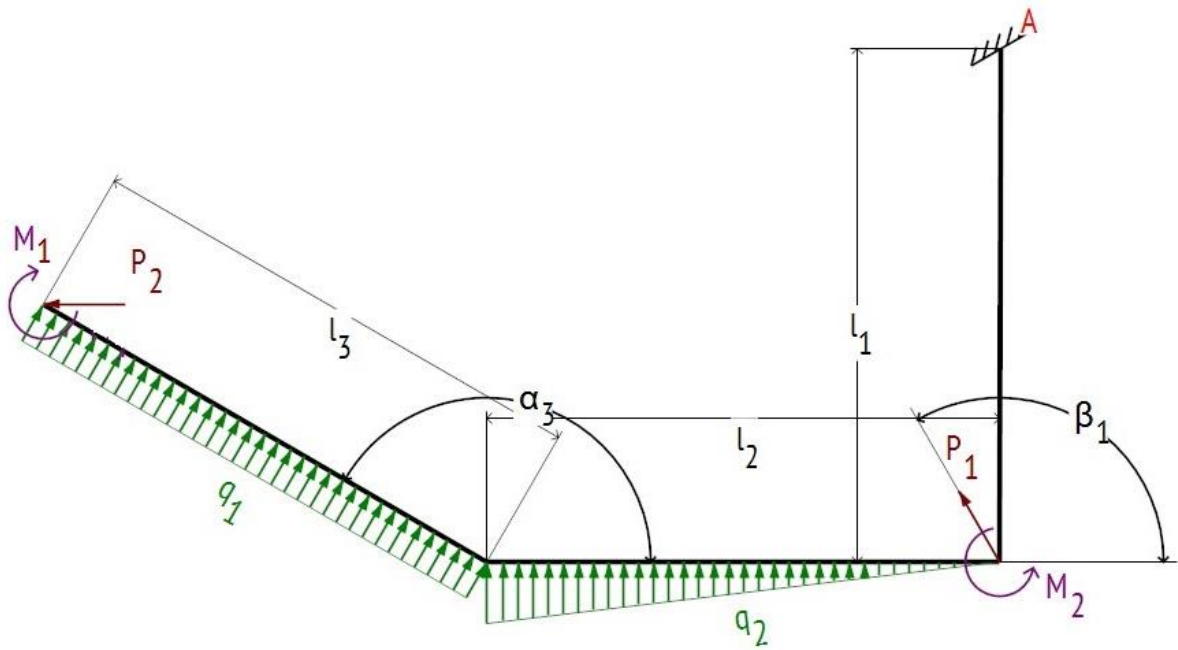
29



1.1.3 Задания С-3 (1 – 30)

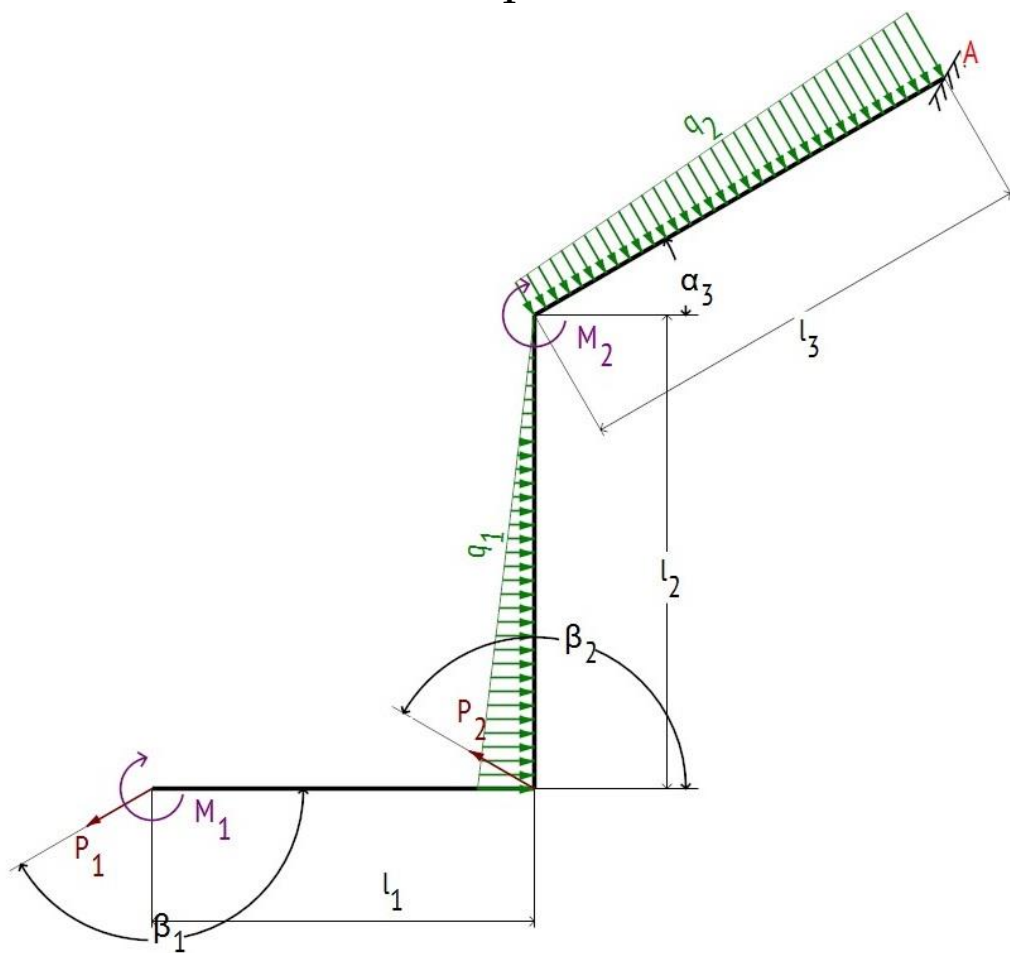
Условие задачи: Жёсткая рама закреплена в точке A при помощи жёсткой заделки (варианты 1-15) либо в точке A при помощи шарнирно-неподвижной опоры, в точке B – шарнирно-подвижной опоры (варианты 16-30). К раме приложены силы $P_1=10$ Н и $P_2=20$ Н, пары сил с моментами $M_1=25$ Нм и $M_2=50$ Нм, распределённые нагрузки с интенсивностью q_1 и q_2 (Н/м) (диапазоны значений от $q_{1\min}$ до $q_{1\max}$ и $q_{2\min}$ до $q_{2\max}$). *Определите* реакции, возникающие в опорах. Выполните проверку правильности решения. Размеры участков принимаем $l_1 = 0,12$ м, $l_2 = 0,20$ м, $l_3 = 0,16$ м. Расчётные схемы приведены в табл. 4.

Расчётные схемы к заданию С-3



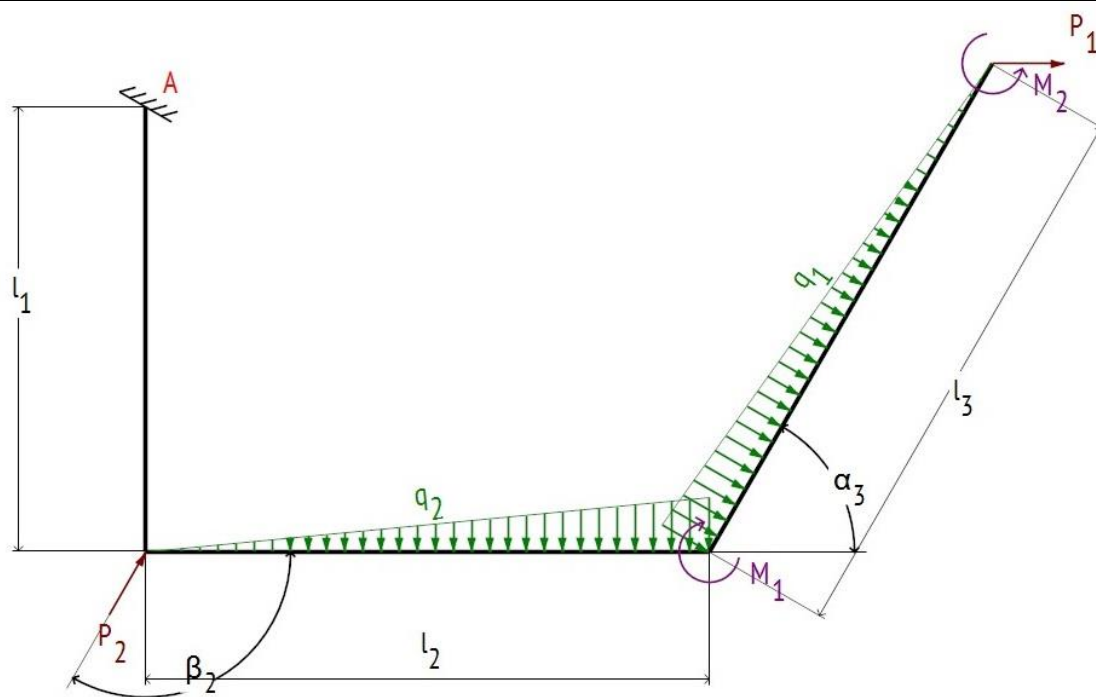
$$\beta_1 = 120^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 = 2(H/M), q_2 \in [0; 4](H/M)$$

1



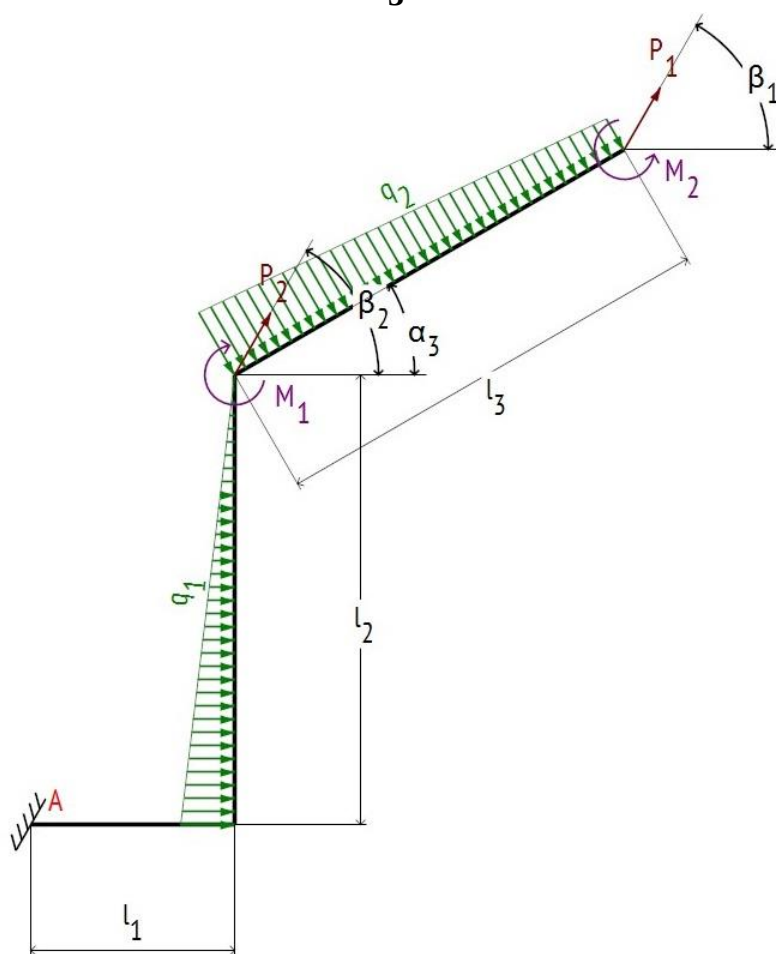
$$\beta_1 = 150^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_1 \in [0; 4](H/M), q_2 \in [2; 8](H/M)$$

2



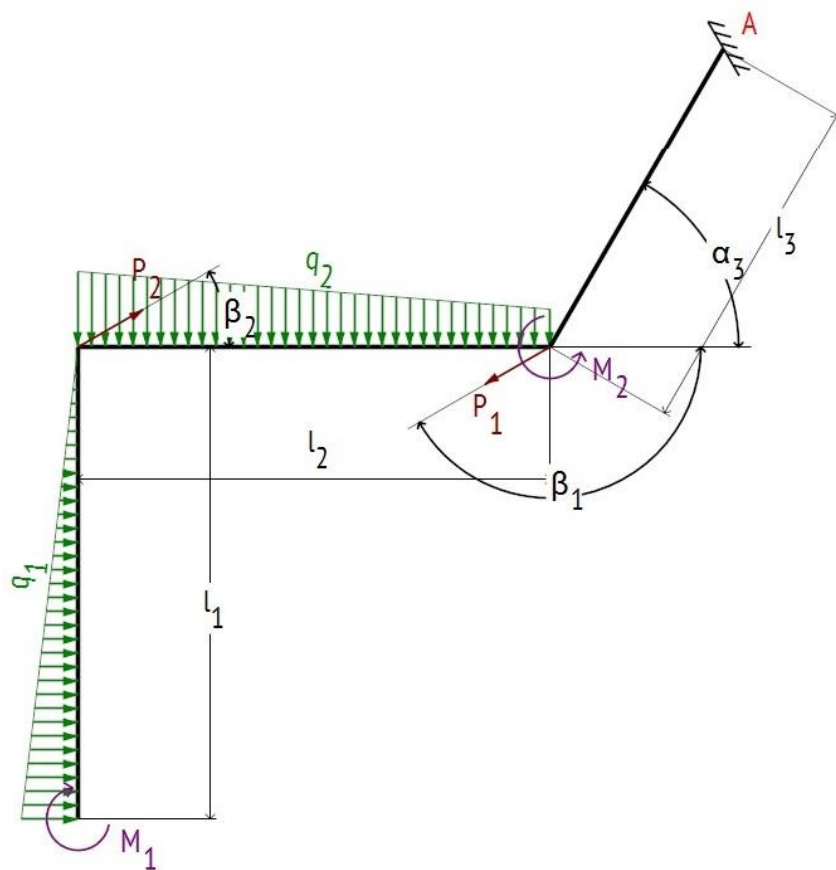
$$\beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 8](\text{H/M})$$

3



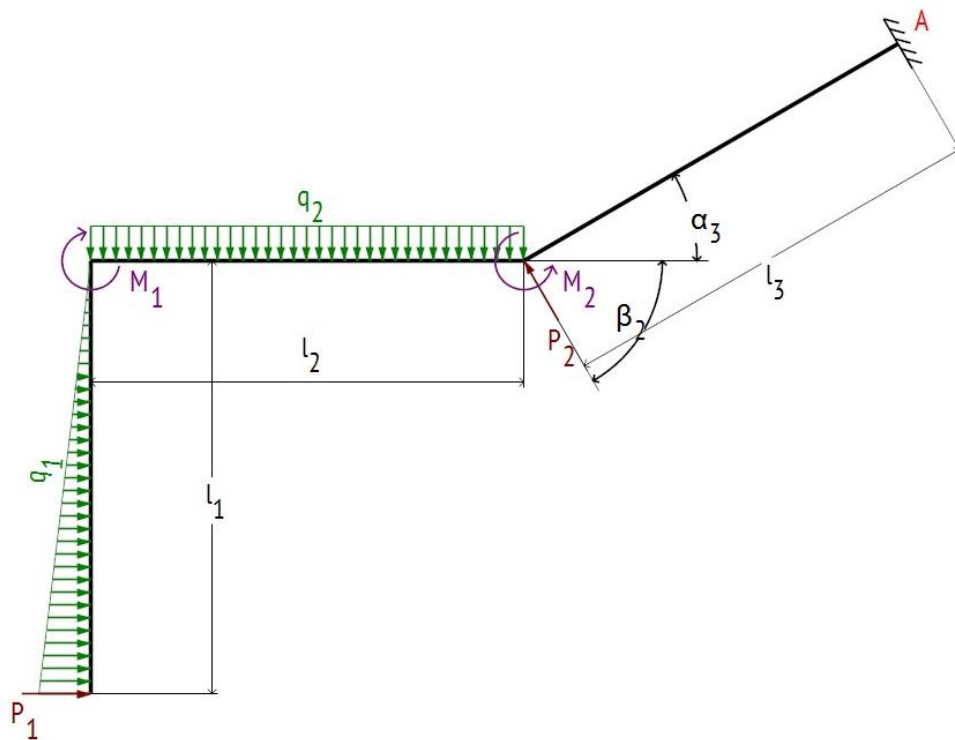
$$\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [2; 8](\text{H/M})$$

4



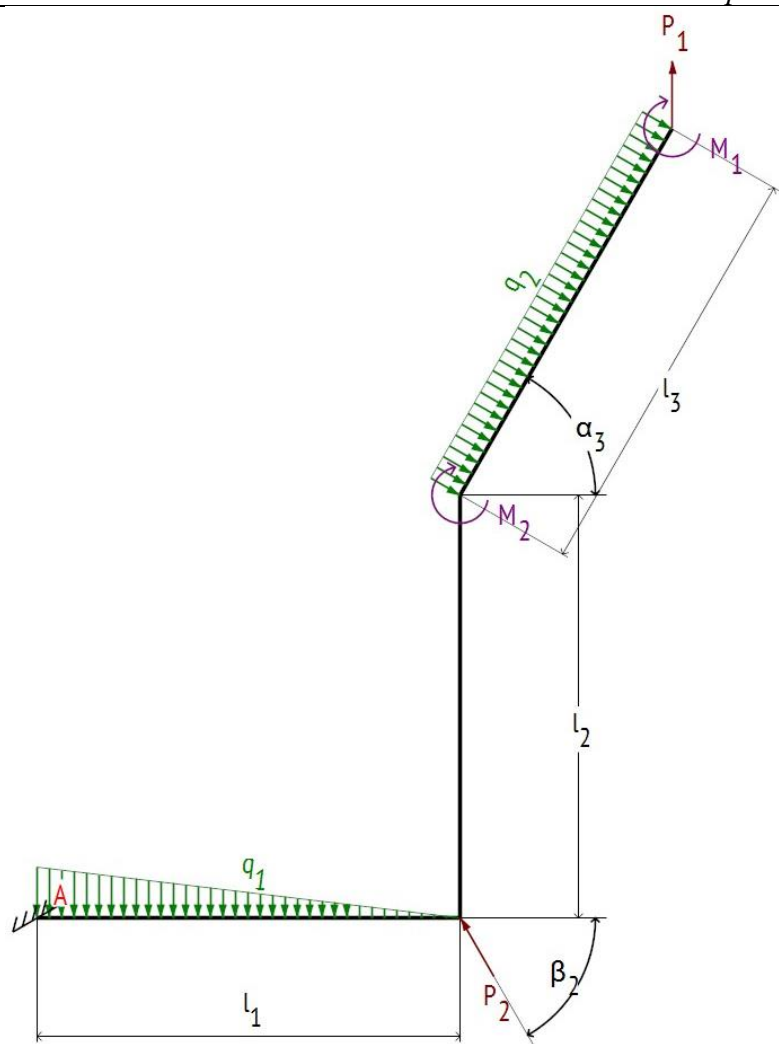
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 30^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [0; 2](\text{H/M}), q_2 \in [2; 6](\text{H/M})$$

5



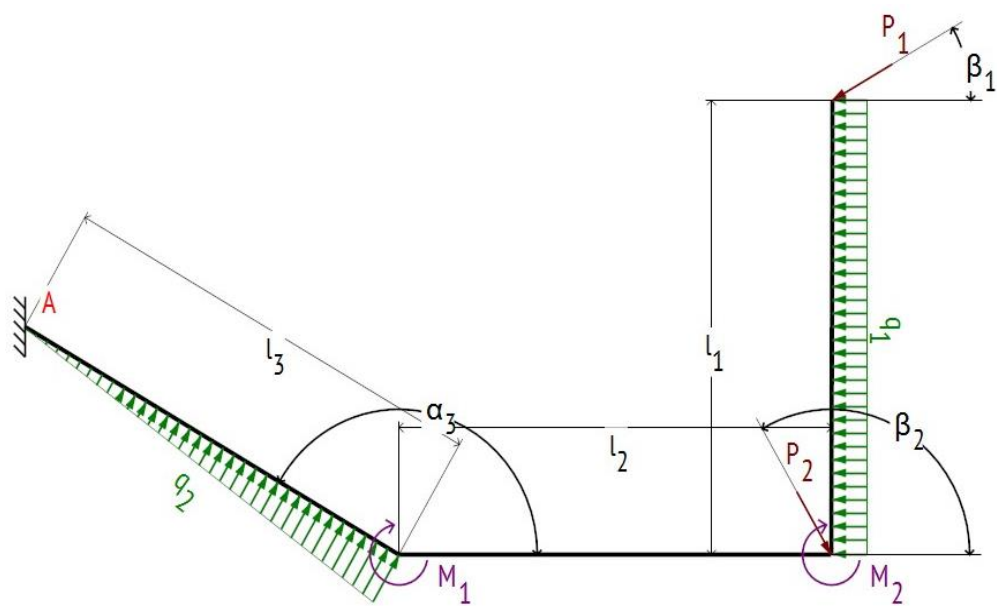
$$\beta_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [4; 4](\text{H/M})$$

6



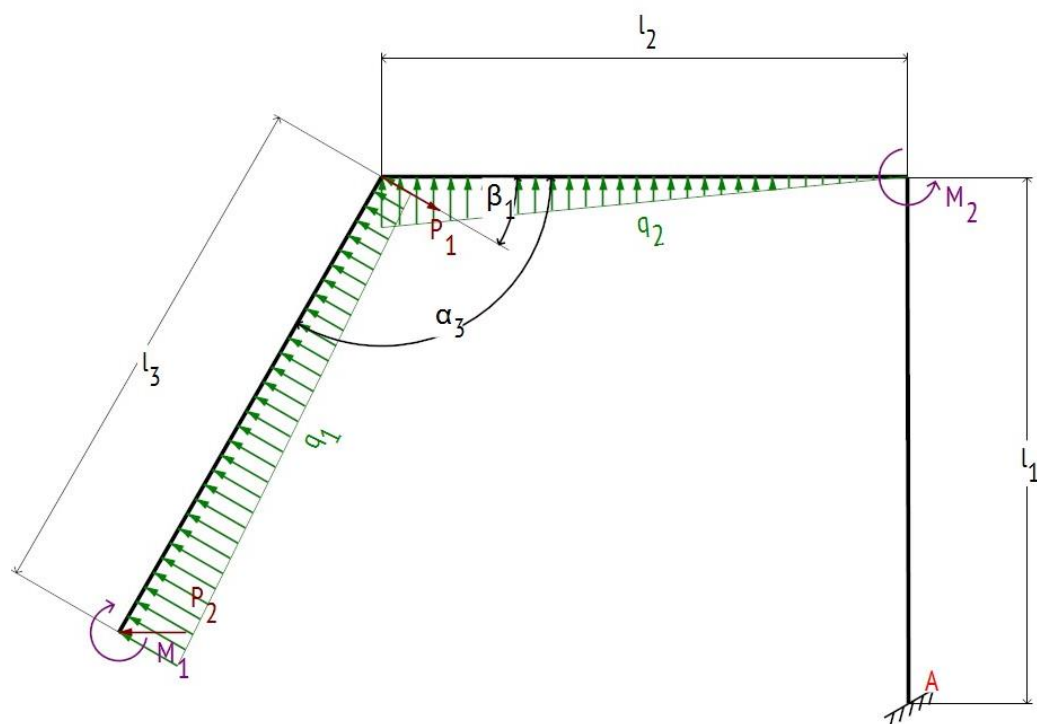
$$\beta_2 = \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [0; 2](H/M), q_2 \in [2; 2](H/M)$$

7



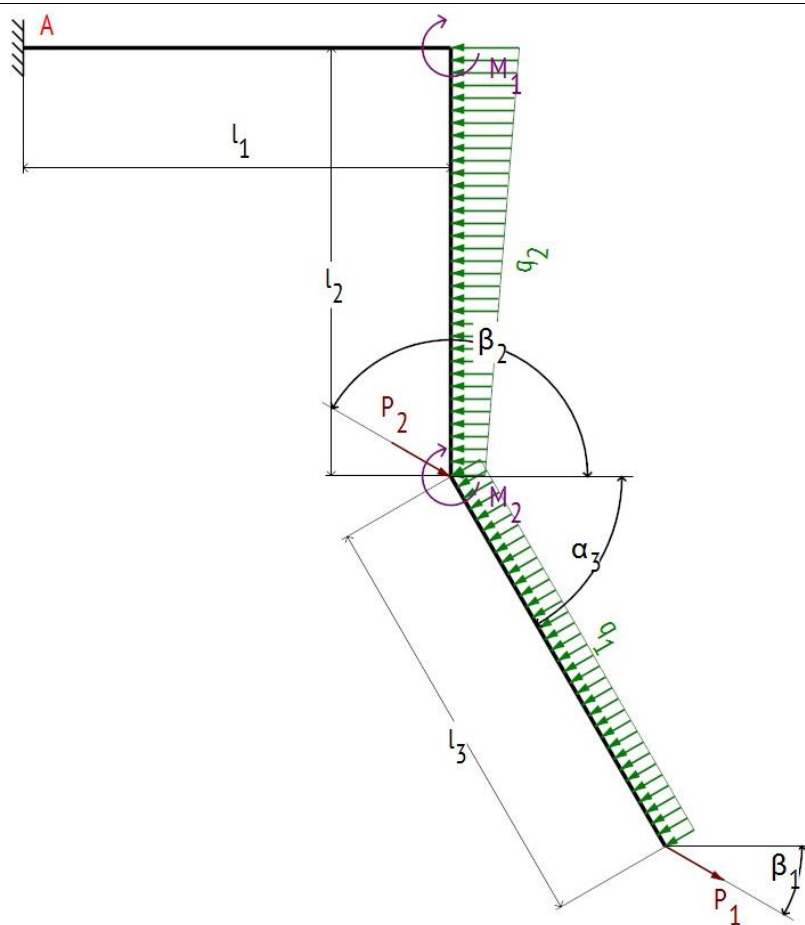
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [4; 4](H/M), q_2 \in [0; 8](H/M)$$

8



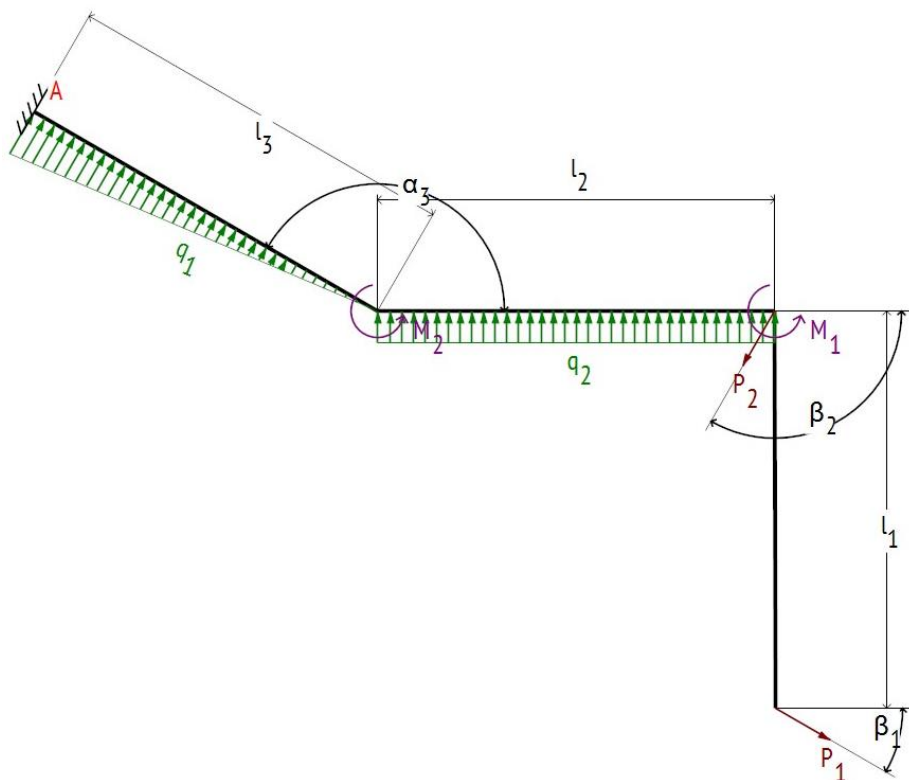
$$\beta_1 = 30^\circ, \alpha_3 = 120^\circ, q_1 \in [2; 4](H/M), q_2 \in [0; 4](H/M)$$

9



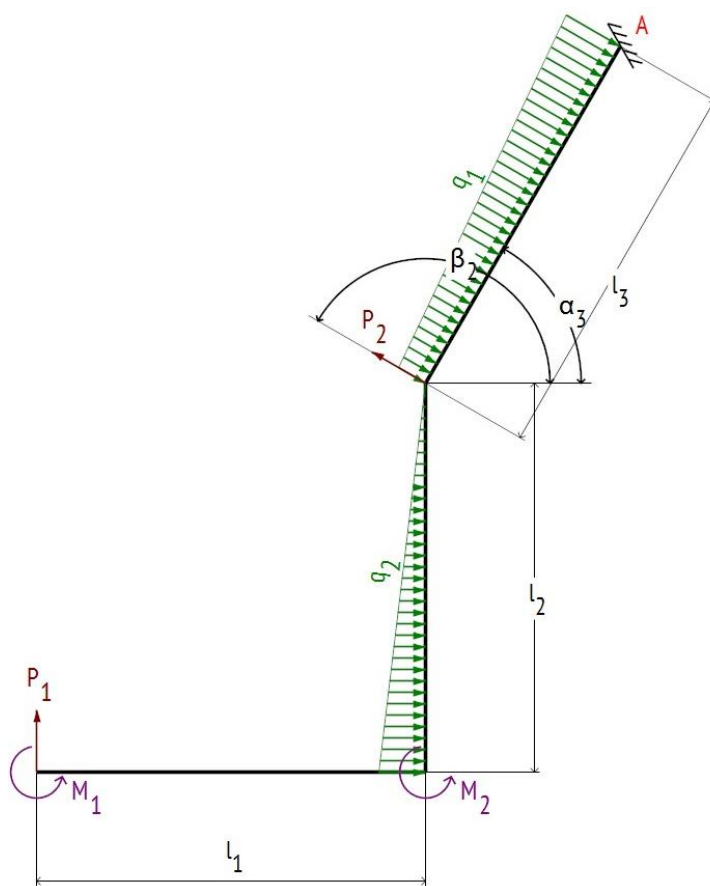
$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = 150^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [4; 4](H/M), q_2 \in [2; 8](H/M)$$

10



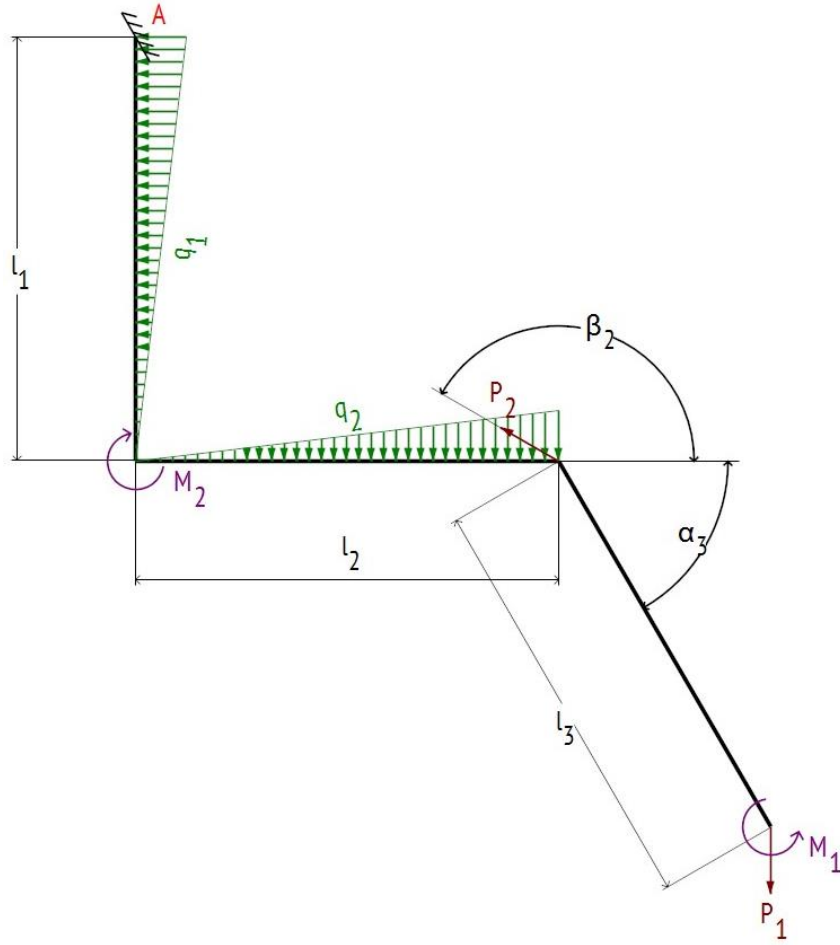
$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [2; 2](\text{H/M})$$

11



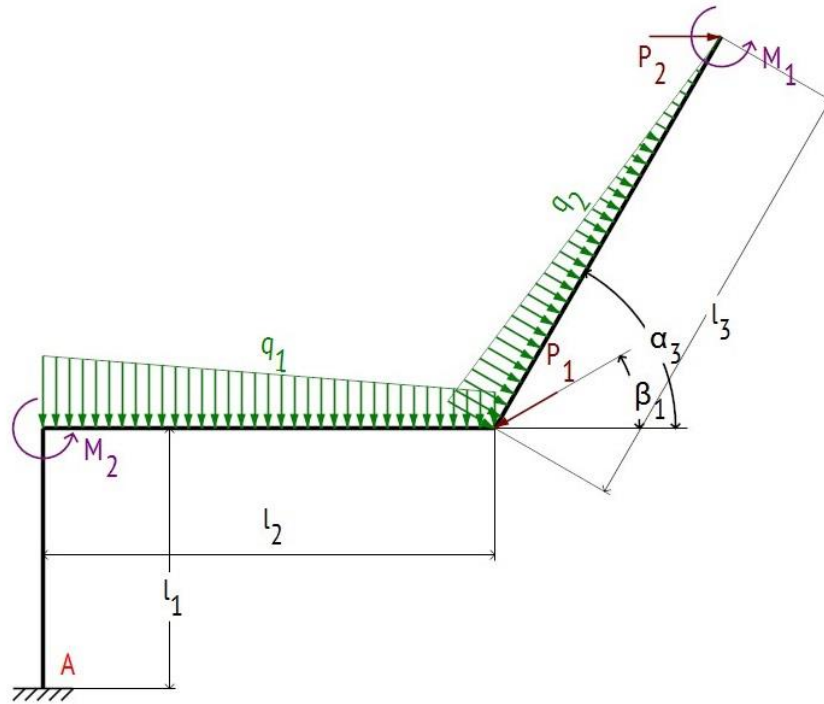
$$\beta_2 = 150^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [2; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 8](\text{H/M})$$

12



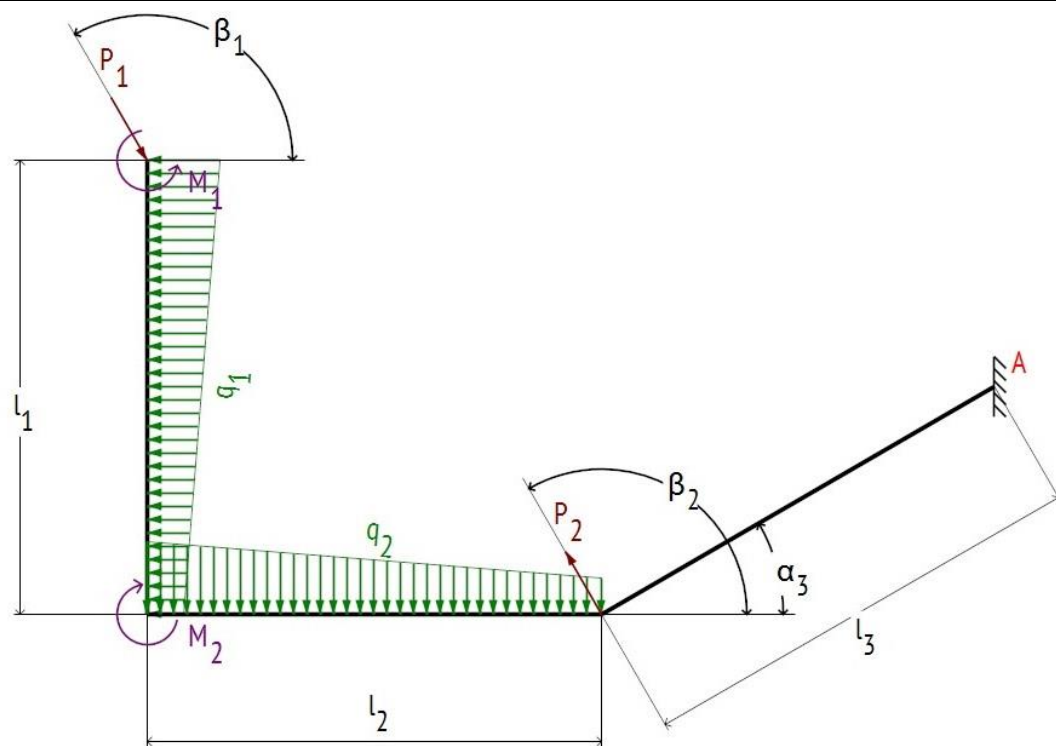
$$\beta_2 = 150^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 8](\text{H/M})$$

13



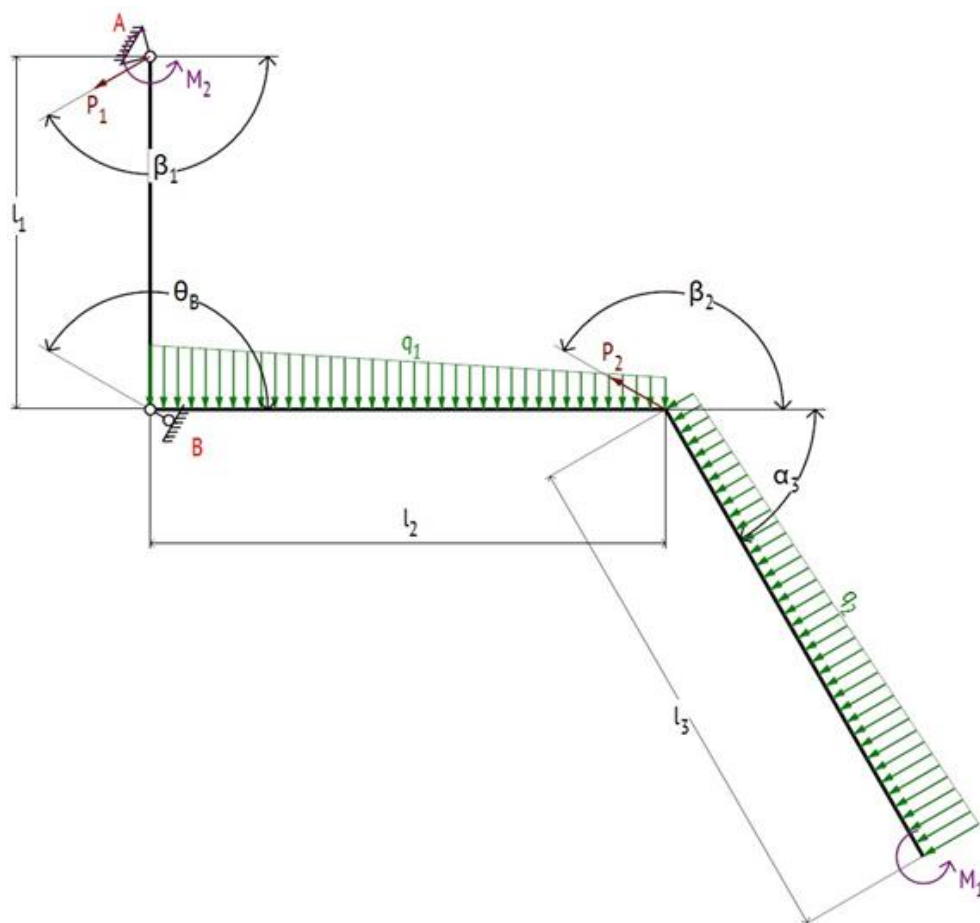
$$\beta_1 = 30^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [1; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 8](\text{H/M})$$

14



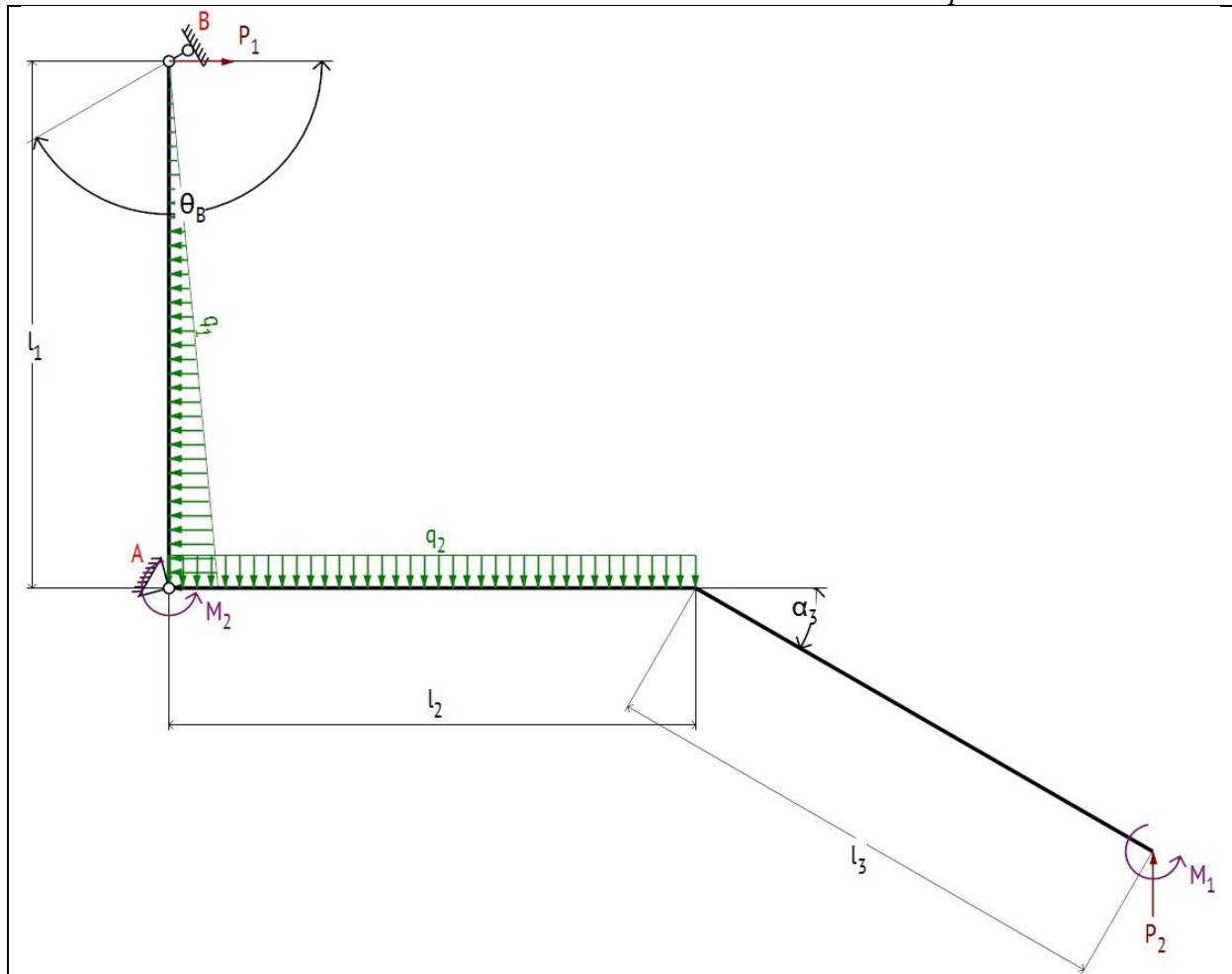
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_1 \in [2; 4](H/M), q_2 \in [2; 8](H/M)$$

15



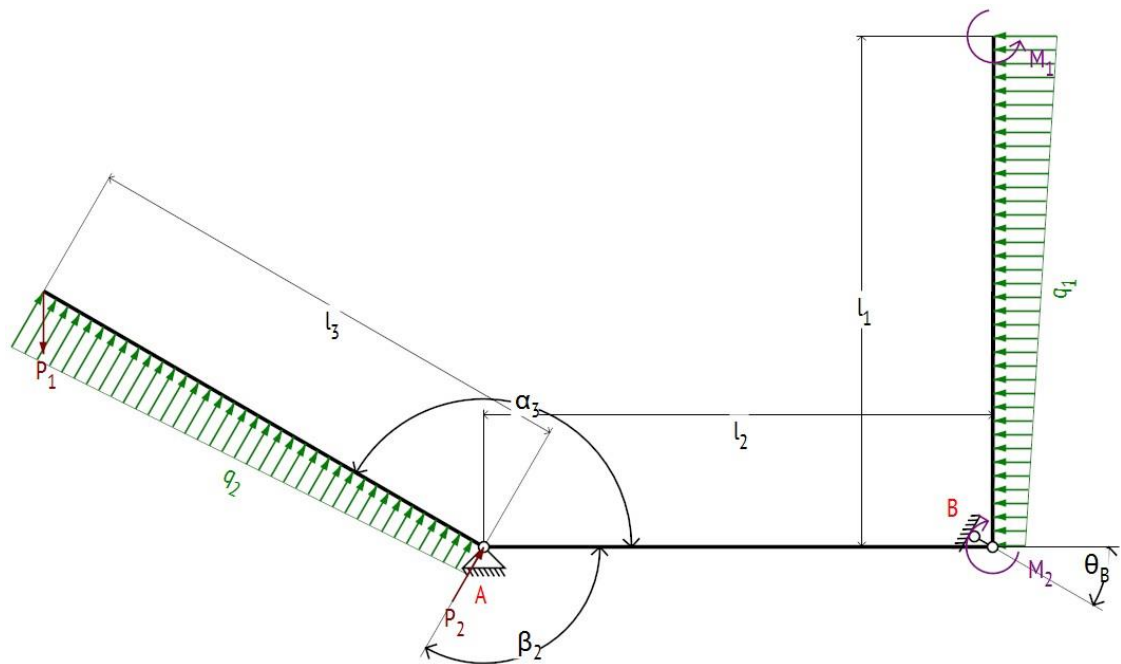
$$\beta_1 = \beta_2 = 150^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [2; 4](H/M), q_2 \in [2; 8](H/M)$$

16



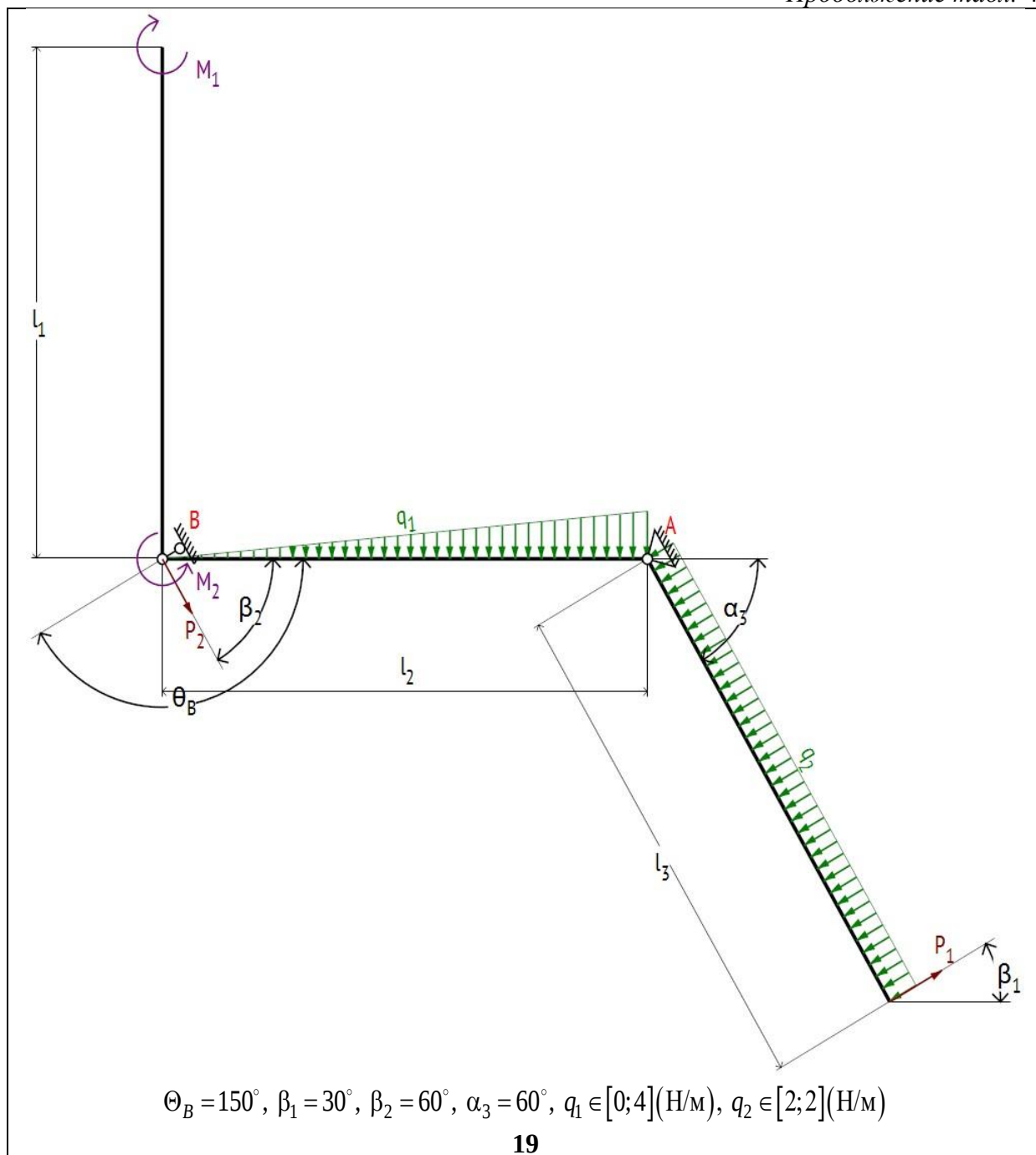
$$\Theta_B = 150^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_1 \in [0; 4](H/M), q_2 \in [2; 2](H/M)$$

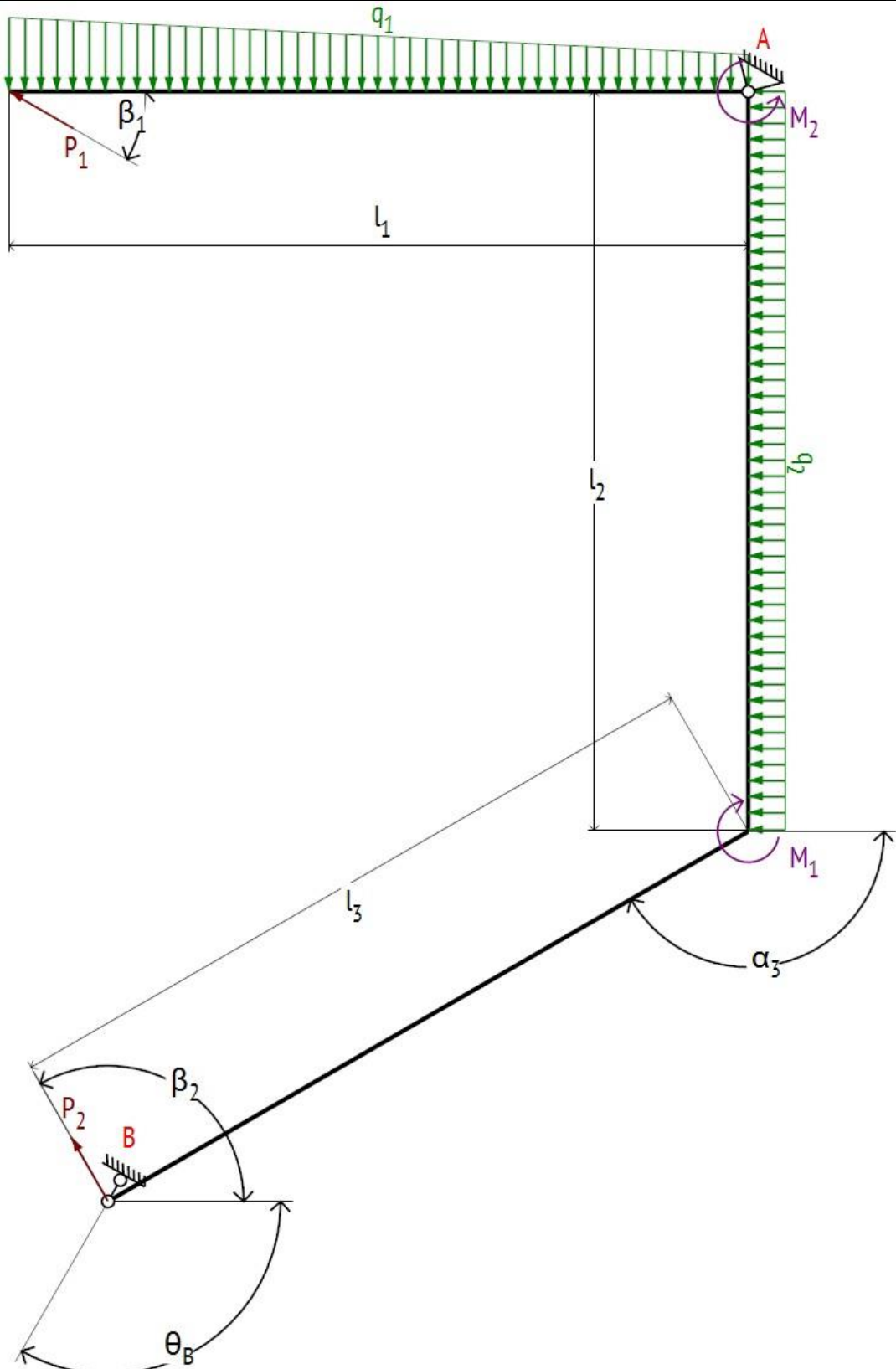
17



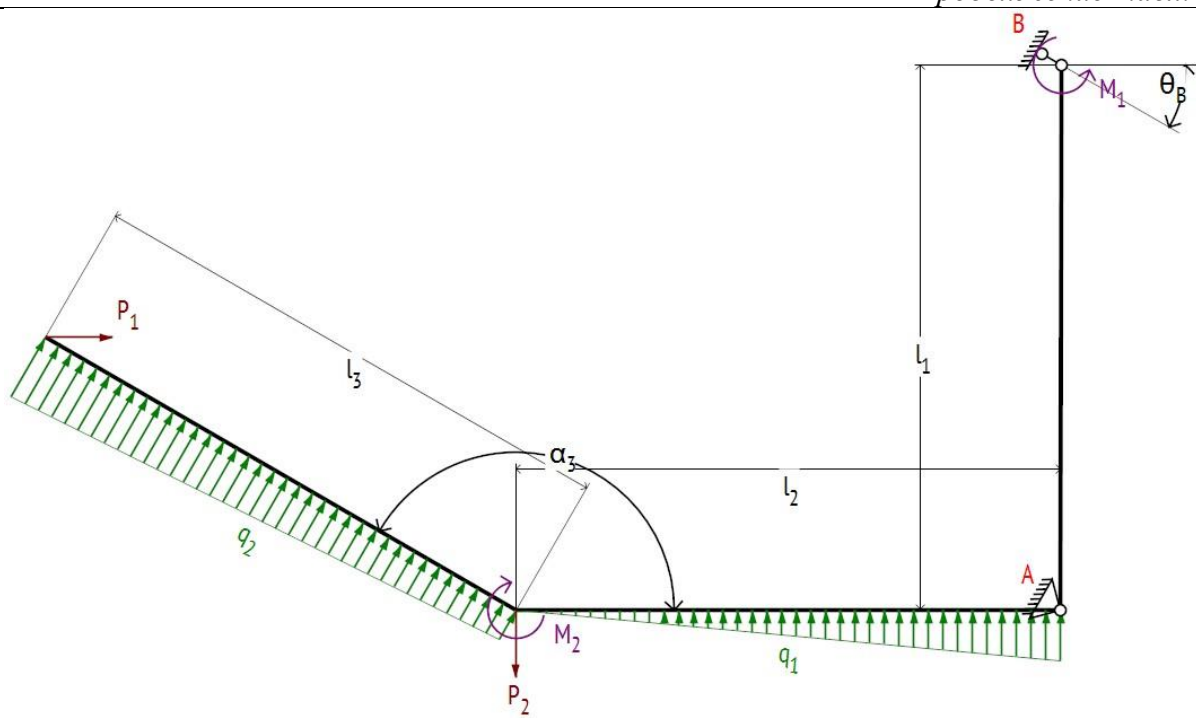
$$\Theta_B = 30^\circ, \beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [2; 4](H/M), q_2 \in [2; 8](H/M)$$

18



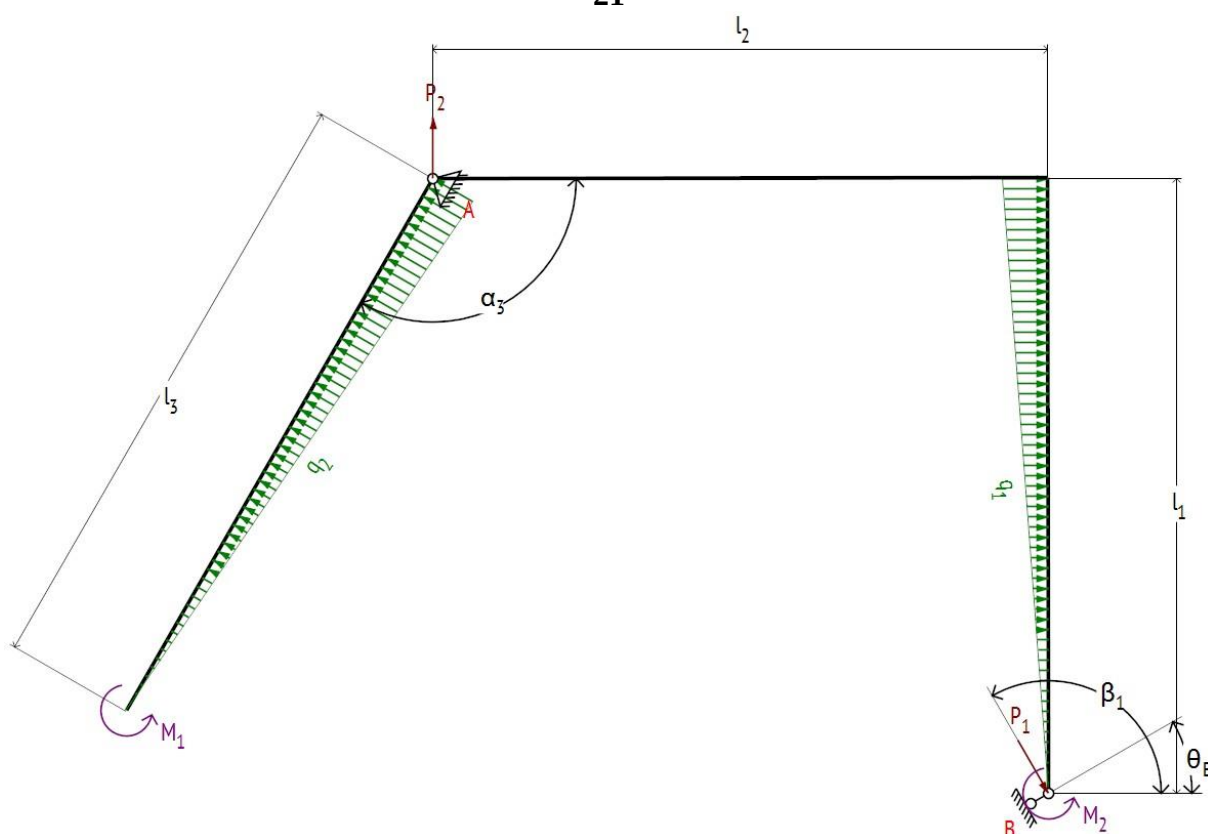


$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = \Theta_B = 120^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [1; 4](\text{H/M}), q_2 \in [2; 2](\text{H/M})$$



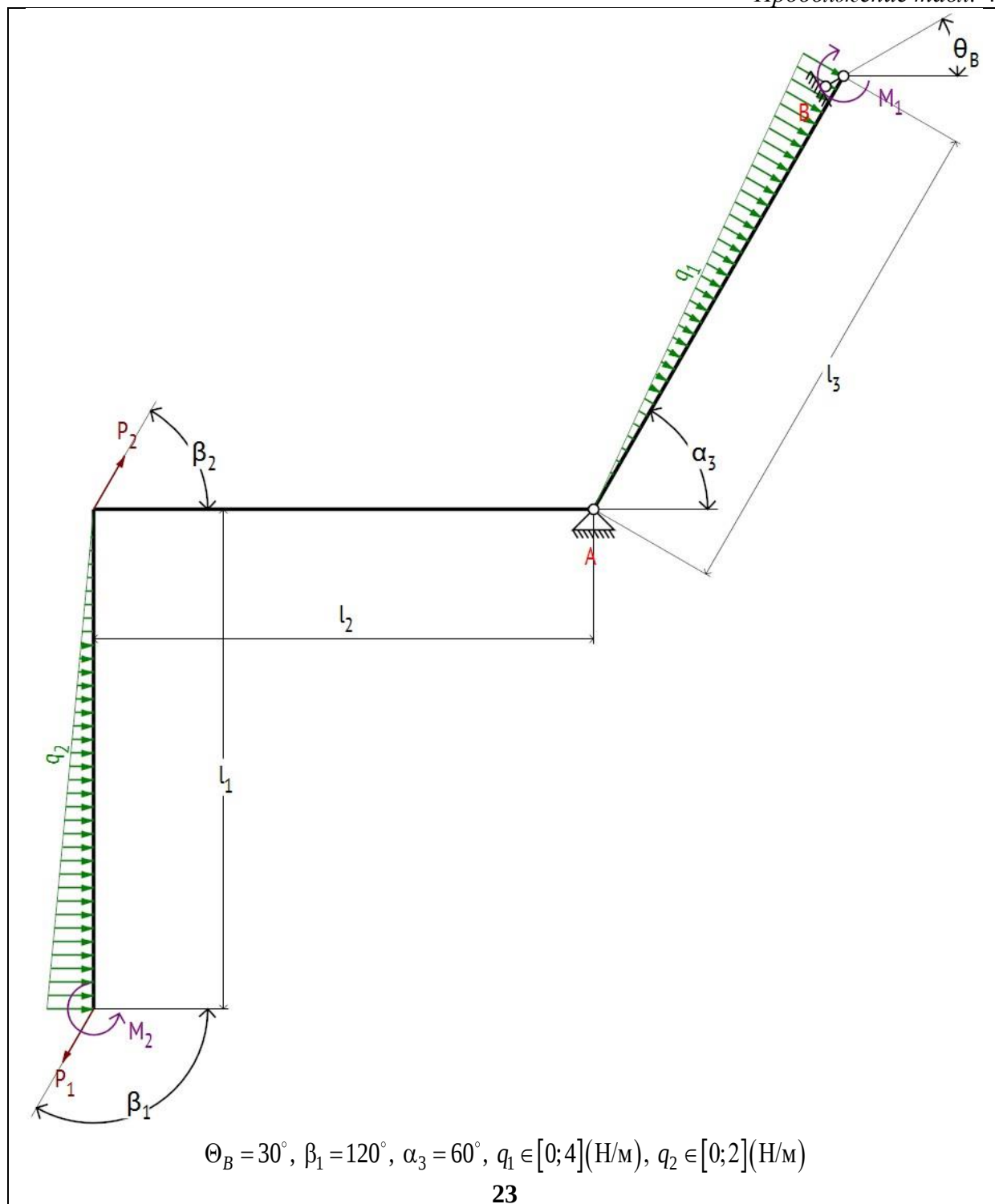
$$\Theta_B = 30^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [2; 10](\text{H/M})$$

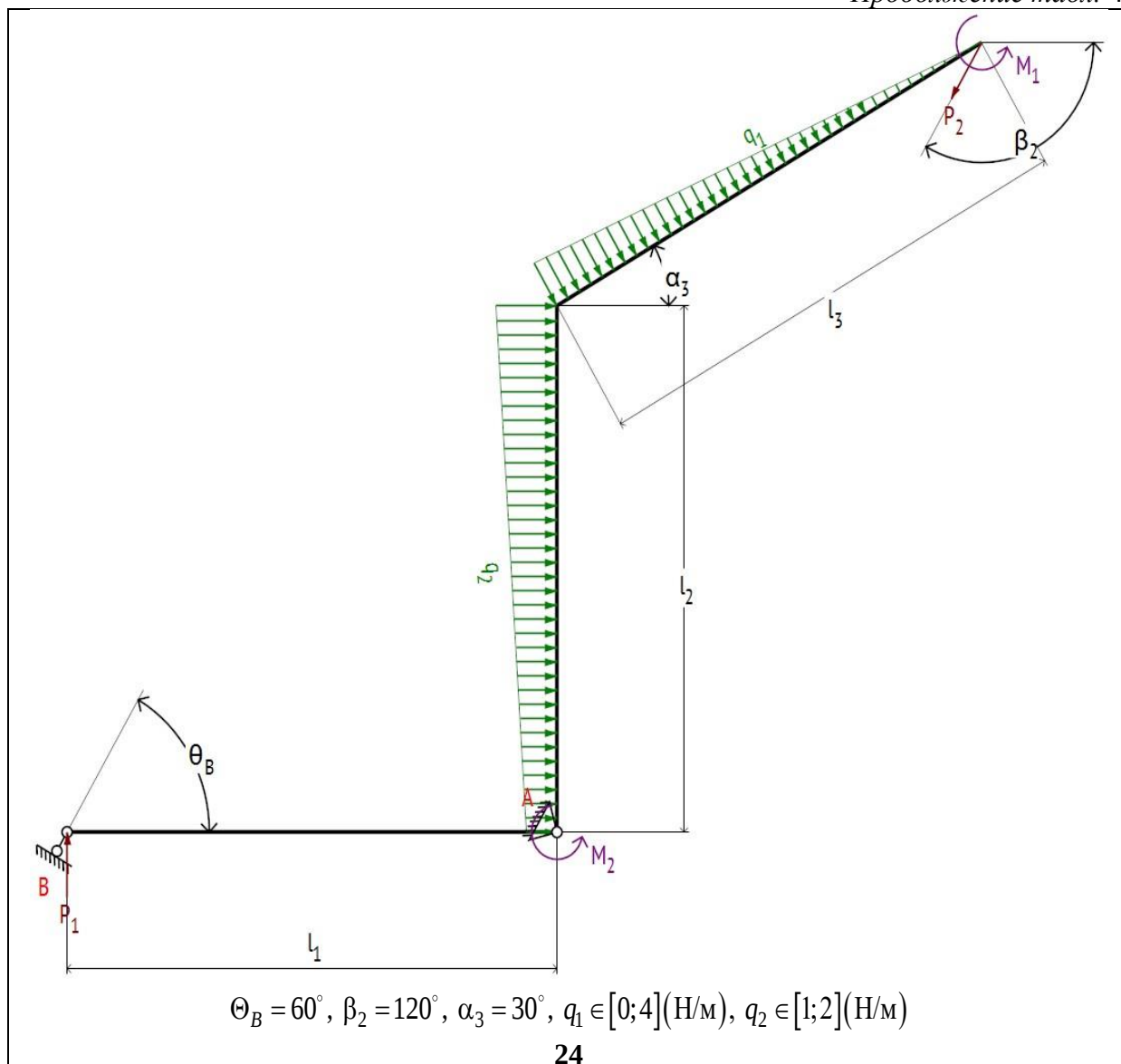
21

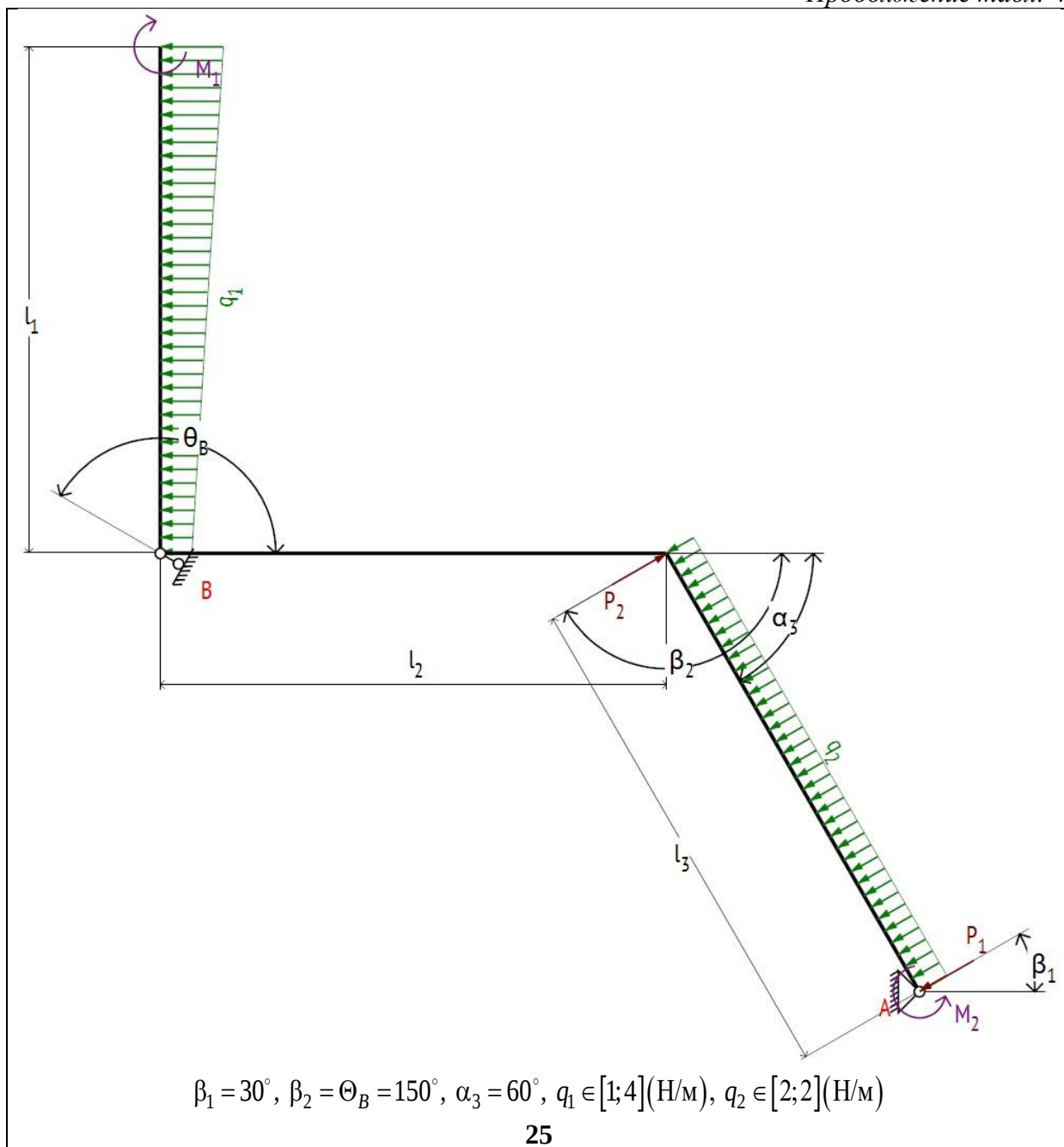


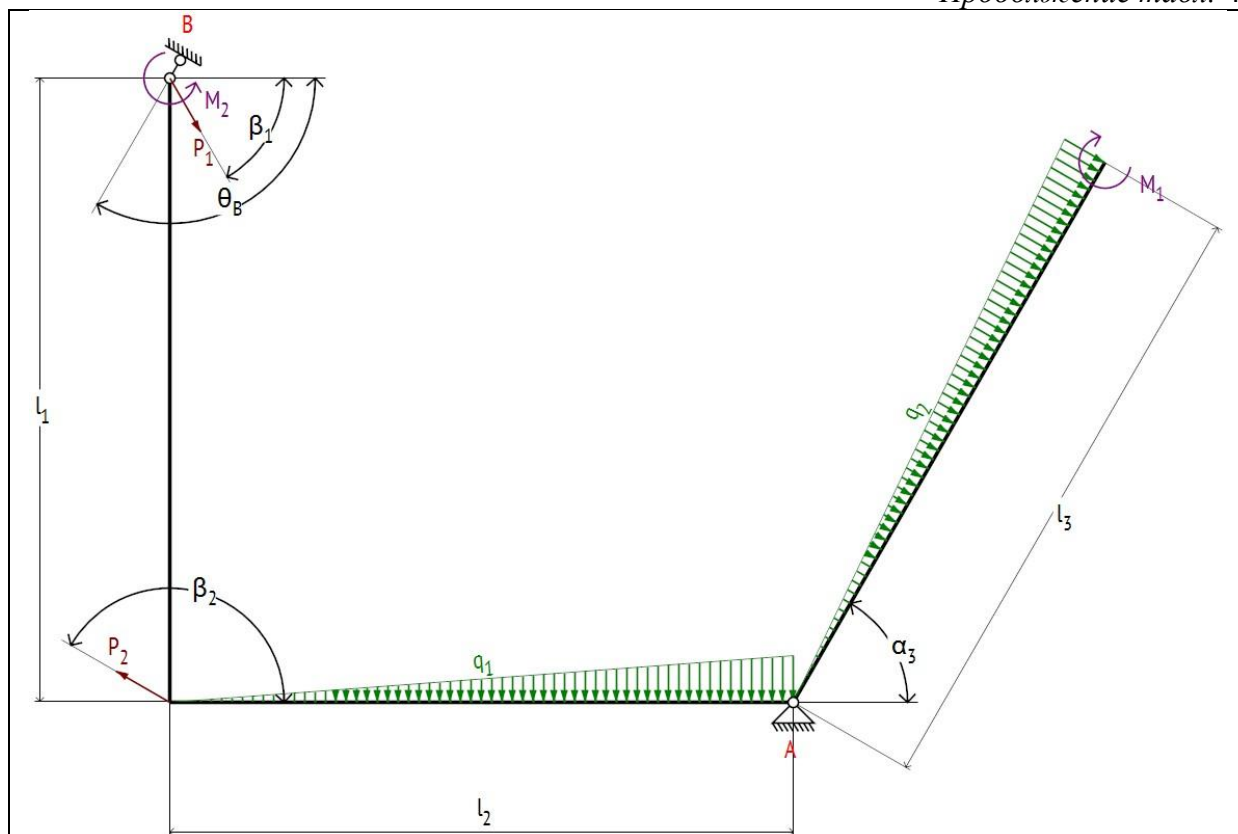
$$\Theta_B = 30^\circ, \beta_1 = \alpha_3 = 120^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 2](\text{H/M})$$

22



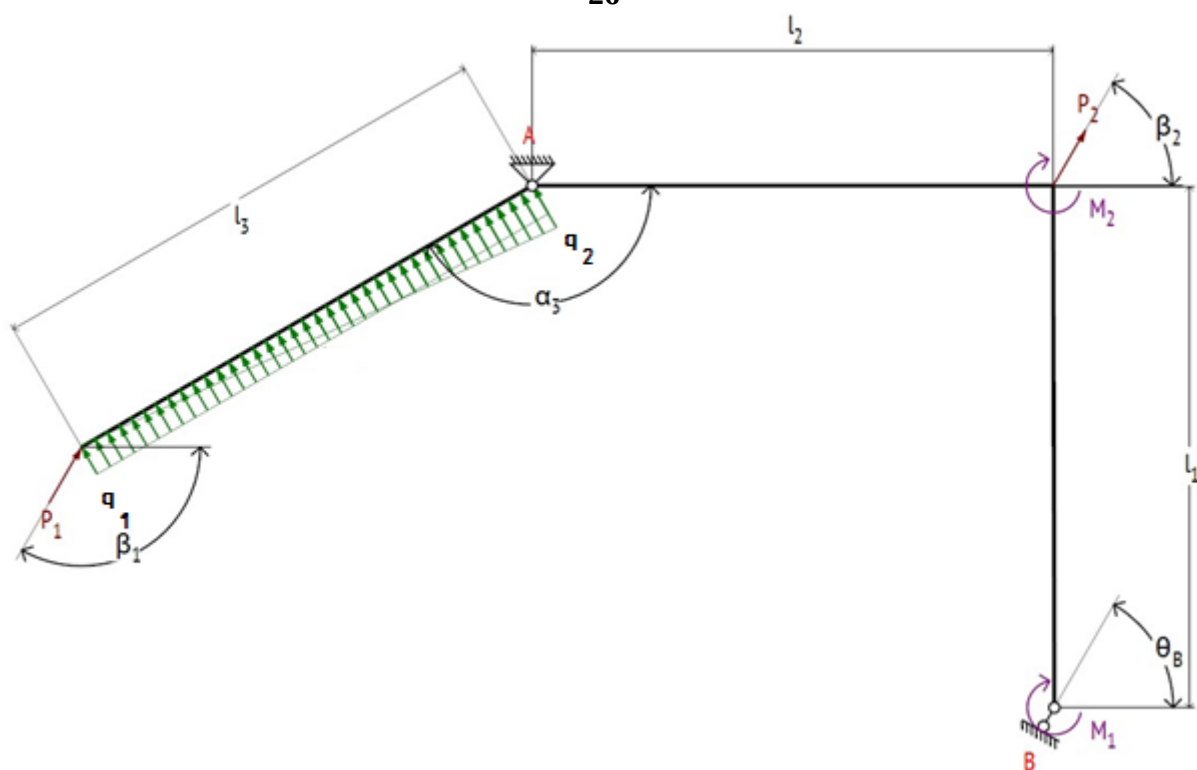






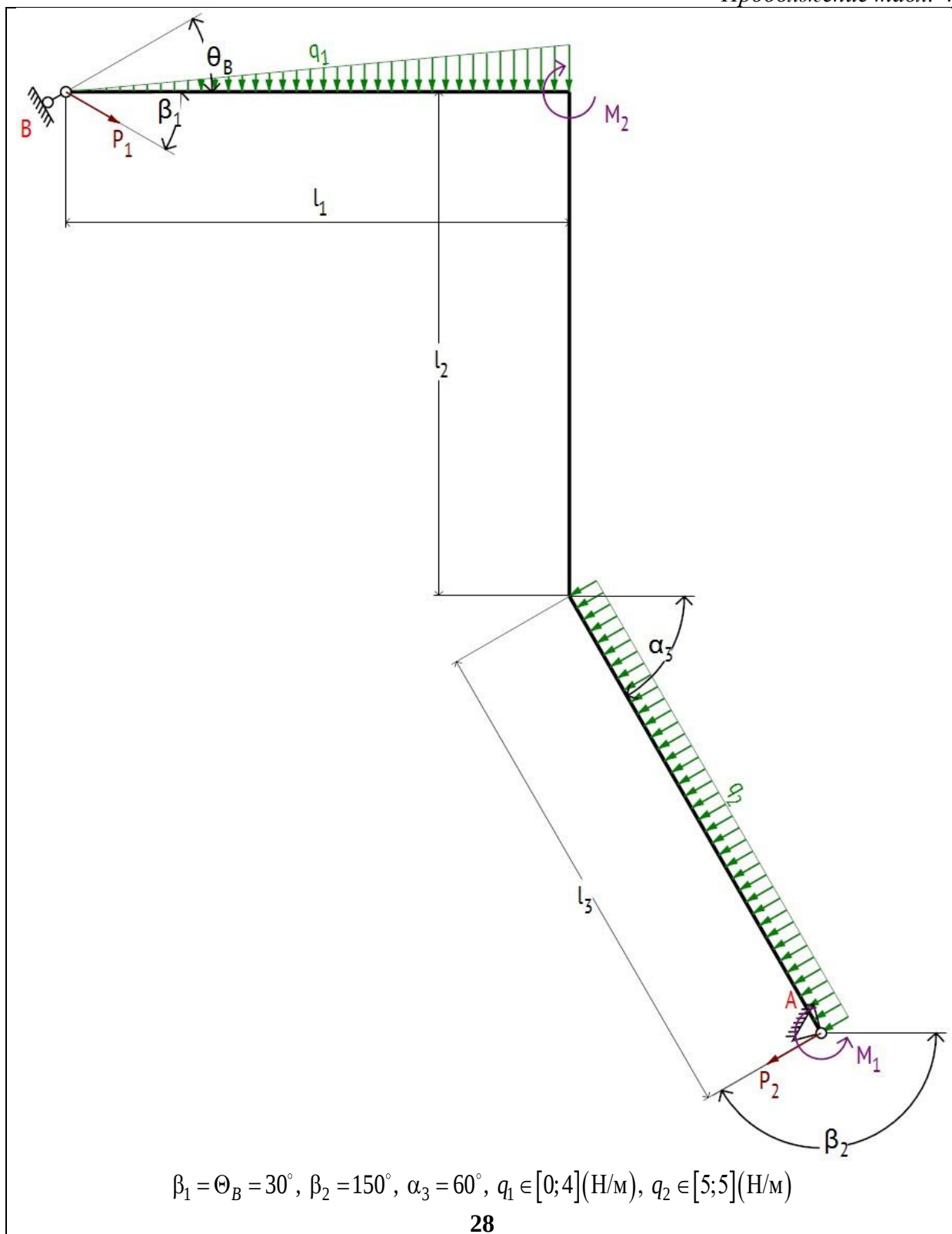
$$\beta_1 = 60^\circ, \Theta_B = 120^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, q_1 \in [0; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 2](\text{H/M})$$

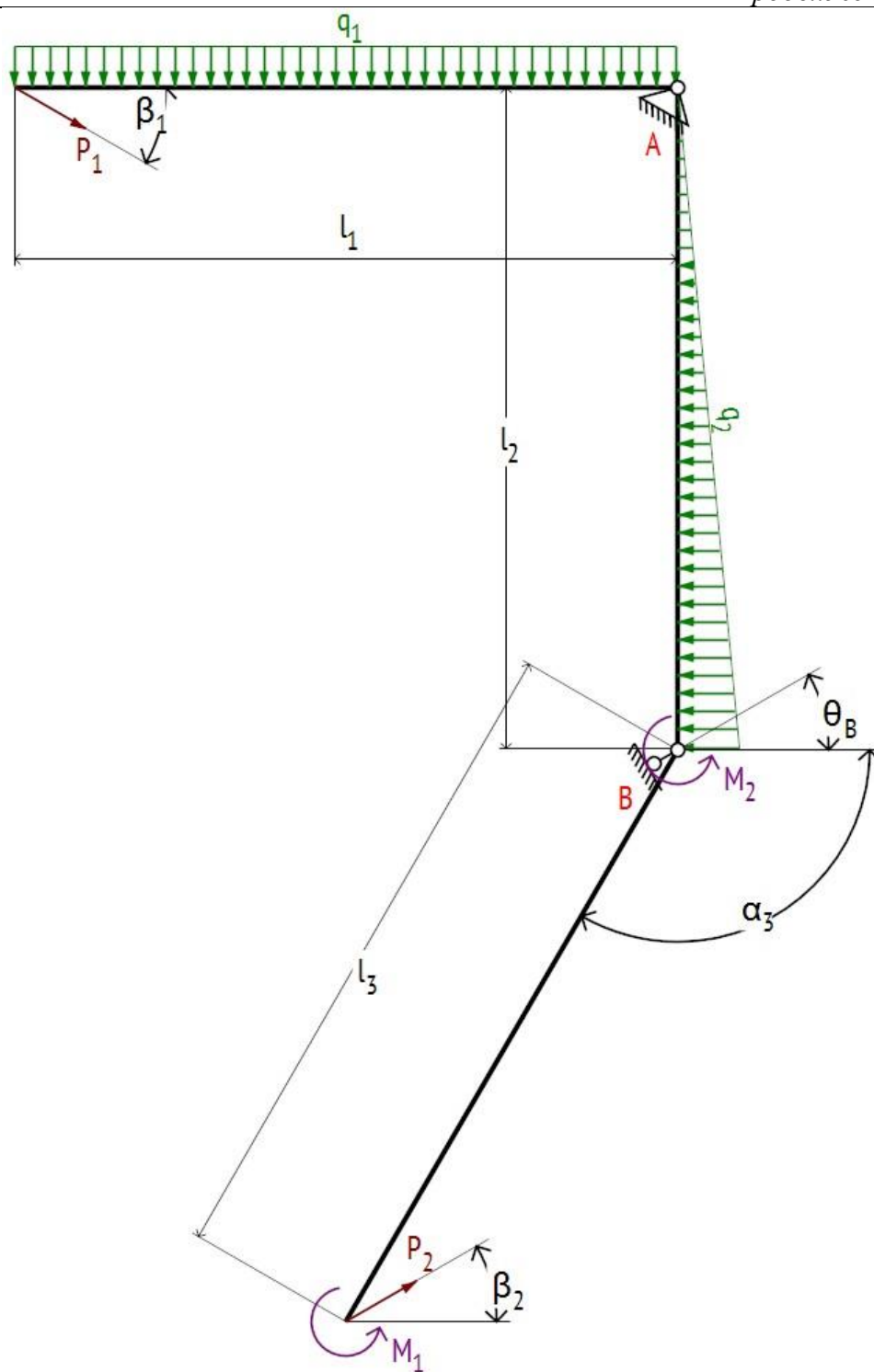
26



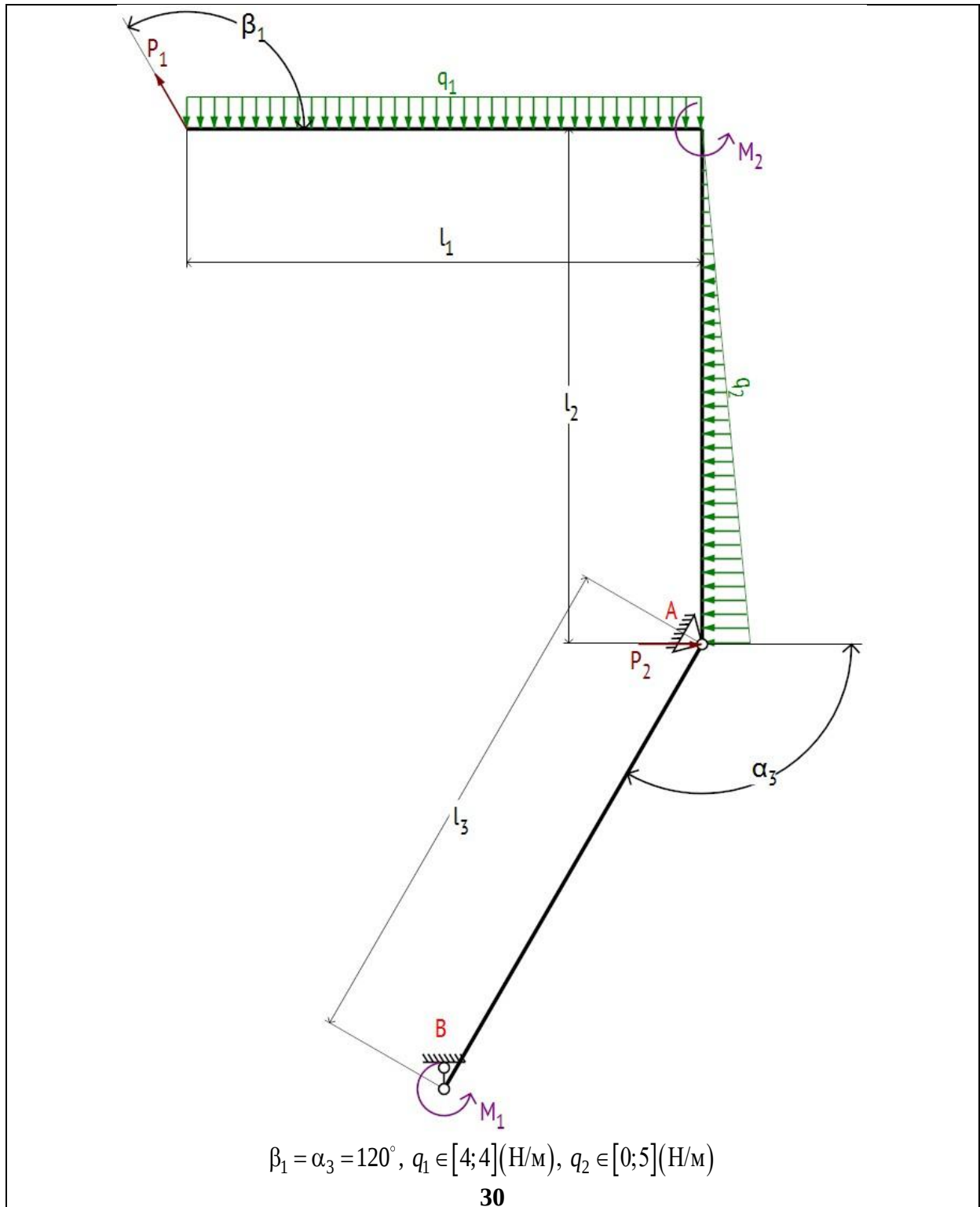
$$\beta_1 = 120^\circ, \beta_2 = \Theta_B = 60^\circ, \alpha_3 = 150^\circ, q_1 \in [4; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 5](\text{H/M})$$

27





$$\beta_1 = \beta_2 = \theta_B = 30^\circ, \alpha_3 = 120^\circ, q_1 \in [4; 4](\text{H/M}), q_2 \in [0; 5](\text{H/M})$$



1.1.4 Задания С-4 (1 – 30)

Условие задачи: Жёсткая рама закреплена в точке А при помощи жёсткой заделки (варианты 1-15) либо в точке А при помощи шарнирно-неподвижной опоры, в точке В – шарнирно-подвижной опоры (варианты 16-30). К раме

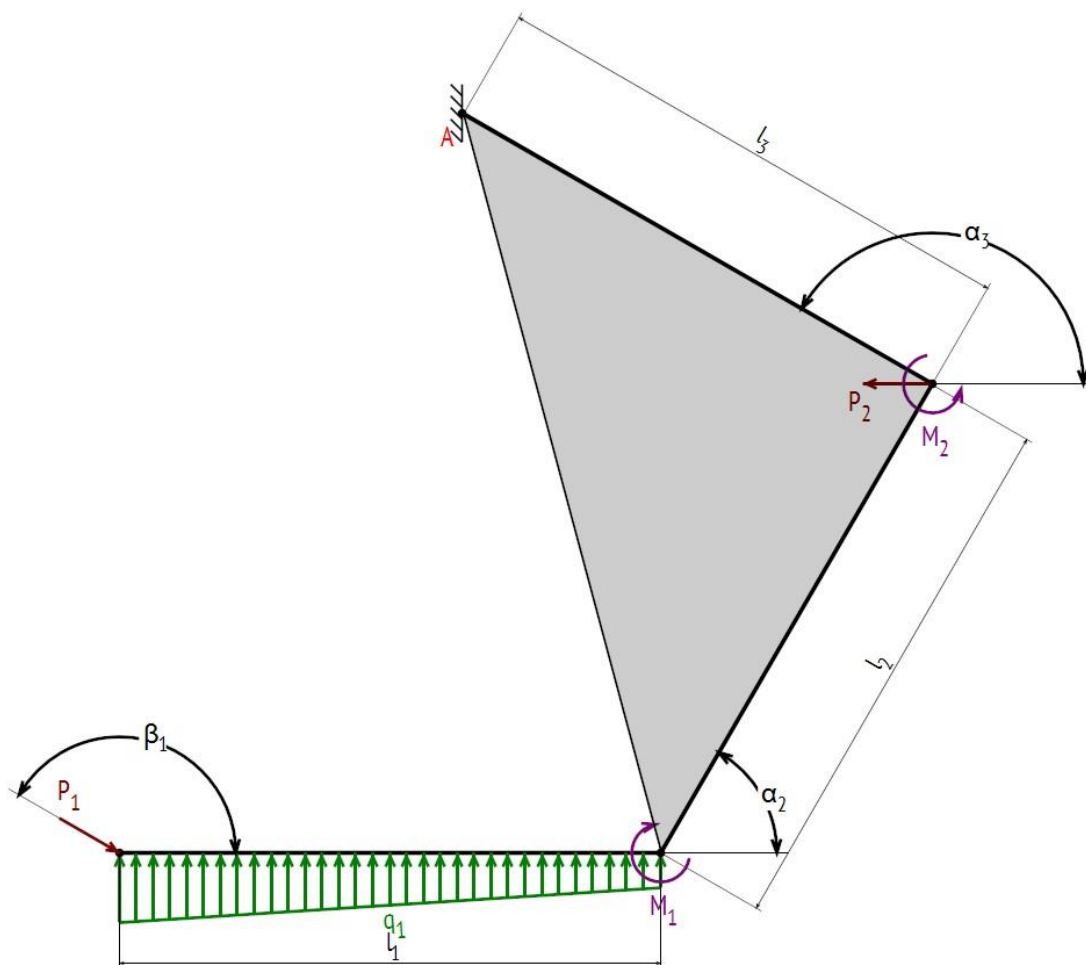
приложены силы P_1 и P_2 (Н), пары сил с моментами M_1 и M_2 (Нм), распределённая нагрузка с интенсивностью q_1 (Н/м) (диапазон значений от $q_{1\min}$ до $q_{1\max}$). В центре тяжести однородной треугольной пластины приложена сила G , пропорциональная её площади (коэффициент пропорциональности $\gamma = 2,5$). *Определите* реакции, возникающие в опорах. Выполните проверку правильности решения. Исходные данные приведены в табл. 5, расчётные схемы – в табл. 6.

Таблица 5

Исходные данные к заданию С-4

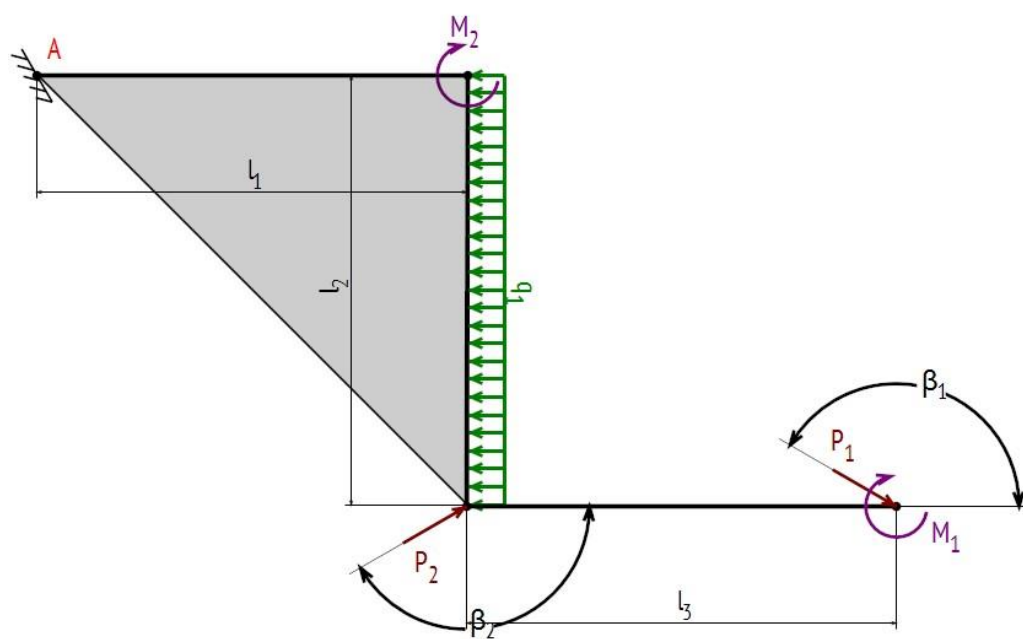
№	Длины, м			Силы, Н		Моменты, Нм		Интенсивность распределённой нагрузки, Н/м	
	l_1	l_2	l_3	P_1	P_2	M_1	M_2	$q_{1\min}$	$q_{1\max}$
1	1.5	0.4	0.2	10	2	2	8	10	20
2	0.5	0.2	0.4	10	8	4	6	20	20
3	0.5	0.4	0.2	2	8	10	10	0	20
4	1.5	0.2	0.4	8	10	8	4	0	20
5	0.5	0.2	0.8	2	8	4	4	0	20
6	1.5	0.2	0.2	6	4	6	6	10	20
7	1.5	0.2	0.2	2	4	6	10	0	10
8	1.5	0.2	0.4	2	10	6	8	0	10
9	0.5	0.2	0.4	6	4	8	4	0	20
10	0.5	0.8	0.4	4	10	6	8	0	10
11	1	0.8	0.2	6	2	2	8	10	10
12	1.5	0.4	0.4	6	10	4	2	10	10
13	1	0.8	0.4	2	6	2	10	0	20
14	1.5	0.4	0.8	8	2	4	2	10	10
15	0.5	0.8	0.8	4	6	8	6	0	10
16	1	0.2	0.2	6	4	8	10	10	20
17	1.5	0.8	0.2	6	2	6	4	10	10
18	1	0.2	0.4	4	10	6	4	0	10
19	1.5	0.4	0.8	6	6	6	8	20	20
20	0.5	0.8	0.8	6	8	2	8	10	20
21	1	0.4	0.8	2	10	10	4	20	20
22	1.5	0.4	0.8	6	2	8	4	10	20
23	0.5	0.8	0.4	8	8	8	10	20	20
24	1	0.2	0.8	10	8	2	10	20	20
25	1.5	0.4	0.2	10	4	4	2	10	20
26	1	0.8	0.4	6	8	10	6	20	20
27	1	0.8	0.8	6	10	6	2	0	10
28	1	0.4	0.2	4	2	6	6	10	10
29	1.5	0.2	0.8	8	10	10	10	10	20
30	1	0.4	0.8	6	2	8	2	10	20

Расчётные схемы к заданию С-4



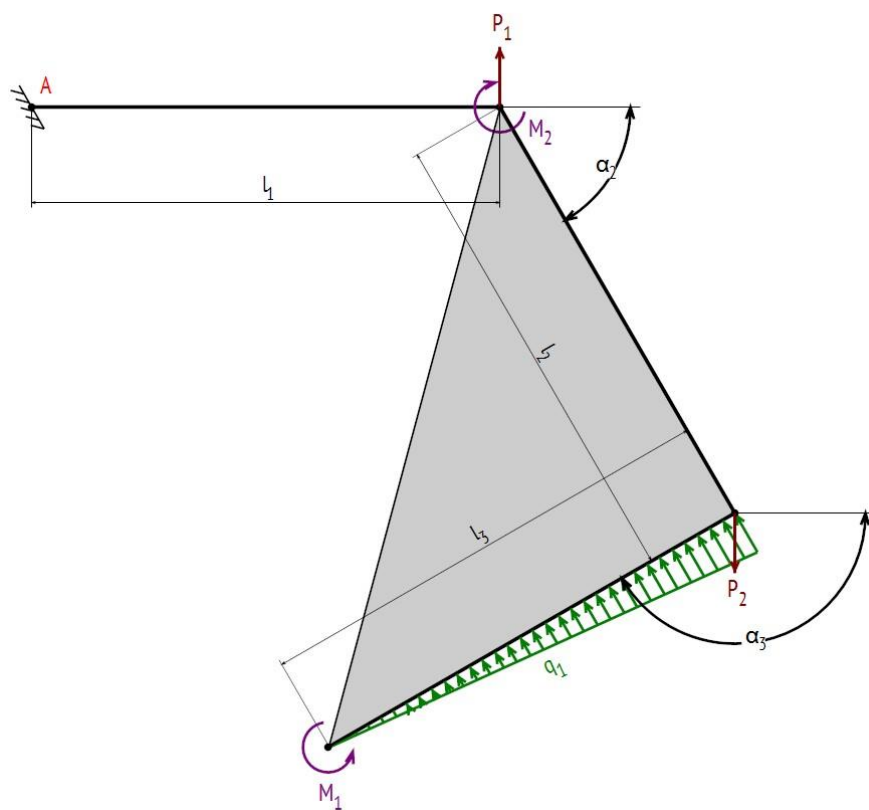
$$\beta_1 = 150^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 150^\circ$$

1



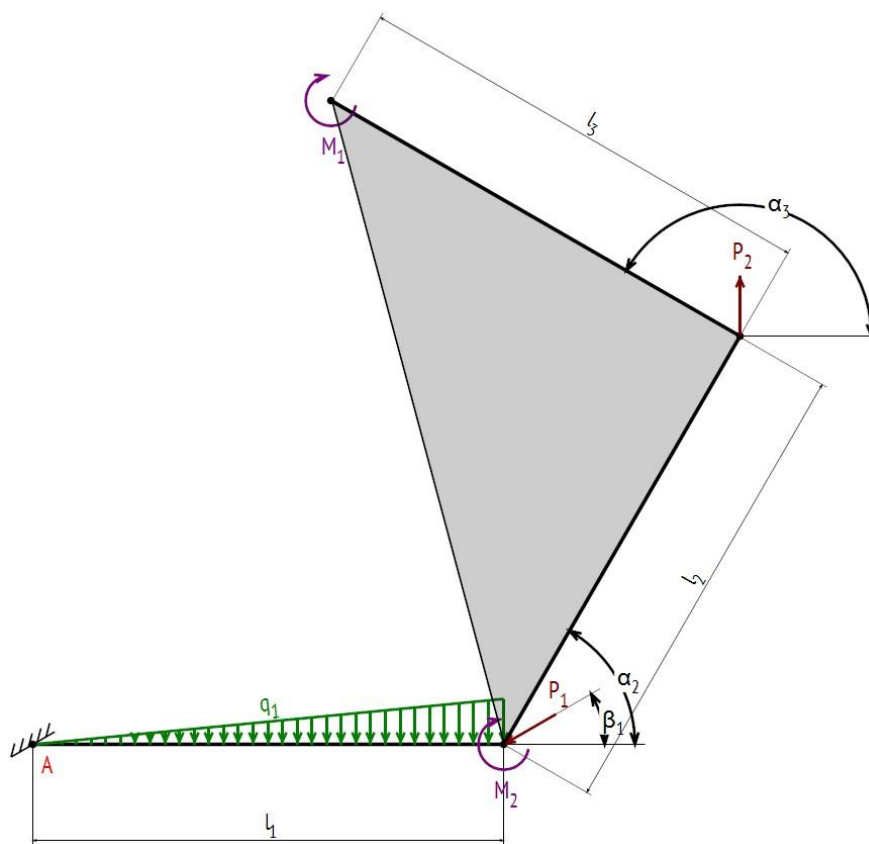
$$\beta_1 = \beta_2 = 150^\circ$$

2



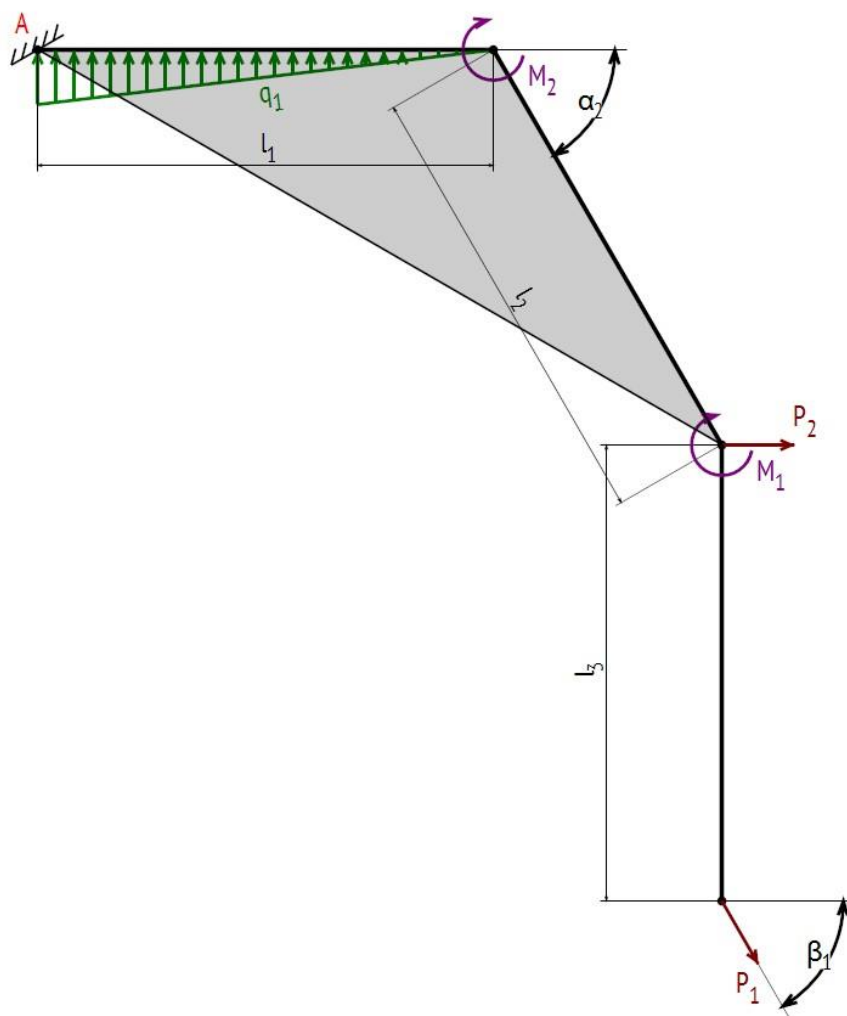
$$\alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 150^\circ$$

3



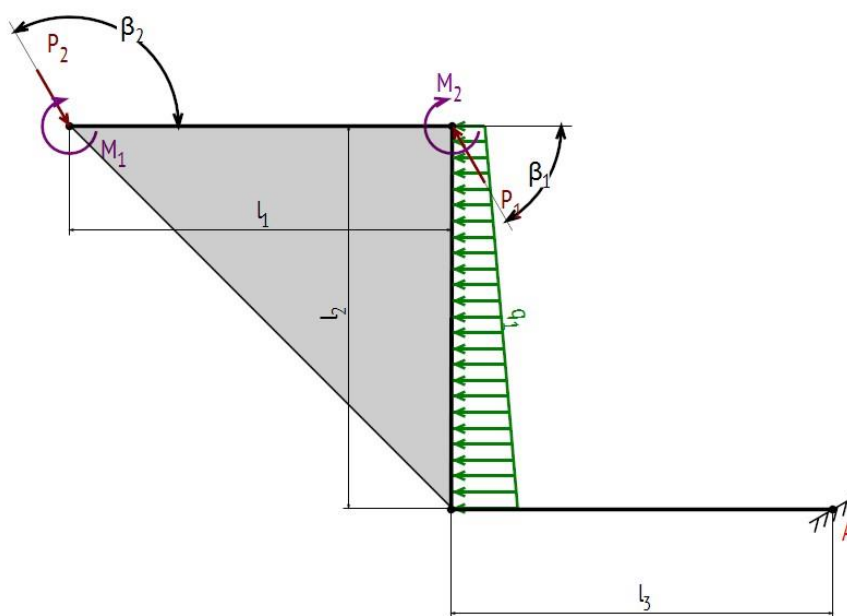
$$\beta_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 150^\circ$$

4



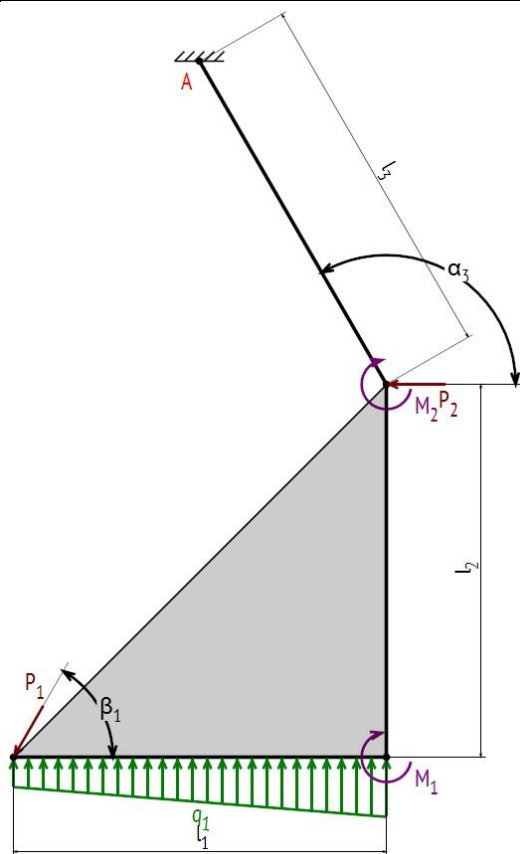
$$\beta_1 = \alpha_2 = 60^\circ$$

5



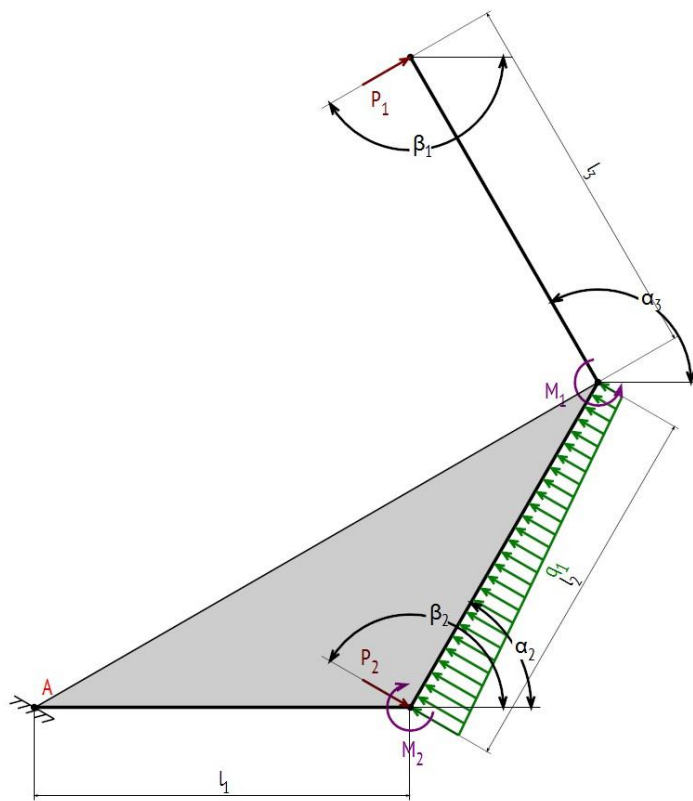
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ$$

6



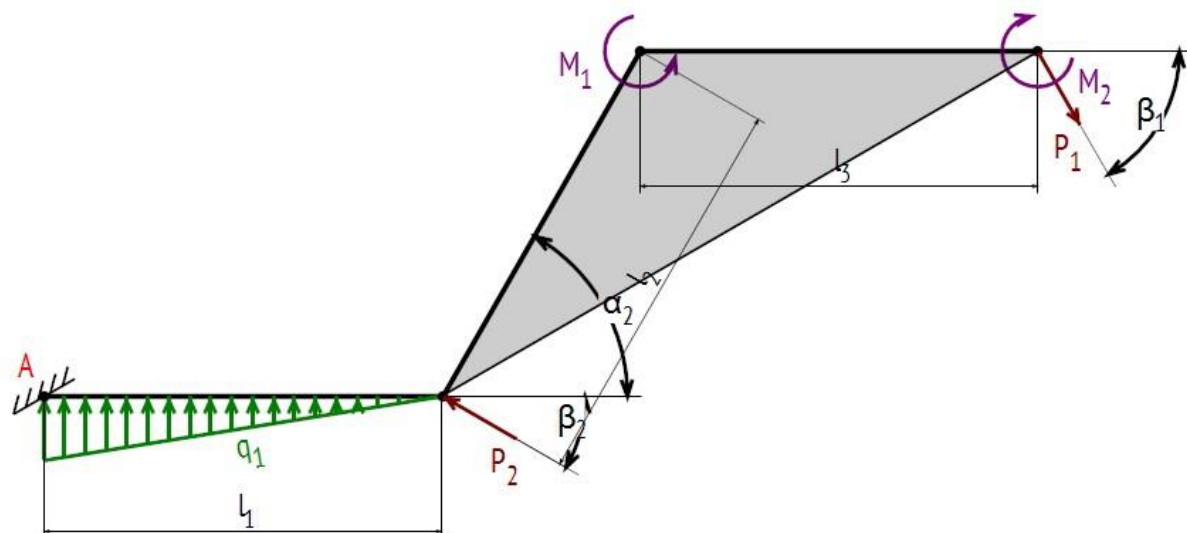
$$\beta_1 = 60^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$$

7



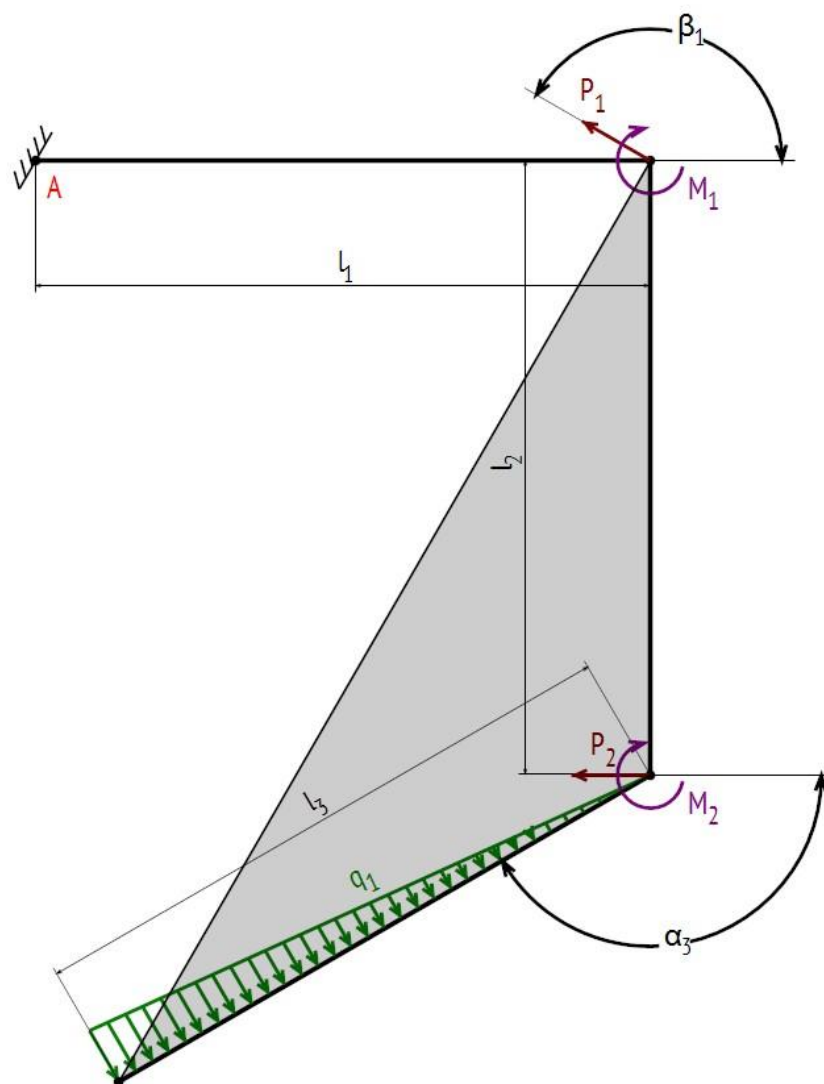
$$\beta_1 = \beta_2 = 150^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$$

8



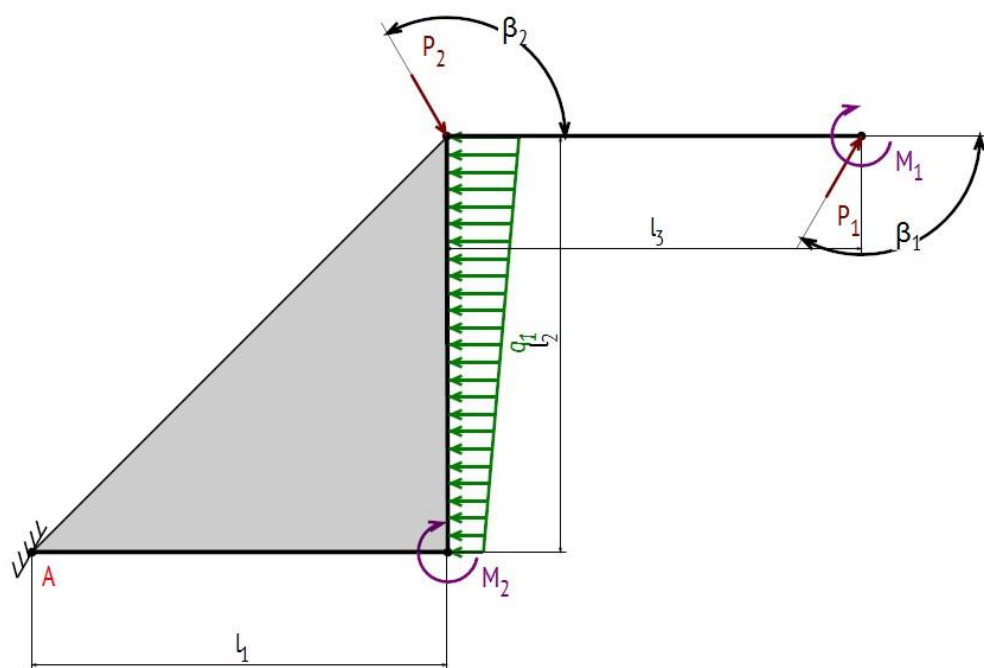
$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = \alpha_2 = 60^\circ$$

9



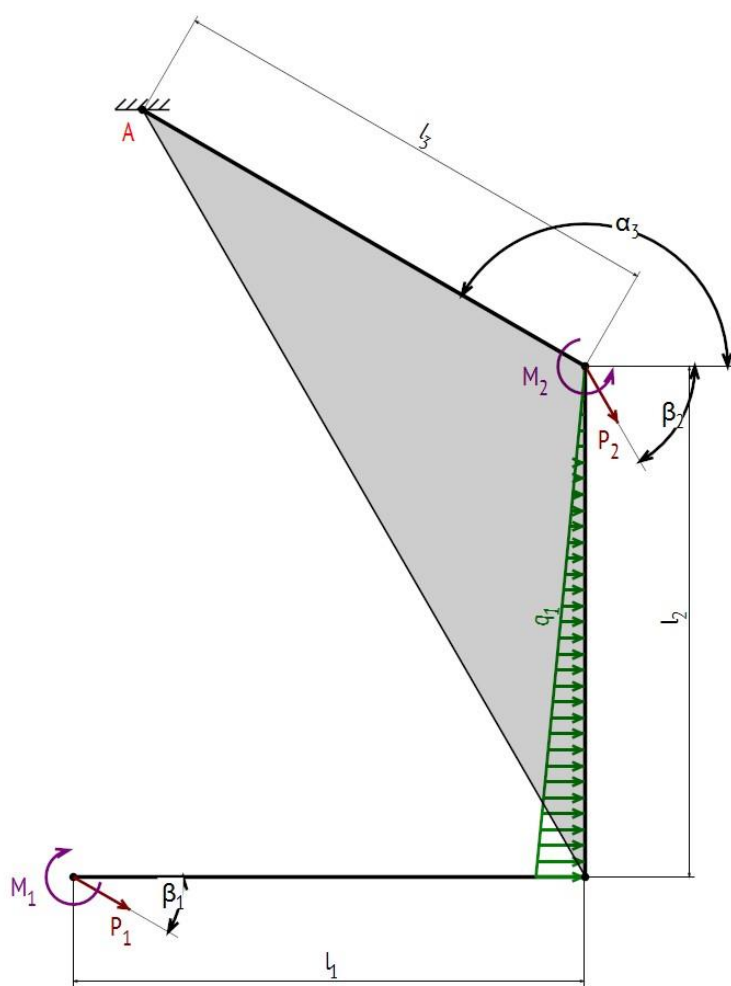
$$\beta_1 = \alpha_3 = 150^\circ$$

10



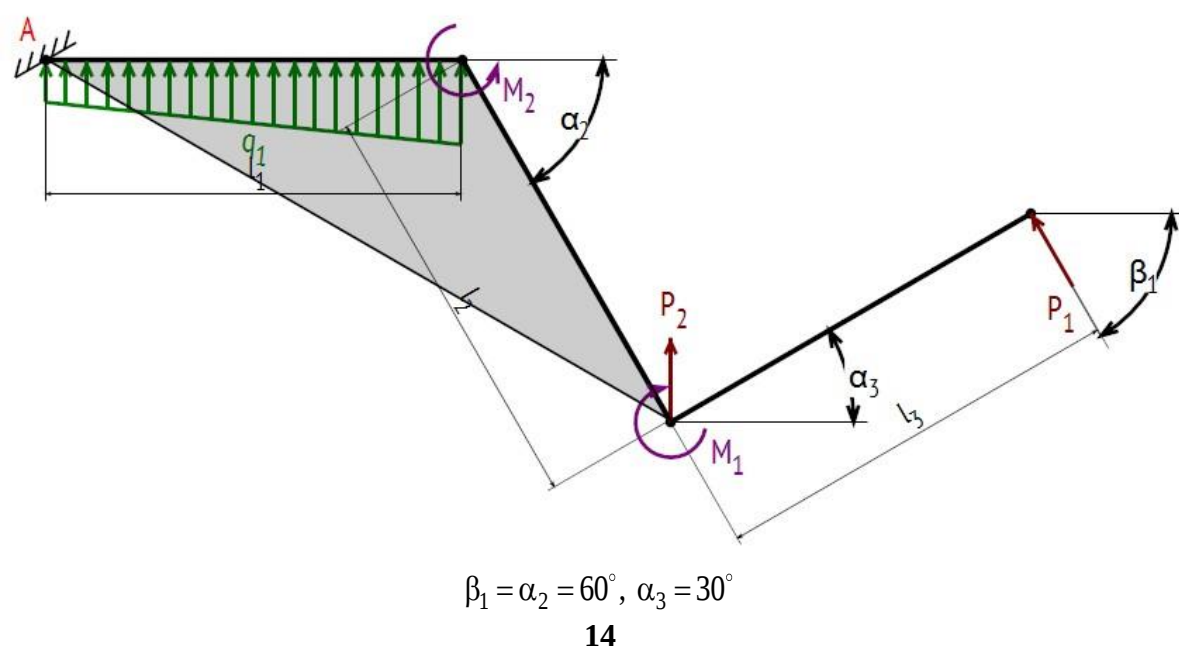
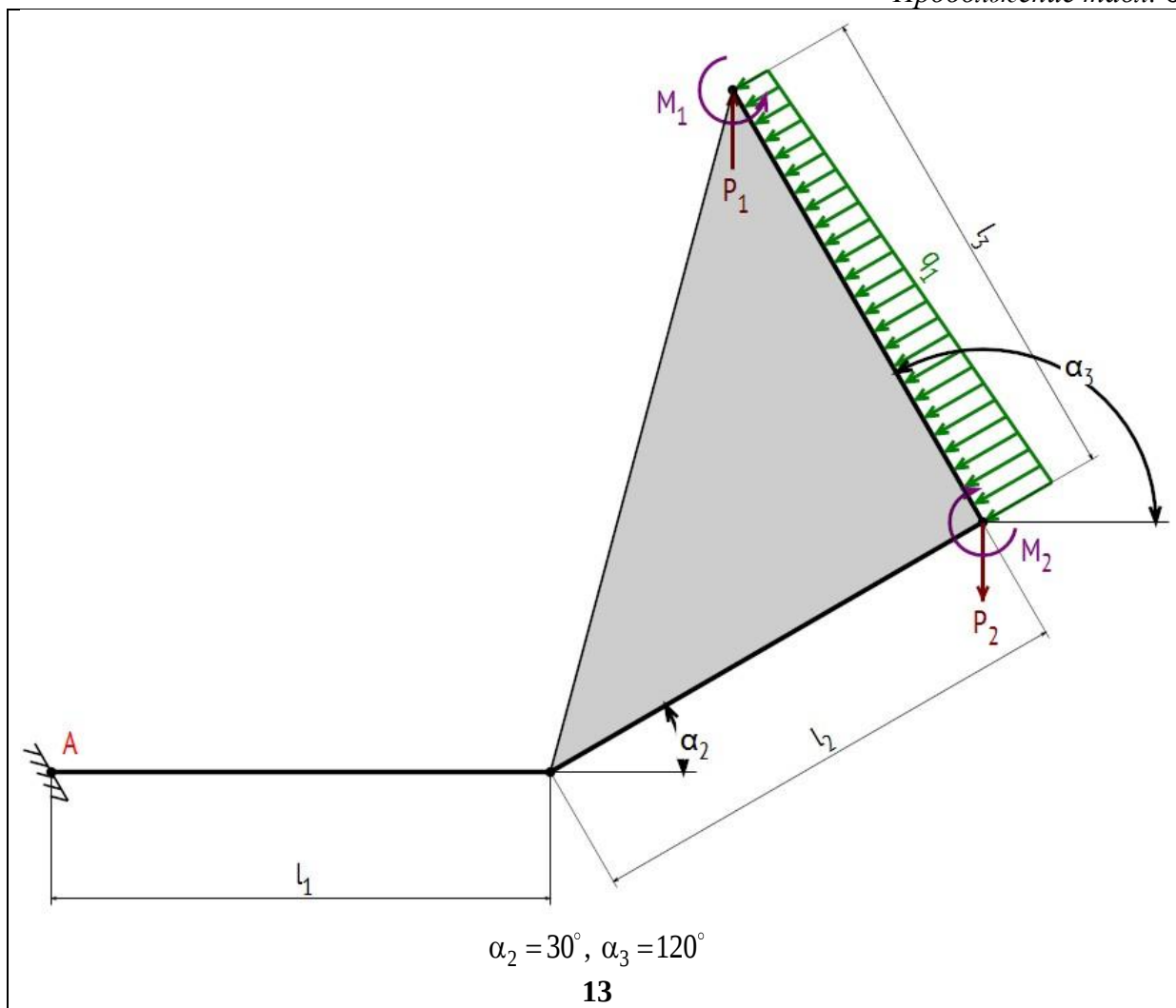
$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ$$

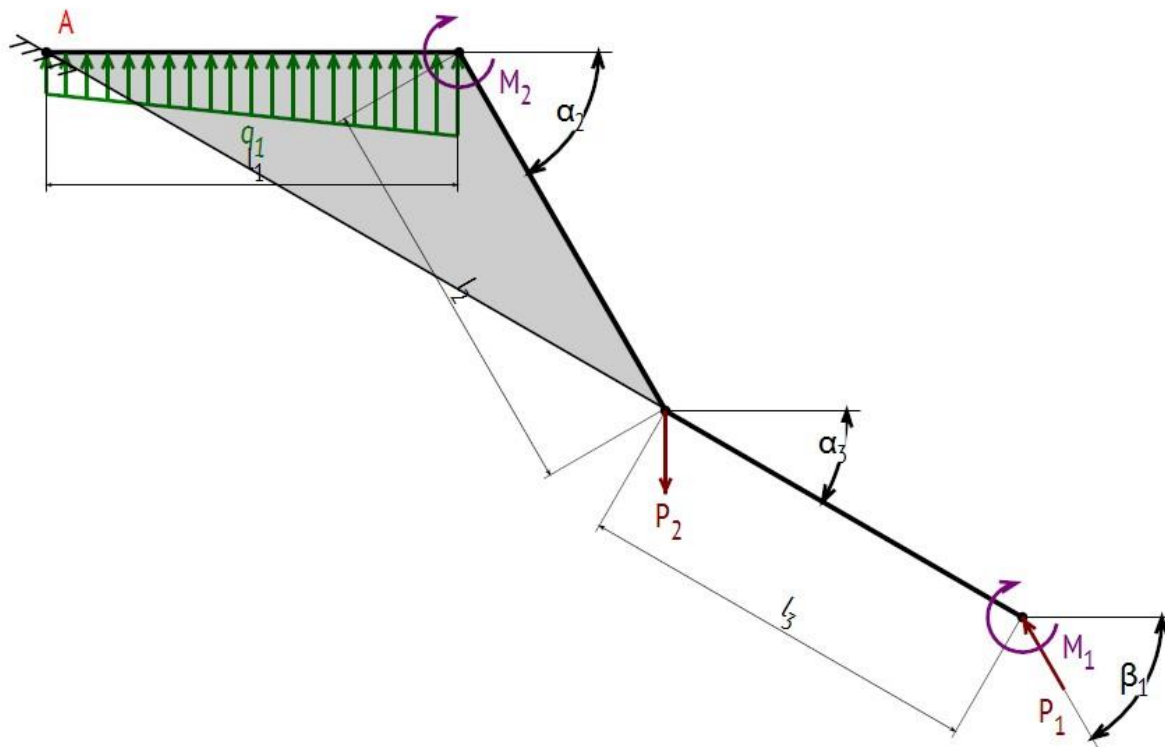
11



$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 150^\circ$$

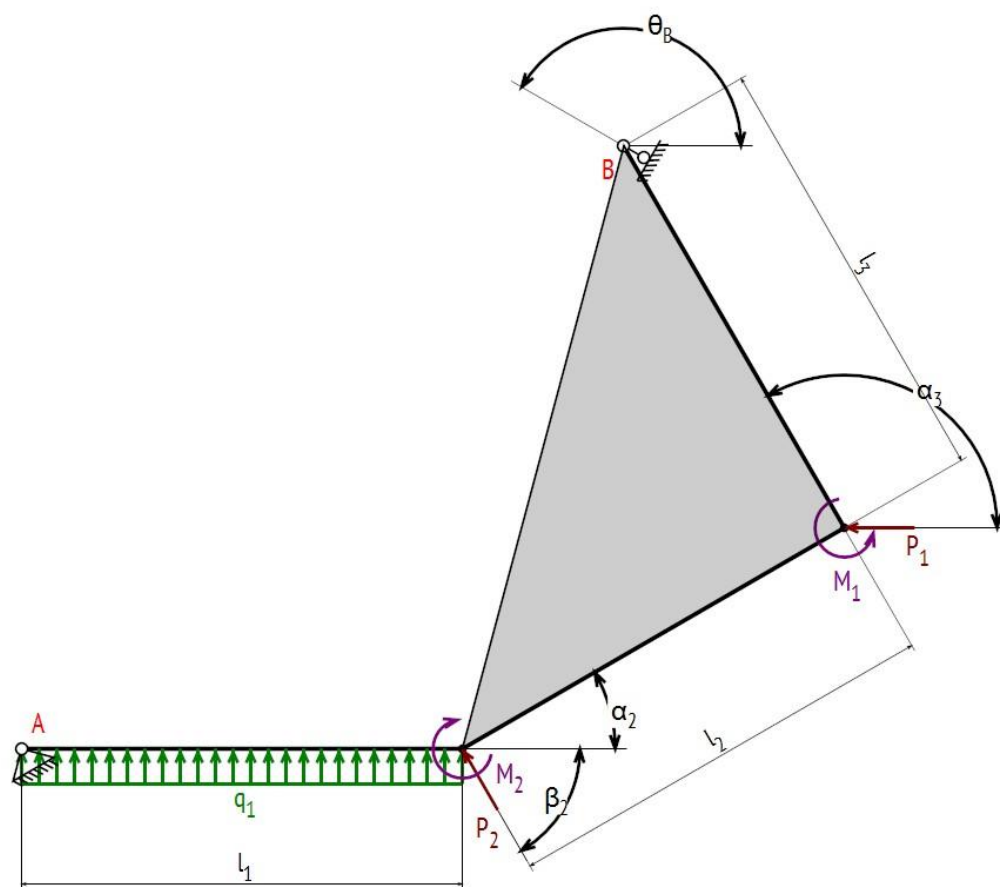
12





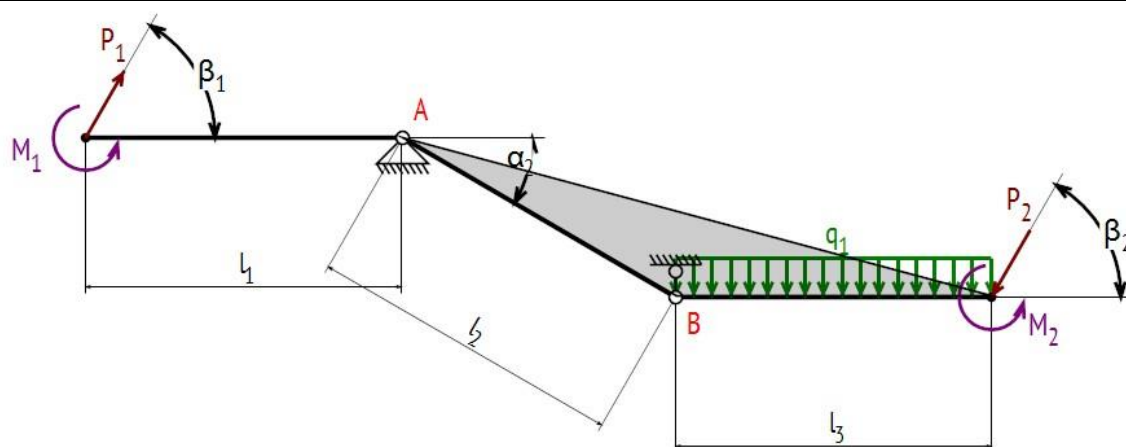
$$\beta_1 = \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 30^\circ$$

15



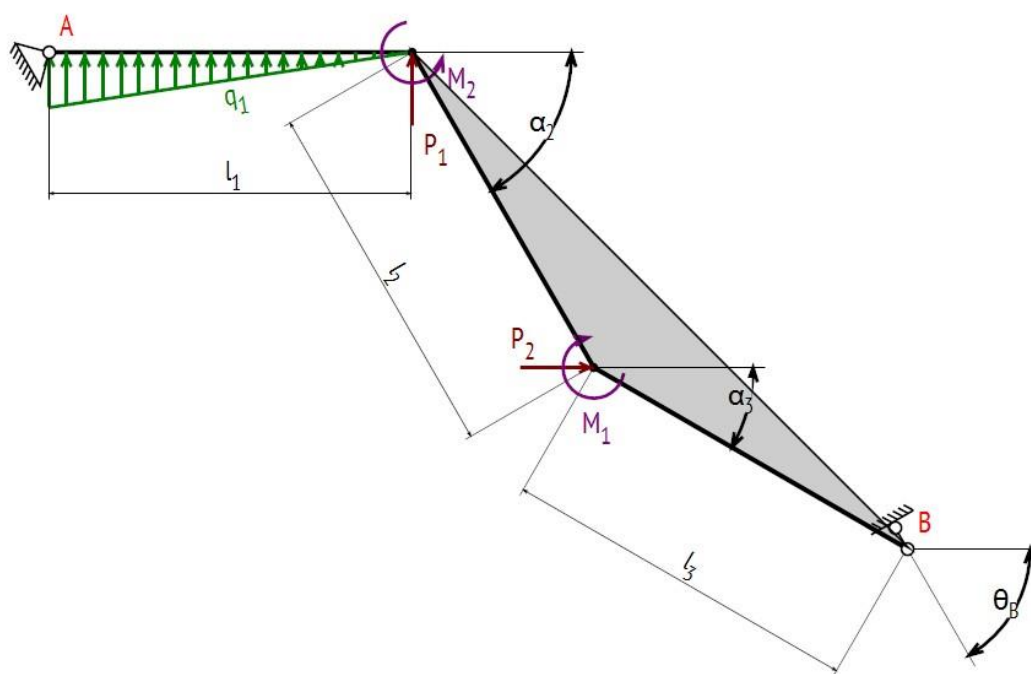
$$\beta_2 = 60^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, \alpha_3 = 120^\circ, \Theta_B = 150^\circ$$

16



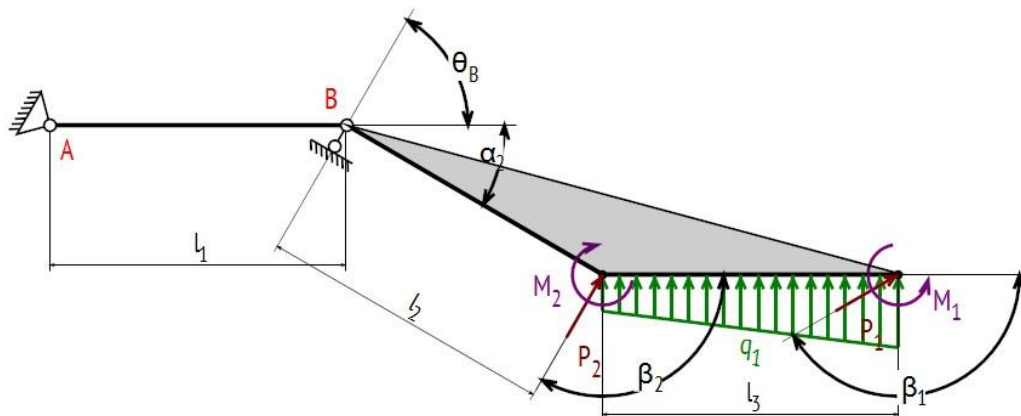
$$\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ, \alpha_2 = 30^\circ$$

17



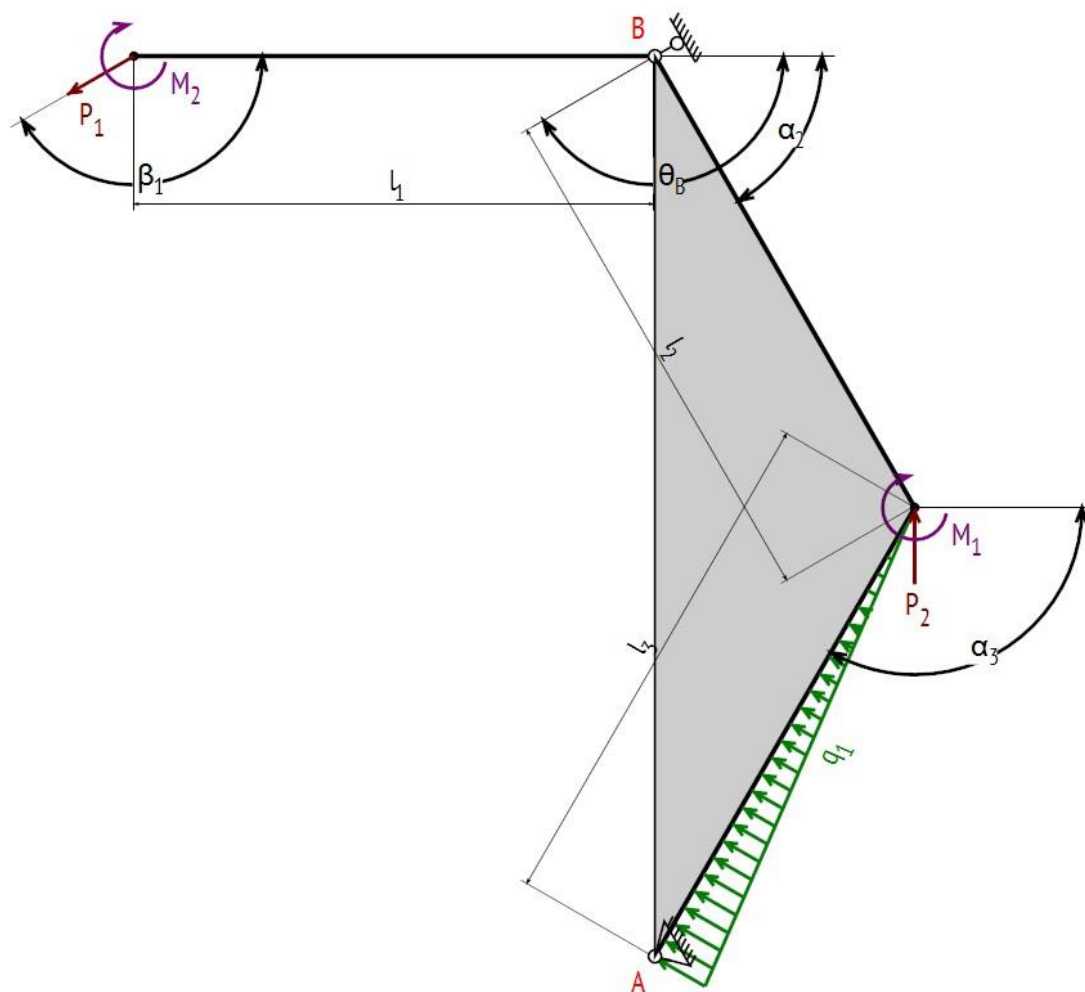
$$\Theta_B = \beta_2 = 60^\circ, \alpha_2 = 30^\circ$$

18



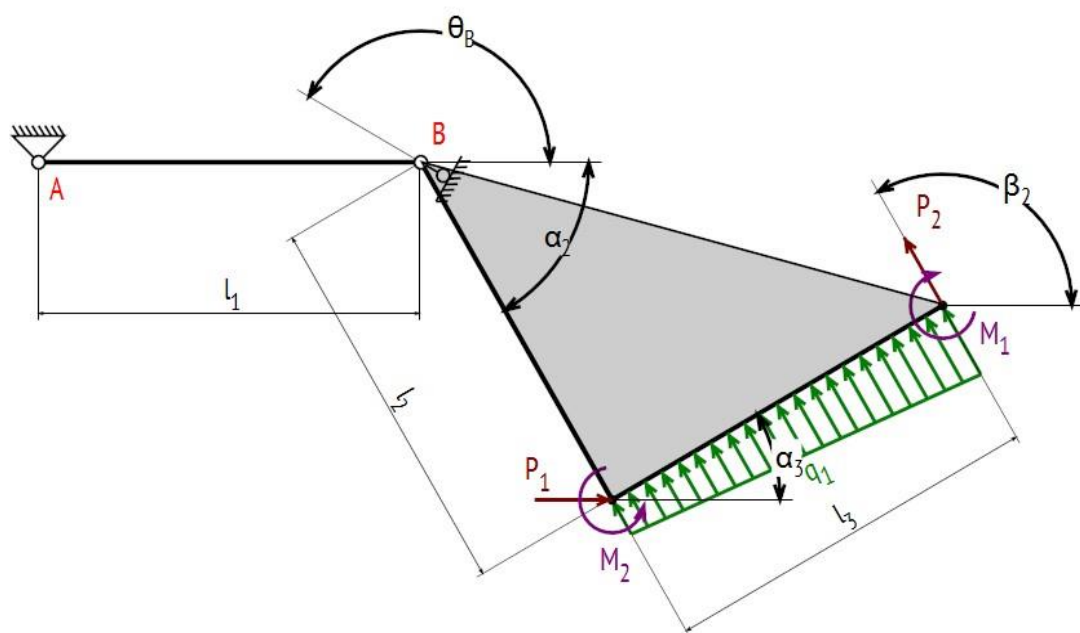
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, \Theta_B = 60^\circ$$

19



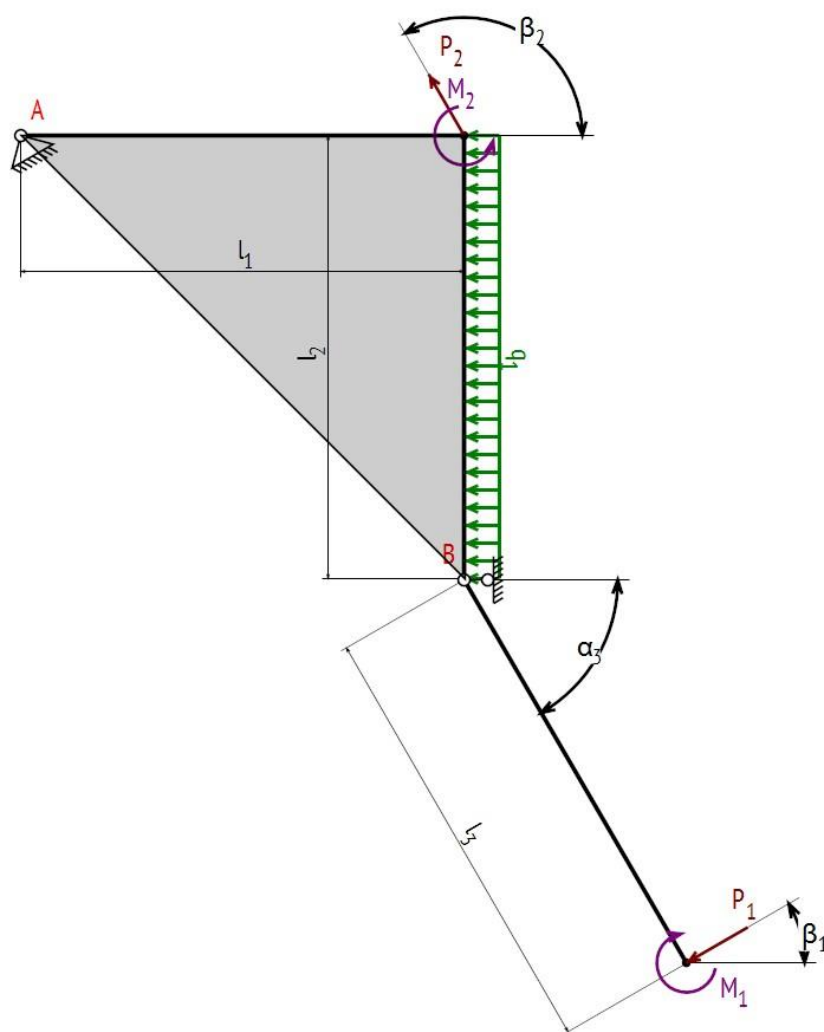
$$\beta_1 = \theta_B = 150^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$$

20



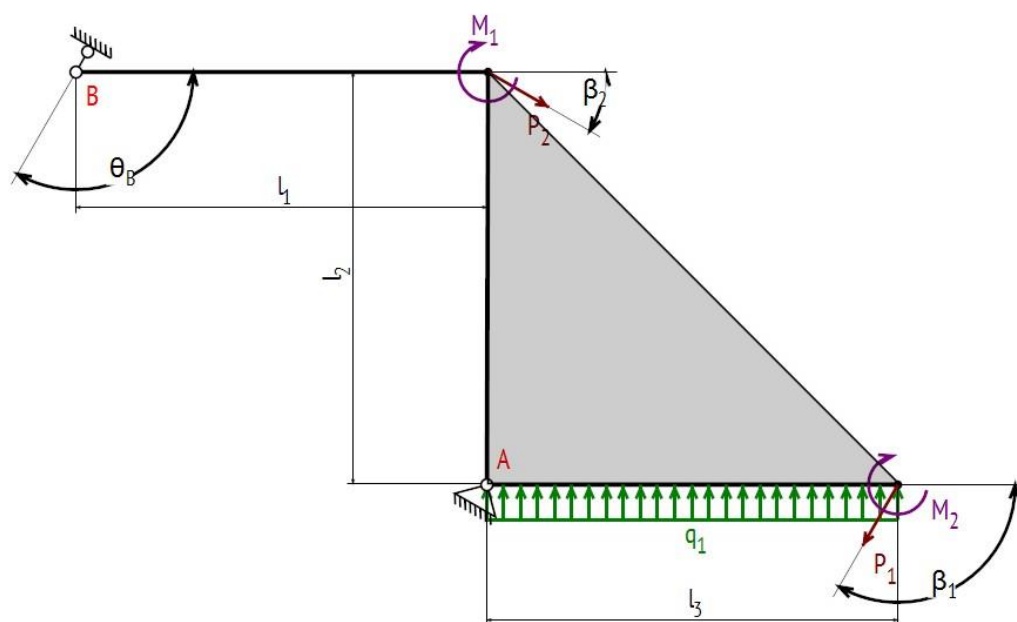
$$\beta_2 = 120^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, \theta_B = 150^\circ$$

21



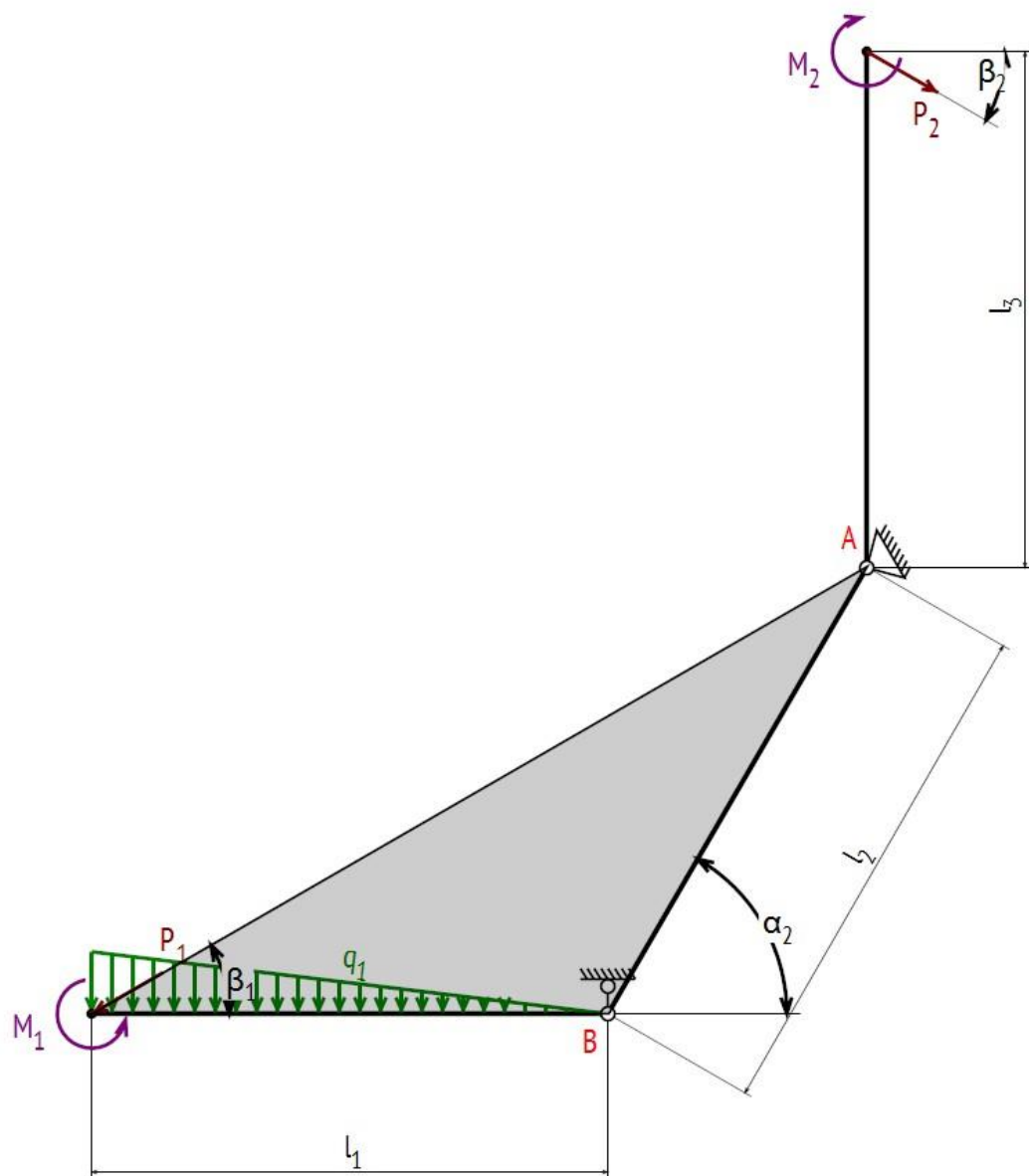
$$\beta_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, \beta_1 = 30^\circ$$

22

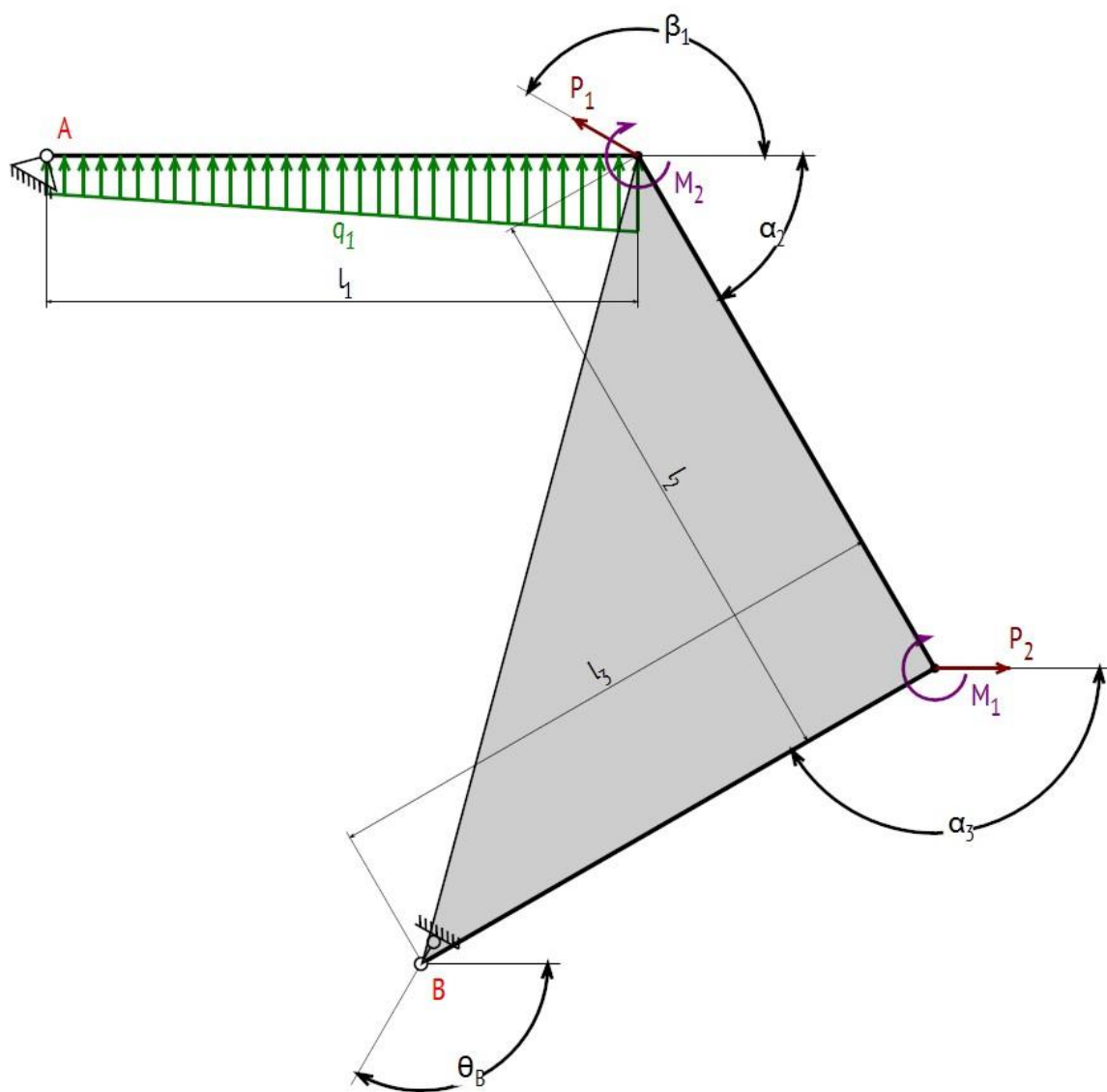


$$\beta_2 = 30^\circ, \beta_1 = \theta_B = 120^\circ$$

23

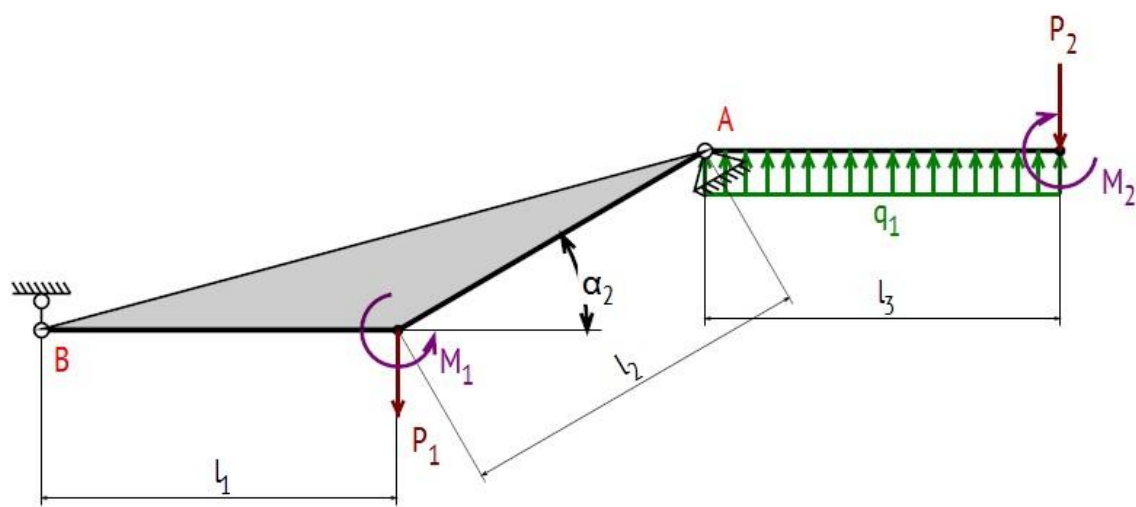


$$\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ, \alpha_2 = 60^\circ$$



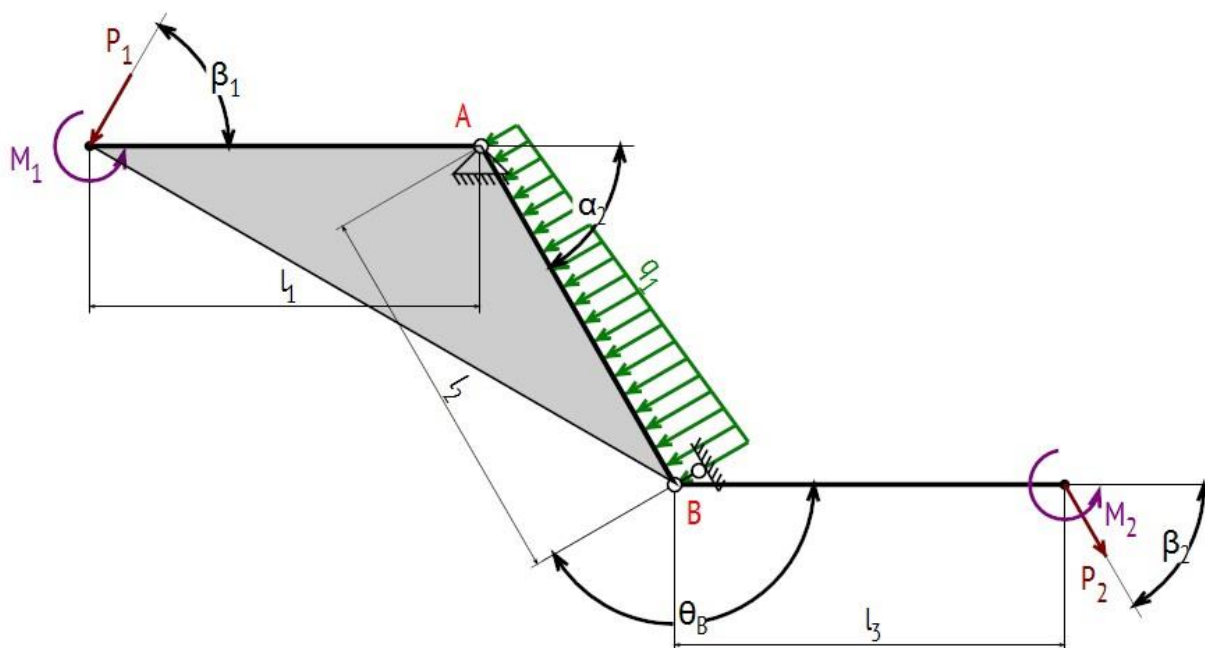
$$\theta_B = 120^\circ, \beta_1 = \alpha_3 = 150^\circ, \alpha_2 = 60^\circ$$

25



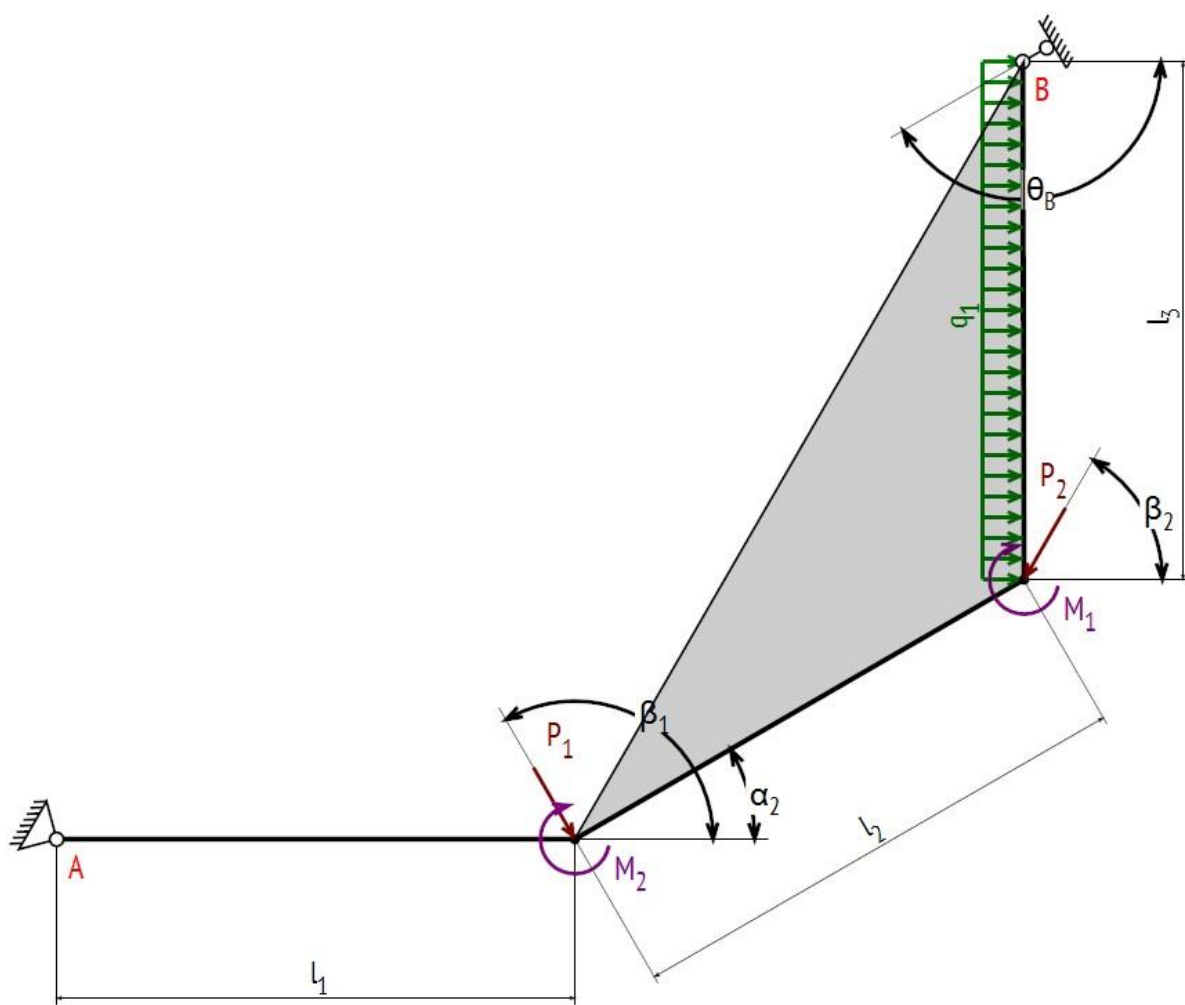
$$\alpha_2 = 60^\circ$$

26



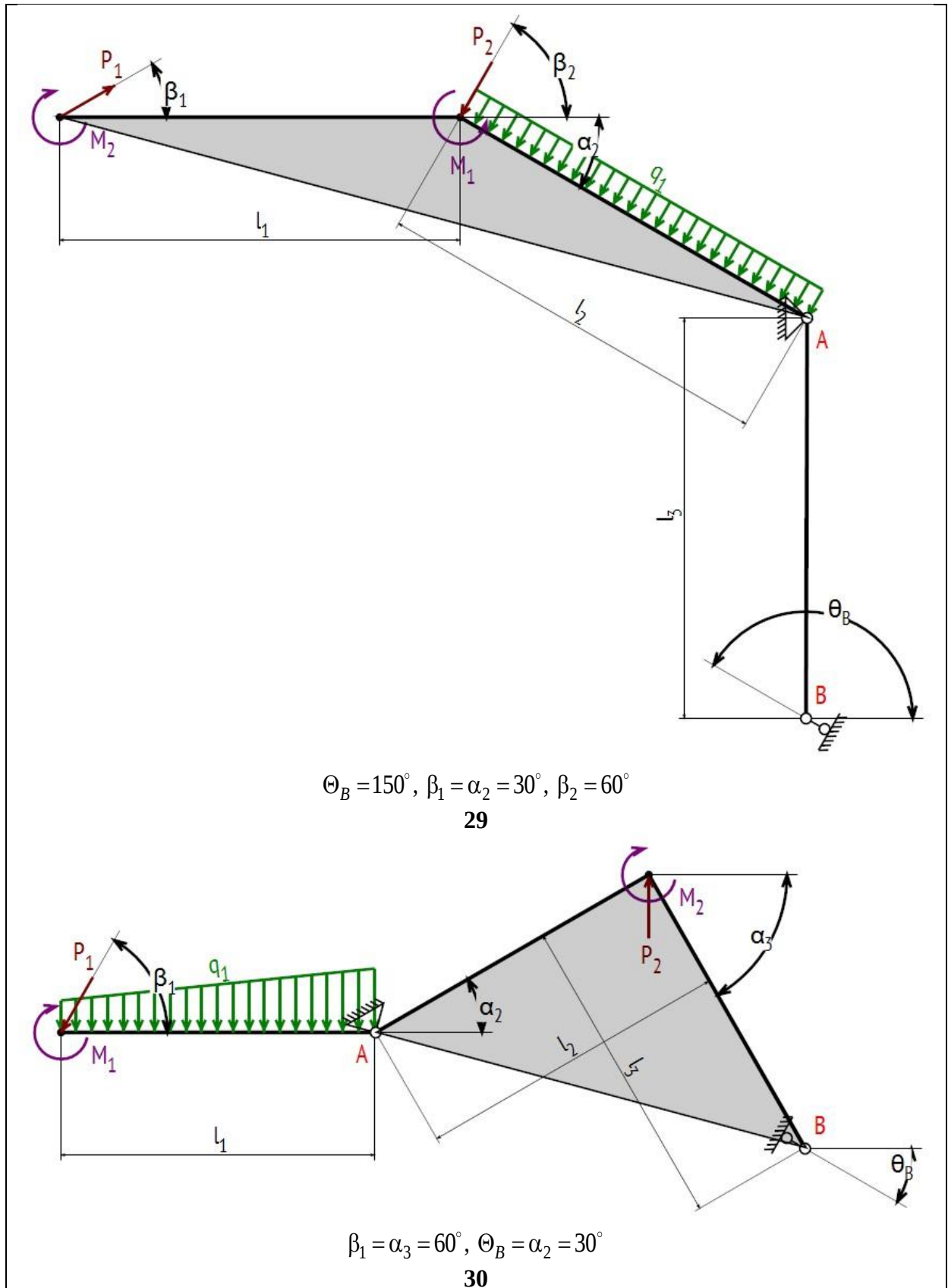
$$\theta_B = 150^\circ, \beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 = 60^\circ$$

27



$$\theta_B = 150^\circ, \beta_1 = 120^\circ, \beta_2 = 60^\circ, \alpha_2 = 30^\circ$$

28



Примечание: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координаты вершин треугольника.

Площадь произвольного треугольника рассчитывается как половина произведения основания a треугольника на его высоту h :

$$S_1 = \frac{a \cdot h}{2},$$

либо по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

где p – полупериметр треугольника; a, b, c – длины сторон треугольника.

1.1.5 Задания С-5

Условие задачи: Определите реакции в опорах. Выполните проверку правильности решения аналитическим способом.

Исходные данные представлены в табл. 7. Варианты заданий назначаются преподавателем в виде четырехзначного шифра. Например, вариант 5436.

шифр –	5	4	3	6
буквы –	в	г	д	е

Буквы обозначают номер столбца, цифры шифра – номер строки. Тогда для варианта 5436 условия задания выбираются по табл. 7 следующим образом:

- схема VI (т.к. номер схемы выбирается по цифре шифра, соответствующей букве «е», то есть для данного варианта по 6 строке);
- $F = 18$ кН (т.к. величина силы F выбирается по цифре шифра, соответствующей букве «в», то есть для данного варианта по 5 строке);
- $P = 21$ кН (т.к. величина силы P выбирается по цифре шифра, соответствующей букве «г», то есть для данного варианта по 4 строке);
- $G = 10$ кН (т.к. величина силы G выбирается по цифре шифра, соответствующей букве «д», то есть для данного варианта по 3 строке);
- аналогично выбираем остальные исходные данные: $q = 7$ кН/м; $M = 26$ кН·м; $l = 2,8$ м; $\alpha = 45$.

Принятые обозначения:

F, P, G – величины заданных активных сил, действующих на конструкцию;
 q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, приложенной к части конструкции;
 M – момент пары сил, приложенной к конструкции;
 l – линейный размер конструкции;
 α – угловой параметр конструкции.

Таблица 7

Исходные данные к заданию С-5

№ строки	схема	F, кН	P, кН	G, кН	q, кН/м	M, кН·м	l, м	α , град
0	I	10	27	8	2	30	2,0	15
1	II	12	25	9	3	32	2,2	30
2	III	14	23	10	4	28	2,4	45
3	IV	16	21	11	5	34	2,8	60
4	V	18	19	12	6	26	1,2	75
5	VI	20	17	13	7	36	1,4	15
6	VII	22	15	14	8	24	1,6	30
7	VIII	24	13	15	9	38	1,8	45
8	IX	26	11	16	10	22	2,6	60
9	X	28	9	17	11	20	3,0	75
	е	в	г	д	е	в	г	д

Таблица 8

Расчётные схемы к заданию С-5

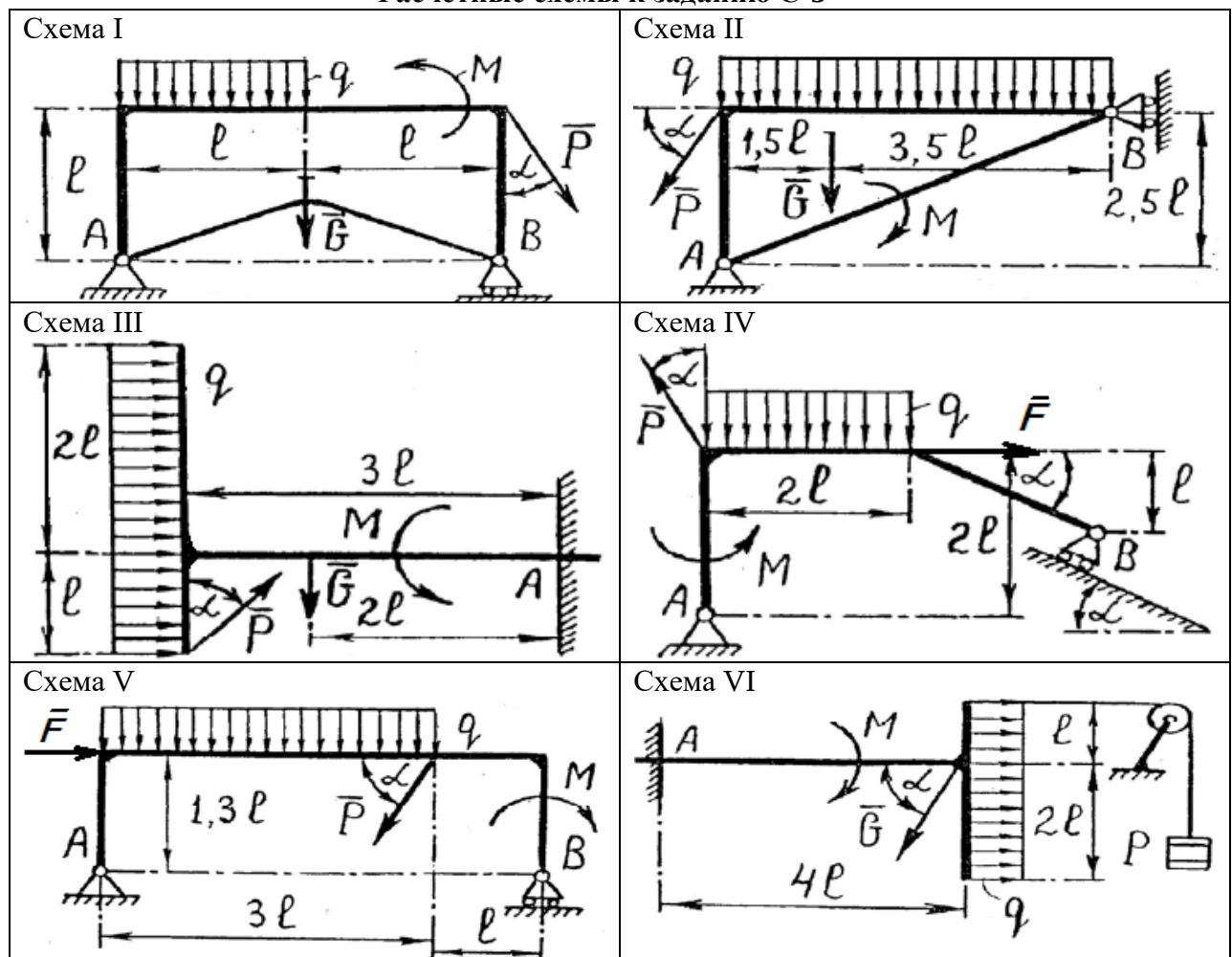


Схема VII

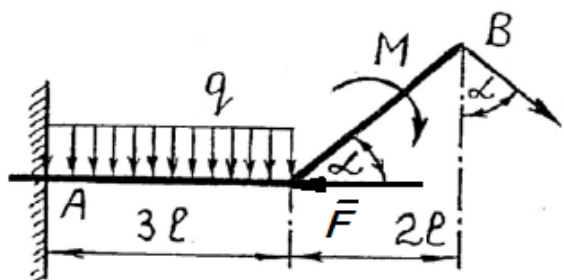


Схема VIII

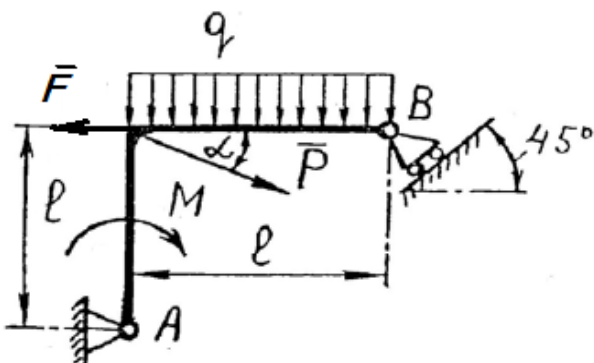


Схема IX

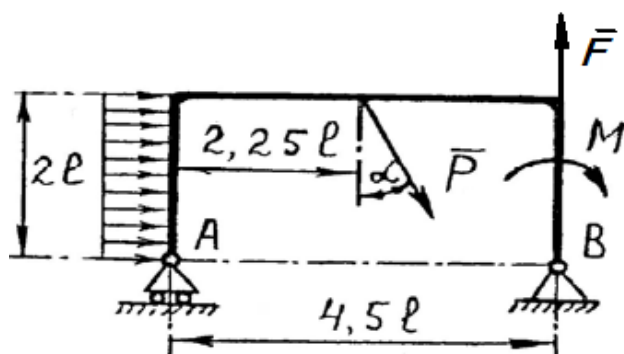
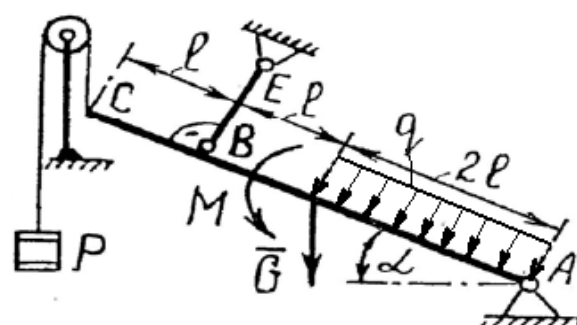


Схема X



1.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к твёрдому телу

Рассмотрим общие правила составления уравнений равновесия.

Выбор формы уравнений равновесия: при практическом решении задач можно пользоваться любой из трёх форм уравнений равновесия, однако, предпочтительнее выбрать первую (или основную) форму уравнений равновесия.

Выбор координатных осей и моментных точек: оси координат и моментные точки можно выбирать произвольно. Для того, чтобы полученные уравнения равновесия содержали в своём составе только одну неизвестную величину, целесообразно выбирать направления координатных осей перпендикулярно к направлению искомых неизвестных реакций (сил). За счёт того, что искомые неизвестные реакции (силы) при подобном выборе окажутся по направлению перпендикулярными к осям координат, при составлении уравнений проекций эти неизвестные в уравнения проекций не войдут. В качестве моментных точек следует выбирать такие точки, в которых пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных реакций (сил), тогда в уравнении моментов будет содержаться только одна неизвестная искомая реакция (сила, момент).

Рассмотрим алгоритм решения задач на равновесие твёрдого тела для плоской системы сил:

1. Выделите объект исследования – твёрдое тело, равновесие которого надо рассмотреть.
2. Изобразите на расчётной схеме все активные (заданные) силы.
3. Проанализируйте наложенные связи. Примените аксиому освобождаемости от связей, приложите соответствующие реакции. Проверьте условие статической определимости задачи: число неизвестных величин должно быть не более трёх.
4. Направьте оси координат, выберите моментные точки.
5. Составьте уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.
6. Решите систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин. Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остается прежним).
7. Выполните проверку правильности решения, составив не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций. При составлении уравнения проверки правильности решения учитывайте исправленные направления

реакций. В случае равенства нулю алгебраической суммы проекций или моментов считается, что проверка сошлась, и задача решена правильно.

1.3 Примеры решения задач по теме: «Определение реакций опор твёрдого тела»

Пример 1. Жёсткая рама AB , размеры которой указаны на рис. 1 ($a = 1$ м), закреплена шарнирно в неподвижной точке A , а правым концом опирается с помощью шарнирно-подвижной опоры на гладкую вертикальную плоскость. Левая часть рамы нагружена распределённой по линейному закону нагрузкой интенсивностью $q=2\text{кН/м}$. К раме приложены силы $F_1=20\text{кН}$ и $F_2=10\text{кН}$, расположенные под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а также пара сил с моментом $M=4\text{кН}\cdot\text{м}$. Определите реакции опор заданной конструкции.

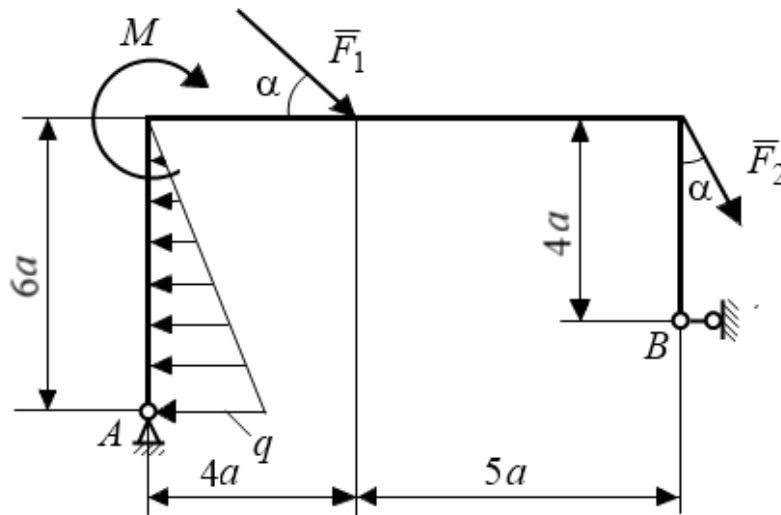


Рис. 1. Исходная схема

Решение.

1. Объектом исследования является жёсткая рама AB . Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на жёсткую раму AB .

2. Покажем на расчётной схеме рамы действующие силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, пару сил с моментом M , распределённую по линейному закону нагрузку заменим равнодействующей $\bar{Q}$, прикладываемой на расстоянии $6a/3$ от точки A .

3. Мысленно отбрасываем связи в точках A и B и заменяем их реакциями $\bar{R}_B; \bar{X}_A; \bar{Y}_A$.

4. Проводим через точку A оси координат Ax и выбираем её в качестве моментной точки.

5. Составляем три уравнения равновесия для данной произвольной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0; -X_A - Q + F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \alpha - R_B = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; -Y_A - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0; Q \cdot 2a - M - F_1 \cdot 6a \cdot \cos \alpha - F_1 \cdot 4a \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot 6a \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot 9a \cdot \cos \alpha + R_B \cdot 2a = 0.$$

При этом $Q = \frac{1}{2}q \cdot 6a = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ кН}$.

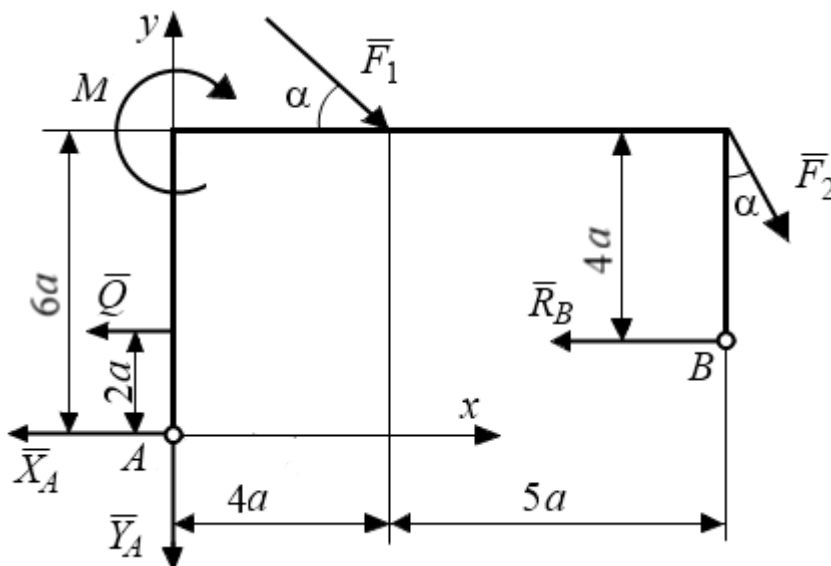


Рис. 2. Исходная схема

6. Решаем полученную систему уравнений равновесия.

Из последнего уравнения находим R_B :

$$R_B = M/2 + F_1 \cdot (3 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ) + F_2 \cdot (3 \sin 30^\circ - 4,5 \cos 30^\circ) - Q =$$

$$= 4/2 + 20 \cdot (3 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ) + 10 \cdot (3 \sin 30^\circ - 4,5 \cos 30^\circ) - 6 \approx 122 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения определяем X_A :

$$X_A = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ - Q - R_B = 20 \cdot \cos 30^\circ + 10 \cdot \cos 30^\circ - 6 - 122 =$$

$$= -105,68 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения определяем Y_A :

$$Y_A = -F_1 \cdot \sin 30^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = -20 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \sin 30^\circ = -18,66 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -105,68 \text{ кН}$; $Y_A = -18,66 \text{ кН}$; $R_B = 122 \text{ кН}$.

Знак «минус» свидетельствует о том, что составляющая реакции связи должна быть направлена в другую сторону.

Проверка. Сумма моментов относительно точки B:

$$\Sigma m_B(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-M - F_1 \cdot 4a \cdot \cos \alpha + F_1 \cdot 5a \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot 4a \cdot \sin \alpha - X_A \cdot 2a + Y_A \cdot 9a = 0;$$

$$-4 - 20 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 20 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ - (-105,68) \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ (-18,66) \cdot 9 \cdot 1 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Пример 2. Твёрдое тело $BADC$ состоит из нескольких стержней, жёстко связанных между собой. К телу приложены внешние нагрузки: сила $P_1 = 8$ Н, пара сил с моментом $M_1 = 10$ Нм, распределённая нагрузка интенсивностью $q_1 \in [10; 20]$ Н/м. Размеры участков $l_{CD} = 1$ м, $l_{DA} = l_{AB} = 0,8$ м. Тело закреплено в точке A шарнирно-неподвижной опорой, в точке B шарнирно-подвижной опорой (рис. 3, а). *Определите реакции в опорах A и B . Выполните проверку правильности решения.*

Решение:

1. Объектом исследования является твёрдое тело $BADC$. Рассмотрим равновесие произвольной плоской системы сил, действующей на твёрдое тело $BADC$.

2. Выбираем направление осей координат Ax .

3. Показываем все действующие на твёрдое тело $BADC$ силы и момент пары сил (рис. 3, б). Распределённую нагрузку заменим равнодействующей Q_1 . Для распределённой нагрузки q_1 , расположенной на расстоянии h_{DQ1} от начала стержня, получим:

$$h_{DQ1} = \frac{l_{DA}}{3} \cdot \frac{q_{1\min} + 2 \cdot q_{1\max}}{q_{1\min} + q_{1\max}} = \frac{0,8}{3} \cdot \frac{10 + 2 \cdot 20}{10 + 20} = 0,444(\text{м});$$

$$Q_1 = |Q_{1y}| = \frac{q_{1\min} + q_{1\max}}{2} \cdot l_{DA} = \frac{10 + 20}{2} \cdot 0,8 = 12(\text{Н}).$$

4. Согласно аксиоме освобождения от связей, мысленно отбрасываем связи в точке A (шарнирно-неподвижная опора) и в точке B (шарнирно-подвижная опора) и заменяем реакциями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ (см. рис. 3, б).

5. Составляем три уравнения равновесия (по основной форме):

$$\sum F_{kx} = 0: X_A + P_1 + R_B \cdot \cos \Theta_B = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: Y_A + Q_1 + R_B \cdot \sin \Theta_B = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0: Q_1 \cdot (l_{DA} - h_{DQ1}) + P_1 \cdot l_{CD} - M_1 - R_B \cdot \cos \Theta_B \cdot l_{AB} = 0.$$

6. Совместно решаем систему уравнений равновесия, определяя три неизвестные величины: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$.

Из третьего уравнения выражаем R_B :

$$R_B = \frac{Q_1 \cdot (l_{DA} - h_{DQ1}) + P_1 \cdot l_{CD} - M_1}{\cos \Theta_B \cdot l_{AB}} = \frac{12 \cdot (0,8 - 0,444) + 8 \cdot 1 - 10}{\cos(-30^\circ) \cdot 0,8} = 3,27(\text{Н}).$$

Из первого уравнения выражаем X_A :

$$X_A = -P_1 - R_B \cdot \cos \Theta_B = -8 - 3,27 \cdot \cos(-30^\circ) = -10,8(\text{Н}).$$

Из второго уравнения выражаем Y_A :

$$Y_A = -Q_1 - R_B \cdot \sin \Theta_B = -12 - 3,27 \cdot \sin(-30^\circ) = -10,4(\text{Н}).$$

Знаки «минус», полученные в результате решения задачи, свидетельствуют о том, что соответствующие реакции, а именно $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ направлены в сторону, противоположную той, которая предварительно выбрана на рис. 3, б.

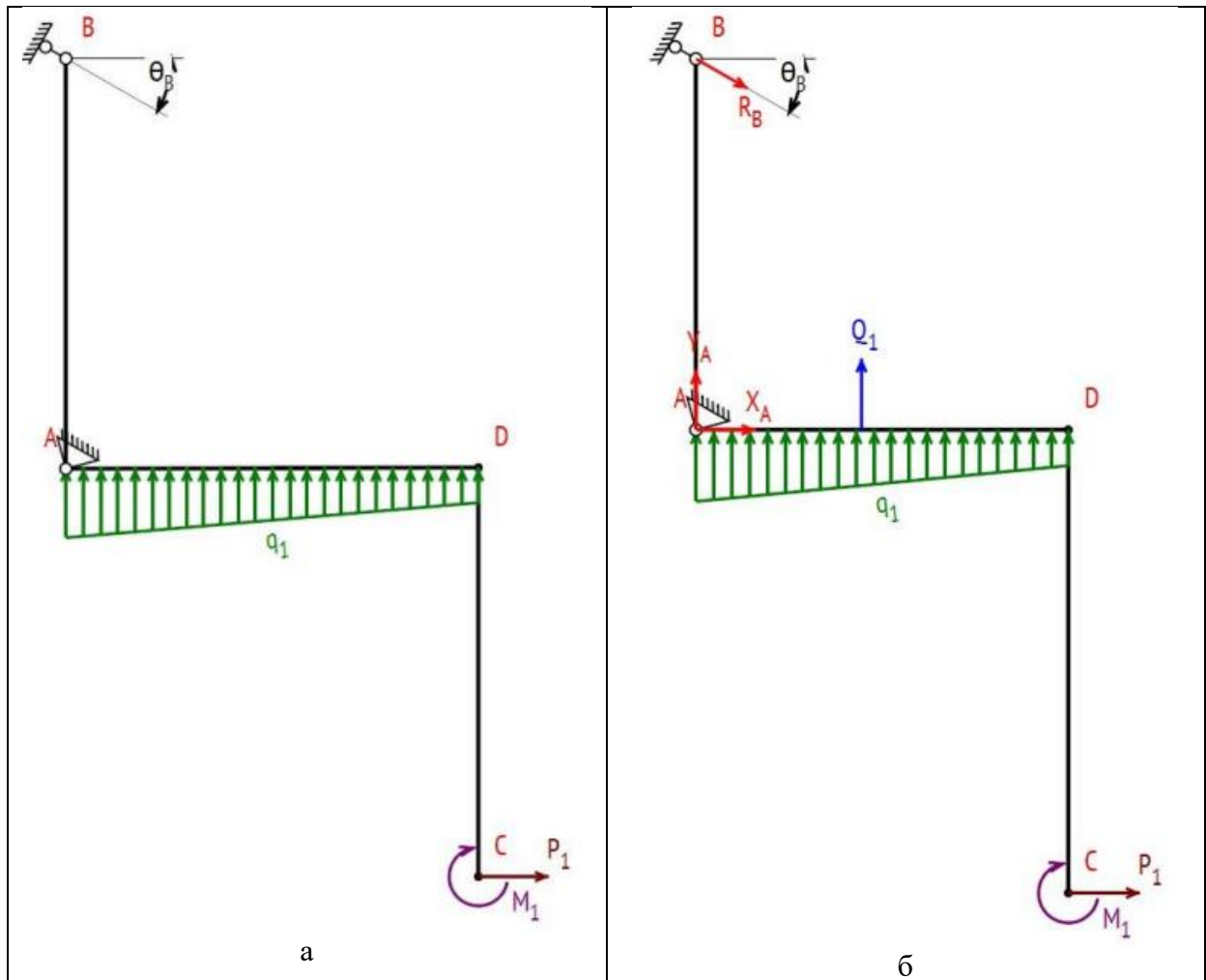


Рис. 3. Расчётные схемы: а – исходная схема; б – преобразованная схема

7. Выполним проверку правильности решения:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0: -Q_1 \cdot h_{DQ1} + P_1 \cdot l_{CD} - M_1 + R_B \cdot (-\cos \Theta_B \cdot l_{AB} - \sin \Theta_B \cdot l_{DA}) - Y_A \cdot l_{DA} = 0.$$

$$-12 \cdot 0,444 + 8 \cdot 1 - 10 + 3,27 \cdot (-\cos(-30^\circ) \cdot 0,8 - \sin(-30^\circ) \cdot 0,8) - (-10,4) \cdot 0,8 = 0.$$

$$0 \approx 0.$$

Ответ: $X_A = -10,8(\text{Н})$, $Y_A = -10,4(\text{Н})$, $R_B = 3,27(\text{Н})$.

Пример 3. Жёсткая рама опирается на шарнирно-неподвижную опору в точке А и шарнирно-подвижную опору в точке В. К раме приложены силы P_1 (Н) и P_2 (Н), пары сил с моментами M_1 (Нм) и M_2 (Нм), распределённая нагрузка интенсивностью q_1 (Н/м). В центре тяжести однородной треугольной пластины AED приложена сила G , пропорциональная её площади (коэффициент пропорциональности $\gamma = 0,5$). Определите реакции в опорах жёсткой рамы. Выполните проверку правильности решения.

Дано: $P_1 = 24$ Н; $P_2 = 1$ Н; $M_1 = 1$ Нм; $M_2 = 100$ Нм; $q_1 = 4$ Н/м;
 $BC = 1$ м; $DB = 0,4$ м; $AE = 0,8$ м; $DA = 1,6$ м; $ED = BC$; $\gamma = 0,5$.

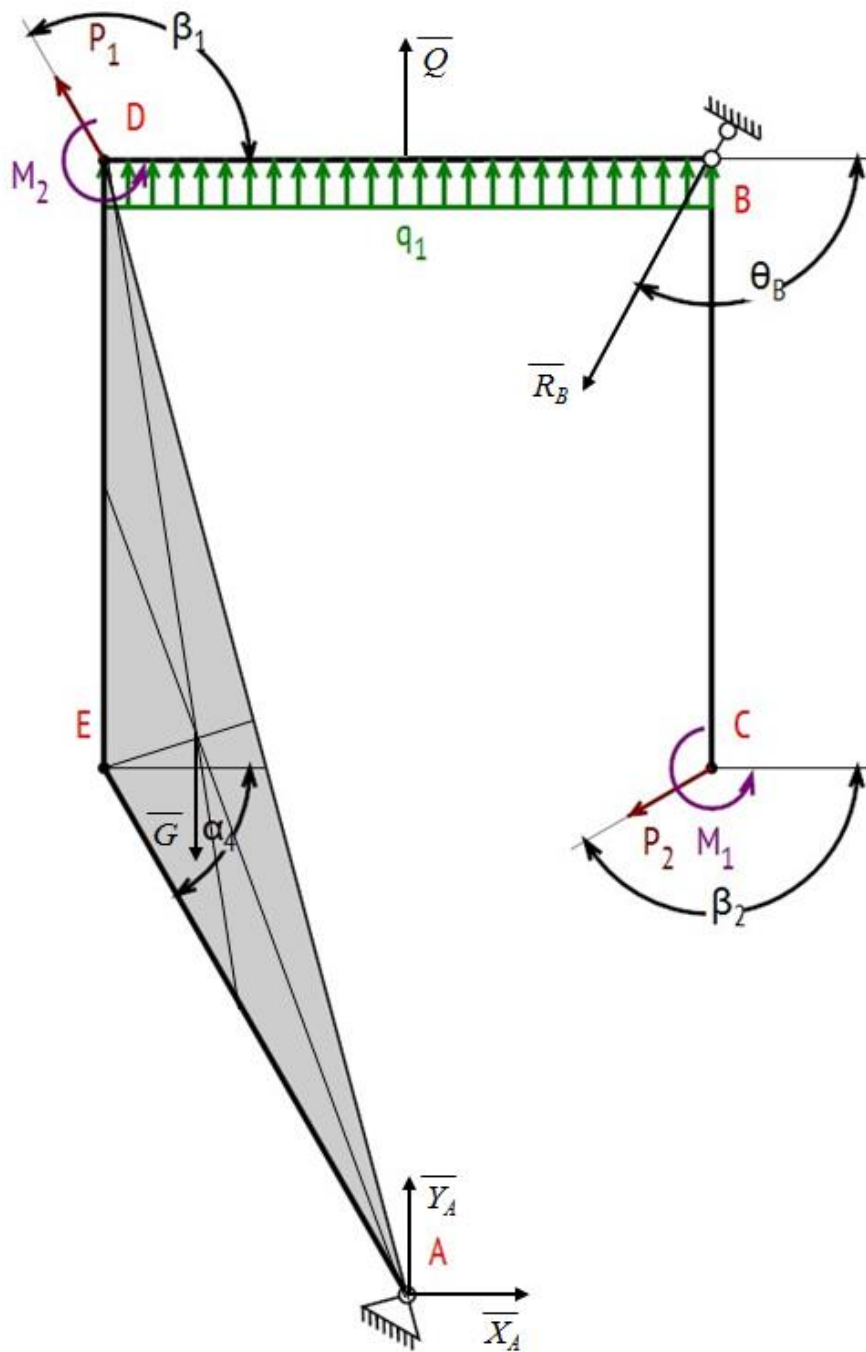


Рис. 4. Расчётная схема рамы

Решение:

Объект исследования – жёсткая рама $AEDBC$.

Анализ связей: в точке A – шарнирно-неподвижная опора, в точке B – стержневая опора. Воспользуемся аксиомой освобождения от связей, заменим связи в точках A и B реакциями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$.

Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой:

$$Q = q_1 \cdot DB;$$

$$Q = 4 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ (Н)}.$$

Рассчитаем вес треугольной пластины:

$$G = \gamma \cdot \underbrace{\sqrt{p \cdot (p - ED) \cdot (p - AE) \cdot (p - DA)}}_{\text{площадь треугольной пластины (формула Герона)}} =$$

$$= 0,5 \cdot \sqrt{1,7697 \cdot (1,7697 - 1) \cdot (1,7697 - 0,8) \cdot (1,7697 - 1,6)} = 0,100 \text{ Н};$$

где: $DA = \sqrt{ED^2 + AE^2 - 2 \cdot ED \cdot AE \cdot \cos(150^\circ)} = 1,739 \text{ м};$

$p = (ED + AE + DA) / 2 = 1,7697 \text{ (м)}$ - полупериметр треугольной пластины AED .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{(kx)} = 0; X_A - P_1 \cos 60^\circ - R_B \cos 60^\circ - P_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{(ky)} = 0; Q - G + Y_A + P_1 \sin 60^\circ - R_B \sin 60^\circ - P_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum m_{D\bar{F}(kx)} = 0;$$

$$Q \cdot DB / 2 + X_A \cdot (ED + AE \cdot \cos 30^\circ) + Y_A \cdot AE \cdot \sin 30^\circ - R_B \cdot \sin 60^\circ \cdot DB + M_1 + M_2 - P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot BC - P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot DB - (G \cdot AE \cos 60^\circ) / 3 = 0.$$

Решаем совместно полученную систему уравнений:

$$R_B = -133,867 \text{ (Н)}; X_A = -54,068 \text{ (Н)}; Y_A = -137,717 \text{ (Н)}.$$

Проверка правильности решения (сумма моментов относительно моментной точки B):

$$\sum m_{B\bar{F}(kx)} = 0;$$

$$M_1 + M_2 - P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot BC - Q \cdot DB / 2 - P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot DB + X_A \cdot (ED + AE \cdot \cos 30^\circ) - Y_A \cdot (DB - AE \cdot \sin 30^\circ) + G \cdot (DB - (1/3) \cdot AE \cdot \cos 60^\circ) = 0.$$

Подставляем числовые значения в уравнение проверки:

$$1 + 100 - 1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 - 1,6 \cdot 0,4 / 2 - 24 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,4 + (-54,068) \cdot (1 + 0,8 \cdot \cos 30^\circ) - (-137,717) \cdot (0,4 - 0,8 \cdot \sin 30^\circ) + 0,100 \cdot (0,4 - (1/3) \cdot 0,8 \cdot \cos 60^\circ) = 0, \\ 0 \equiv 0.$$

Проверка сошлась.

Ответ: $R_B = -133,867 \text{ (Н)}; X_A = -54,068 \text{ (Н)}; Y_A = -137,717 \text{ (Н)}.$

Пример 4. Жёсткая рама, размеры которой указаны на рис. 5 ($l = 2 \text{ м}$), жёстко закреплена точке A . Левая часть рамы нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$. К раме приложены силы $F = 10 \text{ кН}$ и $P = 25 \text{ кН}$, а также пара сил с моментом равным $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Угол $\alpha = 30^\circ$. *Определите* реакции опор заданной конструкции.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на жёсткую раму.

2. Покажем на расчётной схеме рамы (см. рис. 6) действующие на неё силы $\bar{F}$ и $\bar{P}$, пару сил с моментом M , а равномерно распределённую нагрузку заменим равнодействующей $\bar{Q}$, прикладываемой в середине участка AC .

3. Мысленно отбрасываем жёсткую заделку в точке A и заменяем её реакциями связи $M_A; \bar{X}_A; \bar{Y}_A$.

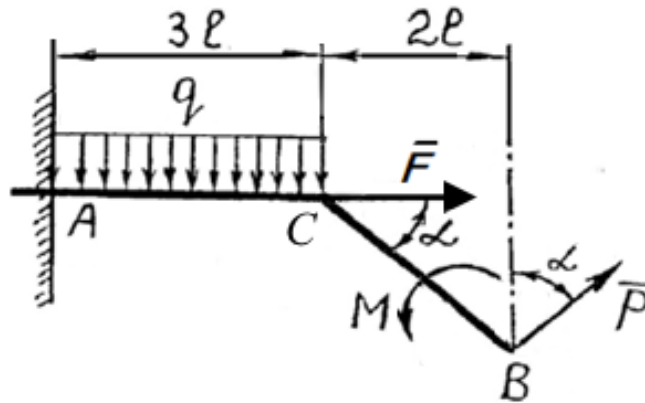


Рис. 5. Исходная схема к примеру 4

4. Проводим через точку A оси координат Axу и выбираем её в качестве моментной точки.

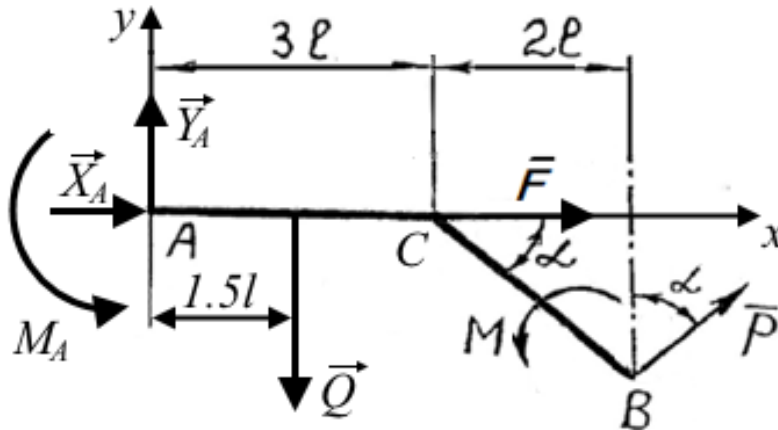


Рис. 6. Расчётная схема рамы

5. Составляем три уравнения равновесия для данной произвольной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_A + F + P \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_A - Q + P \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0; M_A - Q \cdot 1,5l + M + P \cdot \sin \alpha \cdot 2l \cdot \operatorname{tg} \alpha + P \cdot \cos \alpha \cdot 5l = 0.$$

При этом $Q = q \cdot 3l = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ (кН).

6. Решаем полученную систему уравнений равновесия.

Из последнего уравнения находим M_A :

$$\begin{aligned} M_A &= Q \cdot 1,5l - M - P \cdot l \cdot (2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + 5 \cos \alpha) = \\ &= 12 \cdot 1,5 \cdot 2 - 20 - 25 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 0,5 \cdot 0,577 + 5 \cdot 0,866) = -229,35 \text{ (кНм)}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения определяем X_A :

$$X_A = -F - P \cdot \sin \alpha = -10 - 25 \cdot 0,5 = -22,5 \text{ (кН)}.$$

Из второго уравнения определяем Y_A :

$$Y_A = Q - P \cdot \cos \alpha = 12 - 25 \cdot 0,866 = -9,65 \text{ (кН)}.$$

7. Проверка. Сумма моментов относительно точки B:

$$\begin{aligned} \Sigma m_B(\bar{F}_k) &= 0; \quad M_A - X_A \cdot 2l \cdot \operatorname{tg} \alpha - Y_A \cdot 5l + Q \cdot 3,5l - F \cdot 2l \cdot \operatorname{tg} \alpha + M = 0; \\ -229,35 + 22,5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,577 + 9,65 \cdot 5 \cdot 2 + 12 \cdot 3,5 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,577 + 20 &= 0; \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ответ: $X_A = -22,5$ (кН); $Y_A = -9,65$ (кН); $M_A = -229,35$ (кНм).

Знак «минус» свидетельствует о том, что соответствующие реакции связи должна быть направлены в другую сторону.

Пример 5. Жёсткая рама, размеры которой указаны на рис. 7 ($l = 2$ м), жестко закреплена точке A. Левая часть рамы нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q = 2$ кН/м. К раме приложены силы $G = 20$ кН и $P = 15$ кН, а также пара сил с моментом равным $M = 8$ кН·м. Угол $\alpha = 30^\circ$. Определите реакции опор заданной конструкции.

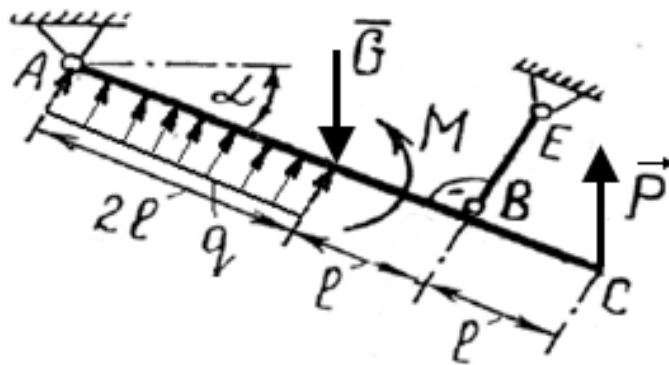


Рис. 7. Исходная схема к примеру 5

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на жёсткую раму.

2. Покажем на расчётной схеме рамы (см. рис. 8) действующие на неё силы $\bar{G}$ и $\bar{P}$, пару сил с моментом M , а равномерно распределённую нагрузку заменим равнодействующей $\bar{Q}$, прикладываемой в середине участка AD.

3. Мысленно отбрасываем связи в точках A и B и заменяем их реакциями связи $\bar{R}_B; \bar{X}_A; \bar{Y}_A$.

4. Проводим через точку A оси координат Axu и выбираем её в качестве моментной точки.

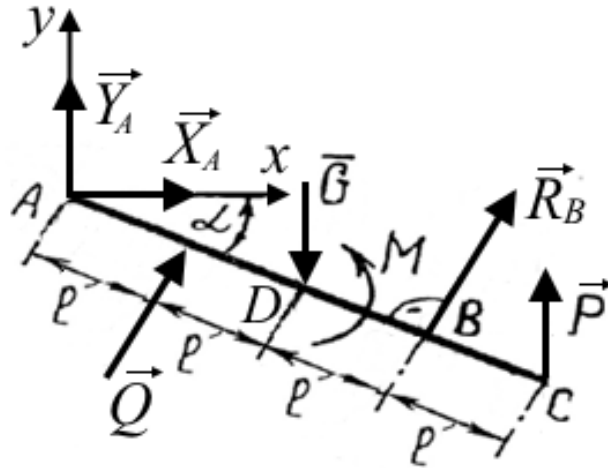


Рис. 8. Расчётная схема рамы

5. Составляем три уравнения равновесия для данной произвольной плоской системы сил.

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_A + Q \cdot \sin \alpha + R_B \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_A + Q \cdot \cos \alpha - G + R_B \cdot \cos \alpha + P = 0;$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0; Q \cdot l - G \cdot 2l \cdot \cos \alpha + M + R_B \cdot 3l + P \cdot 4l \cdot \cos \alpha = 0.$$

При этом $Q = q \cdot 2l = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (кН).

6. Решаем полученную систему уравнений равновесия.

Из последнего уравнения находим R_B :

$$\begin{aligned} R_B &= -\frac{1}{3} \cdot \left(Q - G \cdot 2 \cdot \cos \alpha + \frac{M}{l} + P \cdot 4 \cdot \cos \alpha \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \left(8 - 20 \cdot 2 \cdot 0,866 + \frac{8}{2} + 15 \cdot 4 \cdot 0,866 \right) = -9,773 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения определяем X_A :

$$X_A = -Q \cdot \sin \alpha - R_B \cdot \sin \alpha = -8 \cdot 0,5 + 9,773 \cdot 0,5 = 0,887 \text{ (кН)}.$$

Из второго уравнения определяем Y_A :

$$Y_A = -Q \cdot \cos \alpha + G - R_B \cdot \cos \alpha - P = -8 \cdot 0,866 + 20 + 9,773 \cdot 0,866 - 15 = 6,535 \text{ (кН)}.$$

7. Проверка. Сумма моментов относительно точки C:

$$\begin{aligned} \Sigma m_C(\bar{F}_k) &= 0; -R_B \cdot l + M + G \cdot 2l \cdot \cos \alpha - Q \cdot 3l - X_A \cdot 4l \cdot \sin \alpha - Y_A \cdot 4l \cdot \cos \alpha = 0; \\ 9,773 \cdot 2 + 8 + 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,866 - 8 \cdot 3 \cdot 2 - 0,887 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0,5 - 6,535 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0,866 &= 0; \\ 0,004 &\approx 0. \end{aligned}$$

Ответ: $X_A = 0,887$ (кН); $Y_A = 6,535$ (кН); $R_B = -9,773$ (кН).

Знак «минус» свидетельствует о том, что реакция $\bar{R}_B$ должна быть направлена в другую сторону.

2 РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

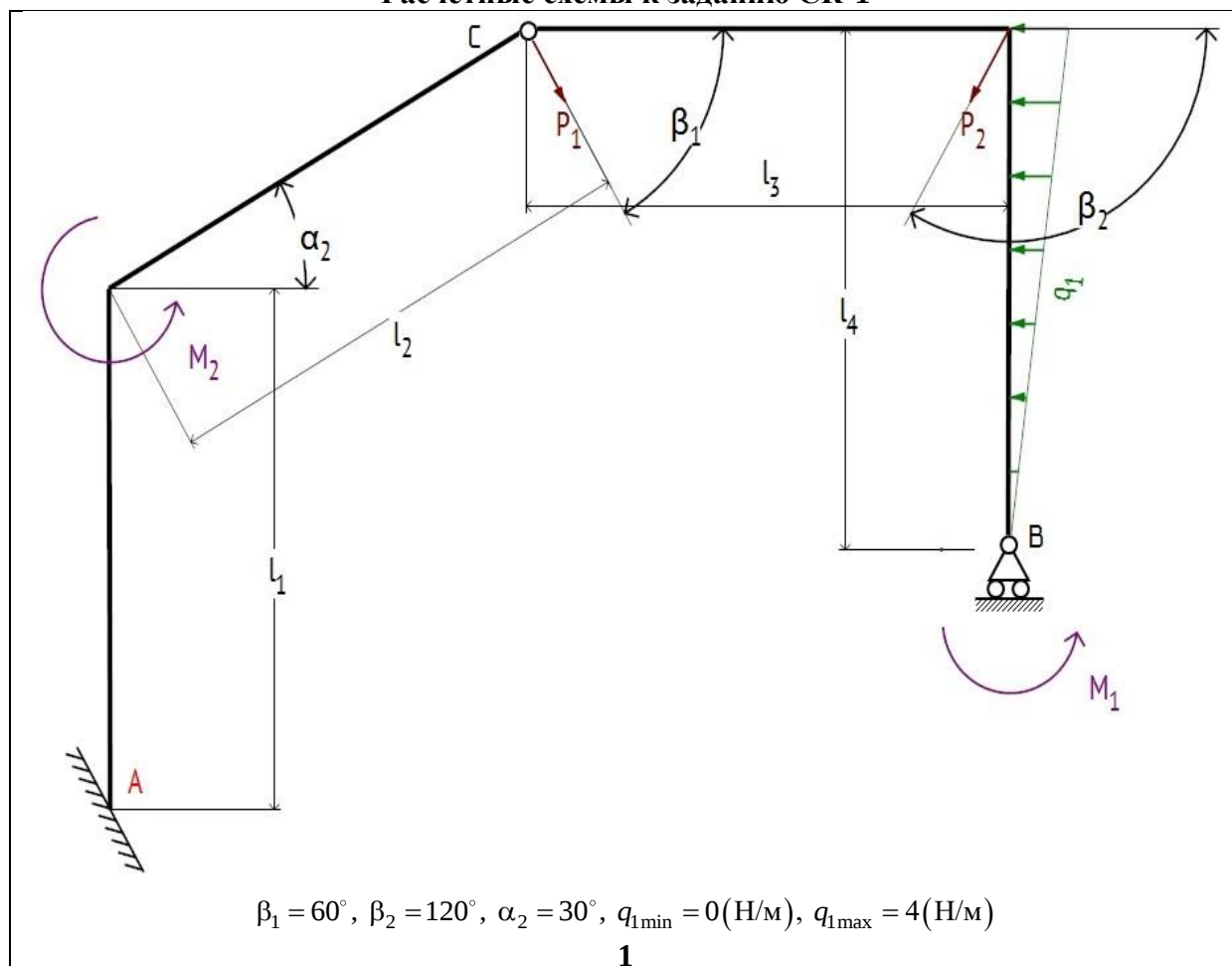
2.1 Задания на тему: «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)»

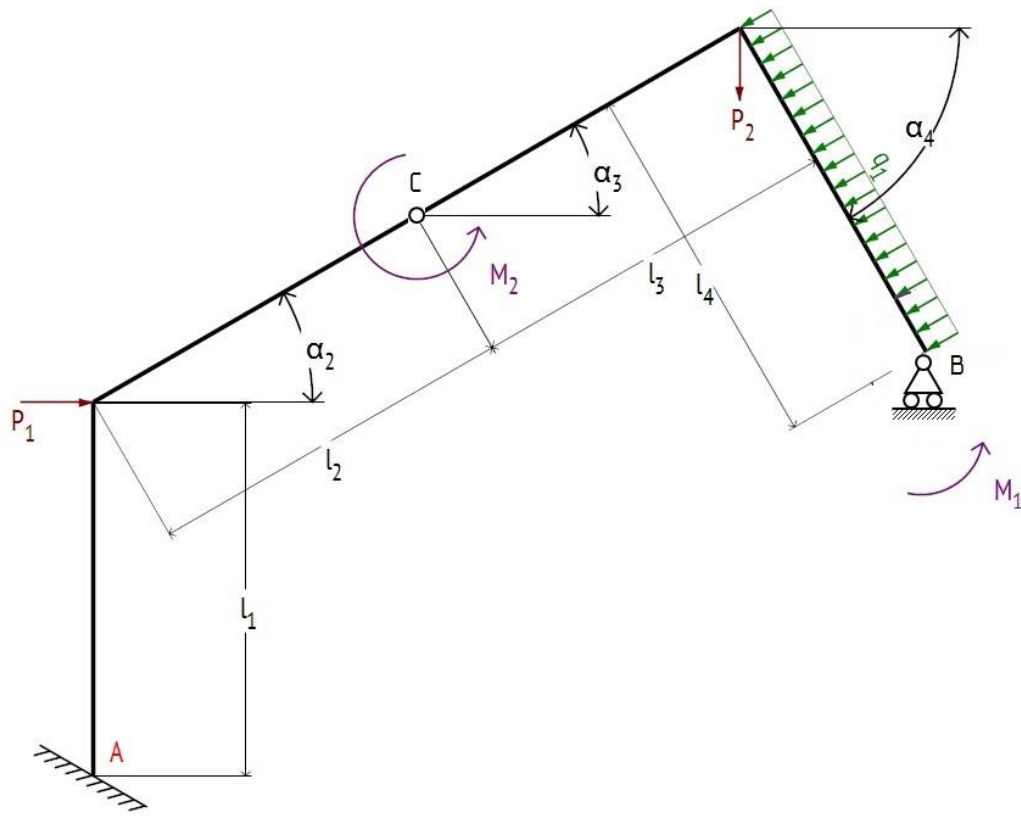
2.1.1 Задания СК-1 (1 – 30)

Условие задачи: Составная конструкция ACB , состоящая из твёрдых тел AC и CB , закреплена следующим образом: а) в точке B - шарнирно-подвижная опора, в точке A – жёсткая заделка, в точке C – цилиндрический шарнир (варианты 1-15) либо б) в точках A и B - шарнирно-неподвижные опоры, в точке C – цилиндрический шарнир (варианты 16-30). К составной конструкции приложены силы $P_1=10$ Н и $P_2=20$ Н, пары сил с моментами $M_1=100$ Нм и $M_2=200$ Нм, распределённая нагрузка интенсивностью q_1 (Н/м). *Определите* реакции, возникающие в опорах составной конструкции ABC . Выполните проверку правильности решения. При расчётах принимаем размеры, равными: $l_1=0,2$ (м), $l_2=0,25$ (м), $l_3=0,5$ (м), $l_4=0,4$ (м). Расчётные схемы к заданию приведены в табл. 9.

Таблица 9

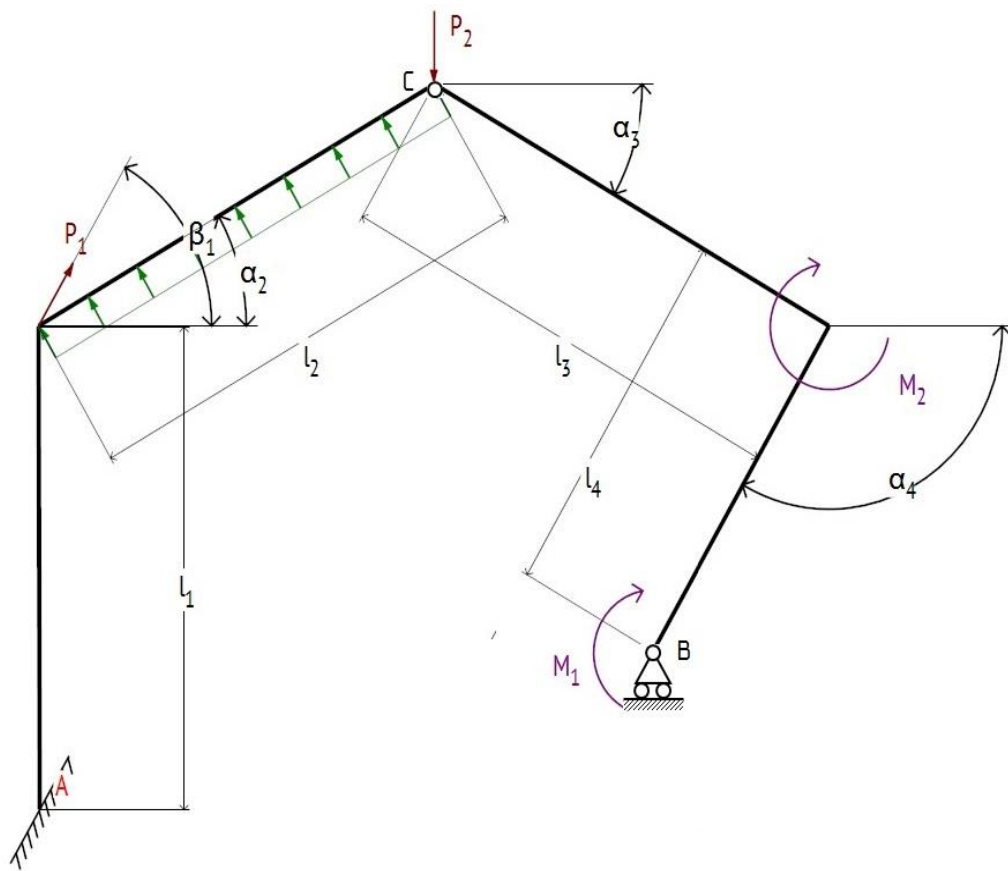
Расчётные схемы к заданию СК-1





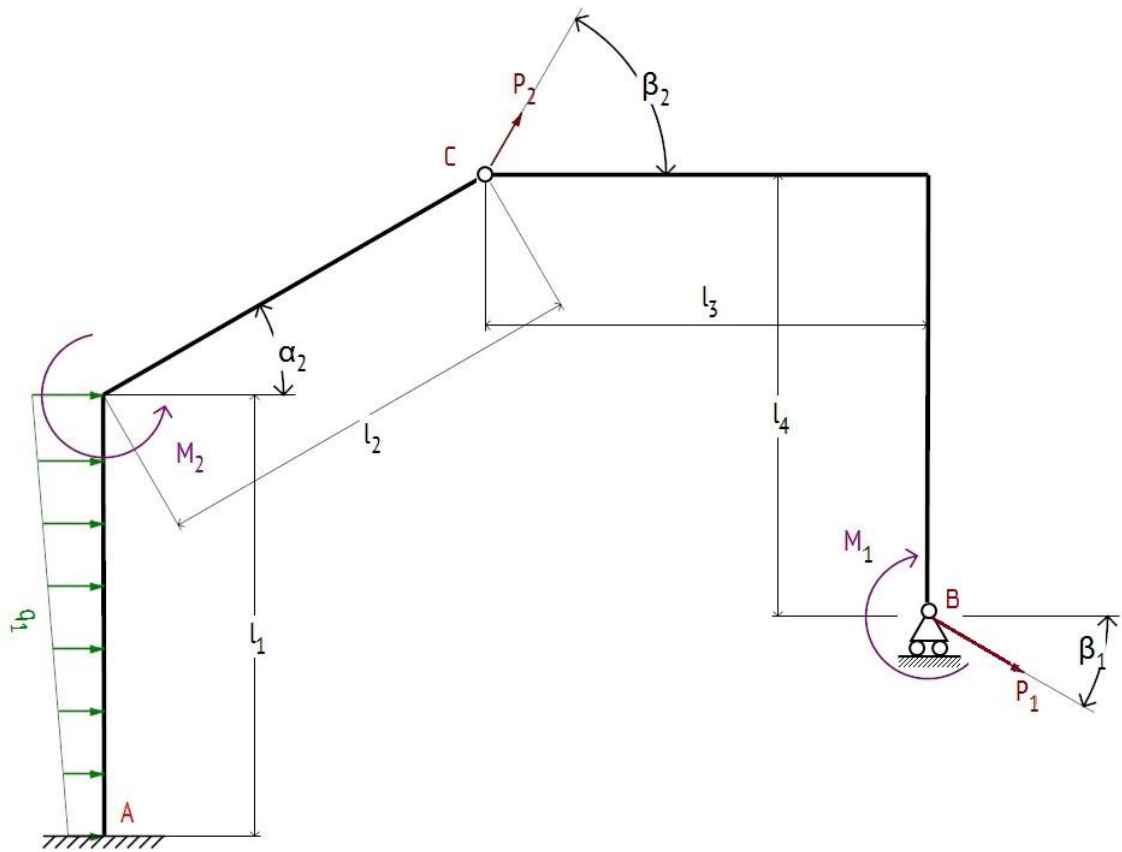
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 60^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M)$$

2

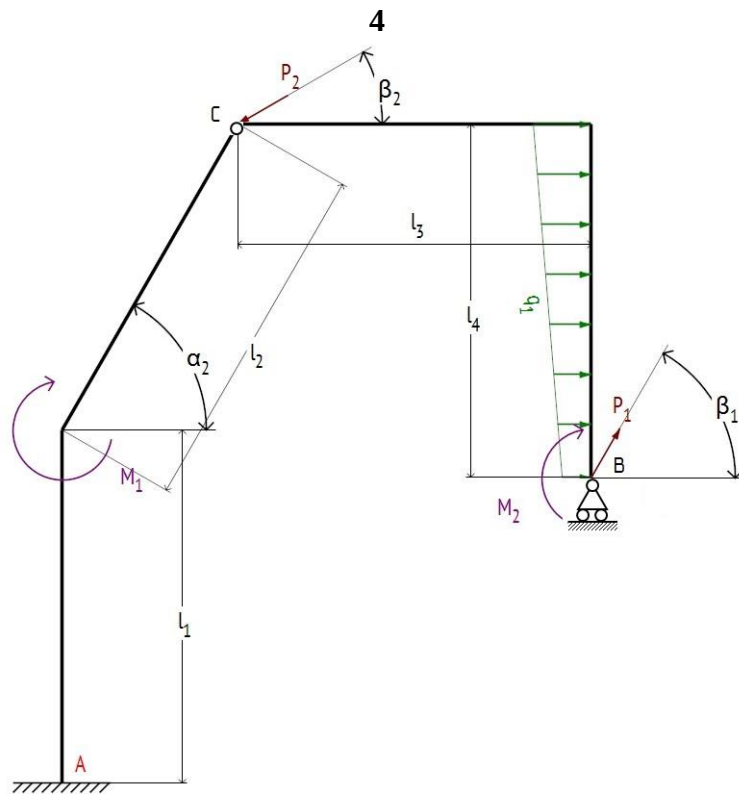


$$\beta_1 = 60^\circ, \alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M)$$

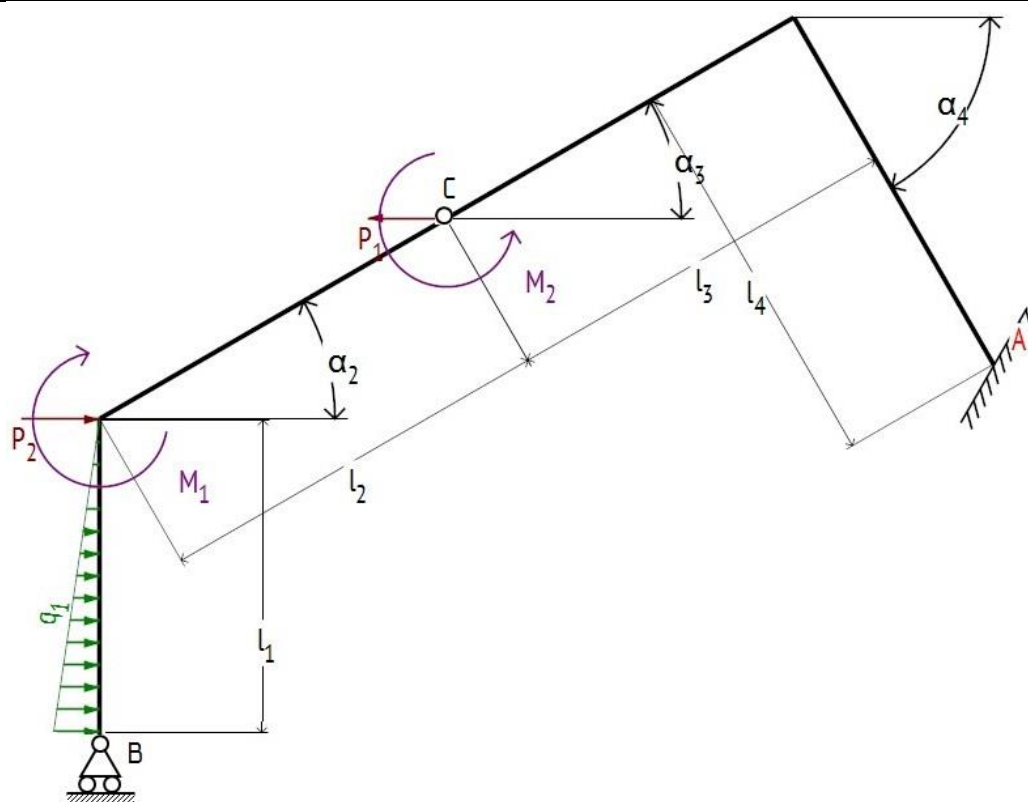
3



$$\beta_1 = \alpha_2 = 30^\circ, \beta_2 = 60^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$

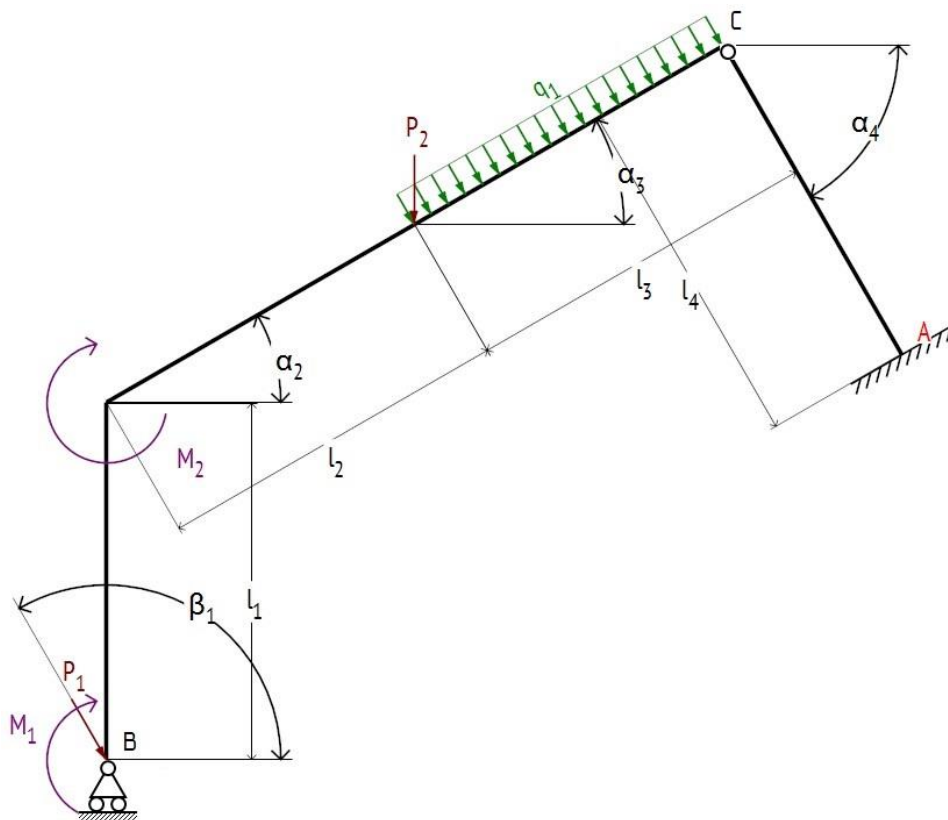


$$\beta_1 = \alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$



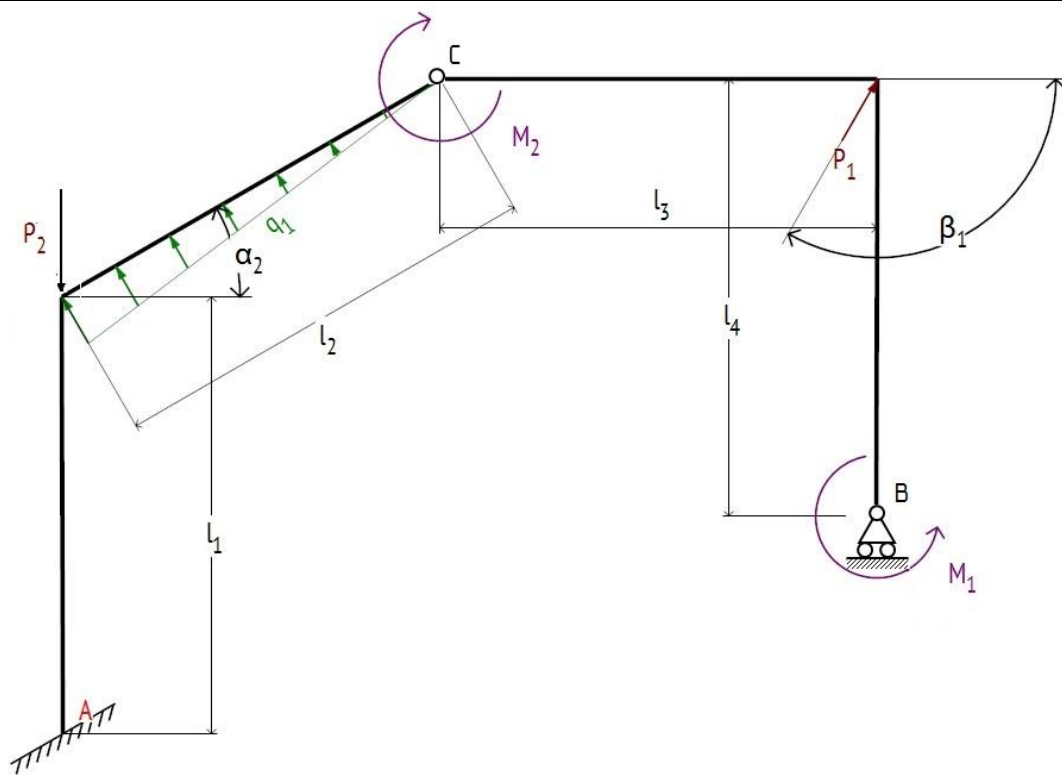
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 60^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$

6

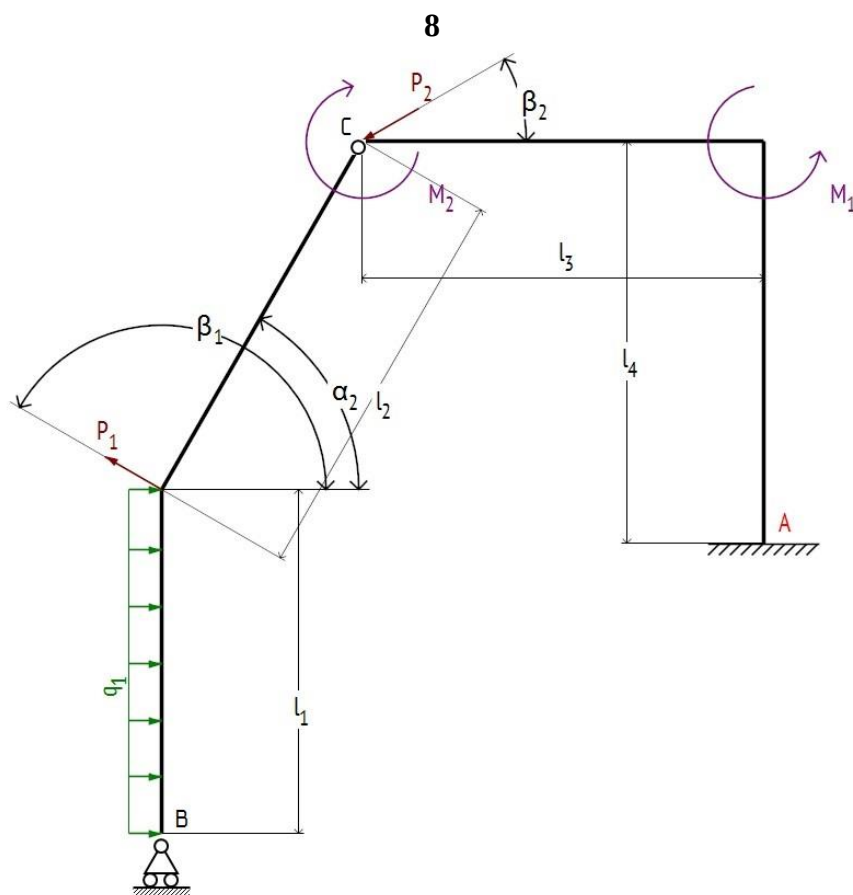


$$\beta_1 = 120^\circ, \alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 60^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M)$$

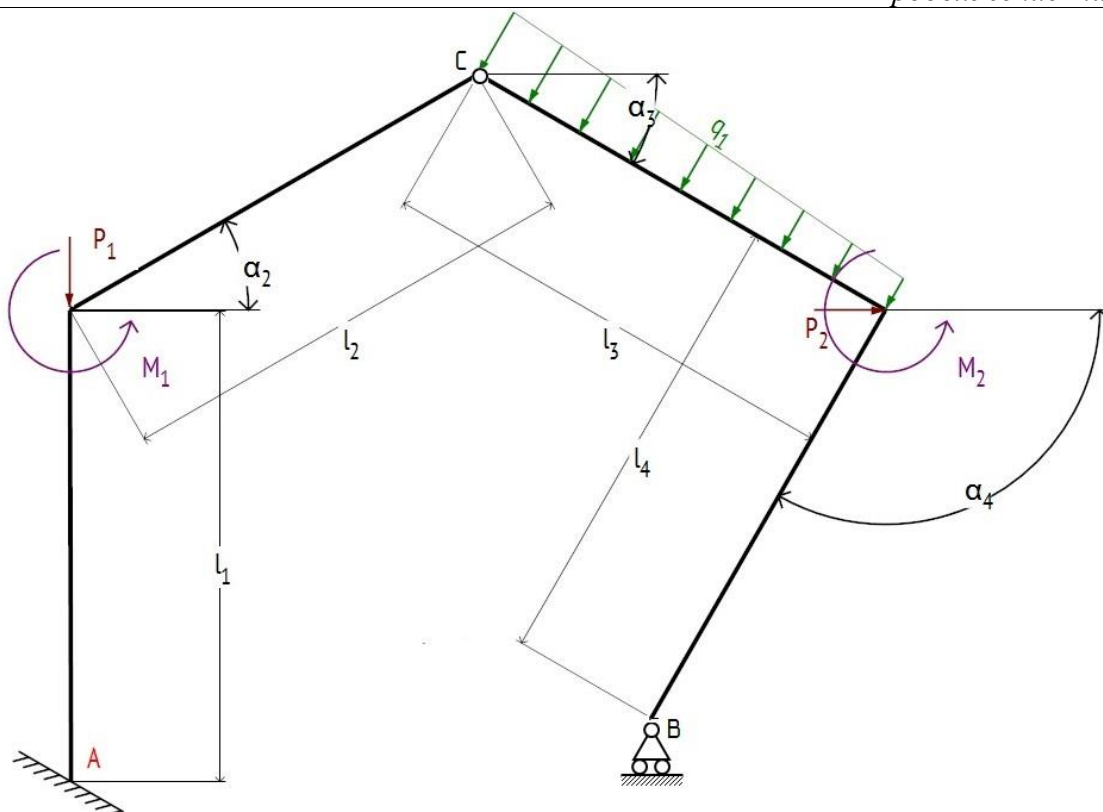
7



$$\beta_1 = 120^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$

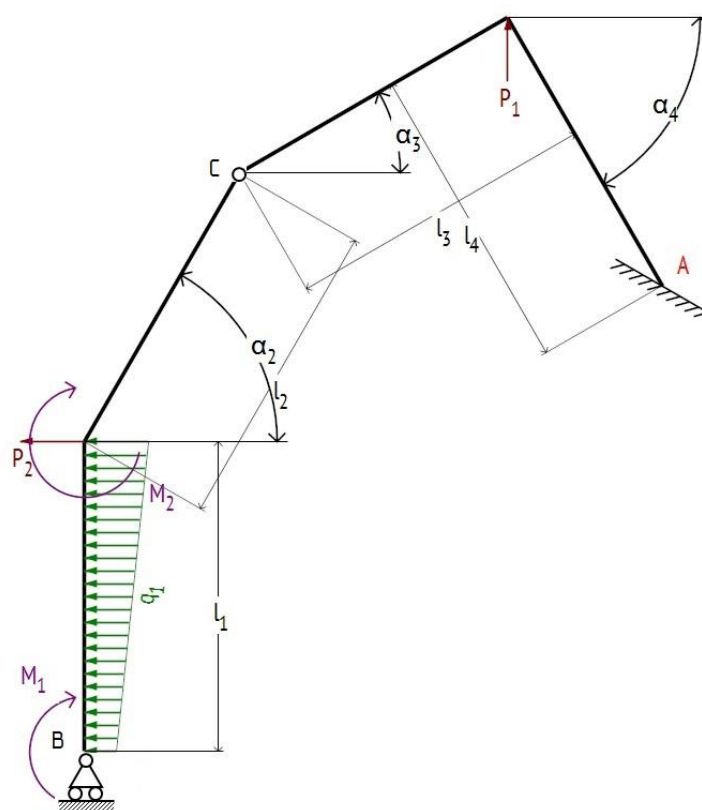


$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 30^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M)$$



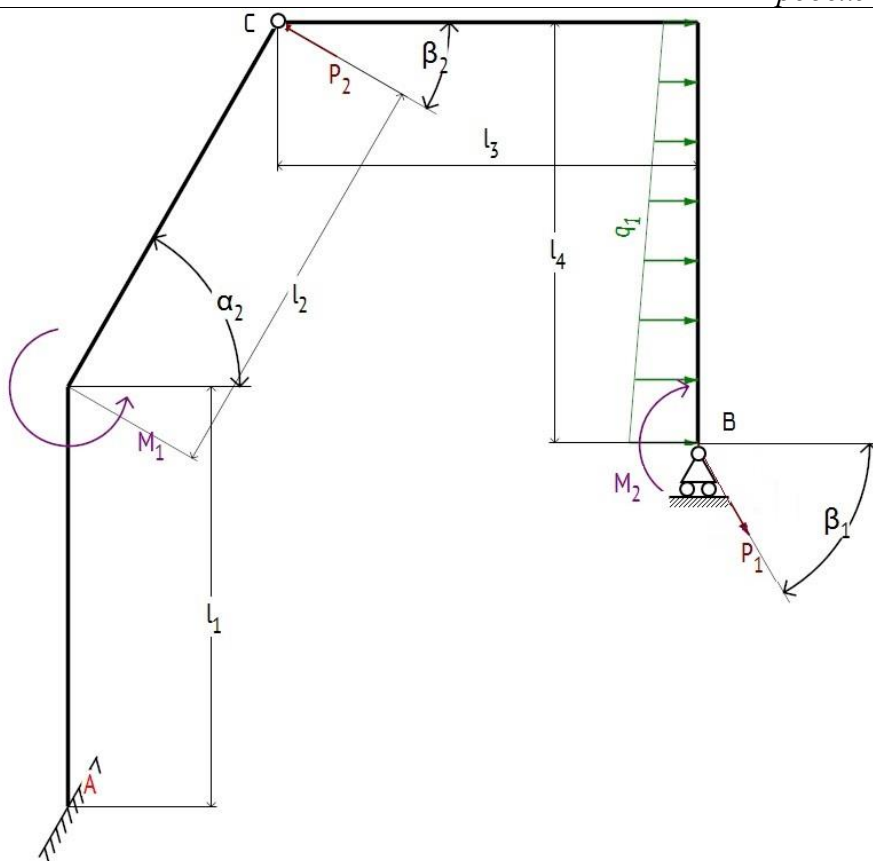
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$

10



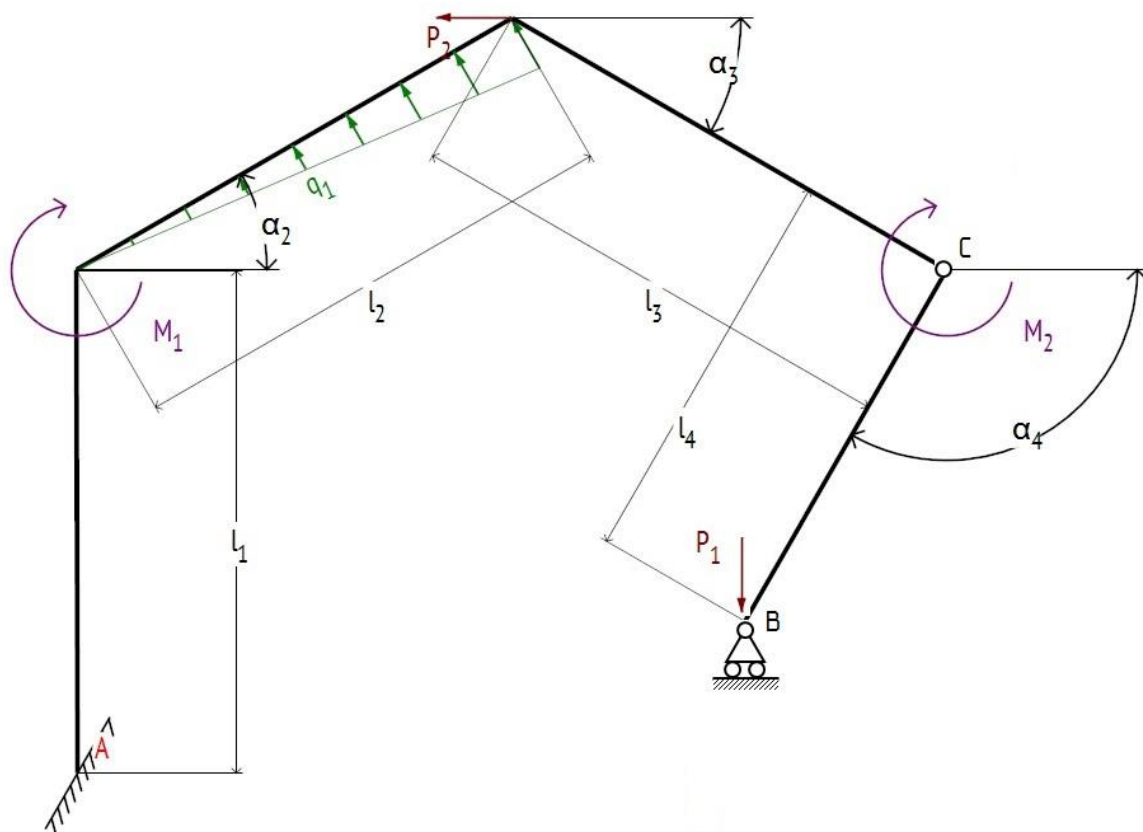
$$\alpha_2 = \alpha_4 = 60^\circ, \alpha_3 = 30^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 4(H/M)$$

11



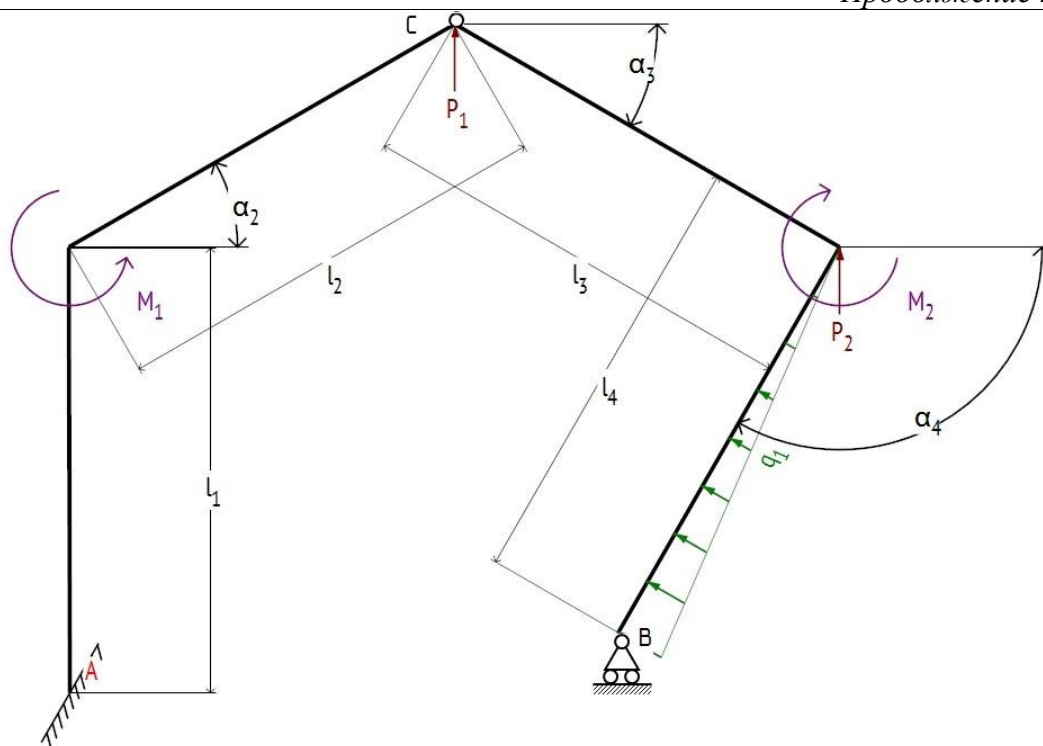
$$\alpha_2 = \beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 8(H/M)$$

12



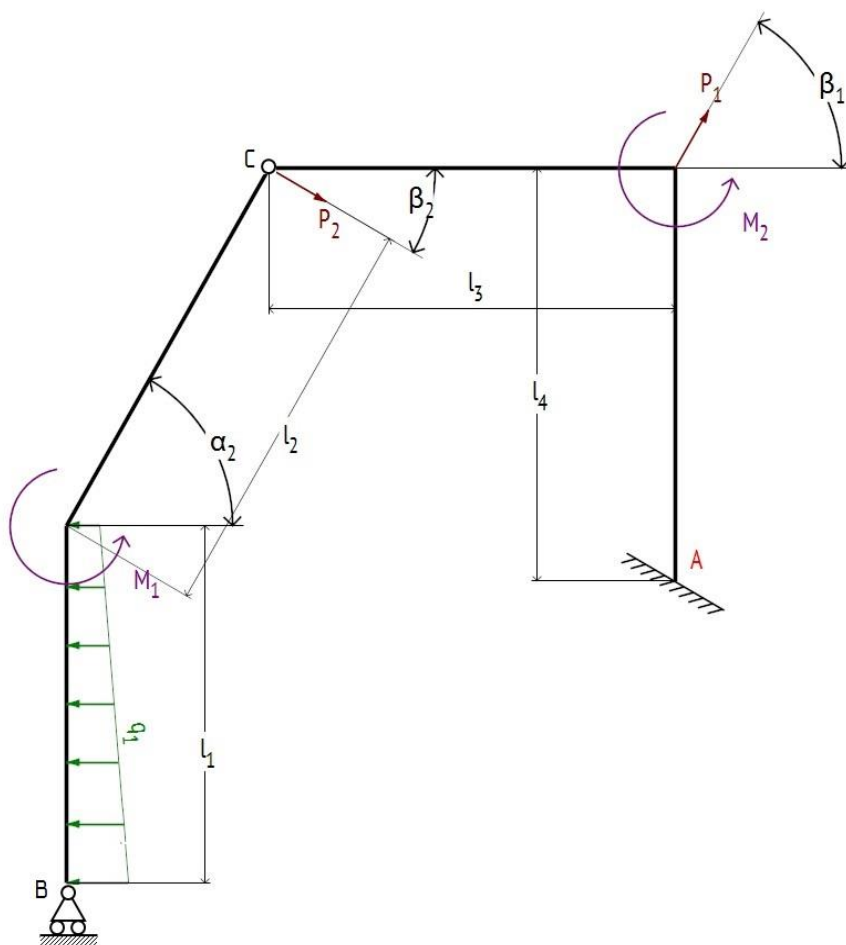
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 2(H/M)$$

13



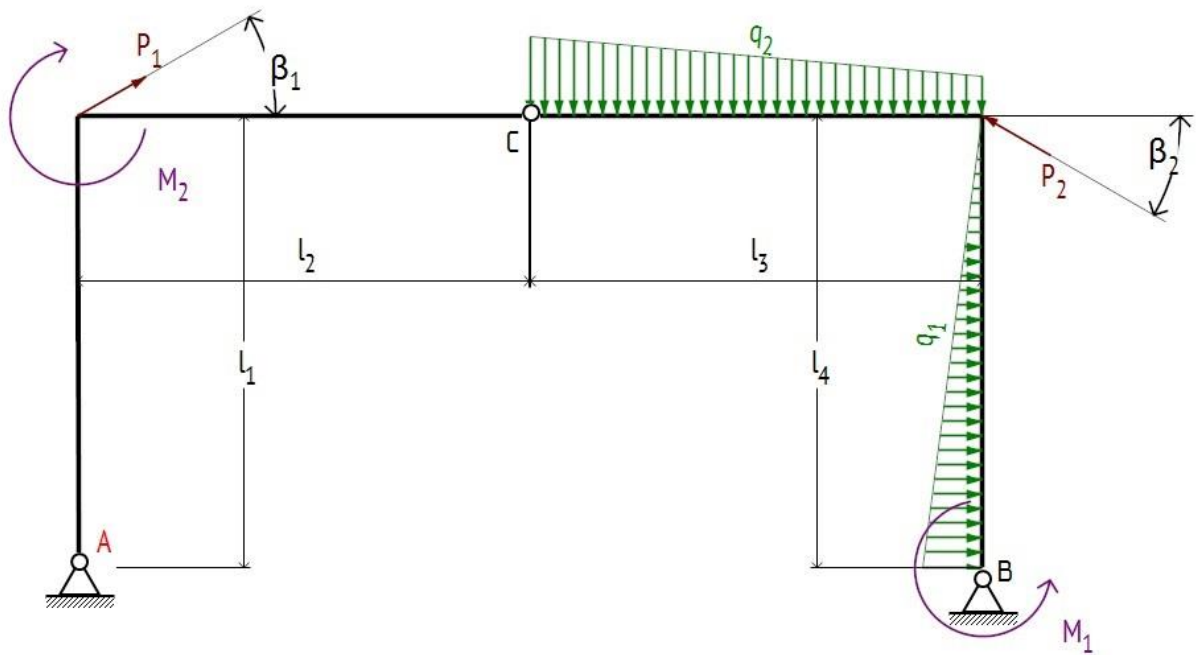
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 8(H/M)$$

14



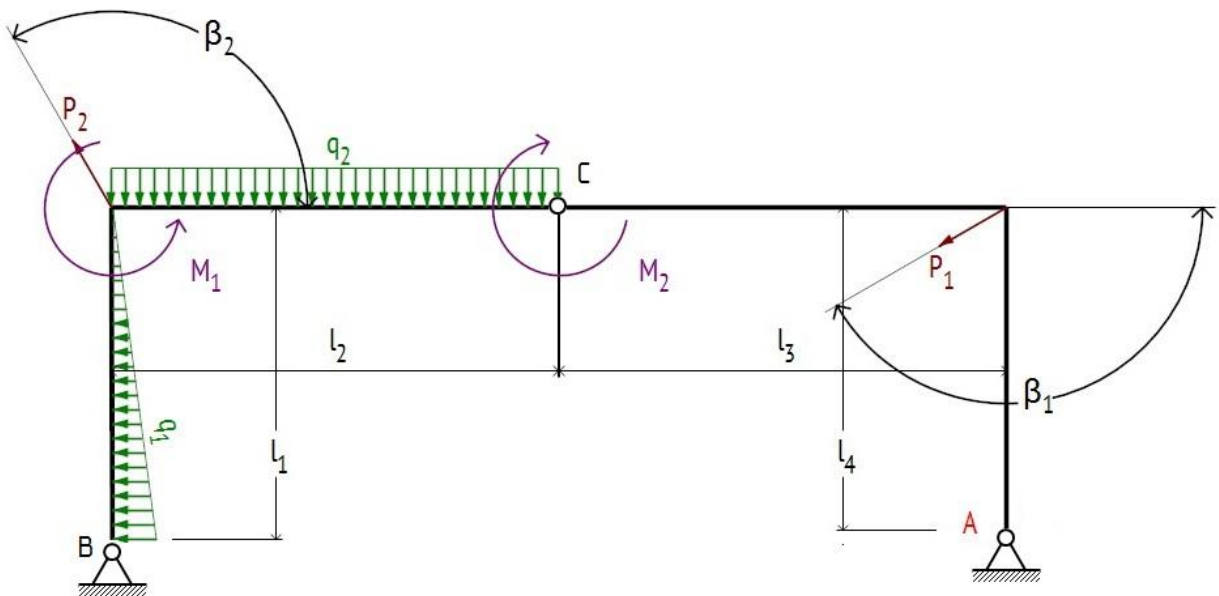
$$\alpha_2 = \beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 8(H/M)$$

15



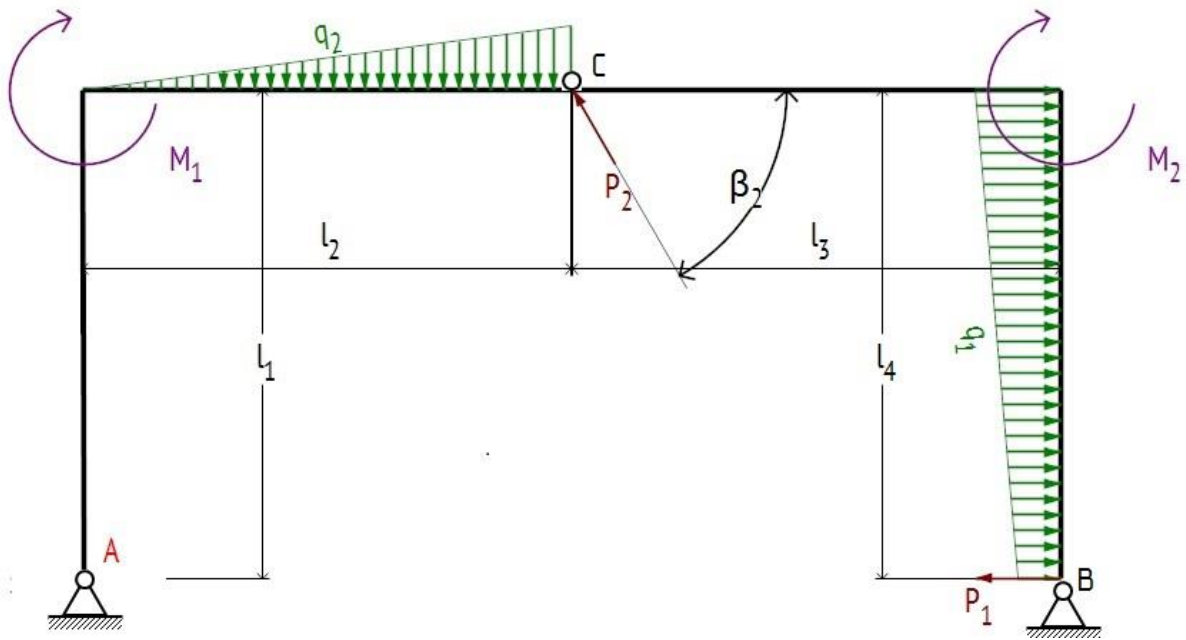
$$\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 4(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

16



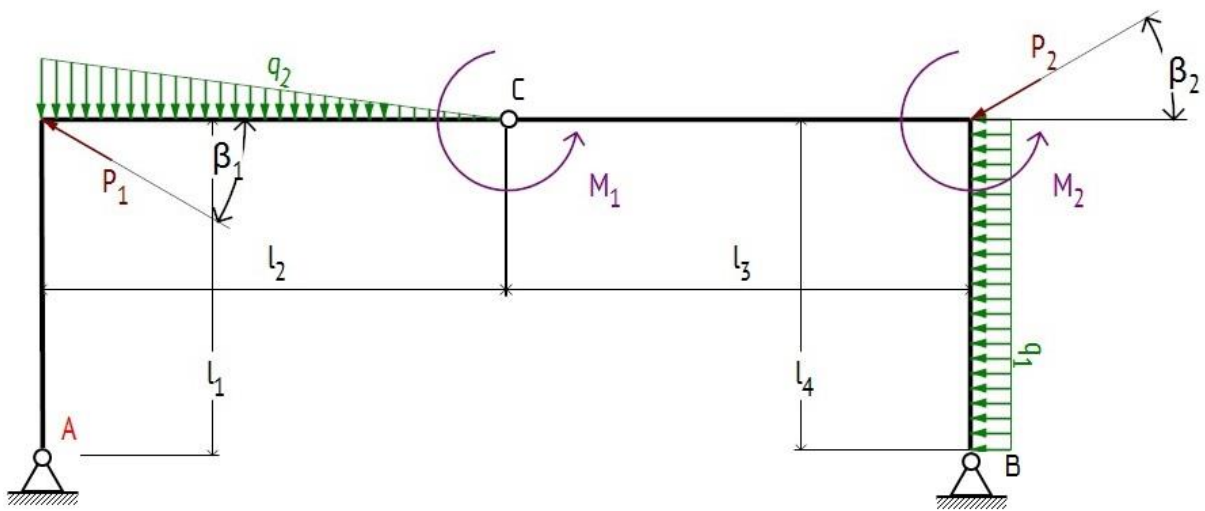
$$\beta_1 = 150^\circ, \beta_2 = 120^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 8(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

17



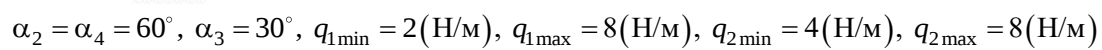
$$\beta_2 = 60^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 0(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

18

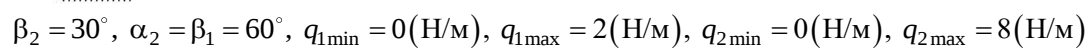


$$\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M), q_{2\min} = 0(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

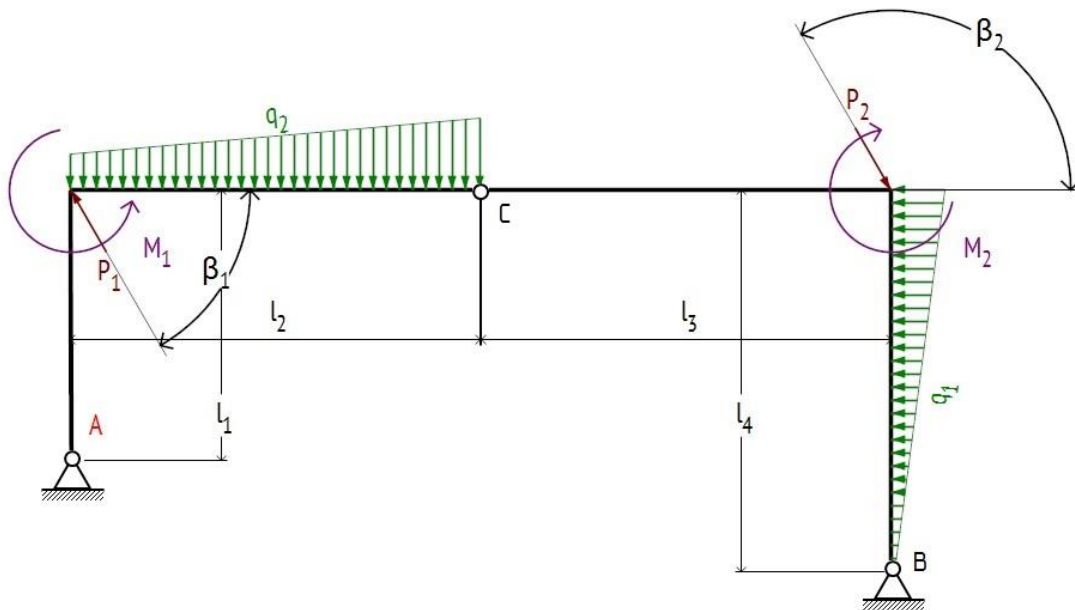
19



20

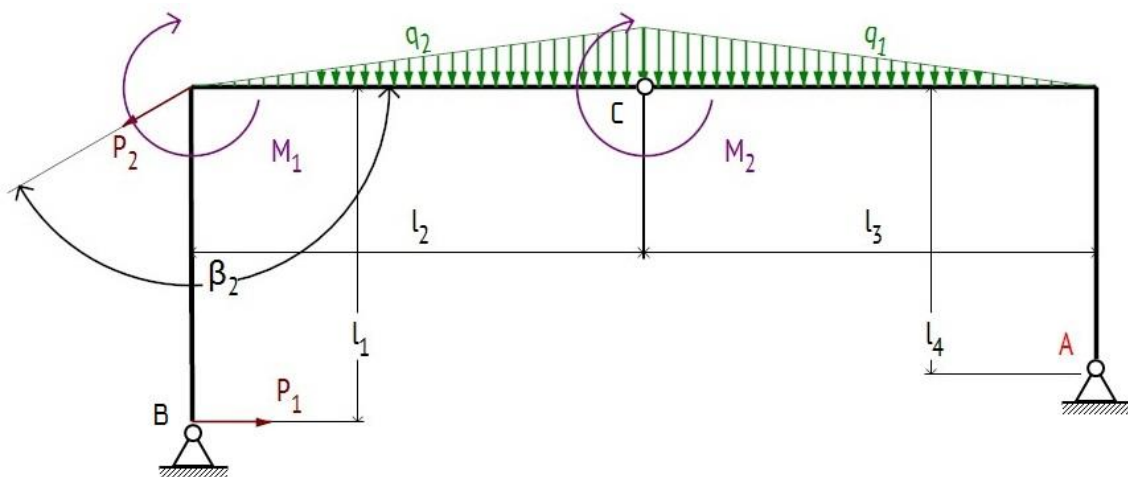


21



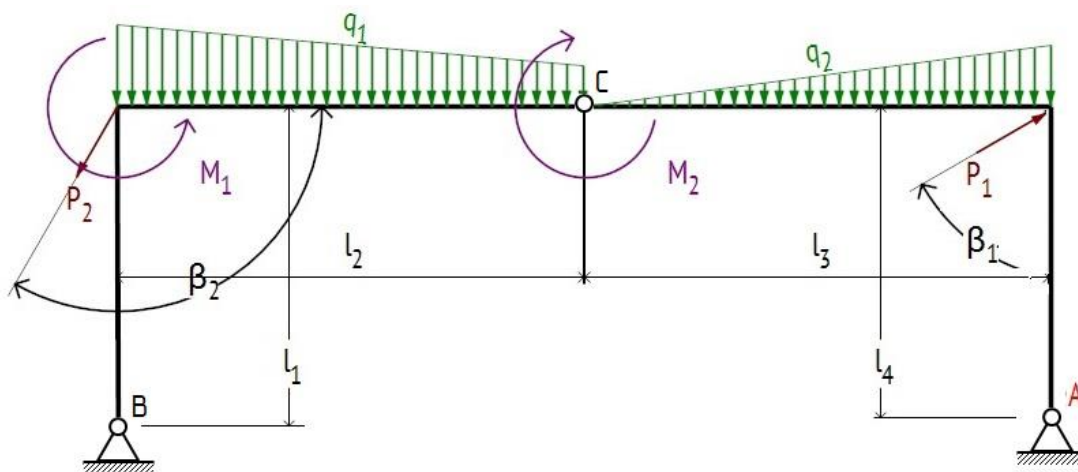
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 4(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

22



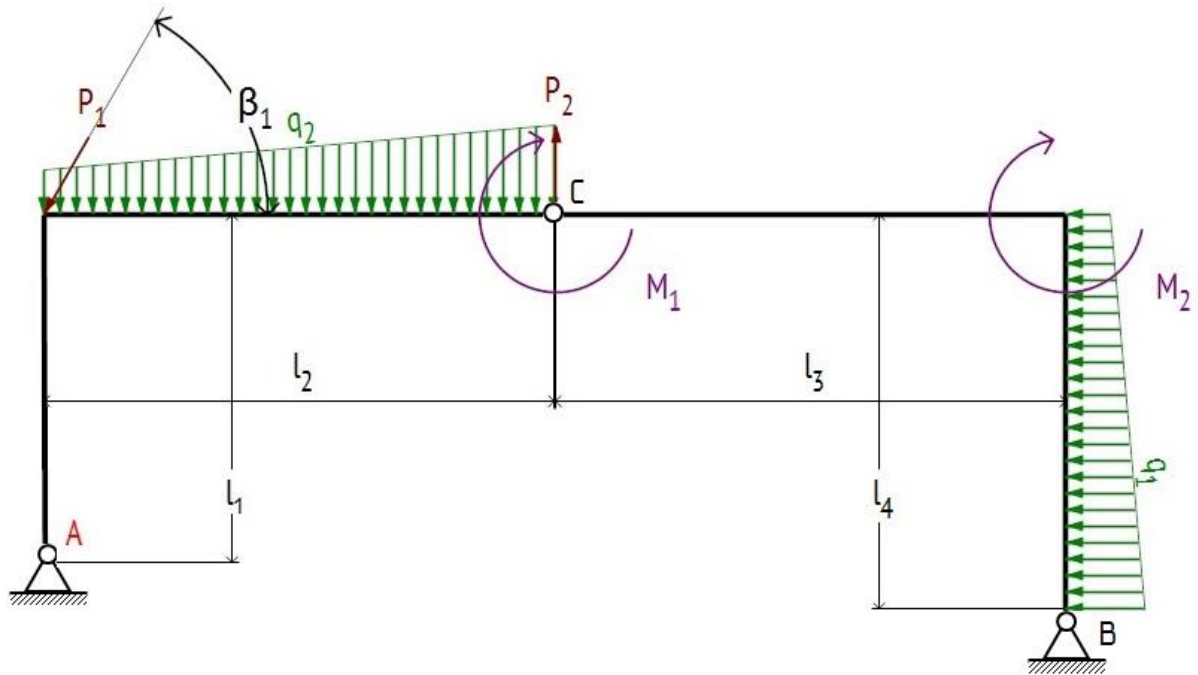
$$\beta_2 = 150^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 2(H/M), q_{2\min} = 0(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

23



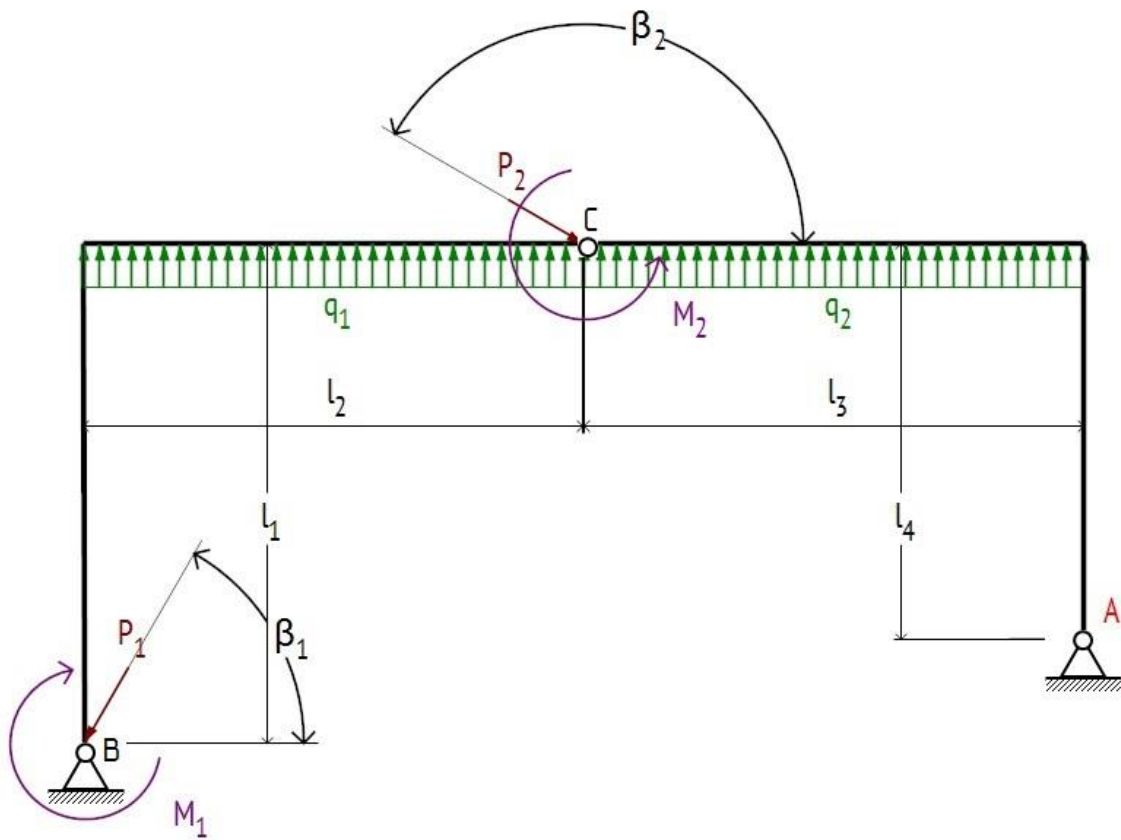
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 0(H/M), q_{2\max} = 5(H/M)$$

24



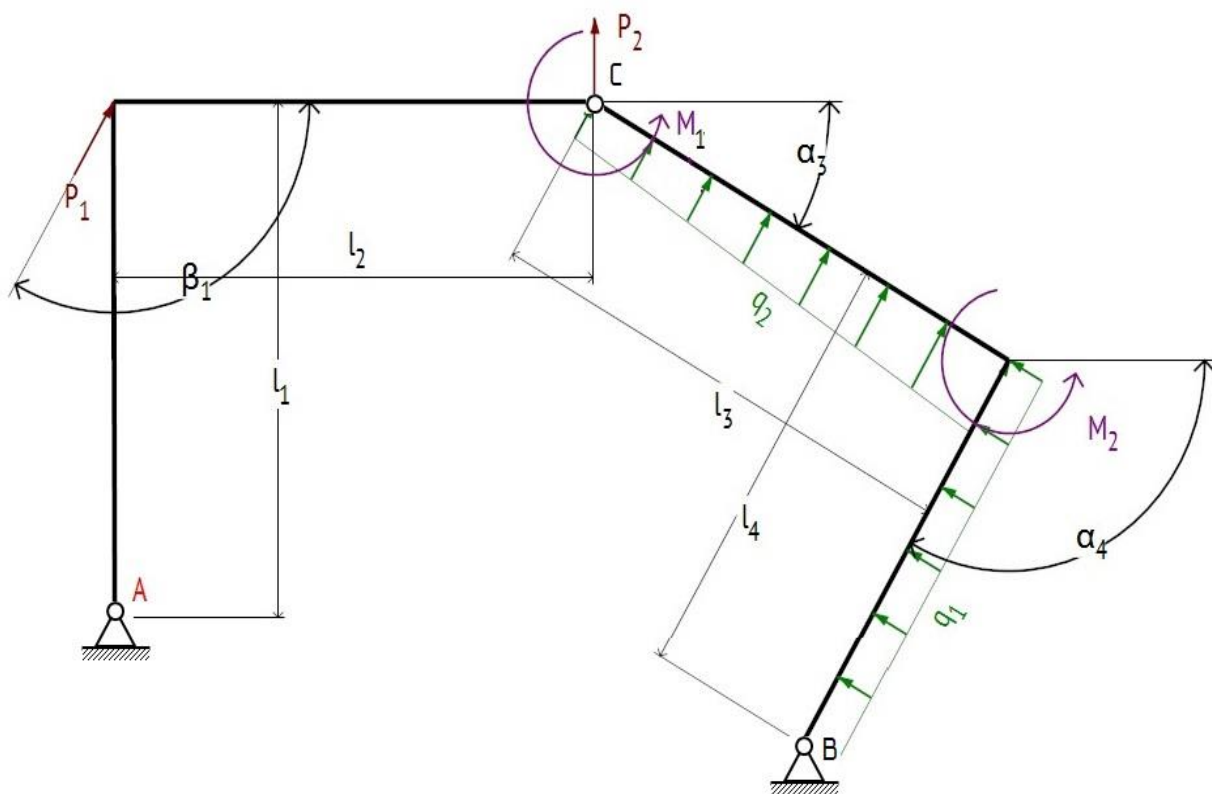
$$\beta_1 = 60^\circ, q_{1\min} = 1(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 1(H/M), q_{2\max} = 4(H/M)$$

25



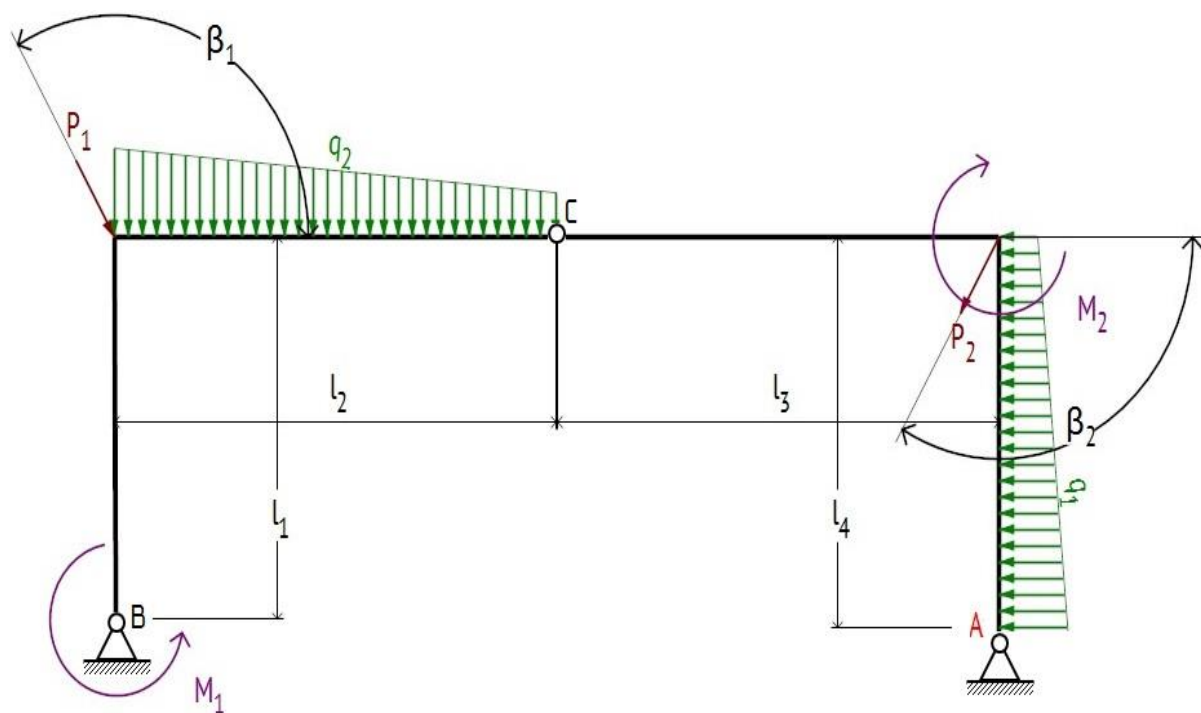
$$\beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 150^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M), q_{2\min} = 2(H/M), q_{2\max} = 2(H/M)$$

26



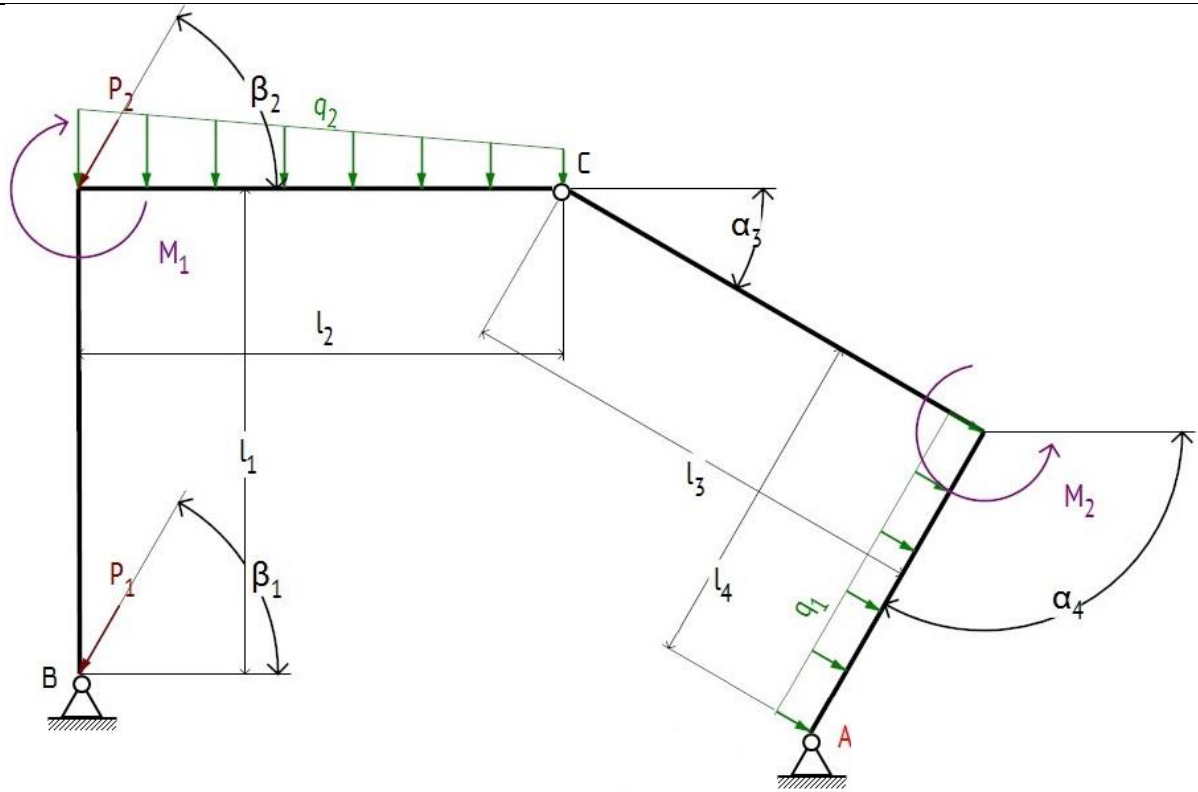
$$\alpha_3 = 30^\circ, \beta_1 = \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M), q_{2\min} = 2(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

27



$$\beta_1 = \beta_2 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 3(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

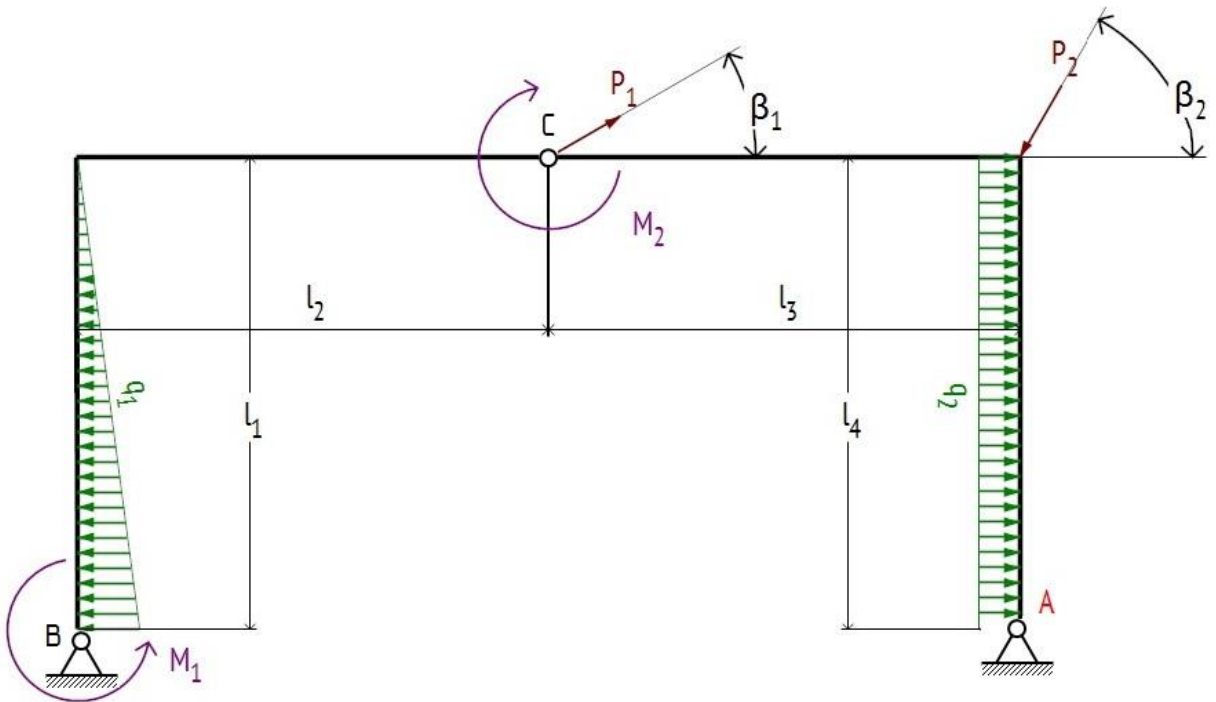
28



$$\alpha_3 = 30^\circ, \beta_1 = \beta_2 = 60^\circ, \alpha_4 = 120^\circ, q_{1\min} = 2(H/M), q_{1\max} = 2(H/M),$$

$$q_{2\min} = 2(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

29



$$\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = 60^\circ, q_{1\min} = 0(H/M), q_{1\max} = 8(H/M), q_{2\min} = 8(H/M), q_{2\max} = 8(H/M)$$

30

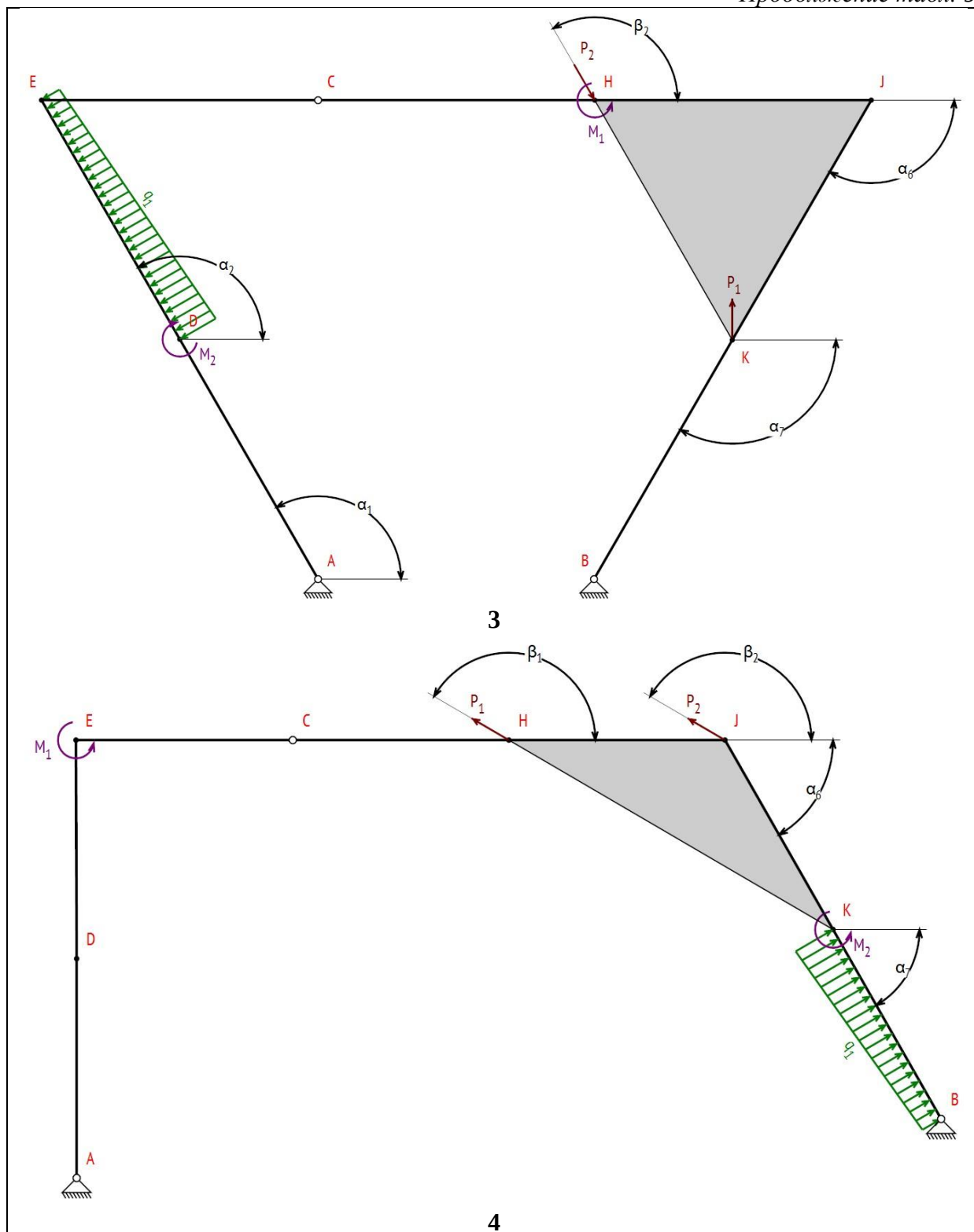
2.1.2 Задания СК-2 (1 – 30)

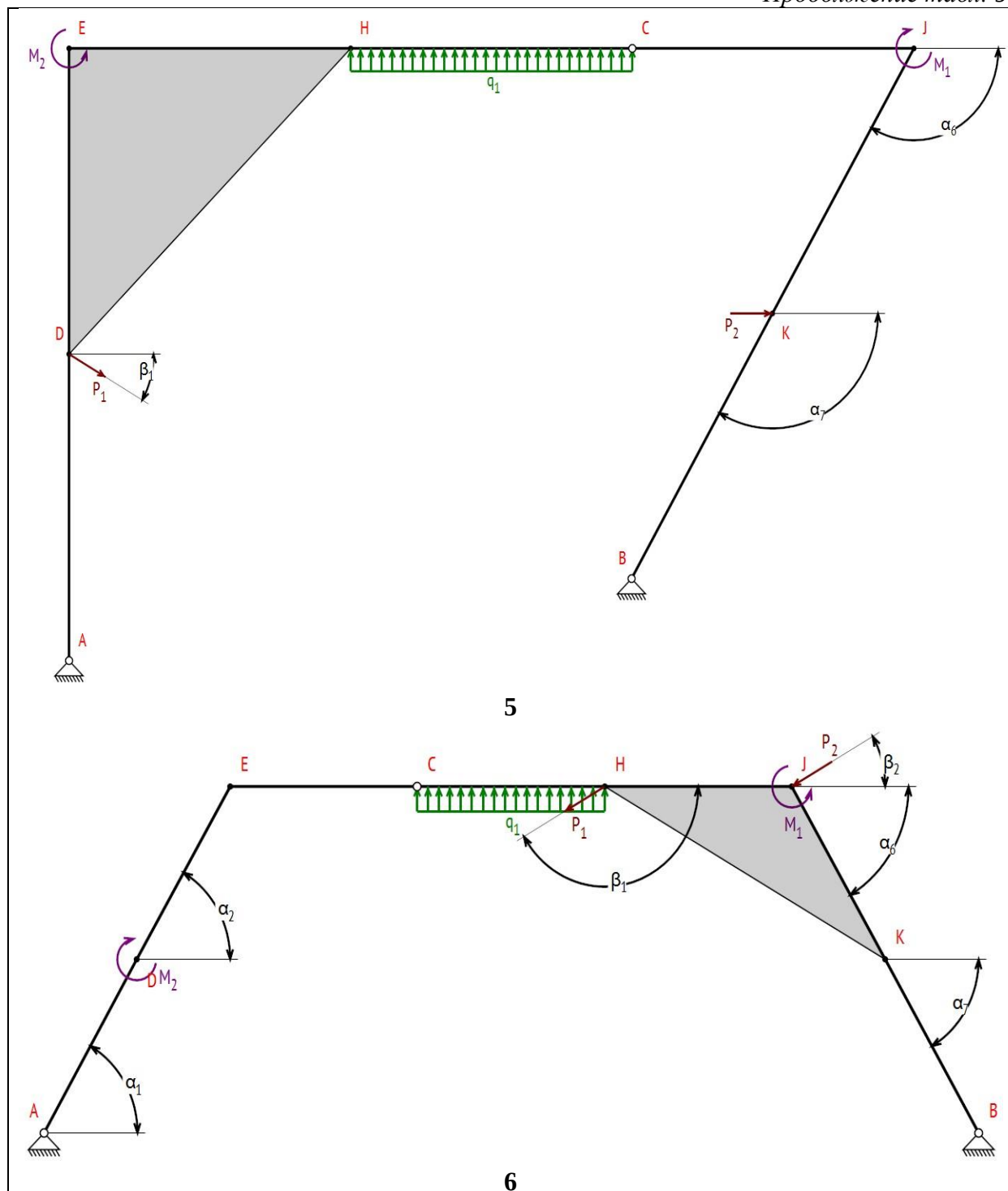
Условие задачи: Составная конструкция ACB , выполненная из двух твёрдых тел AC и CB , закреплена в точках A и B при помощи шарнирно-неподвижных опор, в точке C – цилиндрического шарнира. К составной конструкции приложены силы P_1 и P_2 (Н), пары сил с моментами M_1 и M_2 (Нм), распределённая нагрузка интенсивностью q_1 (Н/м). В центре тяжести однородной треугольной пластины приложена сила G , пропорциональная её площади (коэффициент пропорциональности $\gamma = 2,5$). *Определите* реакции, возникающие в опорах составной конструкции ABC . Выполните проверку правильности решения.

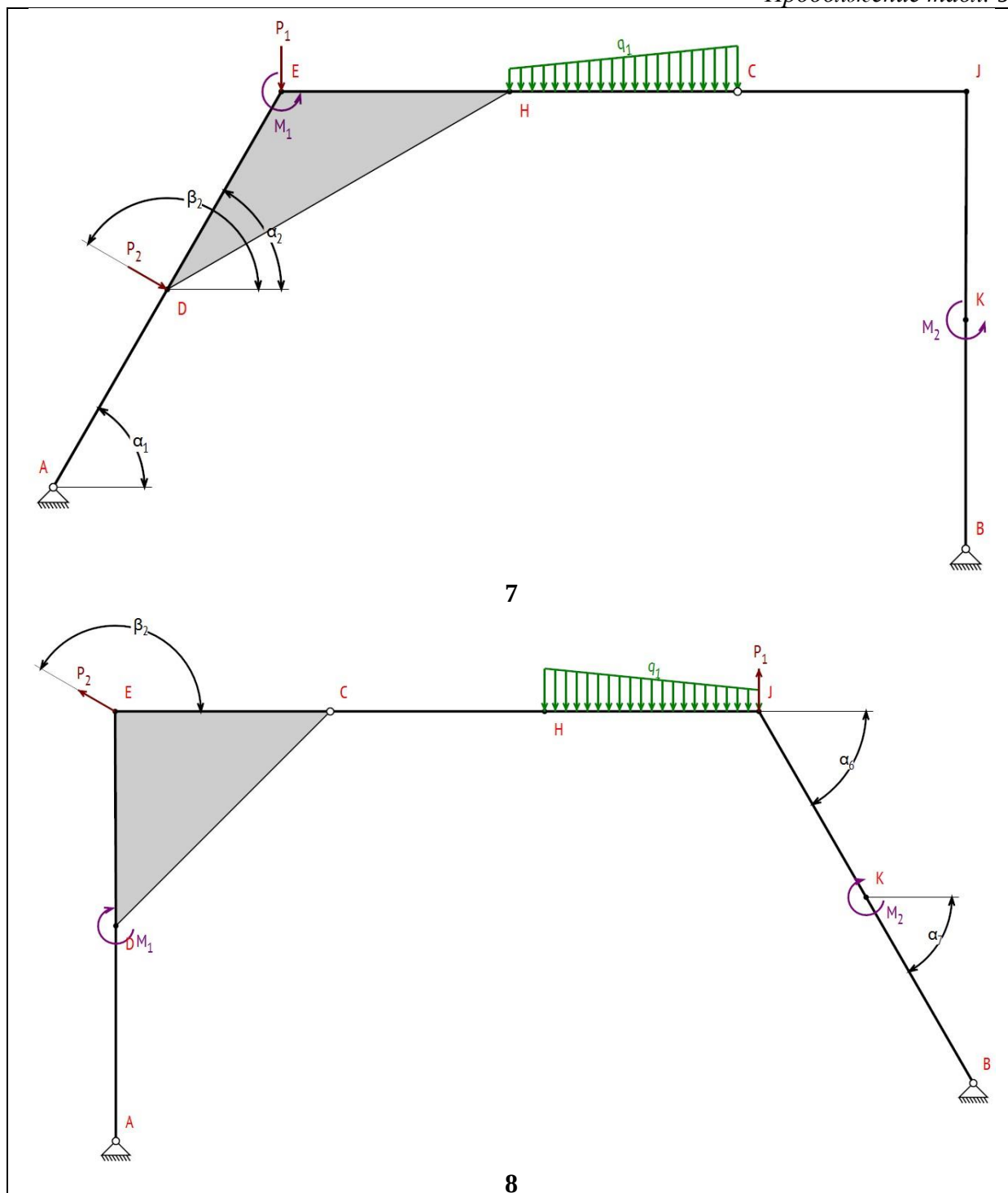
Таблица 10

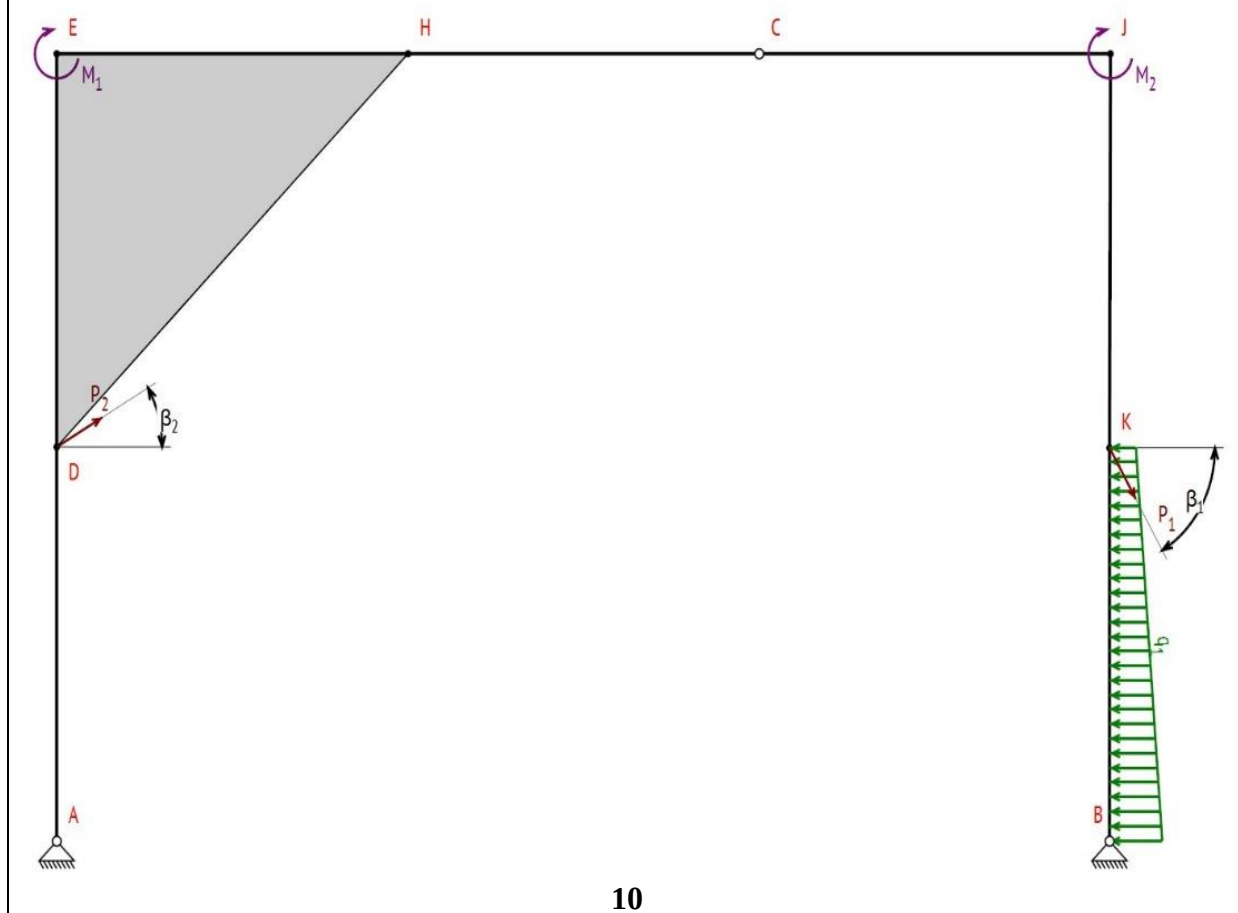
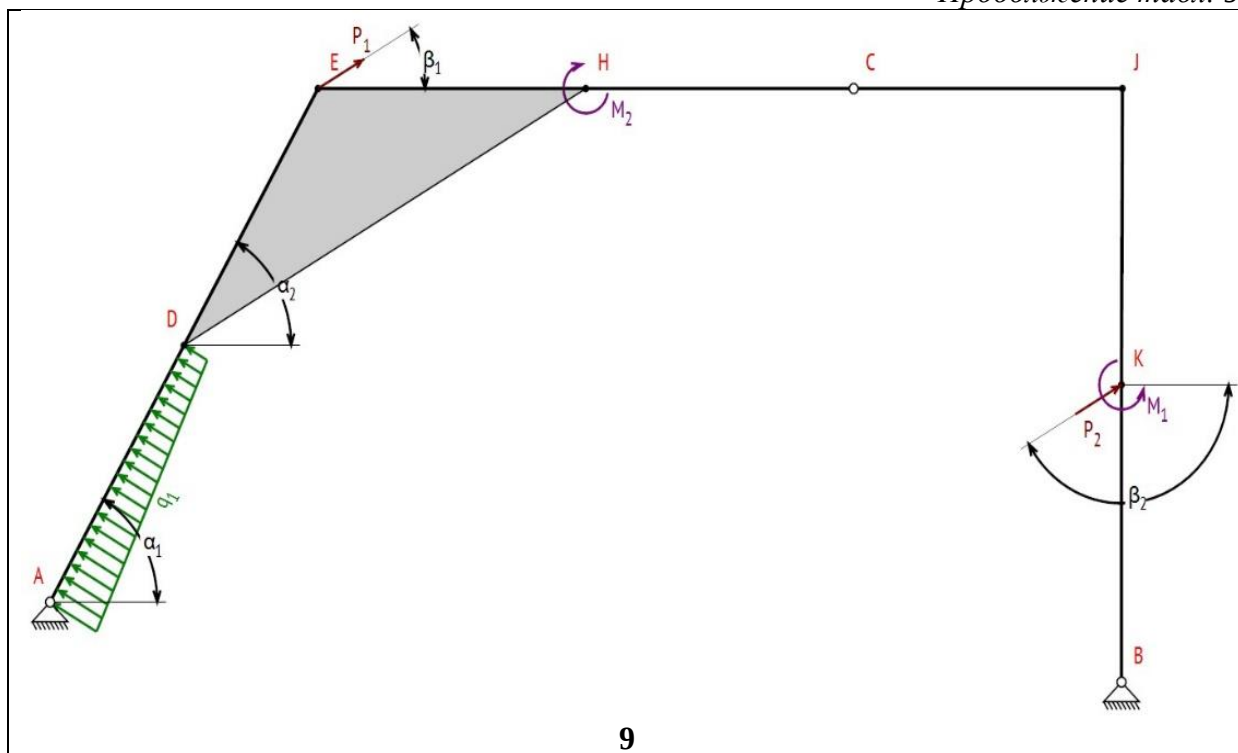
Исходные данные к заданию СК-3

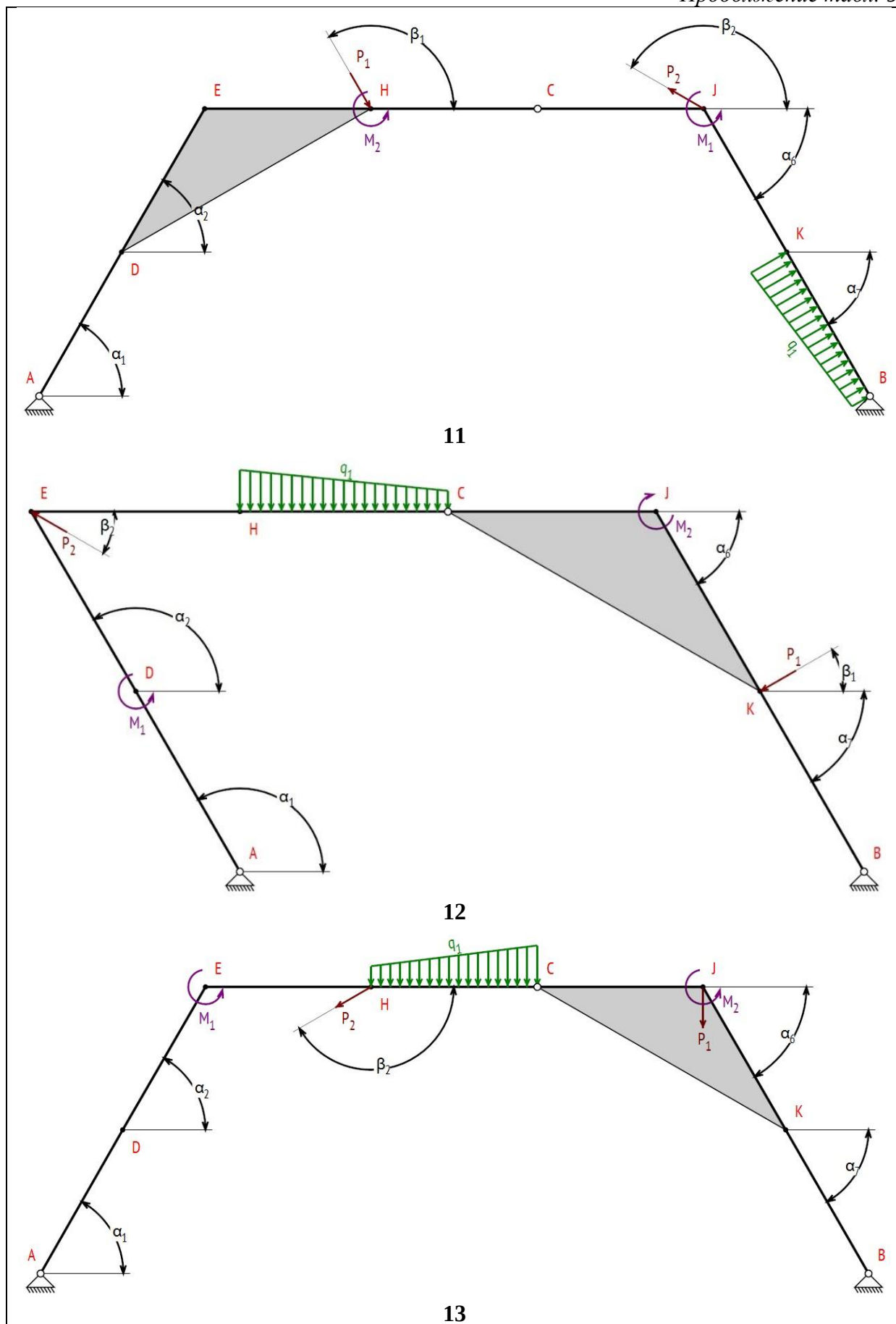
№	Длина, м							Углы наклона, град						Сила, Н		Момент, Н×м		Интенсивность распределённой нагрузки, Н/м	
	l_{AD}	l_{DE}	l_{EC}	l_{CH}	l_{HJ}	l_{JK}	l_{KB}	α_{AD}	α_{DE}	α_{JK}	α_{KB}	β_1	β_2	P_1	P_2	M_1	M_2	$q_{1 \min}$	$q_{1 \max}$
	1	0.4	0.6	0.4	0.8	1	0.6	120	120	90	90	150	30	24	2	90	100	4	20
1	0.4	0.8	0.4	0.4	0.8	1	0.6	120	120	60	60	150	120	24	22	10	90	4	16
2	0.6	0.6	1	1	1	0.6	1	120	120	120	120	90	120	24	2	20	10	8	14
3	0.8	0.8	0.6	1	0.4	0.4	0.8	90	90	60	60	150	150	18	10	20	60	2	4
4	0.6	0.6	1	0.8	0.4	1	0.6	90	90	120	120	30	180	20	20	30	40	6	6
5	0.6	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	0.8	60	60	60	60	150	30	16	4	30	80	10	10
6	0.4	0.6	0.6	0.8	1	0.6	1	60	60	90	90	90	150	26	20	80	100	6	8
7	1	0.4	0.6	0.6	1	0.8	1	90	90	60	60	90	150	22	6	40	10	2	20
8	0.6	0.8	0.8	0.6	0.8	0.4	0.4	60	60	90	90	30	150	6	8	100	70	4	10
9	0.8	0.4	0.6	0.4	1	0.8	1	90	90	90	90	60	30	22	10	50	40	6	18
10	0.8	1	1	0.8	1	0.4	1	120	120	120	120	90	150	2	2	70	90	12	18
11	0.6	1	1	0.6	0.4	0.4	0.4	60	60	60	60	120	150	6	12	60	80	2	16
12	0.4	0.4	1	0.6	0.6	1	0.4	120	120	60	60	30	30	10	24	70	60	2	4
13	0.8	1	0.4	0.6	0.4	0.6	0.8	60	60	60	60	90	150	20	14	60	100	16	18
14	1	0.4	0.4	0.4	1	0.8	0.8	60	60	120	120	90	30	6	22	30	70	6	20
15	0.4	0.8	0.8	0.8	0.8	0.4	0.6	60	60	90	90	150	30	6	12	40	50	0	18
16	1	1	0.6	0.6	0.4	0.4	0.8	60	60	120	120	150	150	14	26	20	40	12	18
17	0.6	0.8	0.8	1	0.4	1	0.8	60	60	60	60	90	150	10	18	30	10	8	16
18	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	0.6	0.8	60	60	60	60	0	90	26	14	60	60	6	14
19	0.4	1	1	0.4	0.6	0.8	1	120	120	60	60	90	90	8	20	80	60	18	20
20	0.6	0.4	0.6	1	1	1	0.4	60	60	120	120	150	0	20	20	100	50	0	2
21	0.4	0.8	0.4	0.6	0.6	0.4	0.6	90	90	60	60	150	30	4	14	100	20	4	18
22	0.6	1	0.8	0.8	0.8	0.4	1	60	60	60	60	150	30	8	26	70	50	2	10
23	1	0.6	0.4	1	1	1	0.6	60	60	90	90	60	90	8	16	70	90	0	4
24	0.8	0.4	0.6	1	0.4	0.8	0.8	120	120	60	60	90	90	26	12	100	100	6	10
25	0.6	1	0.8	0.8	0.8	1	0.6	120	120	120	120	30	150	22	10	30	10	0	14
26	0.8	0.6	1	1	0.6	0.4	0.6	120	120	120	120	30	90	16	6	100	60	4	10
27	1	0.6	0.4	0.8	0.6	0.8	0.6	60	60	90	90	150	30	22	20	50	100	14	20
28	0.6	0.4	0.4	0.8	0.6	1	1	120	120	120	120	30	30	14	10	40	90	6	8
29	0.6	0.8	0.4	0.6	0.6	0.4	0.8	90	90	60	60	90	30	6	20	10	10	16	18
30	1	0.8	0.8	0.6	1	0.8	1	60	60	90	90	150	150	6	4	30	10	4	8

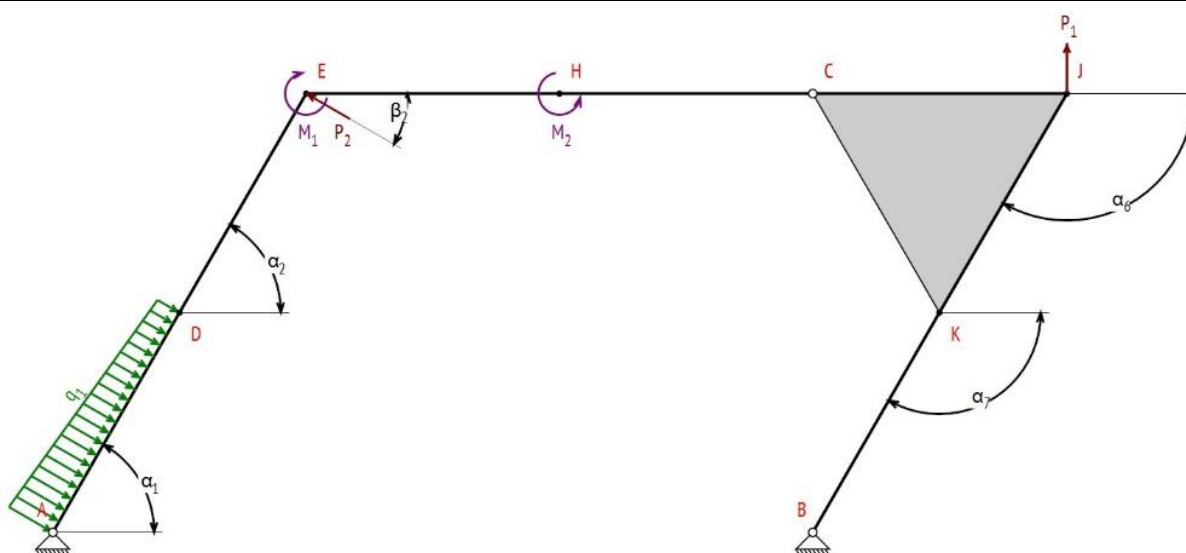




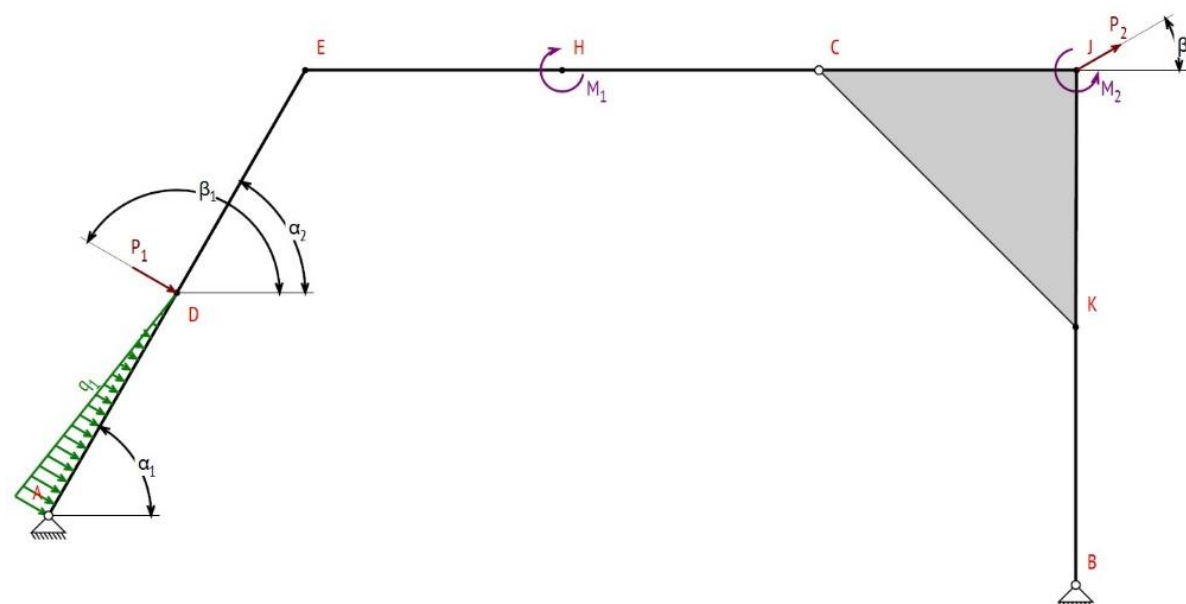




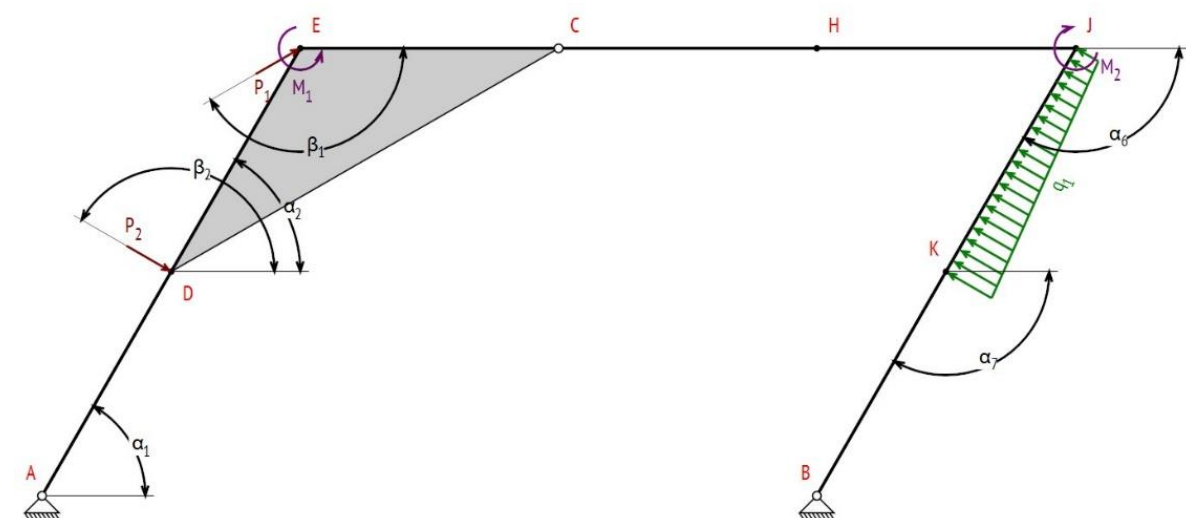




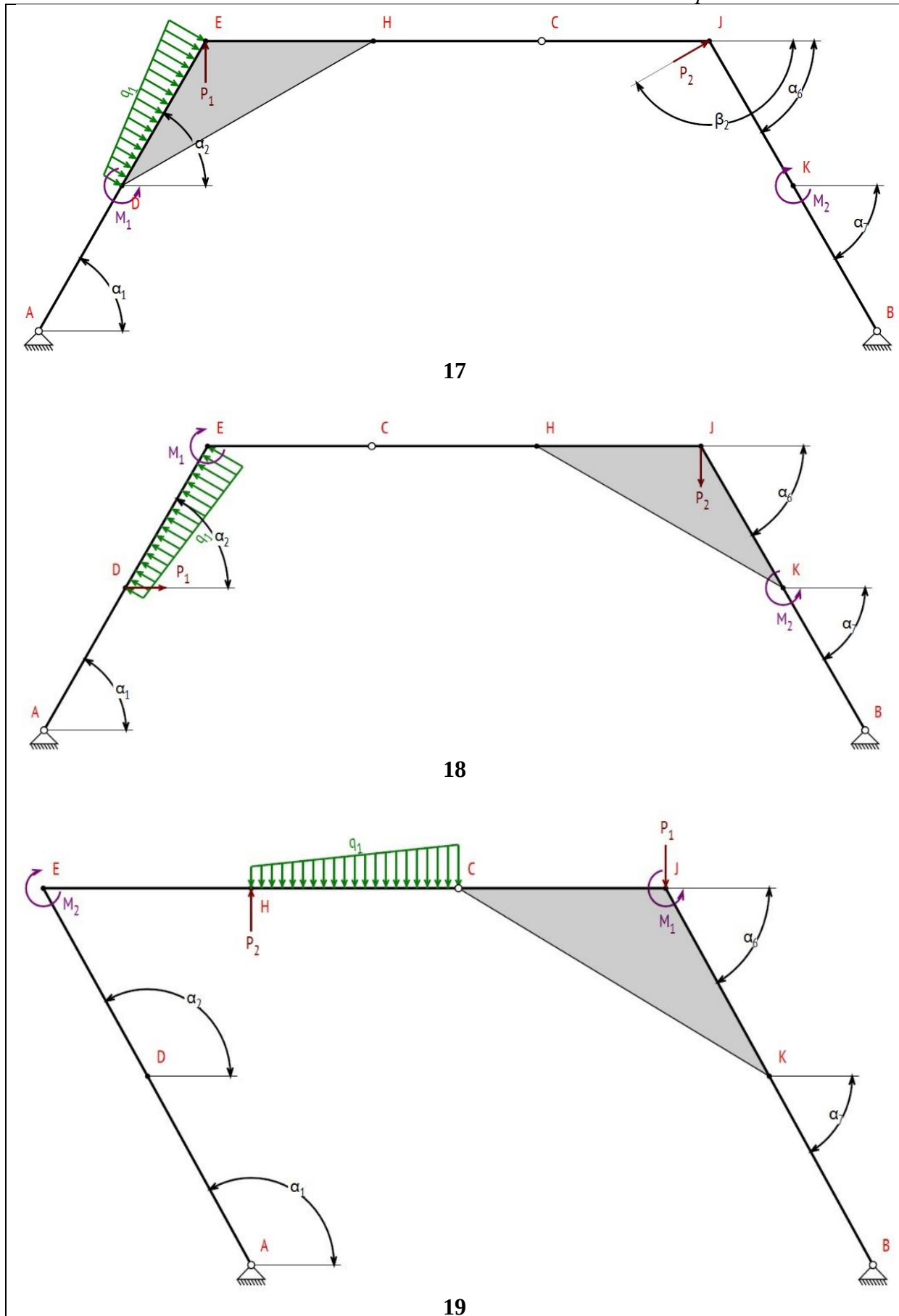
14

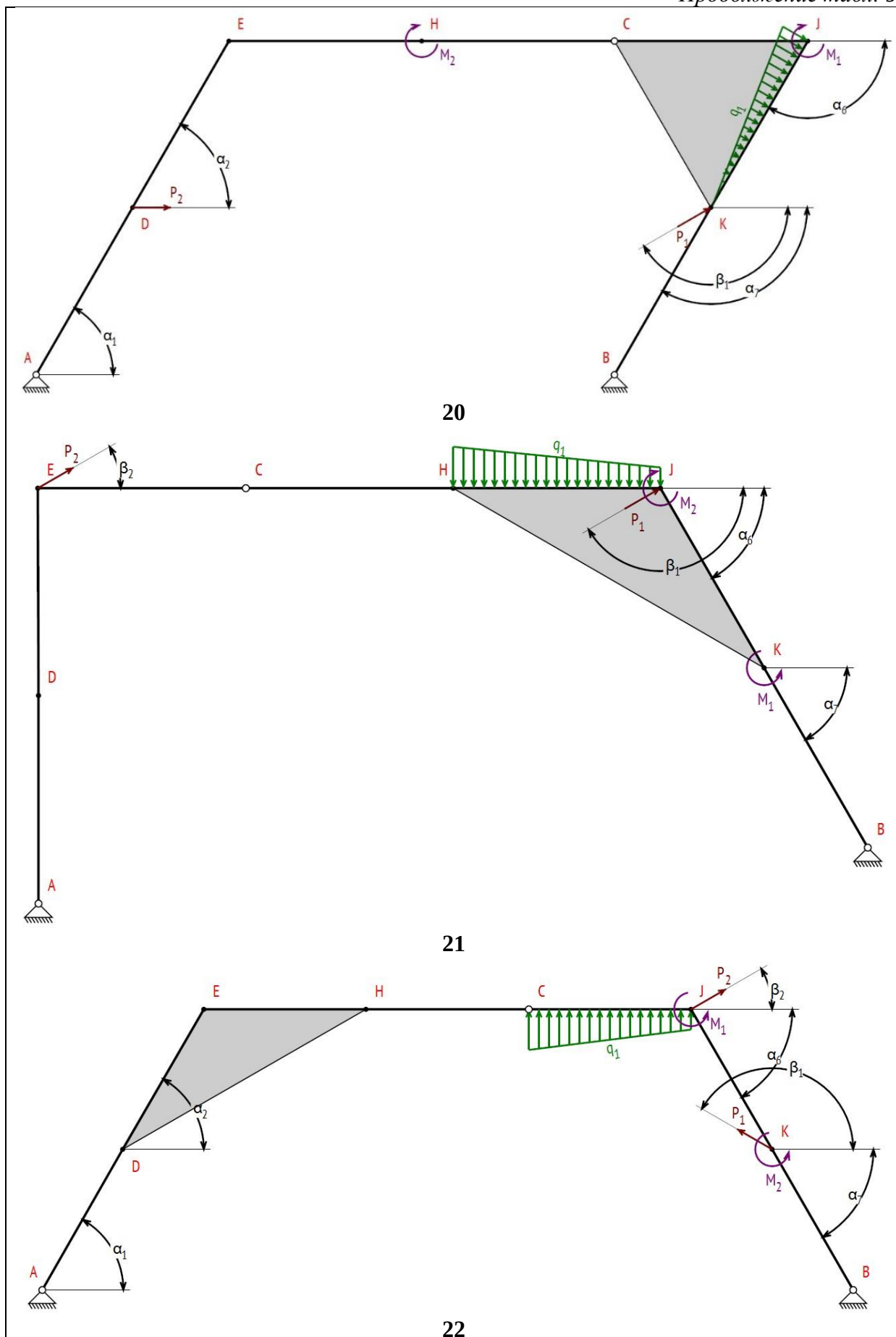


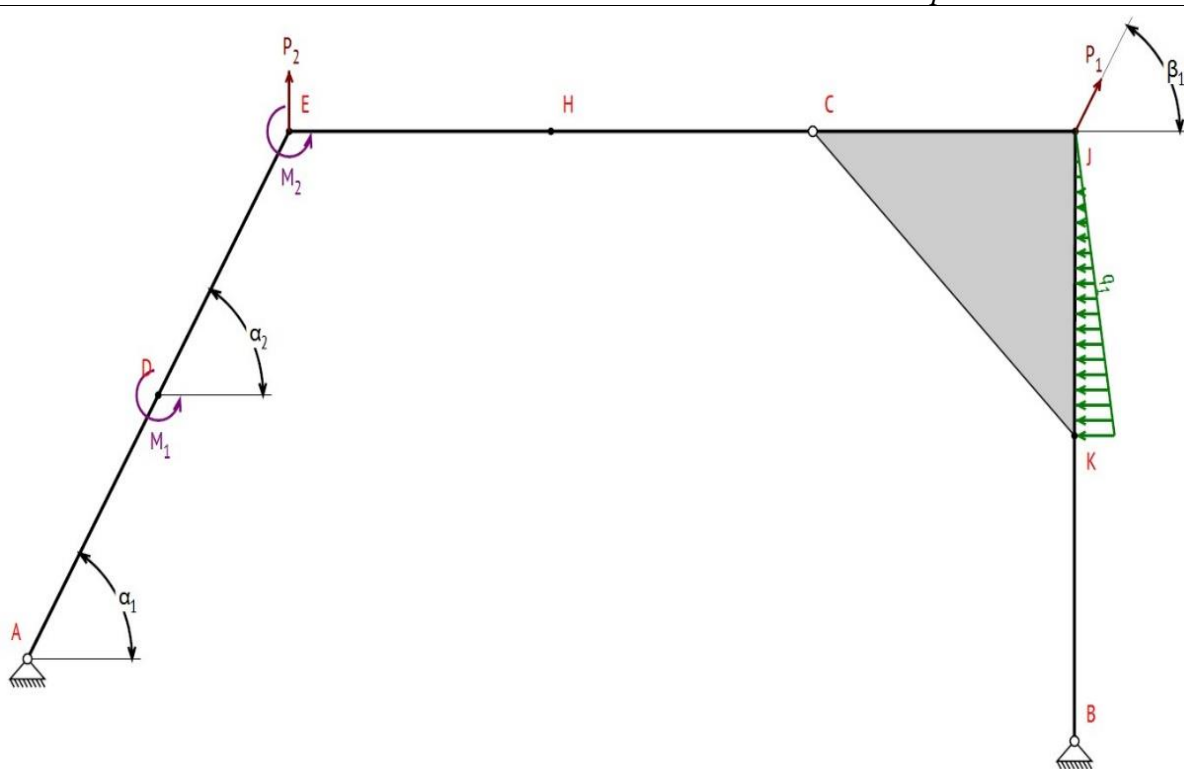
15



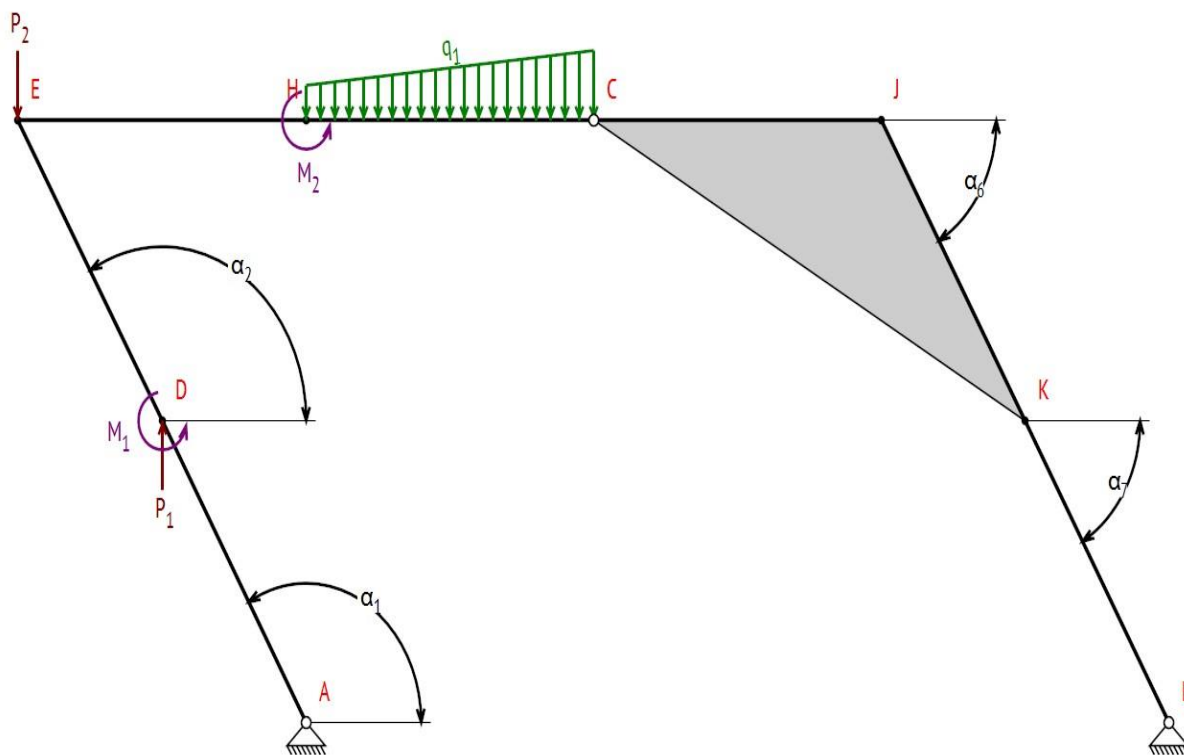
16



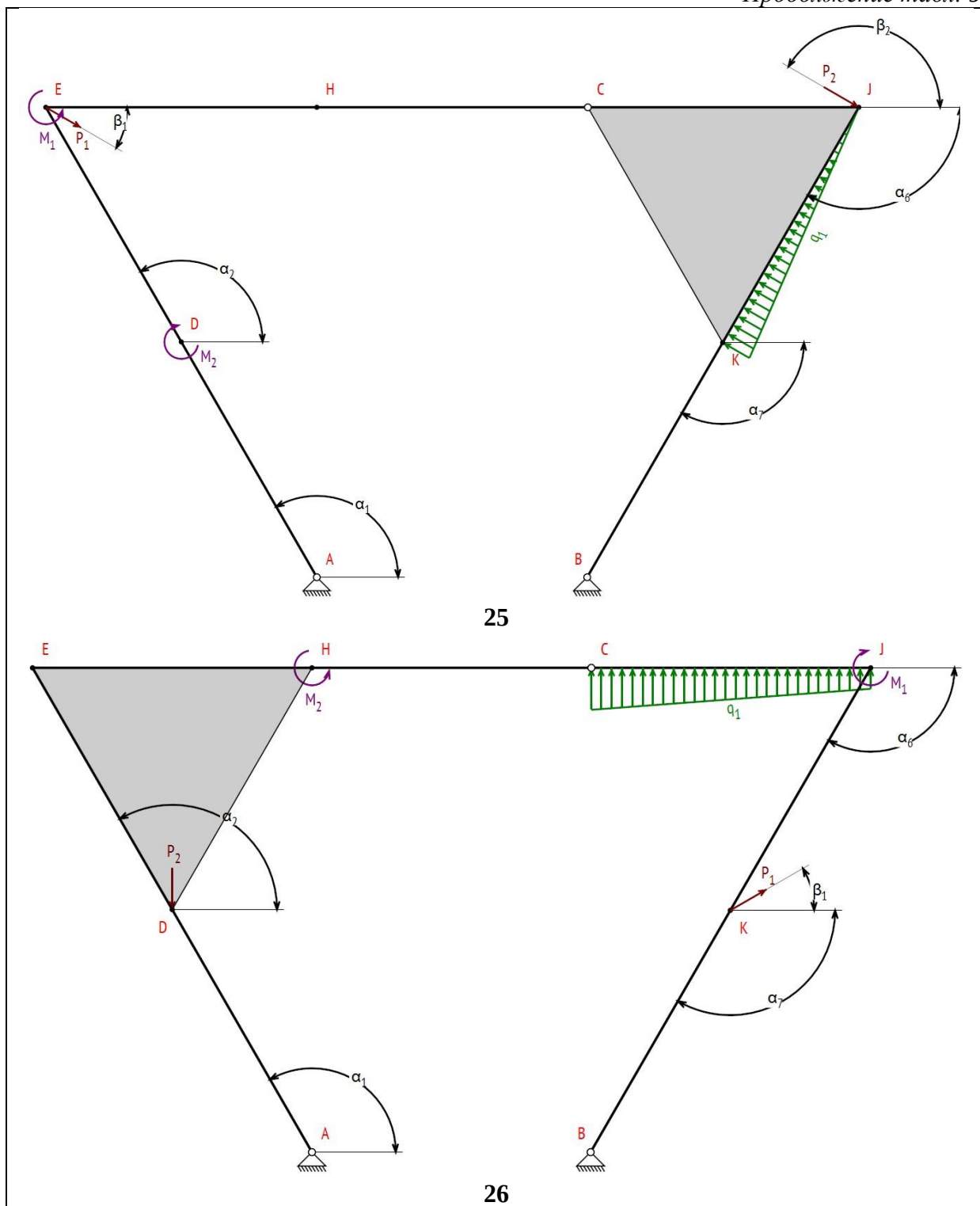


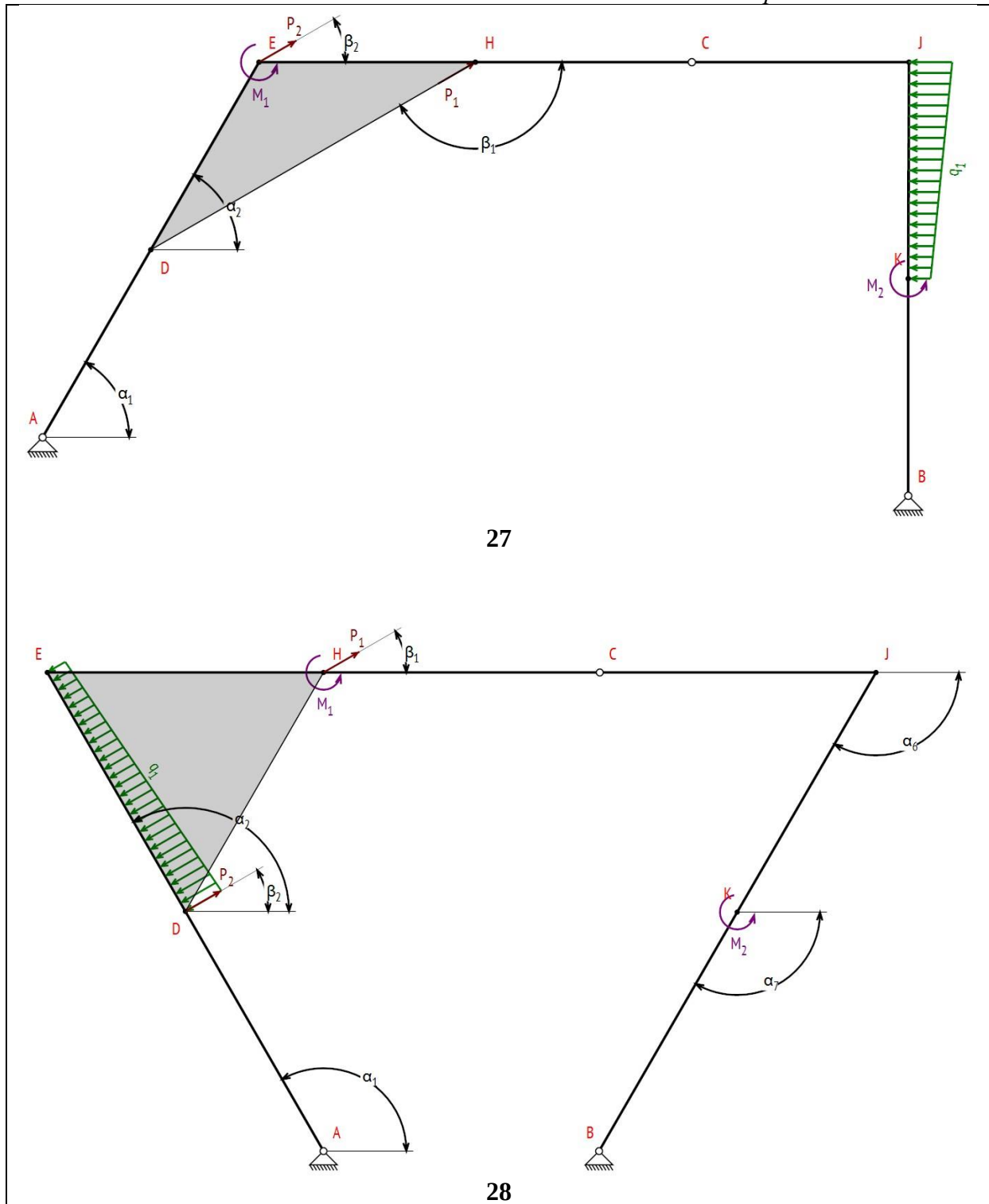


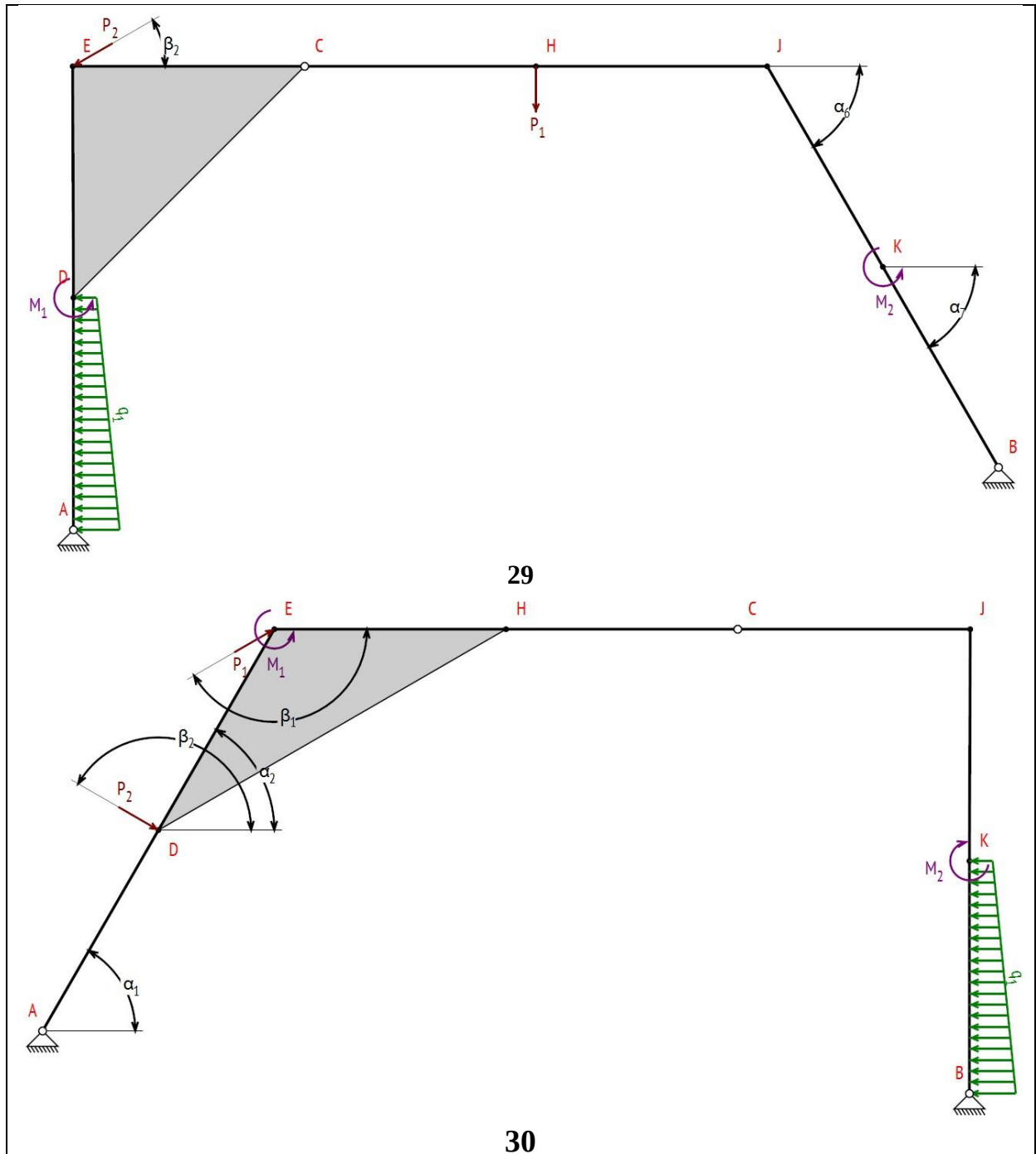
23



24





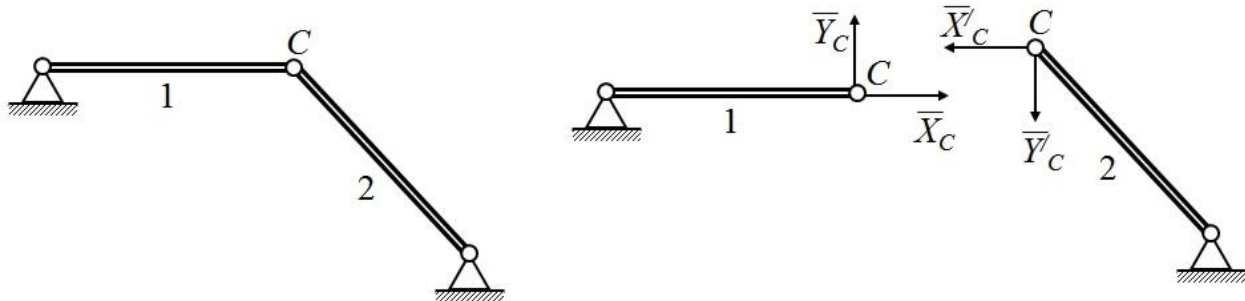


2.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил

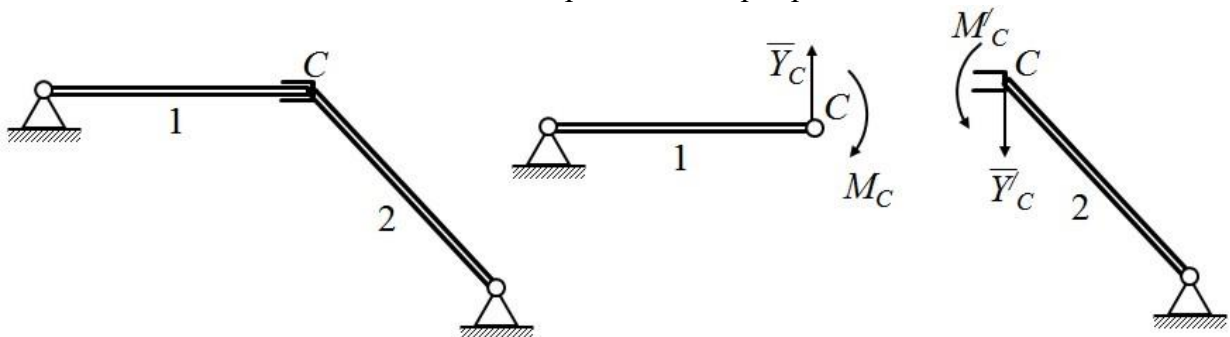
При решении задач этого типа чаще всего сразу расчленяют составную конструкцию (систему тел) и рассматривают равновесие каждого из тел в отдельности. При этом следует учитывать аксиому о равенстве действия и противодействия, согласно которой силы взаимодействия двух тел равны между

собой по абсолютной величине, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. При расчленении систем следует руководствоваться правилом, согласно которого в месте расчленения должно появляться не более двух неизвестных реакций связей.

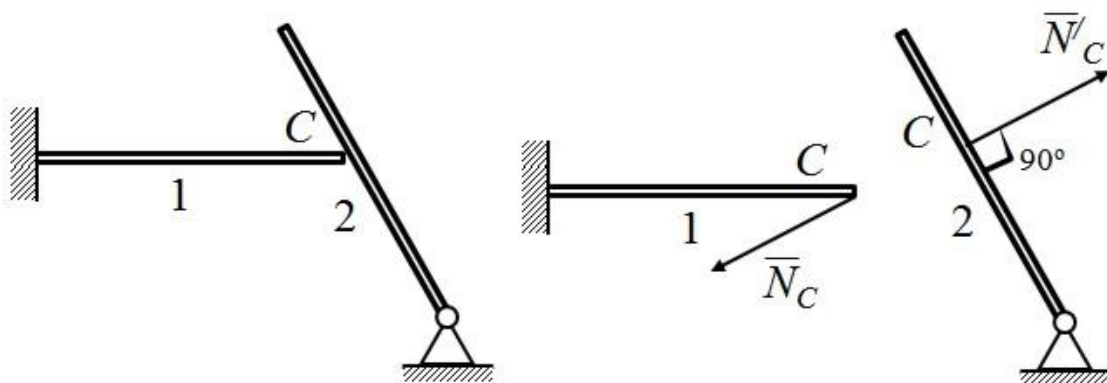
Расчленяют систему в следующих соединениях (рис. 9):



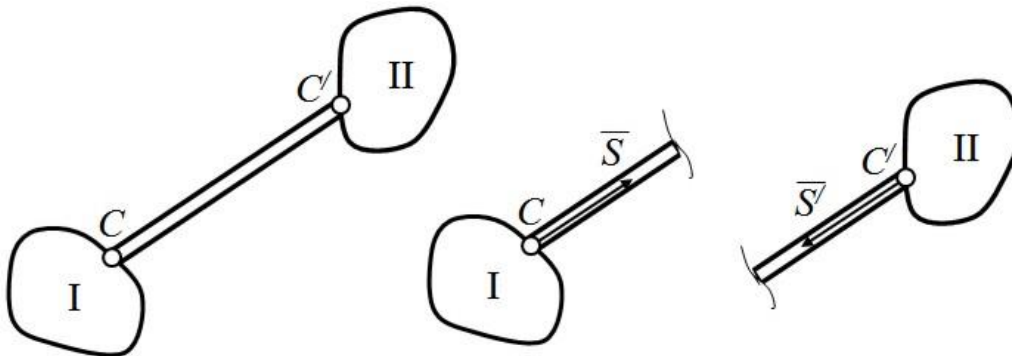
1. В цилиндрическом шарнире



2. В скользящей заделке



3. В точке свободной опоры тел



4. Соединения невесомым стержнем

Рис. 9. Примеры расчленения систем

Порядок решения задач

1. Выделите объект исследования – составную конструкцию (систему двух тел), равновесие которой рассматривается.

2. Приложите к каждому телу составной конструкции все активные (заданные) силы. В том случае, когда по условию задачи к телу приложена распределённая нагрузка, следует выполнить эквивалентное преобразование и заменить её равнодействующей силой (см. Приложение 1).

3. примените аксиому освобождения от связей. Освободите каждое тело составной конструкции от наложенных внешних и внутренних связей, приложив соответствующие реакции. Убедитесь, что задача является статически определимой: число уравнений равновесия должно совпадать с количеством неизвестных реакций, подлежащих определению.

4. Направьте оси координат и выберите моментные точки (о рациональном выборе направлений координатных осей и моментных точек см. п. 1.2 рекомендаций к решению задач (с. 63)). Для каждого тела системы могут быть выбраны различные системы координат.

5. Составьте уравнения равновесия произвольной плоской системы сил для каждого тела рассматриваемой системы.

6. Решите все полученные уравнения равновесия совместно, определяя неизвестные реакции связей.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что её направление выбрано верно, если отрицательной, то истинное направление реакции противоположно выбранному (модуль же реакции определён верно).

После того, как задача решена, необходимо произвести проверку правильности решения. Для этого следует составить сумму моментов относительно точки, неиспользованной ранее при решении, при этом необходимо учитывать истинные направления реакций. В случае равенства нулю алгебраической суммы проекций или моментов считается, что проверка сошлась, и задача решена правильно.

При решении подобных задач можно применять и другой приём. Можно рассмотреть условия равновесия для всей конструкции в целом (как для одного абсолютно твёрдого тела), а затем к этим трём уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного любого из двух тел данной системы. Этот приём нередко предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят только внешние силы и поэтому эти уравнения оказываются, обычно, проще.

**Примеры решения задач на тему:
«Определение реакций опор твёрдого тела (система двух тел)»**

Пример 1. Определите внешние (опорные) и внутренние связи рамы ACB , изображенной на рис. 5, приняв следующие исходные данные: $q=2$ кН/м, $P=4$ кН.

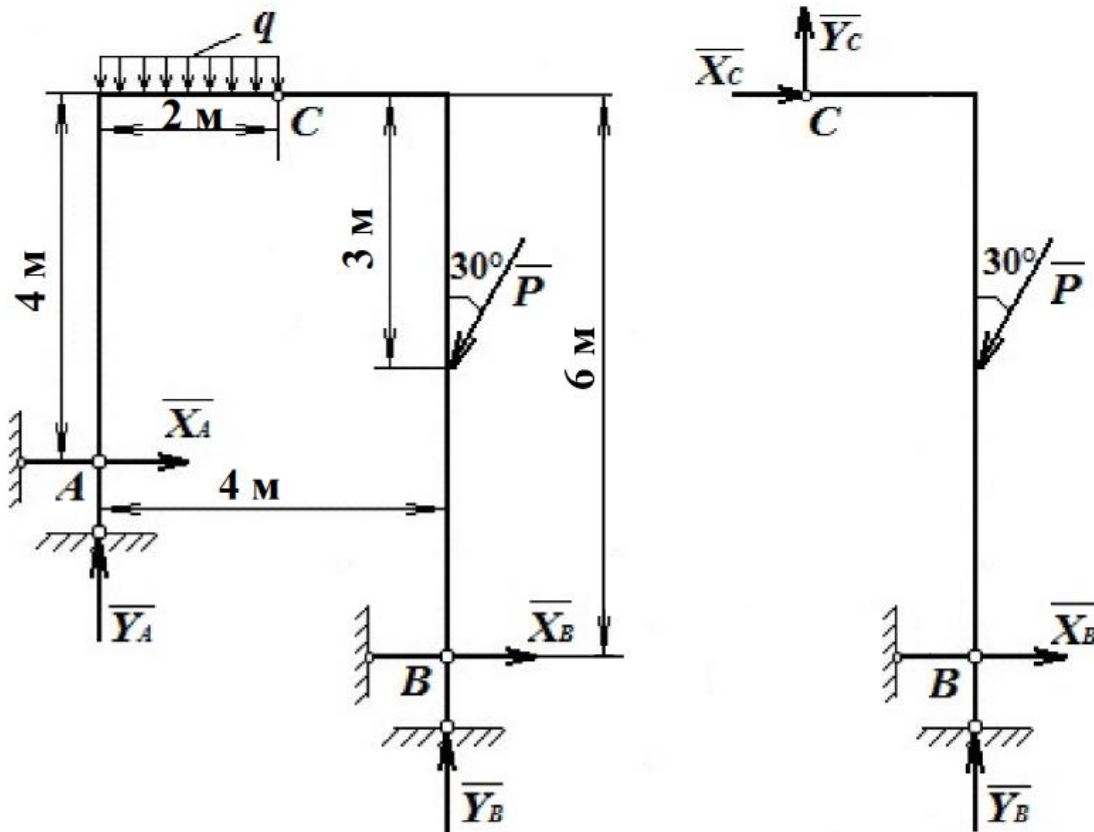


Рис. 10. Расчётная схема рамы

Решение.

1. Объектом исследования является составная рама ACB .
 2. Выполним анализ наложенных связей. В точках A и B рама закреплена при помощи шарнирно-неподвижных опор, в точке C – цилиндрическим шарниром. Применим аксиому освобождения от связей. Мысленно отбросим связи, заменим их реакциями связей X_A , Y_A , X_B , Y_B , X_C , Y_C соответственно. Для определения данных шести неизвестных реакций связей разделим раму ACB на две части (AC и CB) и рассмотрим равновесие всей конструкции, а затем любой из полученных частей.

3. Составим уравнения равновесия для всей конструкции:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - P \cdot \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2 \cdot q - P \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad 2 \cdot X_B + 4 \cdot Y_B - 4 \cdot P \cdot \cos 30^\circ + 1 \cdot P \cdot \sin 30^\circ - q \cdot 2 \cdot 1 = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия для правой части рамы:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_C - P \cdot \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_C - P \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_C(F_k) = 0; \quad 6 \cdot X_B + 2 \cdot Y_B - 2 \cdot P \cdot \cos 30^\circ - 3 \cdot P \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (6)$$

4. Произведём решение полученной системы уравнений равновесия.

Решая совместно уравнения (3) и (6), получим:

$$X_B = 1 \text{ кН}; \quad Y_B = 3,464 \text{ кН}.$$

Подставляя найденные значения X_B и Y_B в уравнения (1) и (2) определим реакции опоры A :

$$X_A = 1 \text{ кН}; \quad Y_A = 4 \text{ кН}.$$

Из уравнений (4) и (5) определим реакции внутренних связей:

$$X_C = 1 \text{ кН}; \quad Y_C = 0 \text{ кН}.$$

5. Выполним проверку правильности решения, составив уравнение моментов для всей конструкции относительно точки B :

$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad 3 \cdot P \cdot \sin 30^\circ + q \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot X_A - 4 \cdot Y_A = 0.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$4 \cdot 0,5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0; \quad 6 + 12 - 2 - 16 = 0; \quad 18 - 18 = 0.$$

Ответ:

$$X_C = \pm 1 \text{ кН},$$

$$X_A = 1 \text{ кН},$$

$$X_B = 1 \text{ кН},$$

$$Y_C = 0 \text{ кН},$$

$$Y_A = 4 \text{ кН},$$

$$Y_B = 3,464 \text{ кН}.$$

Пример 2. Составная конструкция ACB , состоящая из твёрдых тел AC и CB , закреплена в точках A и B при помощи шарнирно-неподвижных опор, в точке C – цилиндрического шарнира. К составной конструкции приложены силы $P_1=1$ Н и $P_2=6$ Н, пары сил с моментами $M_1=60$ Н и $M_2=1$ Н, распределённая нагрузка интенсивностью $q_1=2$ Н/м. В центре тяжести однородной треугольной пластины $СJK$ приложена сила G , пропорциональная её площади (коэффициент пропорциональности $\gamma=0,5$). *Определите* реакции в опорах составной конструкции ABC . Выполните проверку правильности решения. При решении примите исходные данные: $\gamma=0,5$, $l_{HC}=0,4$ м, $l_{ED}=l_{JK}=l_{CJ}=0,6$ м, $l_{KB}=l_{DA}=0,8$ м, $l_{HE}=1,6$ м, $\alpha_{AE}=150^\circ$, $\Theta_B=6^\circ$, $\beta_1=120^\circ$, $\beta_2=120^\circ$.

Решение:

1. Объектом исследования является составная конструкция ACB , состоящая из двух твёрдых тел AC и CB , соединённых между собой в точке C цилиндрическим шарниром (рис. 6).

2. Рассмотрим равновесие произвольной плоской системы сил, действующей на составную конструкцию ACB . Распределённую нагрузку интенсивностью q_1 заменим эквивалентной сосредоточенной силой Q_1 , приложенной посередине участка EH и по модулю равной:

$$Q_1 = q_1 \cdot l_{EH} = 2 \cdot 1,6 = 3,2 (\text{Н}).$$

3. Рассчитаем модуль силы G , приложенной в центре тяжести однородной треугольной пластины CJK и пропорциональной её площади (коэффициент пропорциональности $\gamma = 0,5$):

$$G = \gamma \cdot S_{CJK} = \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot CJ \cdot JK; G = 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,09(\text{Н}).$$

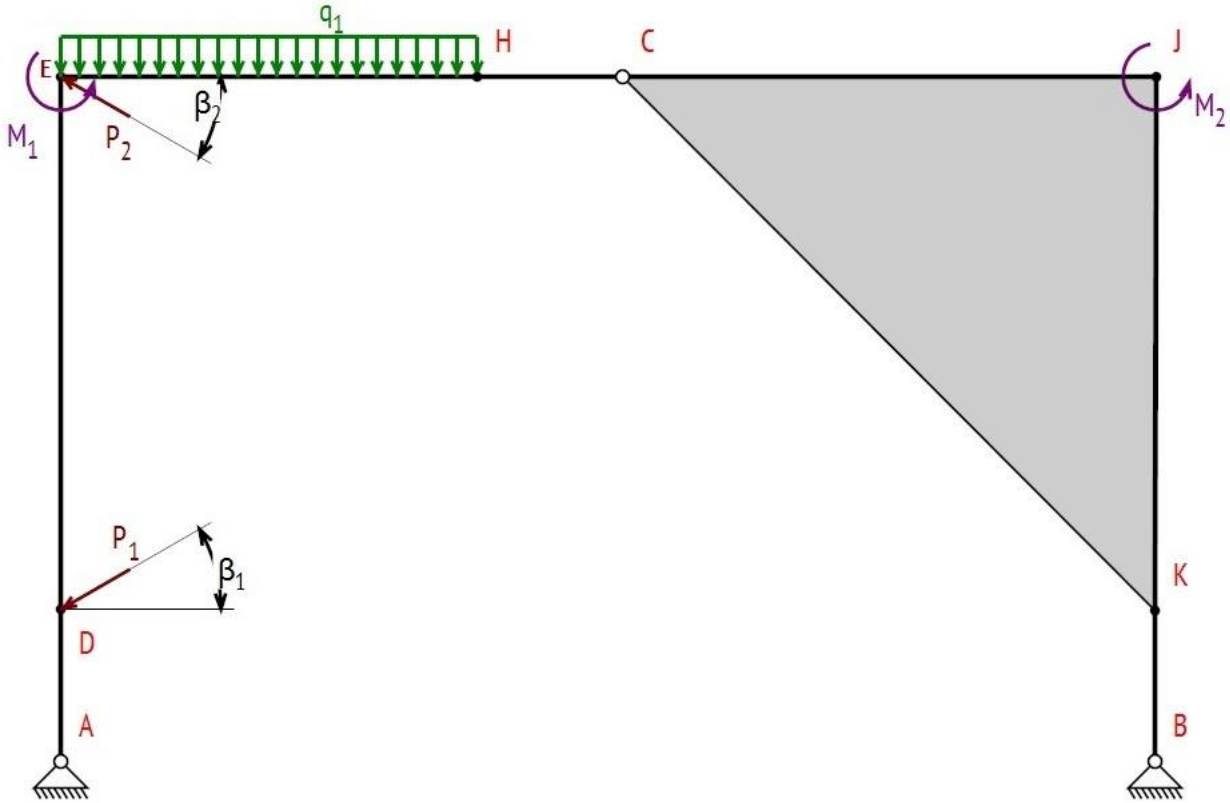


Рис. 11. Исходная схема

4. Мысленно отбрасываем связи (шарнирно-неподвижные) в точках A и B и заменяем их реакциями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ и $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ соответственно, в точке C (установлен цилиндрический шарнир) - условно не показанные на чертеже реакции $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ (см. рис. 7).

Для нахождения 6 неизвестных реакций $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ разобьём составную конструкцию ACB на 2 части – AC и CB , рассмотрим равновесие каждой части в отдельности и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

5. Составим уравнения равновесия. Рассмотрим равновесие части CB . Для системы сил, приложенной к части CB , составляем три уравнения равновесия (первая форма):

$$\begin{aligned} \sum F_{(KX)} &= 0: -X_C + X_B = 0; \\ \sum F_{(KY)} &= 0: -Y_C - G + Y_B = 0; \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0: -G \cdot \frac{l_{CJ}}{3} + Y_B \cdot l_{CJ} + X_B \cdot (l_{KB} + l_{KJ}) + M_2 = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим равновесие части AC . Для системы сил, приложенной к части AC , составляем ещё три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{(KX)} = 0: X_A - P_1 \cdot \cos 30^\circ - P_2 \cdot \cos 30^\circ + X_C &= 0; \\ \sum F_{(KY)} = 0: Y_A + Y_C - P_1 \cdot \cos 60^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ - Q_1 &= 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0: P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot l_{DA} + P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot (l_{DA} + l_{ED}) + M_1 - Q_1 \cdot \frac{l_{HE}}{2} - \\ - X_C \cdot (l_{DA} + l_{ED}) + Y_C \cdot (l_{HE} + l_{HC}) &= 0\end{aligned}$$

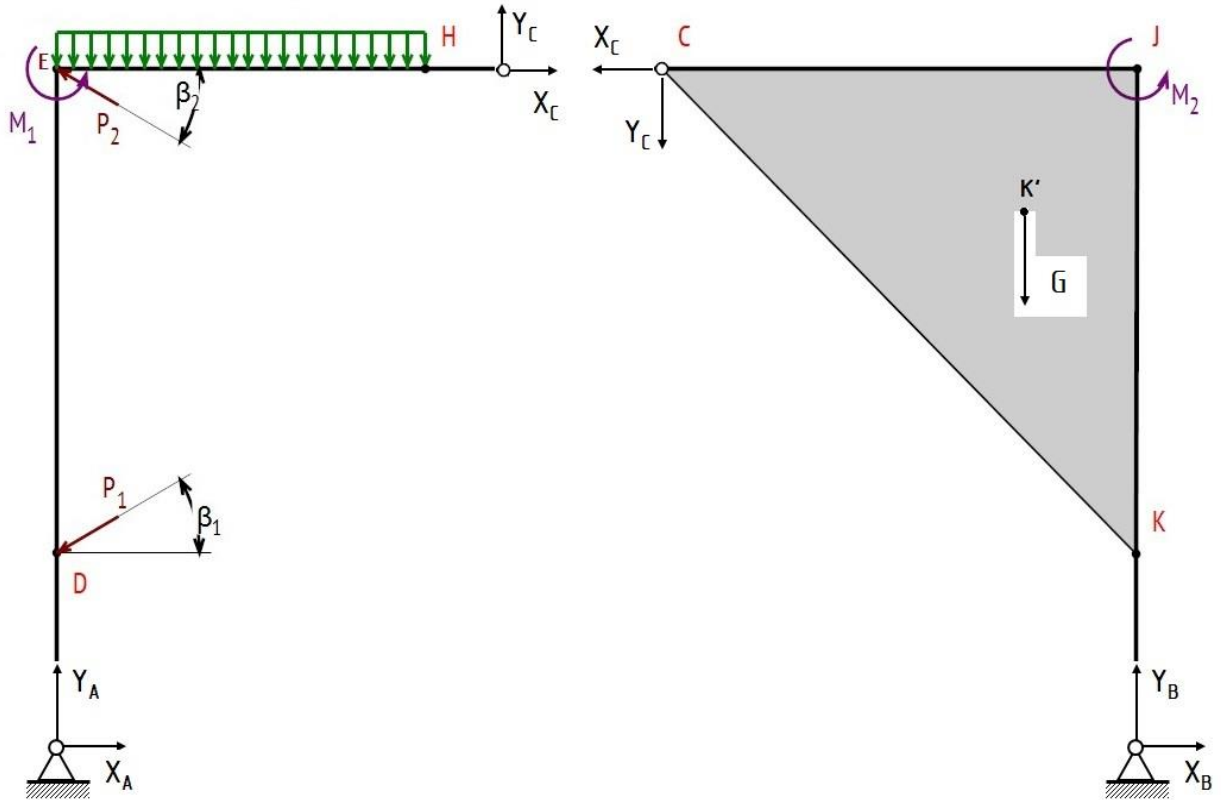


Рис. 12. Исходная схема

6. Решим полученную систему уравнений совместно относительно неизвестных $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ и получим результаты:

$$\begin{aligned}X_A &= -4,150 \text{ Н}, X_B = 10,212 \text{ Н}, X_C = 10,212 \text{ Н}, \\ Y_A &= 26,255 \text{ Н}, Y_B = -25,465 \text{ Н}, Y_C = -25,555 \text{ Н}.\end{aligned}$$

7. Выполним проверку правильности решения, составив уравнение моментов относительно центра C для всей конструкции в сборе:

$$\begin{aligned}\sum m_C(\bar{F}_k) &= 0: \\ -P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot l_{ED} + P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot (l_{HE} + l_{HC}) + X_A \cdot (l_{DA} + l_{ED}) - Y_A \cdot (l_{HE} + l_{HC}) + M_1 + M_2 + \\ + Q_1 \cdot (l_{HE} / 2 + l_{HC}) - P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot (l_{HE} + l_{HC}) - \frac{G \cdot l_{CJ}}{3} + Y_B \cdot l_{CJ} + X_B \cdot (l_{KB} + l_{KJ}) &= 0; \\ -1 \cdot 0,866 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,5 \cdot (1,6 + 0,4) + (-4,150) \cdot (0,8 + 0,6) - 26,255 \cdot (1,6 + 0,4) + 60 + 1 + \\ + 3,2 \cdot (1,6 / 2 + 0,4) - 6 \cdot 0,5 \cdot (1,6 + 0,4) - \frac{0,09 \cdot 0,6}{3} + (-25,465) \cdot 0,6 + 10,212 \cdot (0,8 + 0,6) &= 0; \\ 0 &\approx 0.\end{aligned}$$

Ответ: $X_A = -4,150 \text{ Н}, X_B = 10,212 \text{ Н}, X_C = 10,212 \text{ Н}, Y_A = 26,255 \text{ Н}, Y_B = -25,465 \text{ Н}, Y_C = -25,555 \text{ Н}.$

3 РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

3.1 Задания на тему: «Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы»

3.1.1 Задание Ф-1

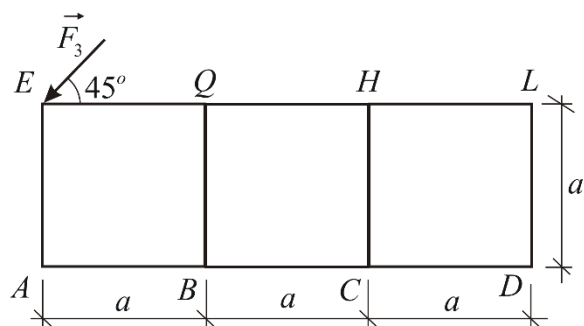


Рис. 13. Расчётная схема

Ферма нагружена тремя силами, одна из которых $F_3 = P = 10$ кН одинакова во всех вариантах и приложена, как показано на рис. 13. *Определите* усилия в трёх выделенных на чертеже пунктиром стержнях методом вырезания узлов и методом сквозных сечений. Принимаем $a=1$ м.

Таблица 12

Исходные данные к заданию Ф-1

№	Конфигурация фермы	Варианты закрепления	Нагрузка	
1			$F_1 = 3P$ 	$F_2 = P\sqrt{2}$
2			$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
3			$F_1 = 2P$ 	$F_2 = P\sqrt{2}$
4			$F_1 = P$ 	$F_2 = 2P$
5			$F_1 = P\sqrt{2}$ 	$F_2 = 3P$

Окончание табл. 12.

6		H 	L 	$F_1 = P$ 	$F_2 = 2P$
7		A 	D 	$F_1 = 3\sqrt{3}P$ 	$F_2 = P$
8		A 	D 	$F_1 = 2\sqrt{2}P$ 	$F_2 = 3\sqrt{3}P$
9		C 	D 	$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
10		Q 	H 	$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
11		A 	D 	$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 3P$
12		A 	C 	$F_1 = P$ 	$F_2 = 2P$
	в	г	д	е	

Варианты задания выбираются по последним четырём цифрам шифра зачётной книжки. Например:

шифр – 1 0 | 5 | 4 | 3 | 6
буквы – | в | г | д | е

Буквы обозначают номер столбца, цифры шифра – номер строки. Например, вариант 5436 выбирается по табл. 12. следующим образом:

№	Конфигурация фермы	Варианты закрепления	Нагрузка	
5436		B D 	$F_1 = 2P$	$F_2 = 2P$

3.1.2 Задание Ф-2

Ферма нагружена тремя силами, одна из которых $F_3 = P = 10$ кН одинакова во всех вариантах и приложена, как показано на рис. 14. Определите усилия в трёх выделенных на чертеже пунктиром стержнях методом вырезания узлов и методом сквозных сечений. Принимаем $a = 1$ м.

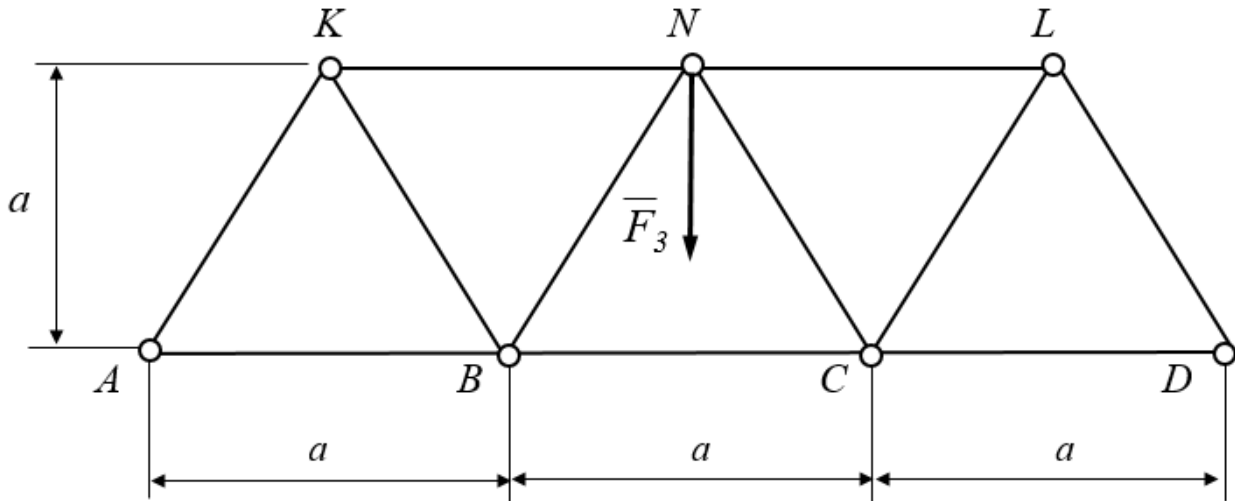


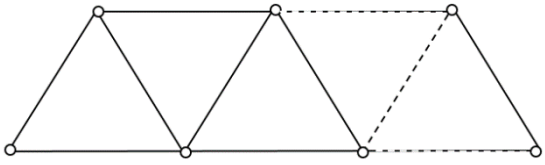
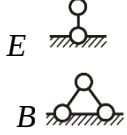
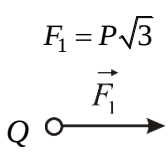
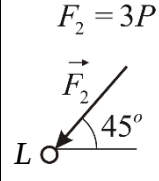
Рис. 14. Расчётная схема

Таблица 13

Исходные данные к заданию Ф-4

№	Конфигурация фермы	Варианты закрепления	Нагрузка	
1			$F_1 = 3P$ 	$F_2 = P\sqrt{2}$
2			$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
3			$F_1 = 2P$ 	$F_2 = P\sqrt{2}$

4			$F_1 = P$ 	$F_2 = 2P$
5			$F_1 = P\sqrt{2}$ 	$F_2 = 3P$
6			$F_1 = P$ 	$F_2 = 2P$
7			$F_1 = 3\sqrt{3}P$ 	$F_2 = P\sqrt{2}$
8			$F_1 = 2\sqrt{2}P$ 	$F_2 = 3\sqrt{3}P$
9			$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
10			$F_1 = P\sqrt{3}$ 	$F_2 = 2P$
11			$F_1 = 2\sqrt{2}P$ 	$F_2 = 3\sqrt{3}P$

12				
	в	г	д	е

3.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия плоской фермы

1. Проверьте выполнение условия статической определимости фермы:

$$C = 2 \cdot U - 3,$$

где C – число стержней фермы, U – количество узлов.

2. Выполните анализ наложенных внешних связей. Примените аксиому освобожденности от связей, приложите соответствующие реакции. Составьте уравнения равновесия для всей фермы, из которых определите реакции внешних связей. Выполните проверку правильности решения, составив уравнение равновесия моментов сил относительно произвольной точки.
3. Примените *лемму о «нулевых» стержнях*, удалите стержни, усилия в которых равны нулю. Пронумеруйте оставшиеся стержни и проверьте «исправленную» ферму на статическую определимость.
4. Примените способ вырезания узлов. Составьте уравнения равновесия для каждого узла фермы.
5. Совместно решите полученную систему уравнений относительно неизвестных усилий в стержнях фермы. Если в результате расчёта значение усилия в стержне получится отрицательным, это означает, что стержень сжат.
6. Проверьте результаты расчёта фермы способом сечений (Риттера). Для этого ферму в каком-либо месте раскройте плоскостью, действие стержней замените их реакциями и составьте уравнения отсечённой части. Уравнения равновесия в форме сил или моментов следует составлять так, чтобы эти уравнения содержали не более одной неизвестной силы.
7. Проверьте результаты расчёта графическим способом (построением диаграммы Максвелла-Кремоны): если расчёт выполнен верно, то диаграмма будет замкнута, в противном случае – диаграмма не замкнётся.

3.3 Пример определения реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

Условие: К узлам плоской фермы (рис. 10) приложены внешние силы $P_1 = 1$ (кН), $P_2 = 5$ (кН), $P_3 = 2$ (кН), $P_4 = 2$ (кН), $P_5 = 3$ (кН), $P_6 = 3$ (кН).

Определите усилия в стержнях фермы.

3.3.1 Расчёт плоской фермы методом вырезания узлов

Метод вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов. Для этого в качестве объекта исследования один за другим выбирают все узлы фермы. Для каждого из них составляют расчётную схему сил и уравнения равновесия. Метод вырезания узлов удобен в использовании, если необходимо определить усилия во всех стержнях фермы.

Решение.

1. Стержни фермы будем аранее считаем растянутыми, тогда положительным усилиям соответствуют растянутые стержни, отрицательным – сжатые. Стержни фермы пронумеруем арабскими цифрами (1, 2, ..., 9), узлы – римскими цифрами (I, II, ..., VI) (рис. 10). В рассматриваемой ферме число узлов $U=15$, число стержней $C=27$.

Условие статической определимости фермы:

$$C = 2 \cdot U - 3, 27 = 2 \cdot 15 - 3.$$

Условие статической определимости выполняется.

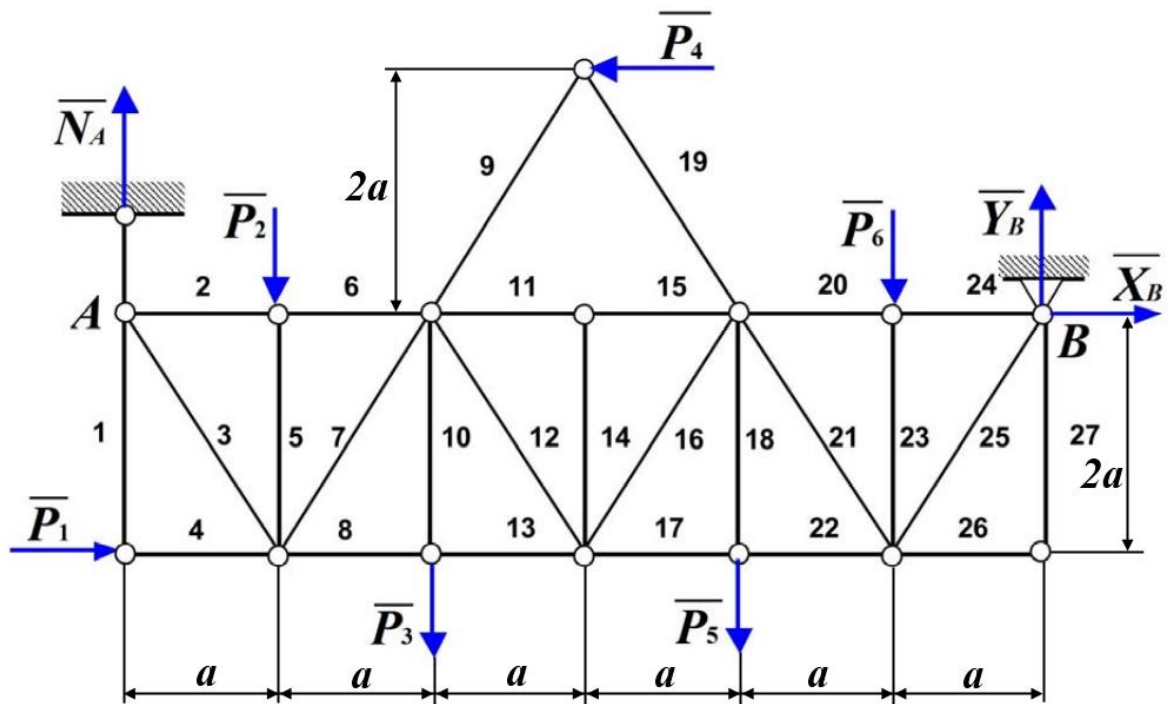


Рис. 15. Расчётная схема плоской фермы (пример 1)

2. Отбросим внешние связи и составим уравнения равновесия для фермы:

$$\sum F_{kx} = 0; X_B + P_1 - P_4 = 0 \quad (1).$$

$$\sum F_{ky} = 0; N_A - P_2 - P_3 - P_5 - P_6 + Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = P_2 + P_3 + P_5 + P_6 - N_A \quad (2).$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0; P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot 5a + P_3 \cdot 4a + P_4 \cdot 2a + P_5 \cdot 2a + P_6 \cdot a - N_A \cdot 6a = 0 \quad (3).$$

Из уравнения (1) находим: $X_B = P_4 - P_1 = 2 - 1 = 1$ (кН).

Из уравнения (3) находим: $N_A = 8$ (кН).

Из уравнения (2) находим: $Y_B = 5$ (кН).

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия моментов сил относительно точки A :

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; Y_B \cdot 6a + P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a + P_4 \cdot 2a - P_5 \cdot 4a - P_6 \cdot 5a = 0;$$

$$(5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 5) \cdot a = (36 - 36) \cdot a = 0.$$

Проверка сошлась. Опорные реакции определены верно.

3. Согласно лемме о «нулевых» стержнях по признаку I усилия в стержнях 26 и 27 равны нулю, поэтому эти стержни следует удалить. По признаку 2 леммы стойка 14 «нулевая»; усилие в стержне 1 равно нулю по признаку 3. Удалим из схемы фермы все «нулевые» стержни, а силу P_1 как скользящий вектор перенесём вдоль линии её действия и приложим к узлу III.

4. Пронумеруем оставшиеся стержни и проверим «исправленную» ферму на статическую определимость (рис. 11).

Арабскими цифрами обозначены номера стержней, римскими цифрами – номера узлов. Число узлов равно 12, число стержней равно 21. Условие статической определимости запишем в виде:

$$C = 2 \cdot Y - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 21,$$

$$21 = 21.$$

Ферма жёсткая, статически определимая.

5. Применим способ вырезания узлов. Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы.

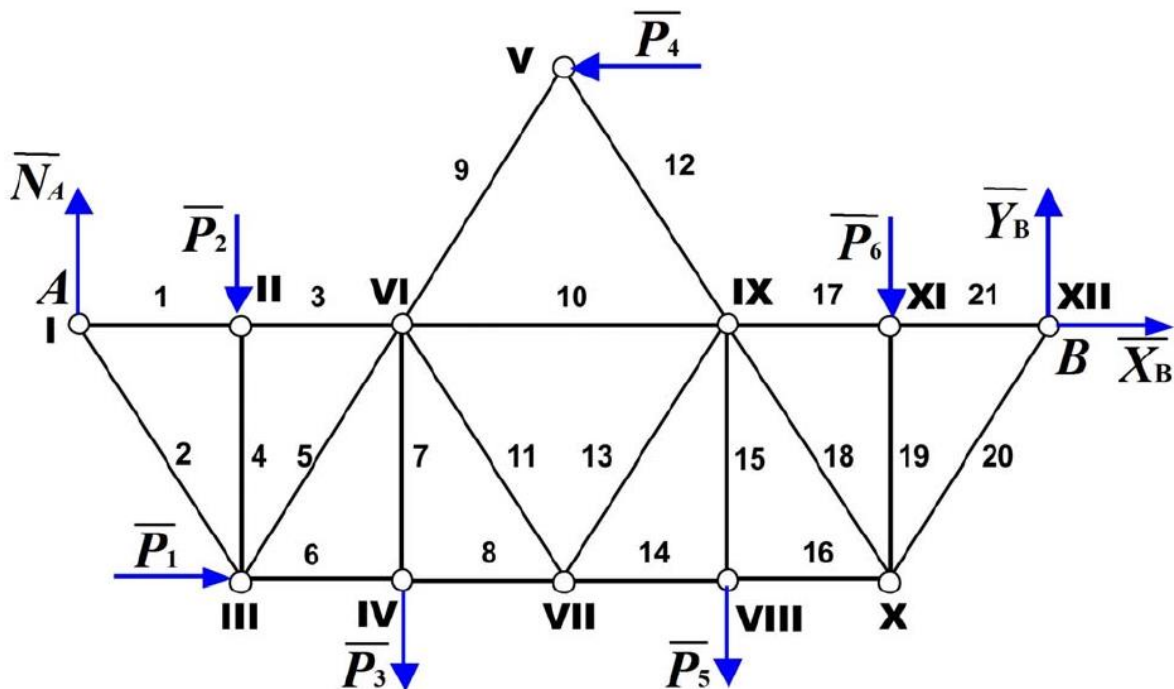
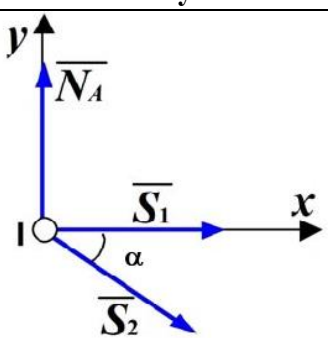
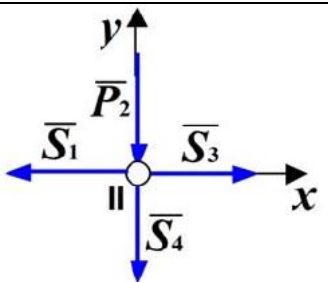
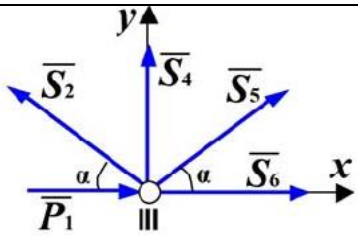
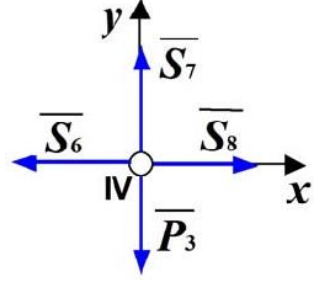
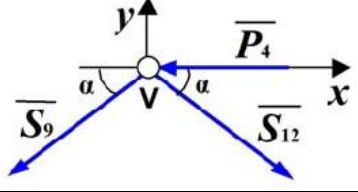
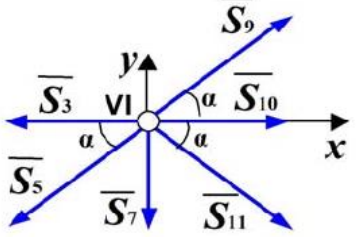
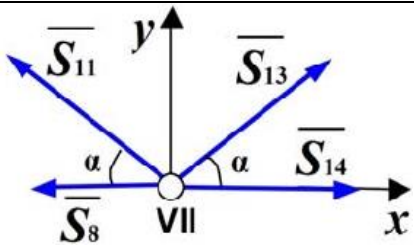
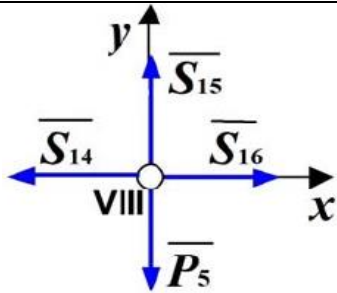
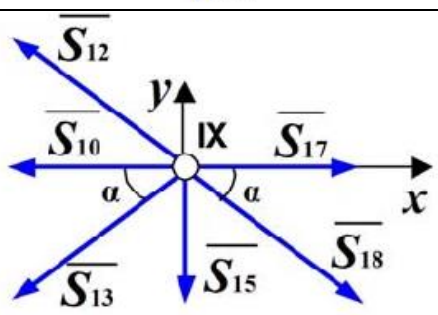
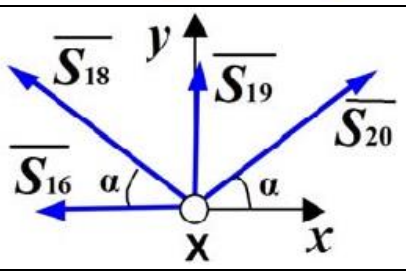
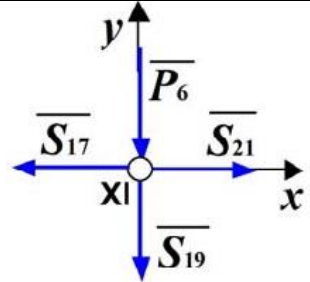


Рис. 16. Схема "исправленной" фермы

Результаты запишем в виде табл. 14.

Результаты расчётов

№	Схема узла	Уравнения равновесия для узла
1		$\sum F_{kx} = 0; S_1 + S_2 \cos \alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; N_A - S_2 \sin \alpha = 0,$ где: $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447214;$ $\sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894427.$
2		$\sum F_{kx} = 0; S_3 - S_1 = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; -P_2 - S_4 = 0.$
3		$\sum F_{kx} = 0; P_1 + S_6 + (S_5 - S_2) \cos \alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_4 + (S_2 + S_5) \sin \alpha = 0.$
4		$\sum F_{kx} = 0; -S_6 + S_8 = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_7 - P_3 = 0.$
5		$\sum F_{kx} = 0; -P_4 + (S_{12} - S_9) \cos \alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{12} + S_9) \sin \alpha = 0.$
6		$\sum F_{kx} = 0; -S_3 + (S_{11} + S_9 - S_5) \cos \alpha + S_{10} = 0$ $;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_9 - S_5 - S_{11}) \sin \alpha - S_7 = 0.$

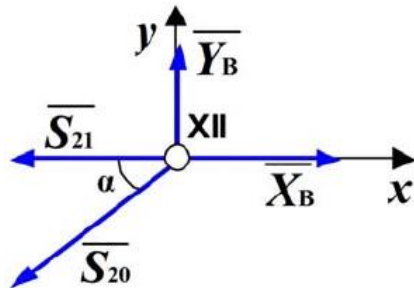
№	Схема узла	Уравнения равновесия для узла
7		$\sum F_{kx} = 0; -S_8 + S_{14} + (S_{13} - S_{11})\cos\alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{11} + S_{13})\sin\alpha = 0.$
8		$\sum F_{kx} = 0; S_{16} - S_{14} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_{15} - P_5 = 0.$
9		$\sum F_{kx} = 0; S_{17} + (S_{18} - S_{13} - S_{12})\cos\alpha - S_{10} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{12} - S_{13} - S_{18})\sin\alpha - S_{15} = 0.$
10		$\sum F_{kx} = 0; (S_{20} - S_{18})\cos\alpha - S_{16} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_{19} + (S_{18} + S_{20})\sin\alpha = 0.$
11		$\sum F_{kx} = 0; S_{21} - S_{17} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; -S_{19} - P_6 = 0.$

Совместно решаем полученную систему уравнений относительно неизвестных $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_{21})$, получаем:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -4 \text{ (кН)}; S_2 = 8,94 \text{ (кН)}; S_3 = -4 \text{ (кН)}; S_4 = -5 \text{ (кН)}; S_5 = -3,35 \text{ (кН)}; \\
 S_6 &= 4,5 \text{ (кН)}; S_7 = 2 \text{ (кН)}; S_8 = 4,5 \text{ (кН)}; S_9 = -2,24 \text{ (кН)}; S_{10} = -4 \text{ (кН)}; \\
 S_{11} &= -1,12 \text{ (кН)}; S_{12} = 2,24 \text{ (кН)}; S_{13} = 1,12 \text{ (кН)}; S_{14} = 3,5 \text{ (кН)}; \\
 S_{15} &= 3 \text{ (кН)}; S_{16} = 3,5 \text{ (кН)}; S_{17} = -1,5 \text{ (кН)}; S_{18} = -2,24 \text{ (кН)}; \\
 S_{19} &= -3 \text{ (кН)}; S_{20} = 5,59 \text{ (кН)}; S_{21} = -1,5 \text{ (кН)}.
 \end{aligned}$$

Выводы: 1) стержни, усилия в которых в результате расчёта получились положительными, считаются работающими на растяжение (растянутыми); 2) стержни, усилия в которых в результате расчёта получились отрицательными, считаются работающими на сжатие (сжатыми).

6. Проверка правильности решения.



Уравнения равновесия для двенадцатого узла фермы:

$$\sum F_{kx} = 0; X_B - S_{21} - S_{20} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_B - S_{20} \sin \alpha = 0;$$

$$1 - (-1,5) - 5,590,447214 = 0; 0 \equiv 0;$$

$$5 - 5,590,894 = 0; 0 \equiv 0.$$

Проверка сошлась. Расчёт произведён верно.

3.3.2 Проверка результатов расчёта фермы методом сечений

Для проверки расчёта используем *метод сечений (Риттера)*: рассекаем ферму в выбранном сечении плоскостью таким образом, чтобы секущая плоскость рассекала три стержня фермы. Получаем две отсечённые части фермы, одну из которых (более нагруженную и геометрически сложную) мысленно отбрасываем. Действие отброшенной части фермы на оставшуюся заменяем реакциями стержней, направленными вдоль стержней от сечения, и составляем уравнения рассматриваемой части фермы. Уравнения равновесия в форме сил или моментов следует составлять таким образом, чтобы в них содержалось не более одной неизвестной силы.

Через стержни 3, 5 и 6 проведём сечение I-I и рассмотрим равновесие менее нагруженной левой части (рис. 13).

Заменим действие отброшенной правой части на рассматриваемую левую часть фермы реакциями стержней $\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$ соответственно.

Составим уравнения равновесия для левой части:

$$\sum F_{ky} = 0; N_A - P_2 + S_5 \sin \alpha = 0 \quad (4).$$

$$\sum m_L(\bar{F}_k) = 0; P_2 \cdot a + P_1 \cdot 2 \cdot a + S_6 \cdot 2 \cdot a - N_A \cdot 2 \cdot a = 0 \quad (5).$$

$$\sum m_K(\bar{F}_k) = 0; -N_A \cdot a - S_3 \cdot 2 \cdot a = 0 \quad (6).$$

Из уравнения (4): $S_5 = (P_2 - N_A) / \sin \alpha = (5 - 8) / 0,894 = -3,35$ (кН).

Из уравнения (5): $S_6 = N_A - P_1 - P_2 / 2 = 8 - 1 - 5 / 2 = 4,5$ (кН).

Из уравнения (6): $S_3 = -N_A / 2 = -8 / 2 = -4,0$ (кН).

Проверка показала, что расчёт сил в стержнях 3, 5 и 6 произведён правильно.

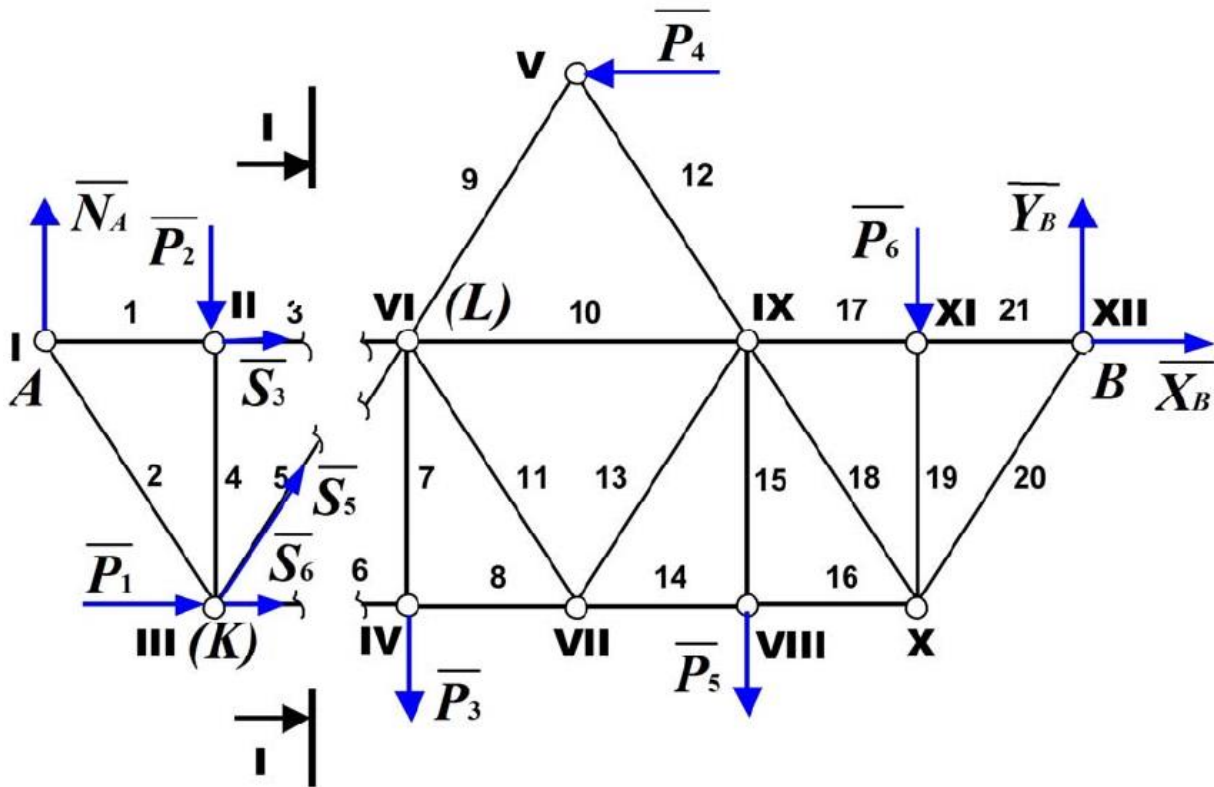


Рис. 17. Расчёт фермы методом сечений (Риттера)

Ответ: $S_1 = -4$ (кН); $S_2 = 8,94$ (кН); $S_3 = -4$ (кН); $S_4 = -5$ (кН); $S_5 = -3,35$ (кН); $S_6 = 4,5$ (кН); $S_7 = 2$ (кН); $S_8 = 4,5$ (кН); $S_9 = -2,24$ (кН); $S_{10} = -4$ (кН); $S_{11} = -1,12$ (кН); $S_{12} = 2,24$ (кН); $S_{13} = 1,12$ (кН); $S_{14} = 3,5$ (кН); $S_{15} = 3$ (кН); $S_{16} = 3,5$ (кН); $S_{17} = -1,5$ (кН); $S_{18} = -2,24$ (кН); $S_{19} = -3$ (кН); $S_{20} = 5,59$ (кН); $S_{21} = -1,5$ (кН).

3.3.3 Построение диаграммы Максвелла-Кремоны

Диаграмма Максвелла-Кремоны даёт наглядное представление об усилиях в стержнях фермы, характере их работы (растяжение или сжатие), а также позволяет выполнить проверку правильности расчёта фермы: при правильном расчёте фермы диаграмма Максвелла-Кремоны будет замкнута.

Вспользуемся системой обозначений стержней, предложенной Боу: внешние поля обозначим заглавными буквами латинского алфавита, векторы сил на диаграмме - двумя малыми буквами тех полей, для которых линия действия силы или стержень являются границей. Построим многоугольник внешних сил $acdefbghi$ (рис. 15), далее пристроим к нему последовательно силовые треугольники для узлов I-XI, начиная с узла, в котором сходится не более двух стержней.

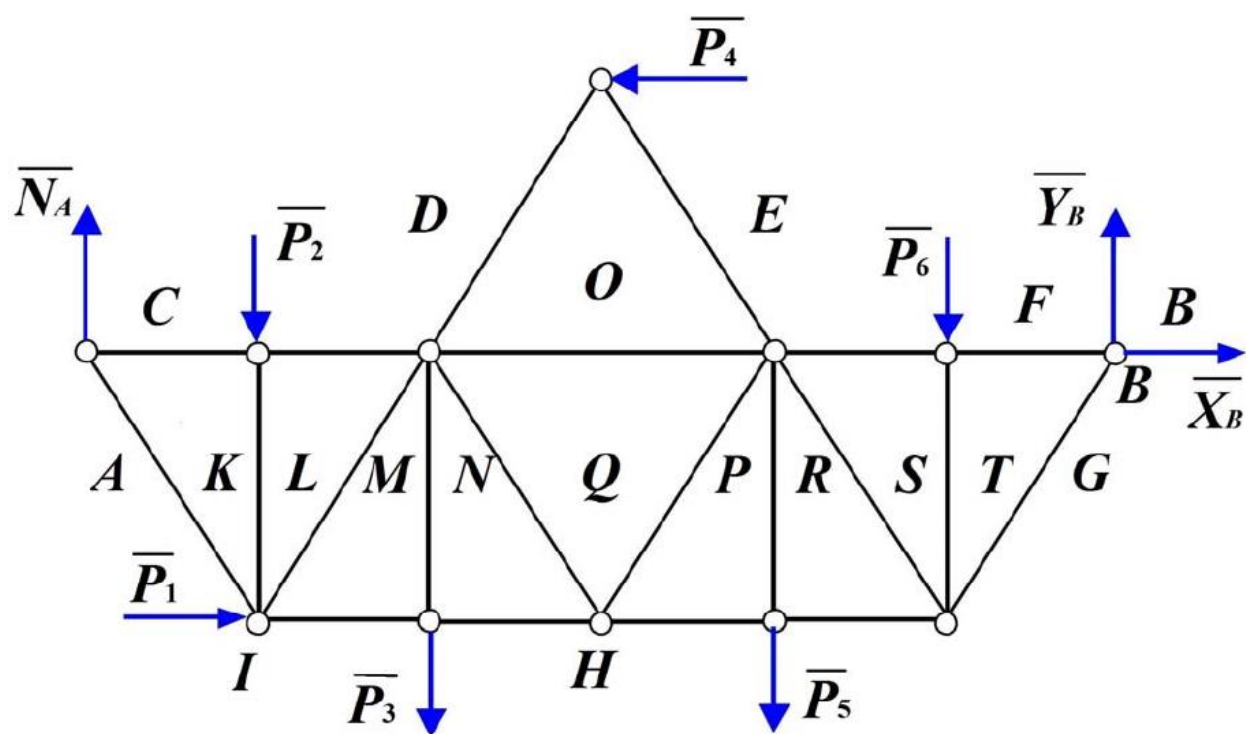


Рис. 18. Расчётная схема

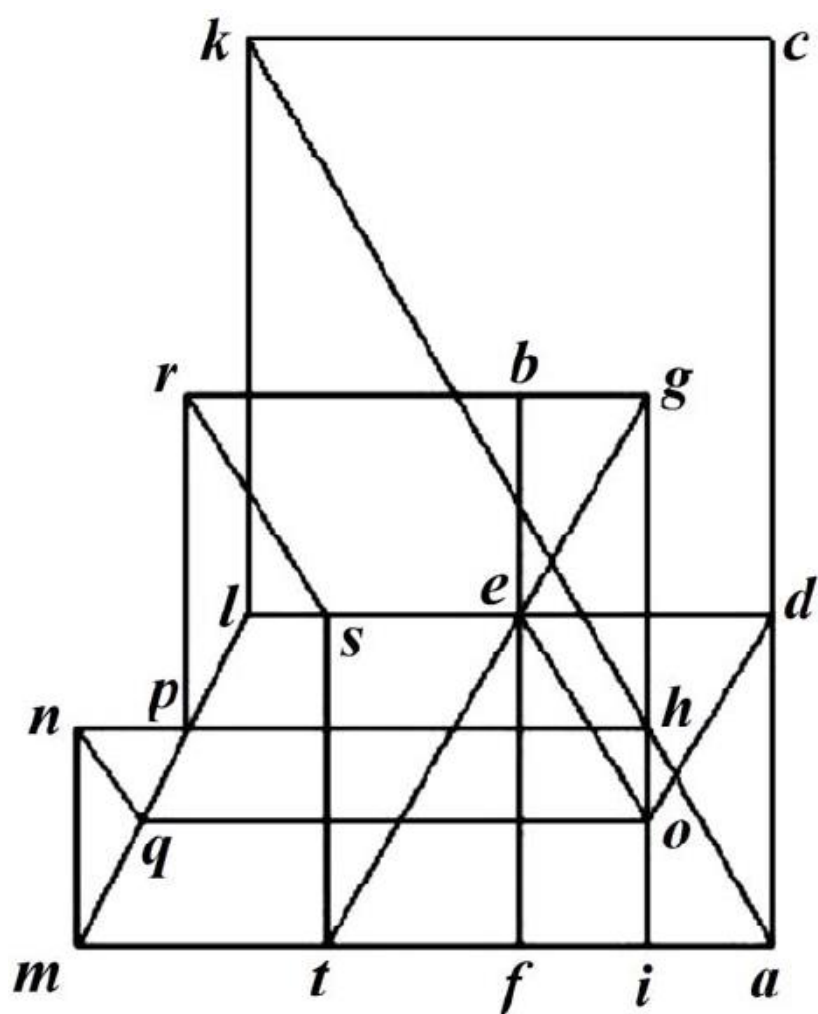


Рис. 19. Диаграмма Максвелла-Кремоны

Указанное правило построения плана сил позволяет определить не только величину силы, но и её знак, т.е. установить, будет ли данный стержень растянут или сжат. Обходя, например, узел 3 по ходу часовой стрелки, встречаем стержень 5 (lm). Первая буква l , вторая – m . Следовательно, стержень 5 сжат, так как вектор lm направлен к узлу. Если возникает необходимость определить знак силы в стержне 13 (qr), производят обход узла 7. Первая буква q , вторая – r . Вектор по диаграмме Максвелла направлен от узла. Следовательно, стержень 13 растянут. Аналогично определяются знаки сил и в остальных стержнях фермы.

Ответ: $S_1 = -4$ (кН); $S_2 = 8,94$ (кН); $S_3 = -4$ (кН); $S_4 = -5$ (кН); $S_5 = -3,35$ (кН); $S_6 = 4,5$ (кН); $S_7 = 2$ (кН); $S_8 = 4,5$ (кН); $S_9 = -2,24$ (кН); $S_{10} = -4$ (кН); $S_{11} = -1,12$ (кН); $S_{12} = 2,24$ (кН); $S_{13} = 1,12$ (кН); $S_{14} = 3,5$ (кН); $S_{15} = 3$ (кН); $S_{16} = 3,5$ (кН); $S_{17} = -1,5$ (кН); $S_{18} = -2,24$ (кН); $S_{19} = -3$ (кН); $S_{20} = 5,59$ (кН); $S_{21} = -1,5$ (кН).

4 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

4.1 Задания по теме: «Определение реакций опор пространственной конструкции»

4.1.1 Задание СПр-1

Условие: Однородная горизонтальная прямоугольная пластина закреплена сферическим шарниром в точке A и цилиндрическим шарниром в точке B (рис. 20) и удерживается в горизонтальном положении при помощи троса. Помимо силы тяжести $Q=100$ Н, на плиту действуют силы $F_1=5$ Н и $F_2=10$ Н и пара сил с моментом $M=50$ Нм. *Определите* реакции шарниров и силу натяжения троса. *Выполните* проверку правильности решения. Исходные данные приведены в табл. 15 и табл. 16.

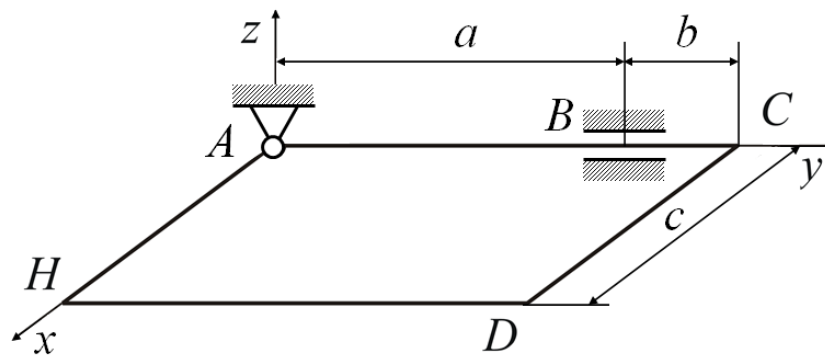


Рис. 20. Исходная схема

Таблица 15

Исходные данные для задания СПр-1

№ строки	Схема закрепления троса	Схема приложения момента пары сил	Схема приложения сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$	Размеры, м			Угол наклона троса α , град
				a	b	c	
1	1	1	1	6,0	3,6	4,0	30
2	2	2	2	5,0	2,5	2,0	45
3	3	3	3	4,5	2,0	3,5	60
4	4	4	4	3,5	2,5	2,0	20
5	5	5	5	2,4	1,2	0,8	15
6	6	6	6	8,4	3,6	3,0	10
7	7	7	7	4,5	2,5	2,0	35
8	8	8	8	3,6	1,8	2,7	55
9	9	9	9	5,6	3,2	2,4	75
10	10	10	10	4,8	2,4	1,2	65
	е	в	г	д	е	в	г

Варианты схем закреплений троса и приложения внешних нагрузок

№	Схема закрепления троса	Схема приложения момента пары сил M	Схема приложения сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$
1			
2			
3			
4			
5			

6			
7			
8			
9			
10			

4.1.2 Задание СПр-2

Условие: Две однородные прямоугольные плиты, жёстко соединённые между собой под прямым углом друг к другу, закреплены сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром в точке B (рис. 21) и удерживаются в горизонтальном положении при помощи троса. Помимо сил тяжести $Q_1=10$ Н и $Q_2=20$ Н, на плиты действуют силы $F_1=5$ Н и $F_2=8$ Н и пара сил с моментом $M=10$ Нм. *Определите* реакции шарниров и силу натяжения троса. *Выполните* проверку правильности решения. Исходные данные приведены в табл. 17 и табл. 18.

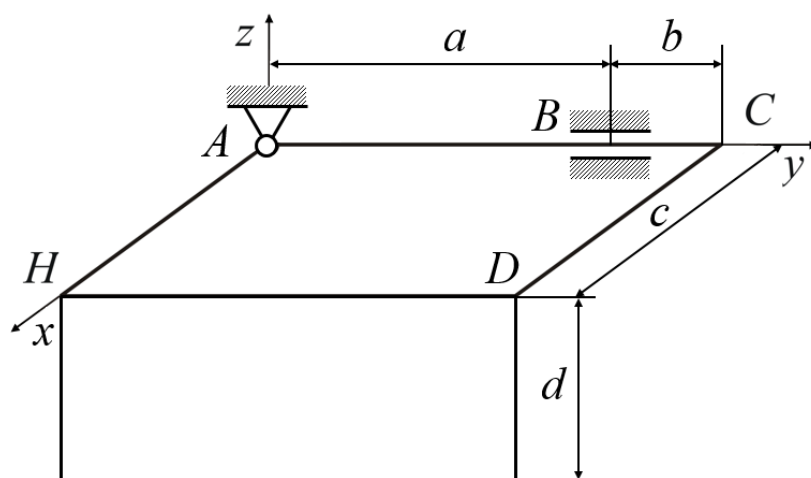


Рис. 21. Исходная схема

Таблица 17

Исходные данные для задания СПр-2

№ строки	Схема закрепления троса	Схема приложения момента пары сил	Схема приложения сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2$	Размеры				Угол наклона троса α , град
				a , м	b , м	c , м	d , м	
1	1	1	1	6,0	3,6	4,0	2,4	30
2	2	2	2	5,0	2,5	2,0	1,5	45
3	3	3	3	4,5	2,0	3,5	2,0	60
4	4	4	4	3,5	2,5	2,0	1,5	20
5	5	5	5	2,4	1,2	0,8	0,5	15
6	6	6	6	8,4	3,6	3,0	2,0	10
7	7	7	7	4,5	2,5	2,0	1,5	35
8	8	8	8	3,6	1,8	2,7	0,9	55
9	9	9	9	5,6	3,2	2,4	1,6	75
10	10	10	10	4,8	2,4	1,2	2,0	65
	е	в	г	д	е	в	г	д

Варианты схем закреплений троса и приложения внешних нагрузок

№	Схема закрепления троса	Схема приложения момента пары сил M	Схема приложения сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2$
1			
2			
3			
4			
5			

6			
7			
8			
9			
10			

4.2 Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

Порядок решения задач

1. Выделите объект исследования - твёрдое тело, равновесие которого рассматривается в задаче.
2. Приложите к выделенному телу все активные (заданные) силы.
3. Выполните анализ наложенных связей. Примените аксиому освобождаемости от связей: мысленно освободите тело от связей, приложите соответствующие реакции связей.
4. Направьте оси координат. Начало координатных осей совместите с точкой, в которой пересекается наибольшее число линий действия неизвестных реакций (это те точки, в которых установлены сферические шарниры либо подпятники).
5. Составьте уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, из которых определите искомые величины. Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остаётся прежним).
6. Произведите проверку правильности решения посредством составления уравнения моментов относительно трёх новых взаимно перпендикулярных осей, при этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю суммы моментов подтвердит правильность решения задачи.

4.3 Примеры решения задач на тему: «Определение реакций опор пространственной конструкции»

Пример 1. Однородная прямоугольная пластина весом $P = 60$ Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и цилиндрического шарнира B (рис. 22). Пластина удерживается в горизонтальном положении тросом CE , наклоненному к горизонтальной плоскости под углом 30° . *Определите* натяжение троса и опорные реакции.

Решение.

1) Объектом исследования является пластина $ABCD$. Рассмотрим равновесие пластины $ABCD$.

2) Приложим к пластине заданную силу тяжести $\bar{P}$ в точке пересечения диагоналей пластины.

Из уравнения (6): $X_B = 0$.

Из уравнения (5): $T_z = P/2 = 60/2 = 30\text{Н}$.

Отсюда: $T = T_z/\sin 30^\circ = 30/0,5 = 60\text{Н}$; $T_x = 25,98\text{Н}$; $T_y = 45\text{Н}$.

Из уравнения (1): $X_A = T_x - X_B = 25,98\text{Н}$.

Из уравнения (2): $Y_A = T_y = 45\text{Н}$.

Из уравнения (4): $Z_B = P/2 - T_z = 30 - 30 = 0$.

Из уравнения (3): $Z_A = P - T_z - Z_B = 60 - 30 - 0 = 30\text{Н}$.

Проверка:

Уравнение моментов относительно оси x_1 :

$$\begin{aligned}\sum m_{x1}(\vec{F}_k) &= 0; & -Z_A \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB/2 + T_z \cdot AB/2 &= 0; \\ -30 + 0 + 30 &= 0; & 0 &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение моментов относительно оси y_1 :

$$\begin{aligned}\sum m_{y1}(\vec{F}_k) &= 0; & (Z_A + Z_B) \cdot BC - P \cdot BC/2 &= 0; \\ (30 + 0) - 60/2 &= 0; & 0 &= 0.\end{aligned}$$

Уравнение моментов относительно оси z_1 :

$$\begin{aligned}\sum m_{z1}(\vec{F}_k) &= 0; & X_A \cdot AB - Y_A \cdot BC &= 0; \\ 25,98 \cdot AB - 45 \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} &= 0; & 0 &= 0.\end{aligned}$$

Проверка сошлась.

Ответ: $X_B = 0\text{Н}$; $Z_B = 0\text{Н}$; $T = 60\text{Н}$; $X_A = 25,98\text{Н}$; $Y_A = 45\text{Н}$; $Z_A = 30\text{Н}$.

Пример 2. Две однородные прямоугольные плиты жёстко соединены под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром в точке B , невесомым стержнем 1 (рис. 23). Размеры плит указаны на рисунке. *Определите* реакции связей, если известно, что веса плит равны $P_1 = 5\text{ кН}$; $P_2 = 3\text{ кН}$; момент пары сил равен $M = 4\text{ кНм}$; $a = 0,6\text{ м}$; модули заданных сил $F_3 = 10\text{ кН}$; $F_4 = 12\text{ кН}$; $\alpha_3 = 60^\circ$, силы $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ приложены к серединам стороны плиты.

Решение.

1) Объектом исследования является пространственная конструкция, состоящая из двух однородных прямоугольных плит, жёстко соединённых между собой под прямым углом друг к другу. Рассмотрим равновесие пространственной конструкции, состоящей из двух плит (рис. 23).

2) На рассматриваемую пространственную конструкцию действуют заданные силы $\vec{F}_3, \vec{F}_4$, пара сил с моментом M , силы тяжести обеих плит (сила тяжести плиты приложена в её геометрическом центре, т.е. в точке пересечения её диагоналей).

3) Выполним анализ наложенных связей: A – сферический шарнир, B – цилиндрический шарнир (подшипник), 1 – стержень. Реакцию сферического шарнира A разложим на три составляющие $\{\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A\}$, цилиндрического

(подшипника) – на две составляющие $\{ \vec{Y}_B, \vec{Z}_B \}$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\vec{R}_1$ стержня 1 направим вдоль стержня 1 (считаем, что он сжат).

4) Для определения шести неизвестных реакций $\{ X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_1 \}$ составим шесть уравнений равновесия действующей на плиту произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \quad X_A = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad Y_A + Y_B + F_3 \cdot \cos 60^\circ - F_4 = 0; \\ \sum F_{kz} &= 0; \quad Z_A + Z_B - F_3 \cdot \sin 60^\circ - P_1 - P_2 + R_1 = 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad -R_1 \cdot 3 \cdot a + F_4 \cdot a + P_1 \cdot \frac{3 \cdot a}{2} + F_3 \cdot \frac{3 \cdot a}{2} \cdot \sin 60^\circ - F_3 \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 0; \\ \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0; \quad -R_1 \cdot 2 \cdot a + F_3 \cdot 2 \cdot a \cdot \sin 60^\circ + P_1 \cdot a - Z_A \cdot 2 \cdot a - M + P_2 \cdot a = 0; \\ \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0; \quad -F_4 \cdot a + F_3 \cdot 2 \cdot a \cdot \cos 60^\circ + Y_A \cdot 2 \cdot a = 0. \end{aligned}$$

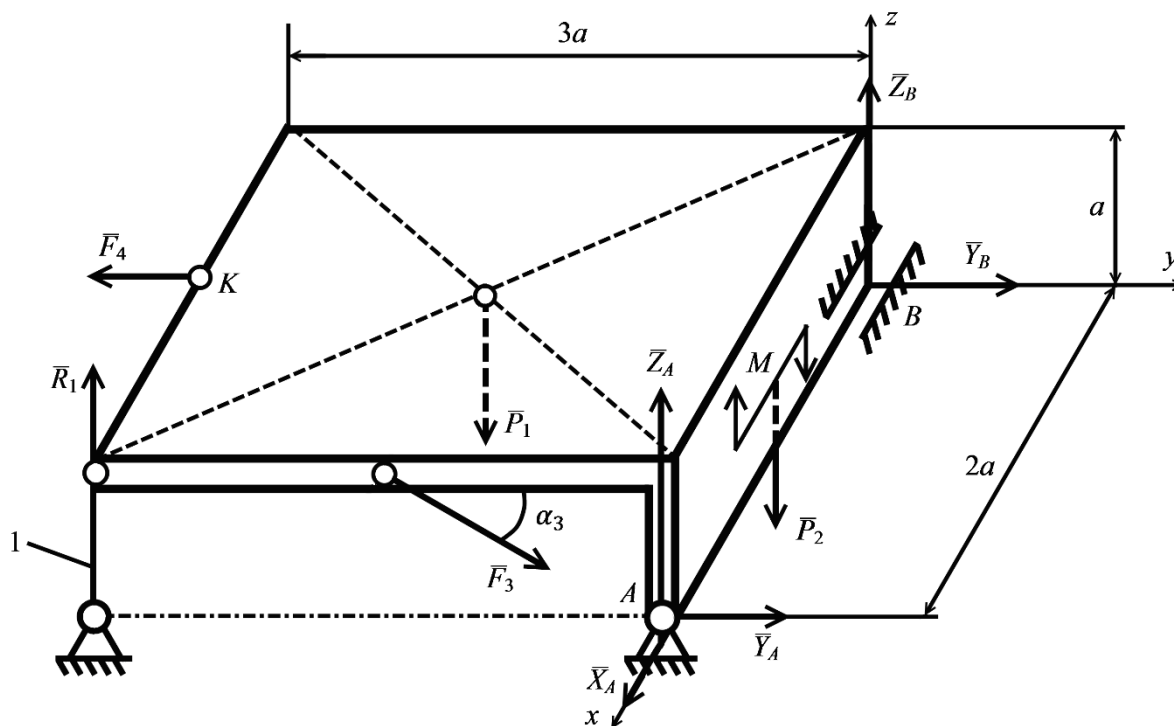


Рис. 23. Расчётная схема

5) Подставим числовые значения всех заданных величин и, решив полученную систему уравнений, найдем искомые реакции:

$$X_A = 0 \text{ кН}; \quad Y_A = 1 \text{ кН}; \quad Z_A = 0,225 \text{ кН};$$

$$Y_B = 6 \text{ кН}; \quad Z_B = 7,335 \text{ кН};$$

$$R_1 = 9,1 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_1 = 9,1 \text{ кН}; X_A = 0 \text{ кН}; Y_A = 1 \text{ кН}; Z_A = 0,225 \text{ кН}; Y_B = 6 \text{ кН}; Z_B = 7,335$

5 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

5.1 Задания по теме: «Центр тяжести»

5.1.1 Задания ЦТ-1 (1 – 30)

Условие задачи: Определите координаты центра тяжести для следующих случаев:

а) плоской фигуры, состоящей из n однородных стержней; размеры показаны в метрах (варианты 1-12);

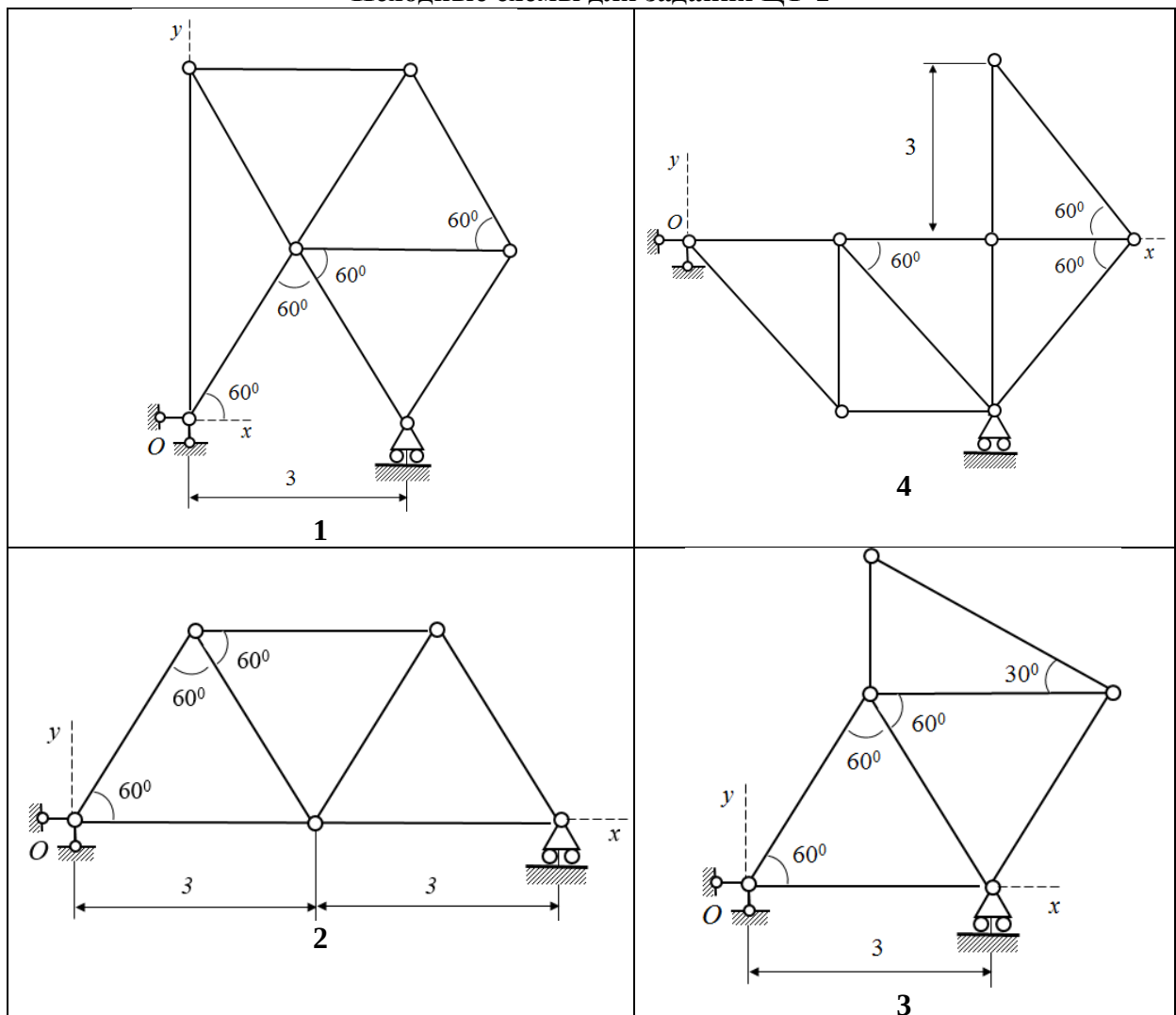
б) координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из n однородных стержней; при расчётах принимаем размеры $a=10$ см, $b=12$ см, $c=8$ см (варианты 13-24);

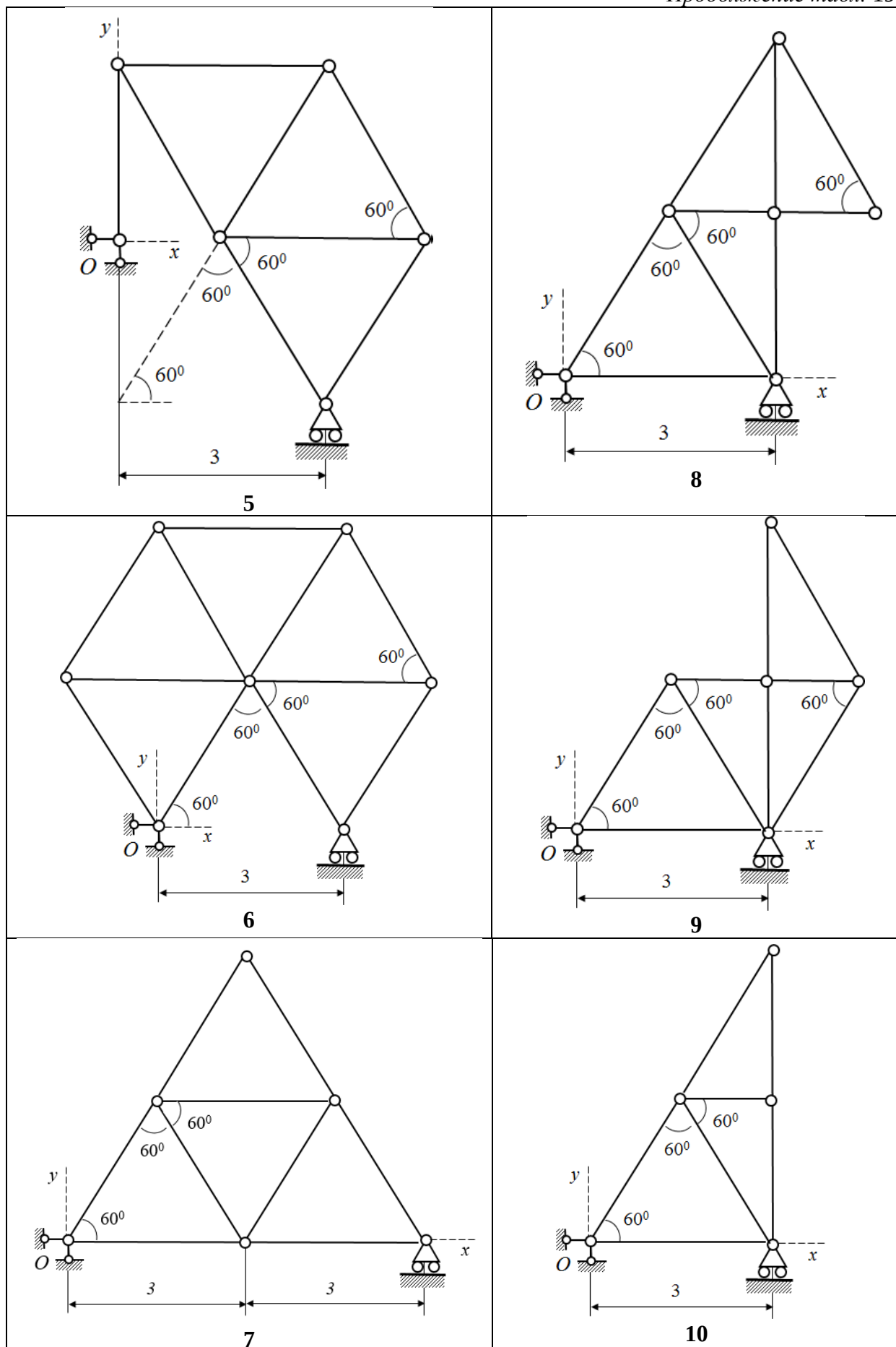
в) однородного плоского составного сечения; размеры показаны в миллиметрах (варианты 25-36);

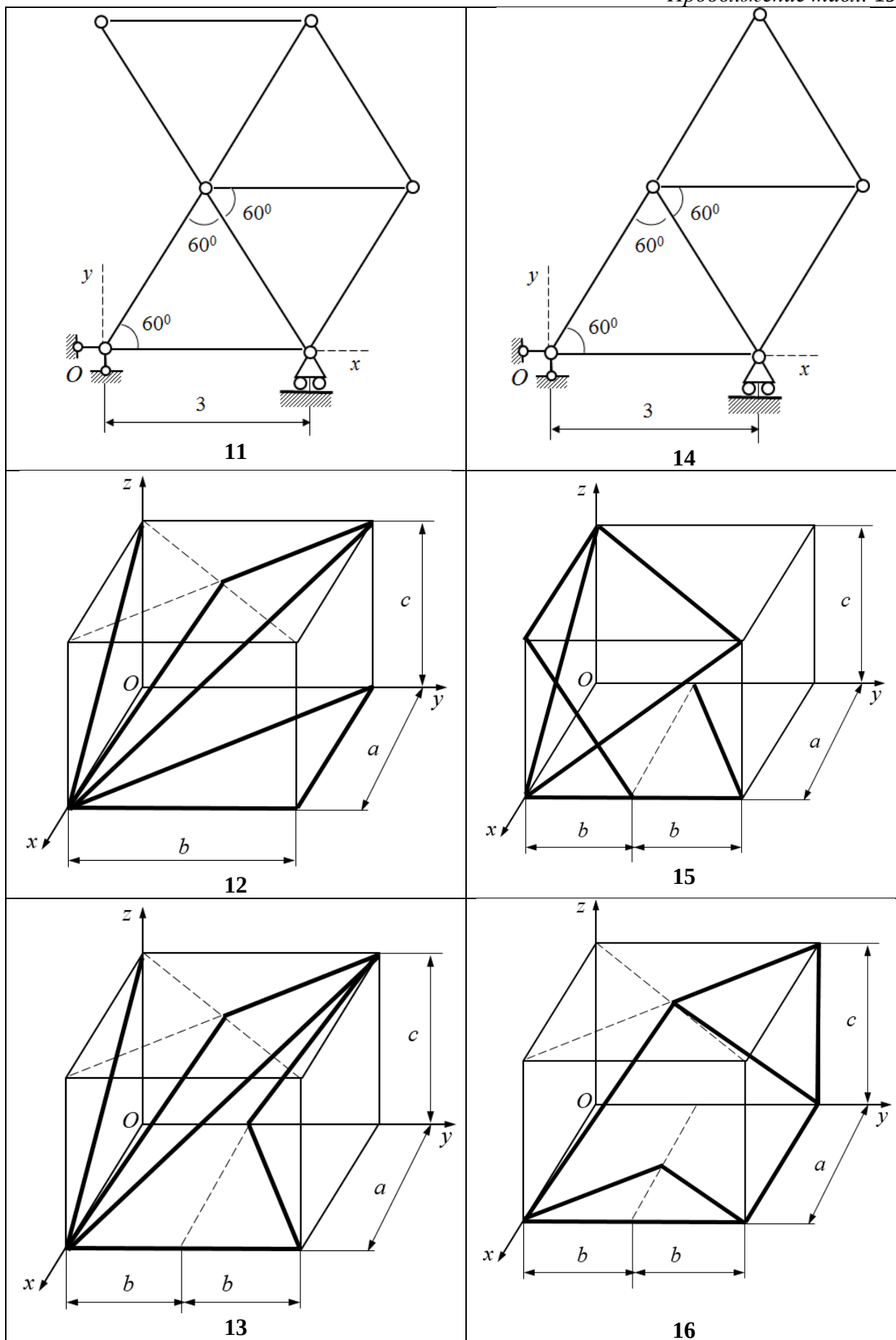
д) однородного объёмного твёрдого тела; размеры показаны в миллиметрах (варианты 37-48).

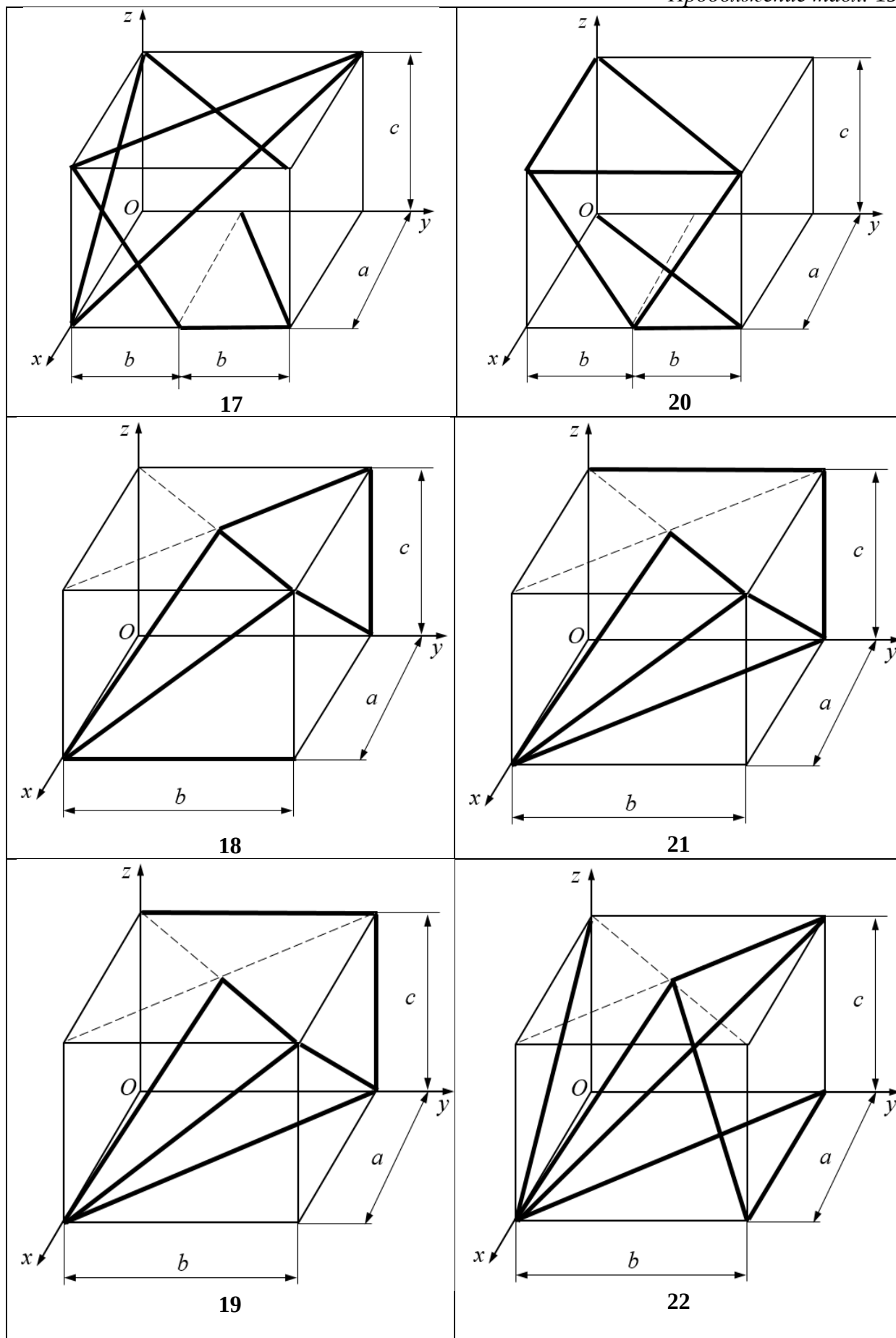
Таблица 19

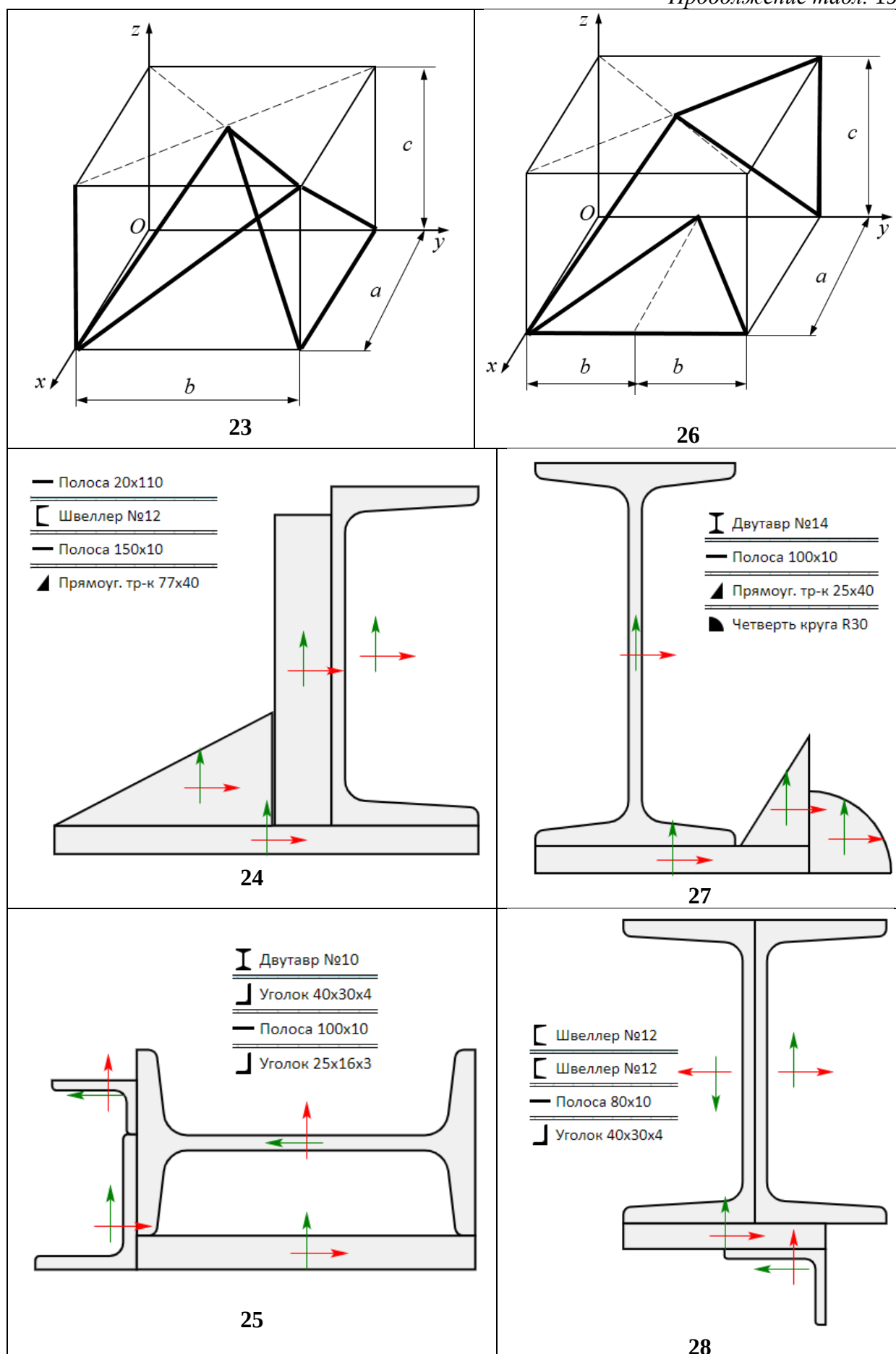
Исходные схемы для задания ЦТ-1

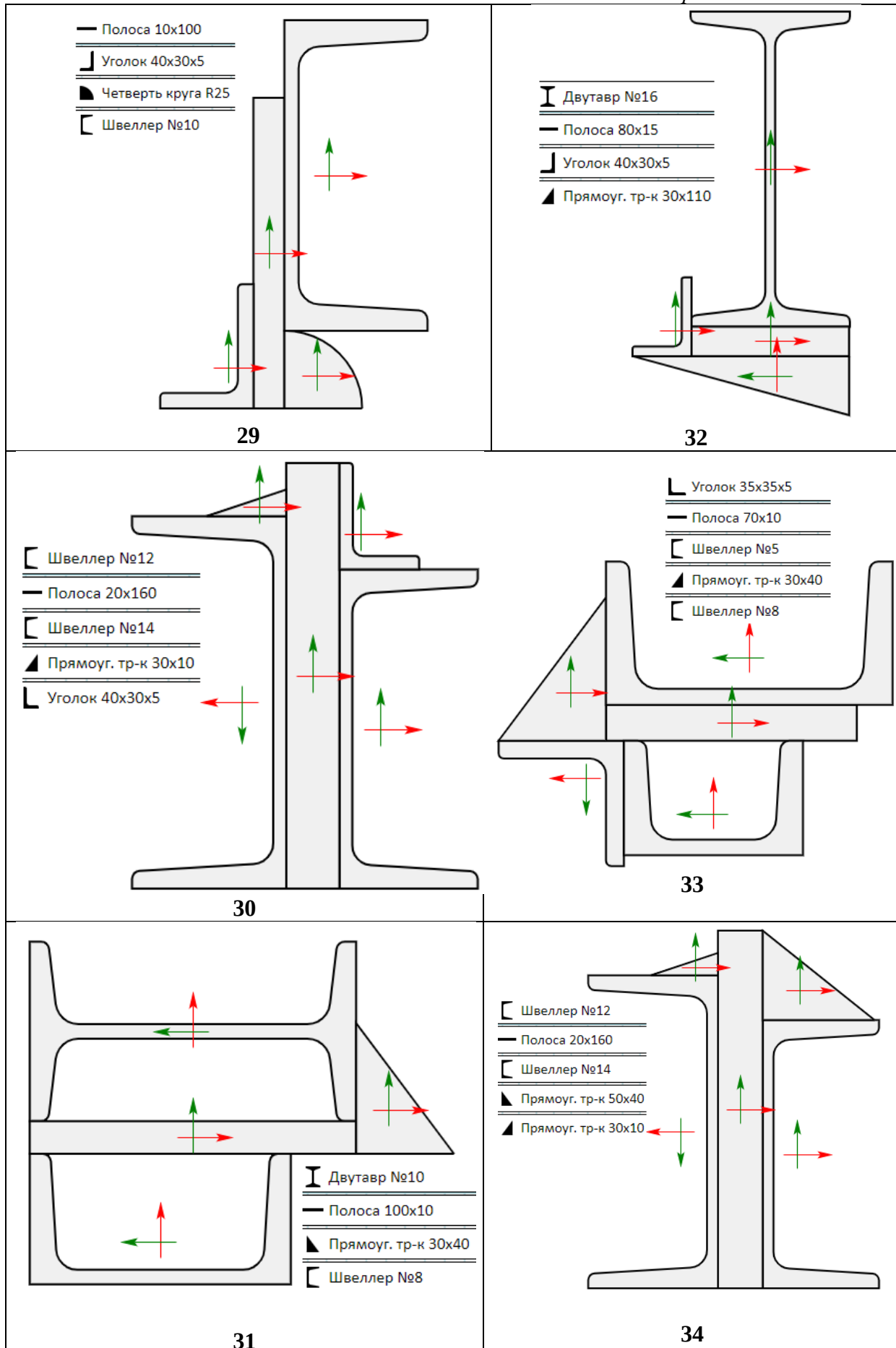


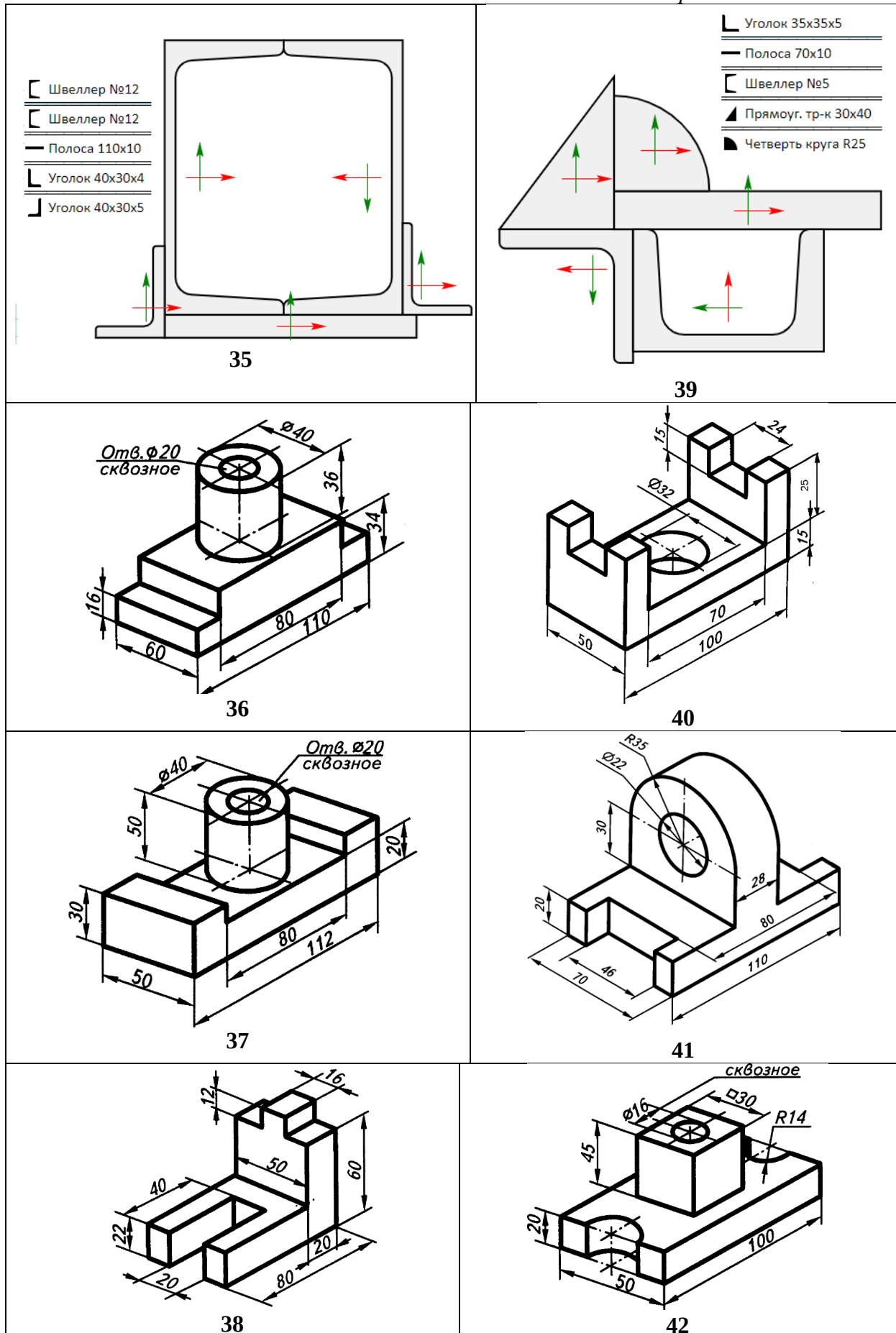


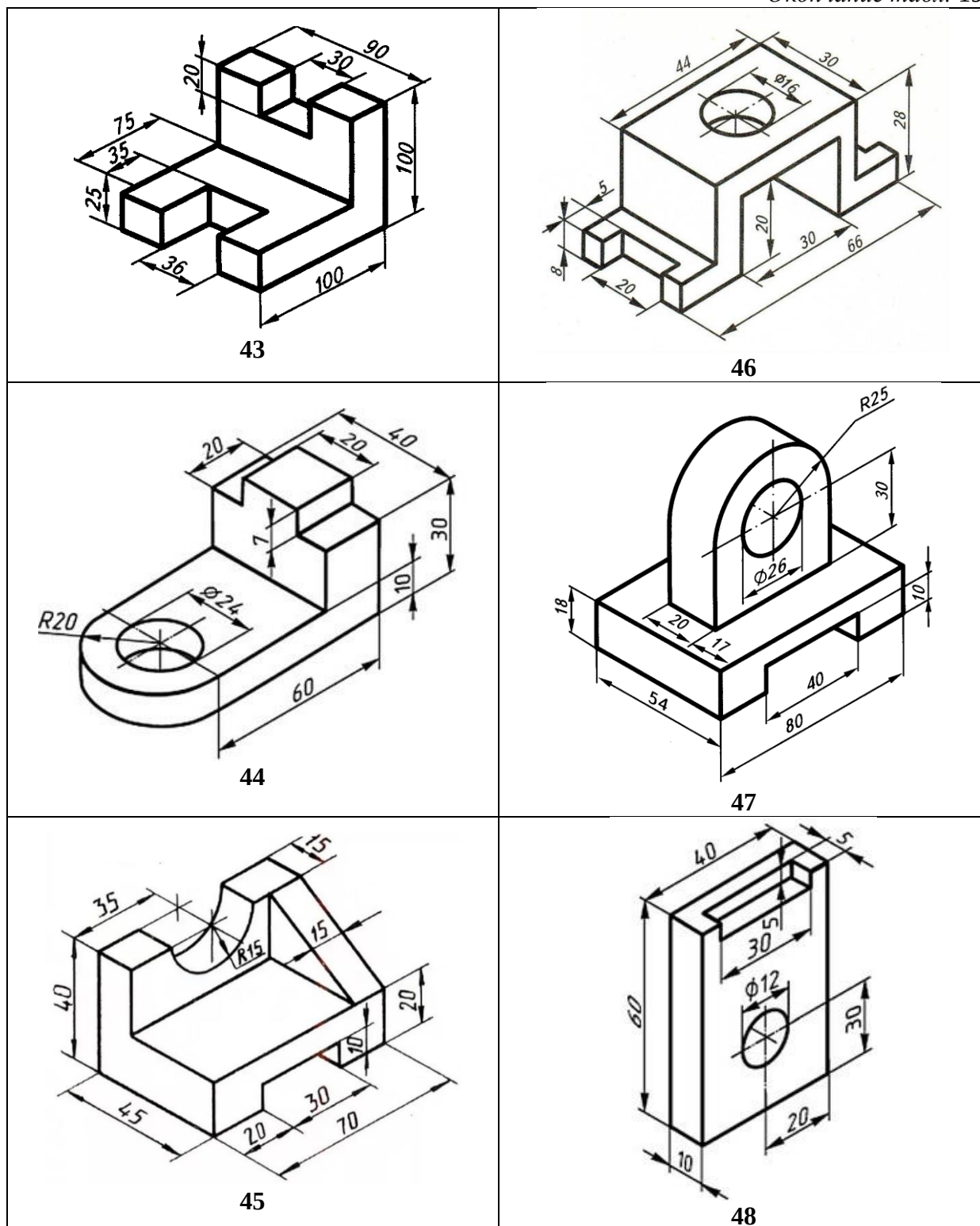












5.2 Методические указания к решению задач по определению положения центров тяжести однородных тел

При решении задач на определение центра тяжести однородных тел сложной формы следует придерживаться следующего порядка:

1. Выберите метод, который наиболее применим к данной задаче (метод разбиения или метод дополнения).
2. Разбейте сложное тело на простые элементы, для которых центры тяжести известны.
3. Выберите оси координат. При этом необходимо помнить, что если тело имеет плоскость симметрии, то его центр тяжести лежит в этой плоскости; если тело имеет ось симметрии, то его центр тяжести лежит на этой оси; если тело имеет центр симметрии, то его центр тяжести совпадает с центром симметрии.
4. Определите координаты центров тяжести отдельных простых тел относительно выбранных осей.
5. Используя формулы, соответствующие выбранному методу, определите искомые координаты центра тяжести заданного тела.
6. Выполните проверку правильности решения: центр тяжести фигуры, составленной из двух частей, находится на линии, соединяющей центры тяжести простых фигур, её составляющих, при этом расстояния до них обратно пропорциональны площадям простых фигур. Если сложная фигура составлена из нескольких простых, то общий центр тяжести находится внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести простых фигур.

5.3 Примеры решения задач на тему: «Центр тяжести»

Пример 1. Пространственная стержневая система. Определите координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из n однородных стержней (рис. 1924).

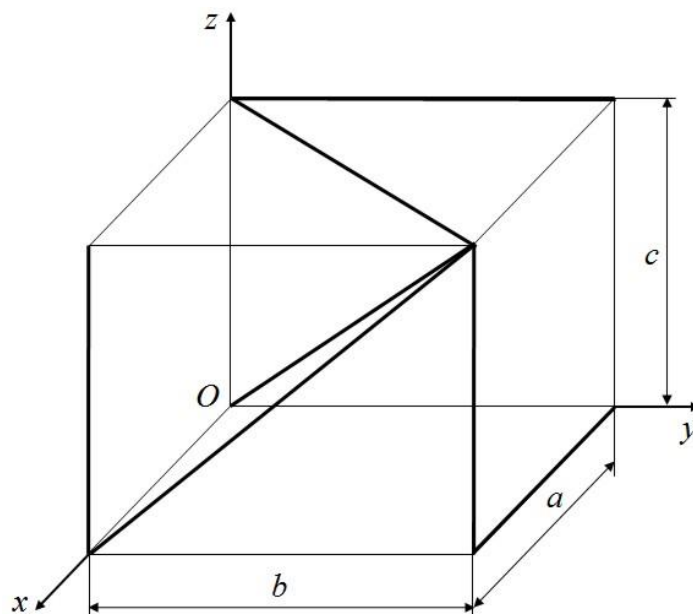


Рис. 24. Заданная пространственная стержневая система

Решение. Разобьём заданную пространственную стержневую систему на отдельные стержни (в данном примере – 7 стержней, см. рис. 25).

Выбираем систему координат $Oxyz$.

Вычисляем длины l_i и координаты x_{Ci} , y_{Ci} , z_{Ci} , $i=1..n$ центров тяжести отдельных стержней по формулам:

$$l_i = \sqrt{(x_{ki} - x_{ni})^2 + (y_{ki} - y_{ni})^2 + (z_{ki} - z_{ni})^2},$$

$$x_{Ci} = \frac{x_{ni} + x_{ki}}{2}, \quad y_{Ci} = \frac{y_{ni} + y_{ki}}{2}, \quad z_{Ci} = \frac{z_{ni} + z_{ki}}{2},$$

где x_{ni} , y_{ni} , z_{ni} , x_{ki} , y_{ki} , z_{ki} – соответственно координаты начала и окончания i -го стержня.

Произведём вычисления, приняв следующие исходные данные:

$$a = 4 \text{ см}, b = 10 \text{ см}, c = 6 \text{ см}.$$

Находим длину каждого стержня (см. табл. 20) и общую длину стержней системы:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i = 60,761 \text{ (см)}.$$

Промежуточные результаты расчётов запишем в табл. 20.

Таблица 20

Результаты расчёта

i	l_i , см	x_{Ci} , см	y_{Ci} , см	z_{Ci} , см
1	$l_1 = c;$ $l_1 = 6$	$x_{C1} = a;$ $x_{C1} = 4$	$y_{C1} = 0;$	$z_{C1} = c/2;$ $z_{C1} = 3$
2	$l_2 = \sqrt{b^2 + c^2};$ $l_2 = 11.662$	$x_{C2} = a;$ $x_{C2} = 4$	$y_{C2} = b/2;$ $y_{C2} = 5$	$z_{C2} = c/2;$ $z_{C2} = 3$
3	$l_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$ $l_3 = 12.329$	$x_{C3} = a/2;$ $x_{C3} = 2$	$y_{C3} = b/2;$ $y_{C3} = 5$	$z_{C3} = c/2;$ $z_{C3} = 3$
4	$l_4 = \sqrt{a^2 + b^2};$ $l_4 = 10.770$	$x_{C4} = a/2;$ $x_{C4} = 2$	$y_{C4} = b/2;$ $y_{C4} = 5$	$z_{C4} = c;$ $z_{C4} = 6$
5	$l_5 = b;$ $l_5 = 10$	$x_{C5} = 0;$	$y_{C5} = b/2;$ $y_{C5} = 5$	$z_{C5} = c;$ $z_{C5} = 6$
6	$l_6 = c;$ $l_6 = 6$	$x_{C6} = a;$ $x_{C6} = 4$	$y_{C6} = b;$ $y_{C6} = 10$	$z_{C6} = c/2;$ $z_{C6} = 3$
7	$l_7 = a;$ $l_7 = 4$	$x_{C7} = a/2;$ $x_{C7} = 2$	$y_{C7} = b;$ $y_{C7} = 10$	$z_{C7} = 0$

Определяем координаты центра тяжести системы по формулам

$$x_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i x_{Ci} = 2,449 \text{ (см)}, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i y_{Ci} = 5,329 \text{ (см)}, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i z_{Ci} = 3,828 \text{ (см)}.$$

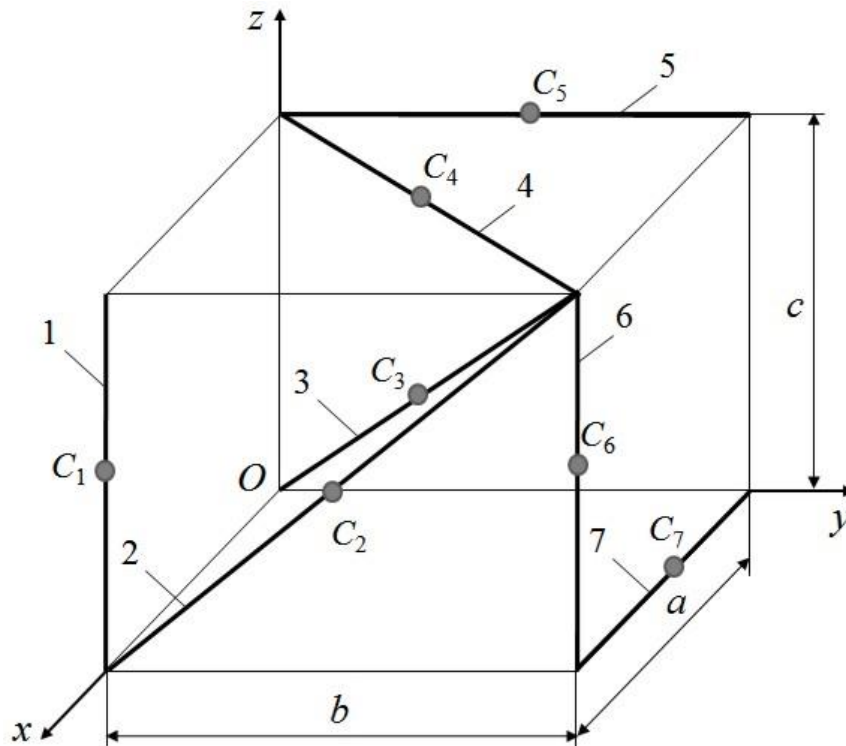
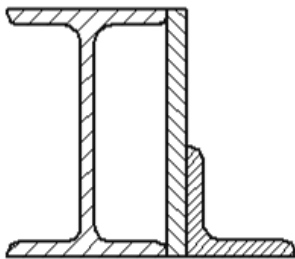


Рис. 25. Расчётная схема

Ответ: $x_C = 2,449$ (см), $y_C = 5,329$ (см), $z_C = 3,828$ (см).

Пример 2. Центр тяжести плоского составного сечения.



Для заданного плоского составного сечения колонны или балки *определите* положение центра тяжести.

Сечение состоит из равнобокого уголка размерами 140x140x12 (мм), двутавра №12, швеллера №36, прямоугольного листа толщиной $b=12$ мм.

Решение.

Сечение состоит из прямоугольника 2, уголка 1 и двутавра 3. Для определения координат центра тяжести сечения воспользуемся методом разбиения на части. Проведём через точку O сечения оси Ox и Oy .

Площадь сечения представляет сумму площадей тел 1, 2 и 3:

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 - площади фигур 1, 2 и 3:

$$S_1 = 32,5 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_2 = 12 \cdot 1,2 = 14,4 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_3 = 14,7 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S = 61,6 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Абсциссы и ординаты центров тяжести фигур:

$$x_{C1} = 11,5 \text{ (см)}, \quad y_{C1} = 3,9 \text{ (см)},$$

$$x_{C2} = 7 \text{ (см)}, \quad y_{C2} = 6 \text{ (см)},$$

$$x_{C3} = 3,2 \text{ (см)}, \quad y_{C3} = 6 \text{ (см)}.$$

Тогда абсцисса центра тяжести плоской пластины будет равна:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S};$$

$$x_c = \frac{32,5 \cdot 11,5 + 14,4 \cdot 7 + 14,7 \cdot 3,2}{61,6} = 8,47 \text{ (см)}.$$

Аналогично находим ординату центра тяжести данной пластины:

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S};$$

$$y_c = \frac{32,5 \cdot 3,9 + 14,4 \cdot 6 + 14,7 \cdot 6}{61,6} = 4,89 \text{ (см)}.$$

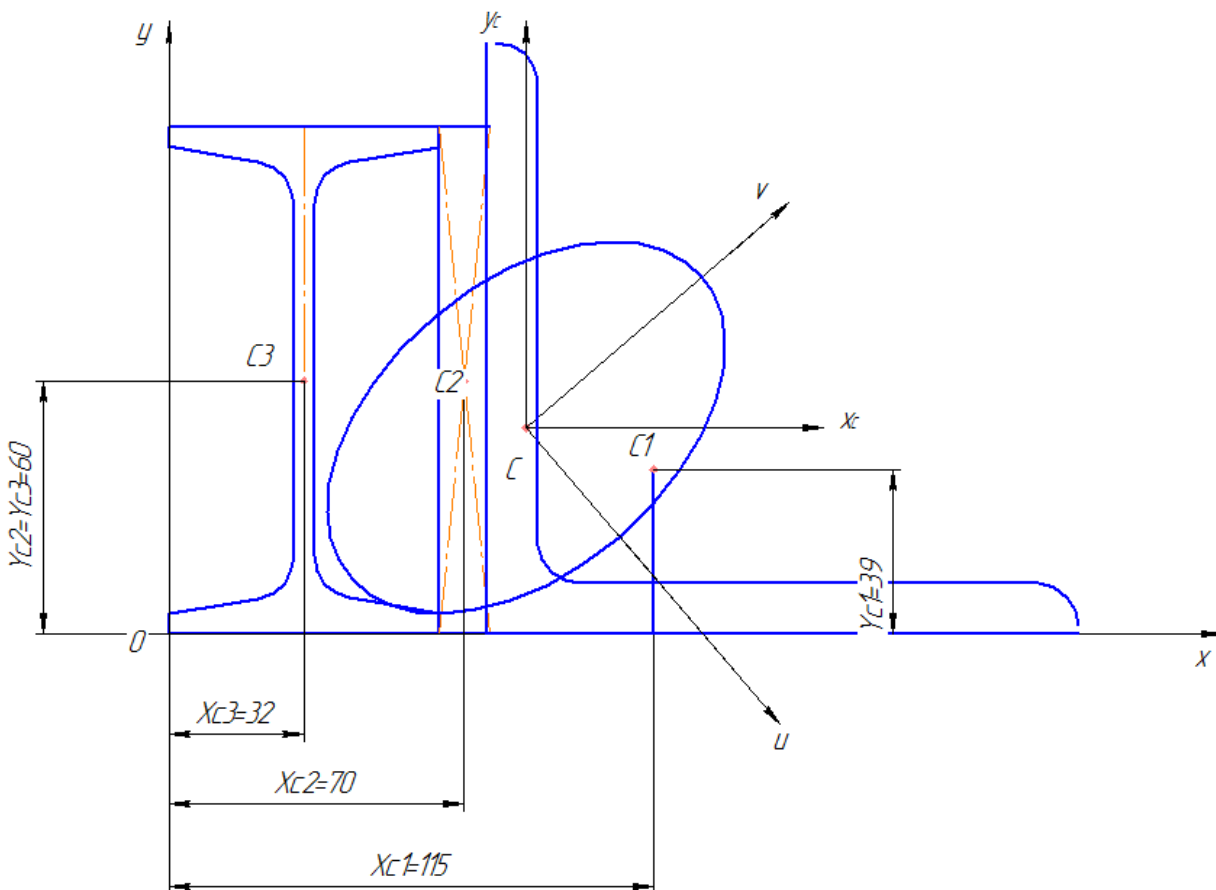


Рис. 26. Иллюстрация к примеру 2

Пример 3. Центр тяжести объёмного тела. Определите положение центра тяжести тела, форма и размеры которого показаны на рис. 27 (размеры показаны в миллиметрах).

Решение. Тело состоит из прямоугольного параллелепипеда I с центром тяжести C_1 , цилиндра II (C_2) и цилиндра III (C_3), объём которого считаем отрицательным.

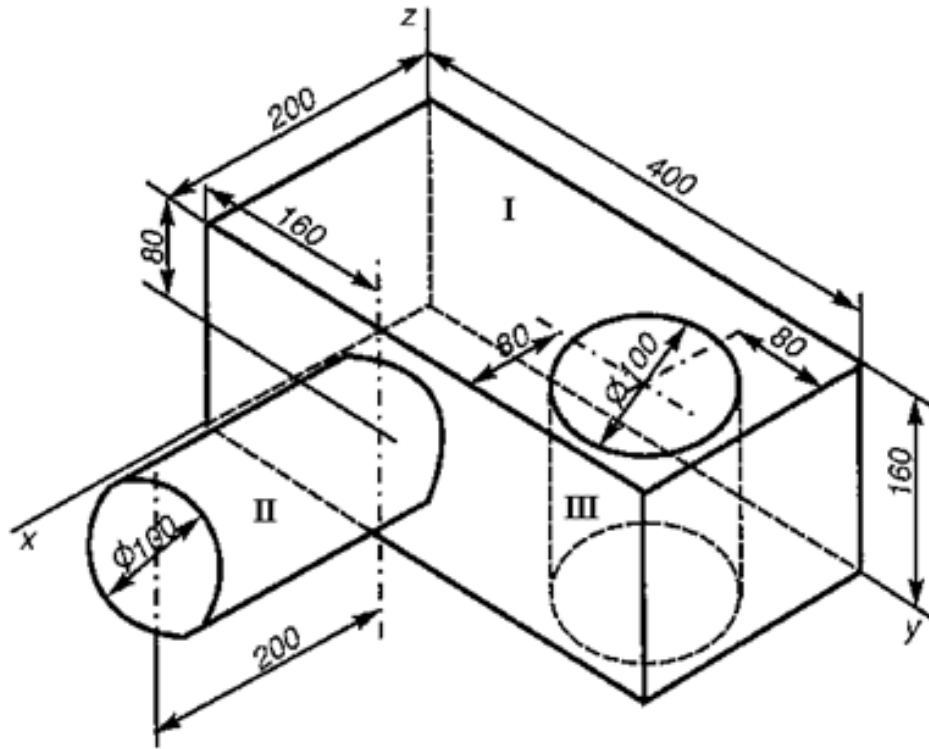


Рис. 27. Иллюстрация к примеру 3

Найдём объёмы составных частей и координаты x_k , y_k , z_k их центров тяжести (в см):

$$V_1 = 20 \cdot 40 \cdot 16 = 12800 \text{ (см}^3\text{)}; C_1(10; 20; 8);$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 20 = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 20 = 1570 \text{ (см}^3\text{)}; C_2(30; 16; 8);$$

$$V_3 = -\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 16 = -\frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 16 = -1256 \text{ (см}^3\text{)}; C_3(12; 32; 8).$$

Определим координаты центра тяжести тела:

$$x_C = \Sigma V_k x_k / \Sigma V_k = (12800 \cdot 10 + 1570 \cdot 30 - 1256 \cdot 12) / (12800 + 1570 - 1256) \approx 12,2(\text{см}) \approx 122(\text{мм});$$

$$y_C = \Sigma V_k y_k / \Sigma V_k = (12800 \cdot 20 + 1570 \cdot 16 - 1256 \cdot 32) / (12800 + 1570 - 1256) \approx 18,3(\text{см}) \approx 183(\text{мм});$$

$$z_C = \Sigma V_k z_k / \Sigma V_k = (12800 \cdot 8 + 1570 \cdot 8 - 1256 \cdot 8) / (12800 + 1570 - 1256) \approx 8(\text{см}) \approx 80(\text{мм}).$$

Ответ: центр тяжести объёмного твёрдого тела находится в точке $C(122; 183; 80)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый авторами практикум посвящён решению разнообразных задач статики курса теоретической механики – расчётам ферм, плоских твёрдых тел, составных конструкций, пространственных механических систем, а также определению центров тяжести плоских, стержневых и объёмных фигур.

Приведены новые многовариантные задания разного уровня сложности для самостоятельного выполнения. Для каждой задачи даны методические рекомендации по её решению, порядок выполнения основных действий. Подробно рассмотрены различные типы задач статики, начиная от общей постановки до визуализации полученных результатов. По каждой теме приведены примеры решения типовых задач, выполнен анализ полученных результатов с проверкой правильности решения, сделаны выводы.

Практикум рекомендован для студентов университетов, технических и строительных вузов, изучающих курс теоретической механики (раздел «Статика»), магистрантов, аспирантов, преподавателей.

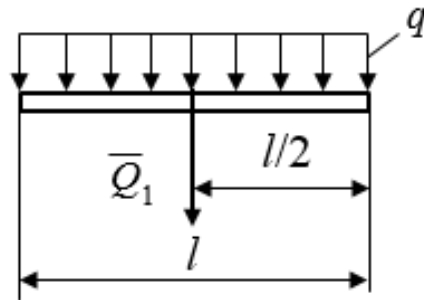
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Частные случаи эквивалентного преобразования распределённой нагрузки

1. Равномерно распределённая нагрузка ($q(x) = \text{const} = q$).

$$Q = \int_0^l q(x) \cdot dx = q \cdot \int_0^l dx = q \cdot l ;$$

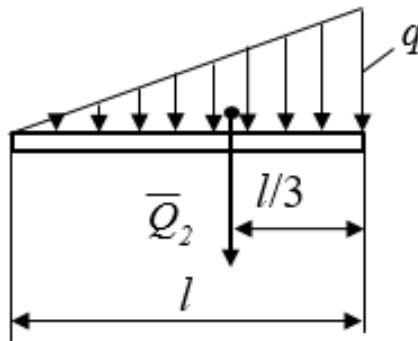
$$x_C = \frac{1}{Q} \cdot \int_0^l x \cdot q(x) \cdot dx = \frac{q}{Q} \cdot \int_0^l x \cdot dx = \frac{l}{2} .$$



2. Линейно распределённая нагрузка ($q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$).

$$Q = \int_0^l q(x) \cdot dx = \frac{q}{l} \cdot \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l ;$$

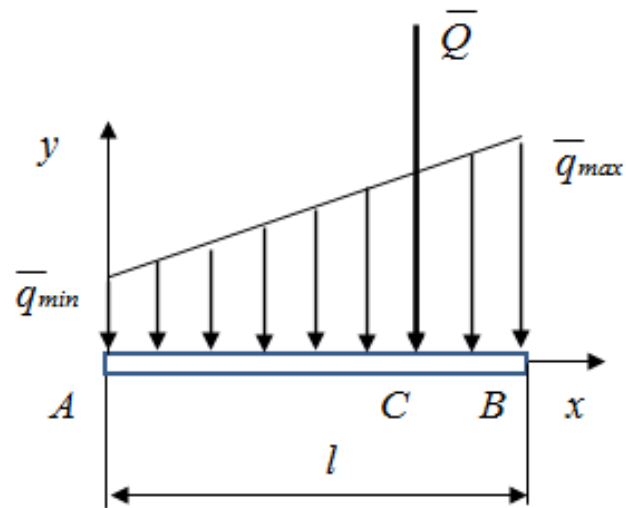
$$x_C = \frac{1}{Q} \cdot \int_0^l x \cdot q(x) \cdot dx = \frac{2}{q \cdot l} \cdot \int_0^l x \cdot \frac{q \cdot x}{l} \cdot dx = \frac{2}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot l .$$



3. Распределение с линейно распределяющейся интенсивностью (трапеция) ($q(x) = q_{\min} + \frac{q_{\max} - q_{\min}}{l} \cdot x$).

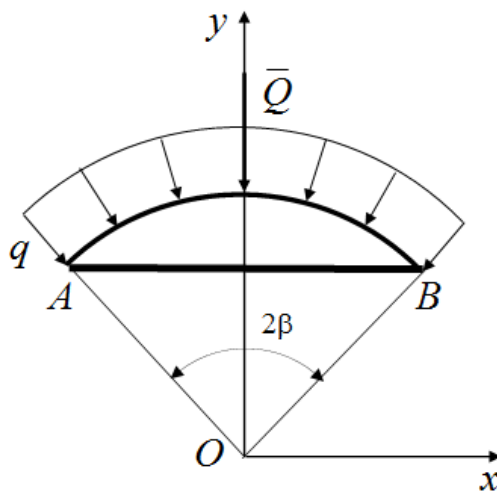
$$Q = \frac{1}{2} \cdot (q_{\max} + q_{\min}) \cdot l ,$$

$$x_C = AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2 \cdot q_{\max} + q_{\min})}{(q_{\max} + q_{\min})} \cdot l .$$

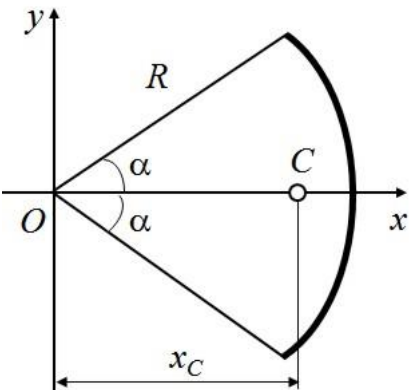
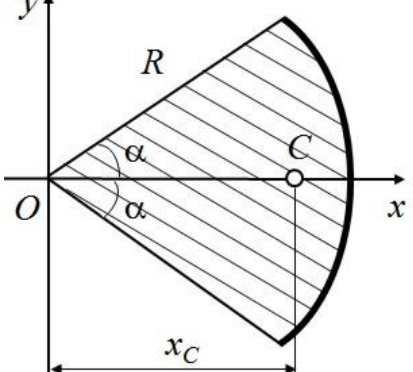
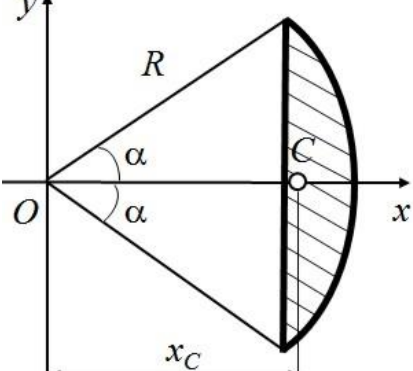
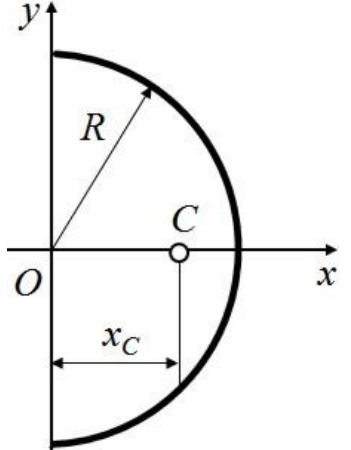


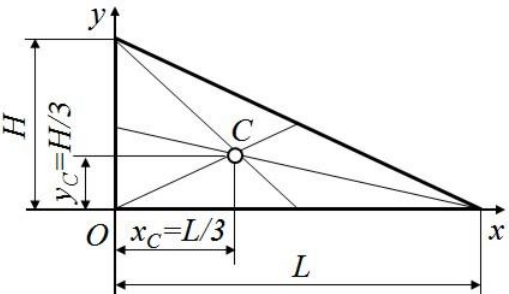
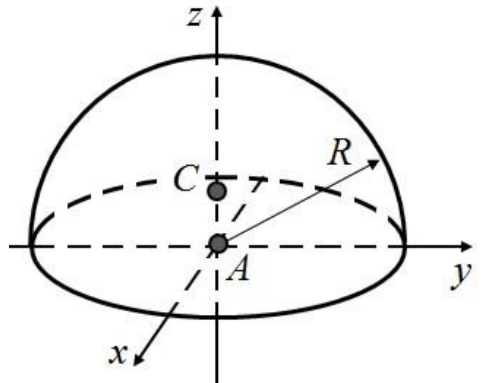
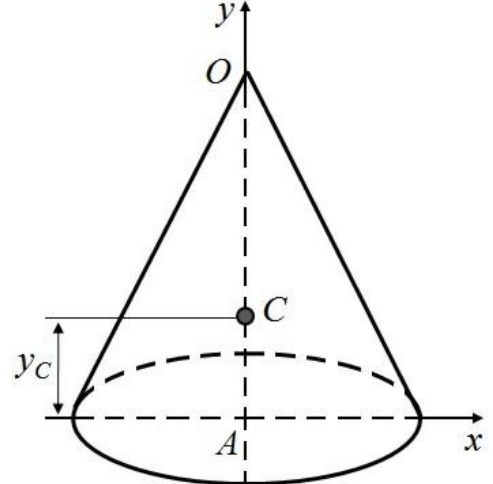
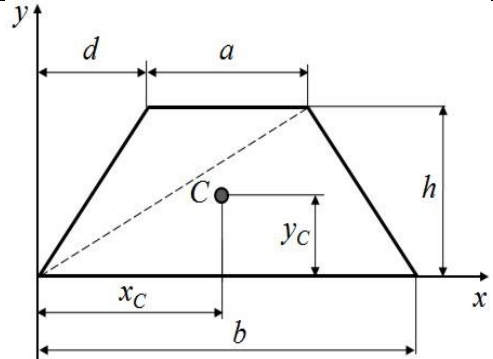
4. Нагрузка, равномерно распределённая по дуге окружности. Модуль равнодействующей равен произведению интенсивности на длину хорды AB , стягивающей дугу $\overset{\frown}{AB}$:

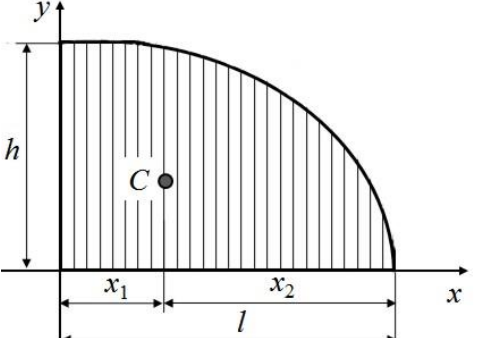
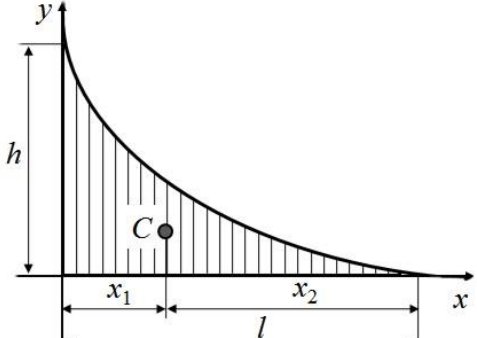
$$Q = q \cdot AB, \text{ или } Q = q \cdot 2 \cdot AO \cdot \sin\left(\frac{AB}{2 \cdot AO}\right).$$



Приложение 2. Координаты центра тяжести однородных тел

№	Наименование фигуры	Рисунок
1	<i>Дуга окружности:</i> центр тяжести дуги однородной окружности находится на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$ $y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	
2	<i>Однородный круговой сектор:</i> центр тяжести расположен на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$ $y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	
3	<i>Сегмент:</i> центр тяжести расположен на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha},$ $y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	
4	<i>Полукруг:</i> $x_C = OC = \frac{4R}{3\pi}.$	

№	Наименование фигуры	Рисунок
5	<i>Треугольник:</i> центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан. $x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$ $y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координаты вершин треугольника	
6	<i>Полусфера:</i> центр тяжести лежит на оси симметрии. $z_C = AC = \frac{3R}{8}.$	
7	<i>Конус:</i> центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его высоте и отстоит на расстояние 1/4 высоты от основания конуса. $y_C = AC = \frac{OA}{4}.$	
8	<i>Трапеция:</i> $x_C = \frac{(a+2d) \cdot a + (a+b+d) \cdot b}{3 \cdot (a+b)},$ $y_C = \frac{2a+b}{3(a+b)} h,$ $S = \frac{a+b}{2} h \text{ - площадь фигуры.}$	

№	Наименование фигуры	Рисунок
9	$S = \frac{2}{3}lh - \text{площадь фигуры};$ $x_1 = \frac{1}{4}l; \quad x_2 = \frac{5}{8}l.$	 The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A curve starts at (0, h) and ends at (l, 0). The area under the curve is shaded with vertical lines. A vertical line is drawn at x1, and the area to the right of this line is shaded with a different pattern. The center of mass C is marked at x2.
10	$S = \frac{1}{4}lh - \text{площадь фигуры};$ $x_1 = \frac{1}{5}l, \quad x_2 = \frac{4}{5}l.$	 The diagram shows a coordinate system with x and y axes. A curve starts at (0, h) and ends at (l, 0). The area under the curve is shaded with vertical lines. A vertical line is drawn at x1, and the area to the right of this line is shaded with a different pattern. The center of mass C is marked at x2.

Приложение 3. Пример оформления титульного листа

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика и инженерная графика»

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № ____

Часть ____

по теоретической механике на тему:

«_____»

Вариант № ____

Выполнил: студент гр. _____

Фамилия И.О.

Проверил: _____

Фамилия И.О.

Астрахань, 202_ г.

Синельщиков, А. В. Практикум. Теоретическая механика. Статика / А.В. Синельщиков, Е.В. Пономарёва, О.А. Хохлова, Н.Н. Корнеева. – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2021. – 156 с.

© Синельщиков А.В., 2021

© Пономарёва Е.В., 2021

© Хохлова О.А., 2021

© Корнеева Н.Н., 2021