Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
Система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и инноваций сертифицирована DQSпо международному стандарту ISO 9001:2015

Институт морских технологий, энергетики и транспорта

Кафедра «Механика и инженерная графика»

МЕХАНИКА. КУРС ЛЕКЦИЙ.
РАЗДЕЛ 1. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

для студентов направления

13.03.012 Теплоэнергетика и теплотехника

Астрахань 2021

УДК 531.8

Хахов А.А.
Механика. Курс лекций. Раздел 1. Сопротивление материалов. Для студентов направления 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника. – Астрахань: АГТУ, 2021. – 58с.

Пособие предназначено для студентов направления 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника при подготовке к аттестации по курсу «Механика».

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «Астраханский государственный технический университет»
Протокол заседания кафедры № 7 от 30.08.2021г.

Рецензент: Славин Б.М., заведующий кафедрой «Механика и инженерная графика», к. т. н., доцент.

© Хахов А.А., 2021
© Астраханский государственный технический университет, 2021

1 Общие сведения и основные понятия.

Основные характеристики и требования, предъявляемые к изделиям машиностроения. Критерии работоспособности.

Все современные конструкции, машины, приборы и сооружения изготавливают или строят по заранее разработанным проектам. В проекте указываются все размеры элементов конструкций и деталей машин, необходимых для изготовления, их материалы, а также описание технологии. В процессе проектирования определяются размеры деталей, входящих в состав машины, которые зависят от ряда условий и обстоятельств, в том числе от свойств материала изделия и от предполагаемых внешних воздействий.

Любая машина или конструкция должна обладать надежностью при эксплуатации и быть экономичной.

Экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет *прочность, жесткость и устойчивость* при гарантированной долговечности.

Прочность - это способность элемента конструкции сопротивляться *разрушению* при действии на нее внешних сил (нагрузок).

Жесткость - способность элемента конструкции сопротивляться *деформации*.

У*стойчивость* - свойство системы сохранять свое начальное *равновесное положение* при внешних воздействиях.

Долговечность конструкции состоит в ее способности сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение заранее предусмотренного отрезка времени.

Классификация внешних сил.

Внешние силы, действующие на элемент конструкции, подразделяются на 3 группы: сосредоточенные силы, распределенные силы и объемные или массовые силы.

Сосредоточенные силы — силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.).

Распределенные силы приложены к значительным участкам поверхности (например, давление пара в паропроводе, трубопроводе, котле, давление воздуха на крыло самолета и т.д.).

Объемные или массовые силы приложены каждой частице материала (например, силы тяжести, силы инерции).

Основные допущения.

Предполагается, что все материалы обладают такими свойствами, что могут считаться однородными, сплошными, изотропными, анизотропными, деформируемыми, упругими.

Однородными называются материалы, которые имеют одинаковые свойства во всех точках тела.

Сплошными называются материалы, у которых непрерывно заполнен отведенный им объем.

Изотропными называются материалы, которые обладают во всех направлениях одинаковыми свойствами.

Анизотропными называются материалы, свойства которых в разных направлениях различны.

Деформируемостью называется свойство тел изменять свои начальные размеры и форму под действием внешней нагрузки.

Упругостью называется свойство тел восстанавливать свои первоначальные форму и размеры после снятия нагрузки.

Помимо рассмотренных выше допущений вводится ряд гипотез, позволяющих значительно упростить расчет.

Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): результат совместного воздействия нескольких сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов воздействия каждой из них в отдельности.

Принцип Сен-Венана (принцип локальности): на достаточном удалении от места приложения нагрузки конкретный способ осуществления этой нагрузки можно не учитывать.

Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений): поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси при действии нагрузки.

Упрощения в геометрии реального объекта.

Все элементы конструкций, условно делятся на три типа: брус, пластину, оболочку.

Брусом называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести площадей поперечных сечений бруса, называется ***осью бруса***. Брус, работающий при растяжении, называется ***стержнем***, при изгибе – ***балкой,*** при кручении – ***валом.***

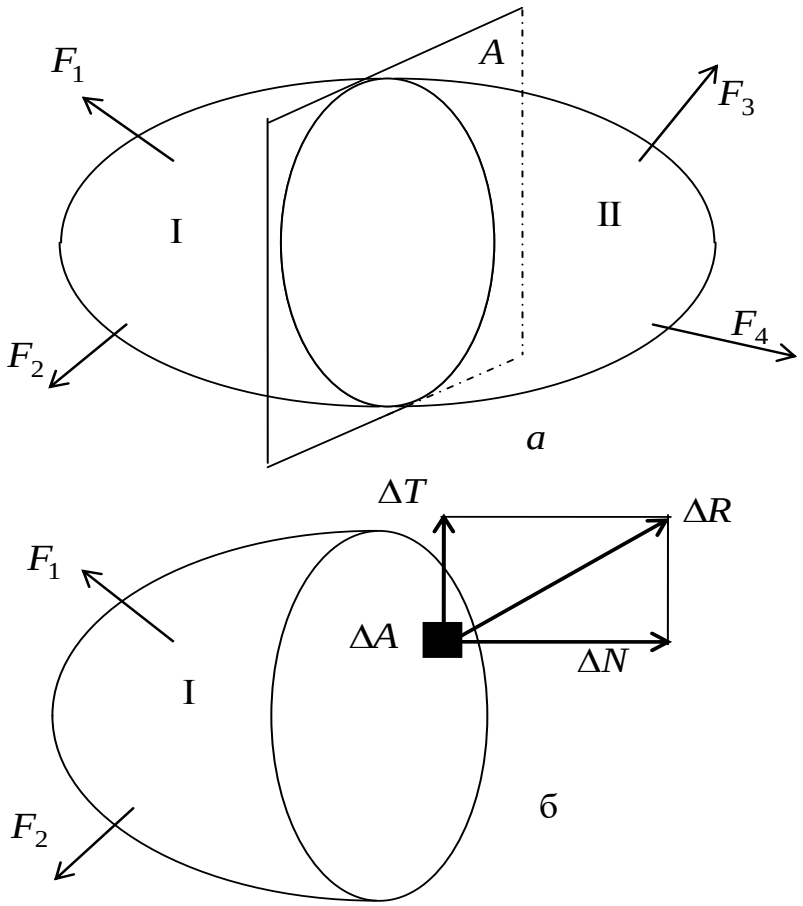


Рис. 1

Элемент конструкции, образованный двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на малое расстояние, называется ***оболочкой*.**
Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется ***пластиной*.**

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга, называется ***массивом.***

Внутренние силы. Метод сечений.

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы. Если к твердому телу (рис. 1,а) приложить внешние силы, то оно будет деформироваться. При этом изменяются расстояния между частицами тела, что в свою очередь приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия. Для определения внутренних усилий используют метод сечения. Для этого тело мысленно рассекают плоскостью и рассматривают равновесие одной из его частей (рис. 1,б). Метод сечений позволяет выявить внутренние силовые факторы, но для оценки прочности необходимо знать внутренние силы в любой точке сечения. С этой целью введем числовую меру интенсивности внутренних сил – напряжение.

Понятие о напряжениях. Выделим в сечение площадку размером ΔA. Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадку равна ΔR, модуль которой зависит от размера выделенной площадки. Равнодействующую ΔR разложим на две составляющие: ΔN - направленную по нормали к площадке и ΔT - действующую по площадке.

Отношение $\frac{\Delta R}{\Delta A} = p_{\text{ср}}$ называется средним напряжением по площадке ΔA. Вектор среднего напряжения совпадает по направлению с вектором равнодействующей ΔR.

При уменьшении площадки ΔA изменяются как модуль, так и направление равнодействующей ΔR, а вектор $\vec{p}_{\text{ср}}$ приближается к истинному значения значению напряжения $\vec{p}$ в заданной точке.

Числовое значение истинного напряжения выражается равенством

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Отношение $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma$ называется нормальным напряжением, а отношение $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \tau$ называется касательным напряжением.

Зависимость между p, σ и τ имеет вид $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Виды деформационных состояний. В результате приведения внутренних сил к центру тяжести сечения, в общем случае получаем шесть внутренних силовых факторов: продольную силу N, поперечные силы Q_x и Q_z, крутящий момент T и изгибающие моменты M_x и M_z (рис. 2).

В зависимости от действующих внутренних силовых факторов различают виды нагружения бруса.

Растяжение – сжатие – когда в поперечном сечении действует только продольная сила N.

Чистый сдвиг – когда в поперечном сечении действует только поперечная сила Q_x или Q_z.

Кручение – когда в поперечном сечении действует только крутящий момент T.

Прямой чистый изгиб – когда в поперечном сечении действует только изгибающий момент M_x или M_z.

Прямой поперечный изгиб – когда в поперечном сечении действуют только поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_x или Q_z и M_z.

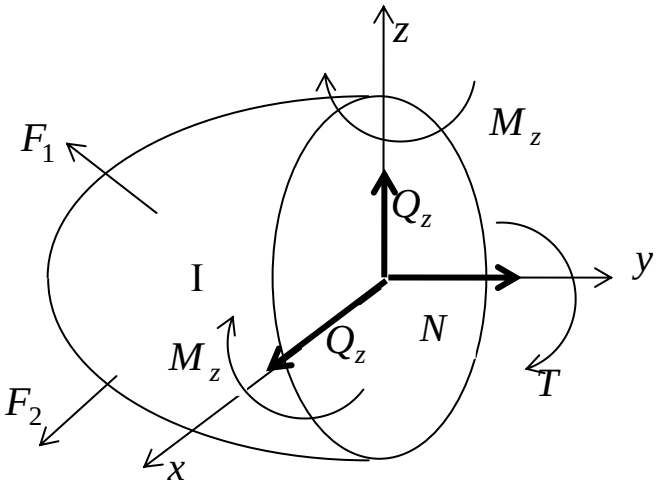


Рис. 2

2 Растяжение-сжатие

Нормальная сила. При растяжении или сжатие в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – нормальная сила N (рис. 3). Брус имеет два характерных участка. Для определения нормальной силы N воспользуемся методом сечения. На расстоянии y_1 проведем сечение на первом участке и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 4). Нормальную силу будем всегда показывать от сечения, что будет соответствовать растяжению бруса.

Составим условие равновесия на ось y

$N_1 - F = 0,$ откуда $N_1 = F.$

Проведем на втором участке сечение на расстоянии y_2. Рассматривая равновесие отсеченной части, получаем $N_2 = F$. Строим эпюру нормальных сил.

Нормальные напряжения. Исходя из определения напряжения, можно записать

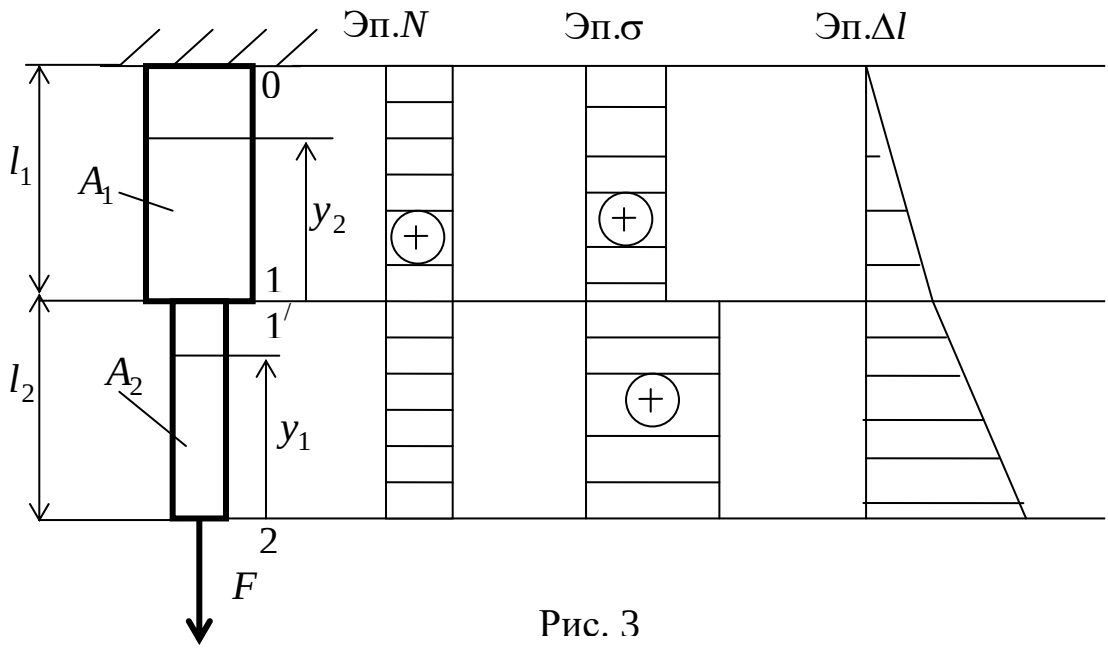


Рис. 3

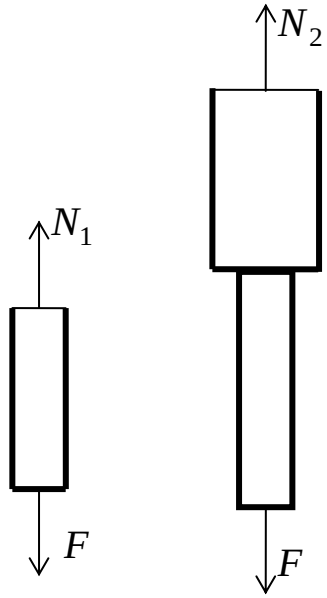


Рис. 4

$$N = \int_A \sigma \, dA,$$

где σ – нормальное напряжение в произвольной точке сечения.

Согласно гипотезе Бернулли (гипотеза плоских сечений) все продольные волокна бруса деформируются одинаково, а это означает, что напряжения в поперечных сечениях одинаковы, т.е. $\sigma = \text{const}$.

В этом случае получаем

$N = \sigma \int_A dA$, откуда $\sigma = \frac{N}{A}$.

Рассчитывая напряжения в каждом сечении, строим эпюру нормальных напряжений.

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_1};\ \sigma_1 = \frac{N}{A_1};\ \sigma_{1'} = \frac{N}{A_2};\ \sigma_2 = \frac{N}{A_2}.$$

Перемещения и деформации. При растяжении бруса длиной l его длина увеличивается на величину Δl, а его диаметр d уменьшается на величину Δd (рис. 5).

Величина Δl называется абсолютной продольной деформацией, а Δd – абсолютной поперечной деформацией.

О степени деформирования бруса нельзя судить по значениям Δl и Δd, так как они зависят не только от действующих сил, но и от

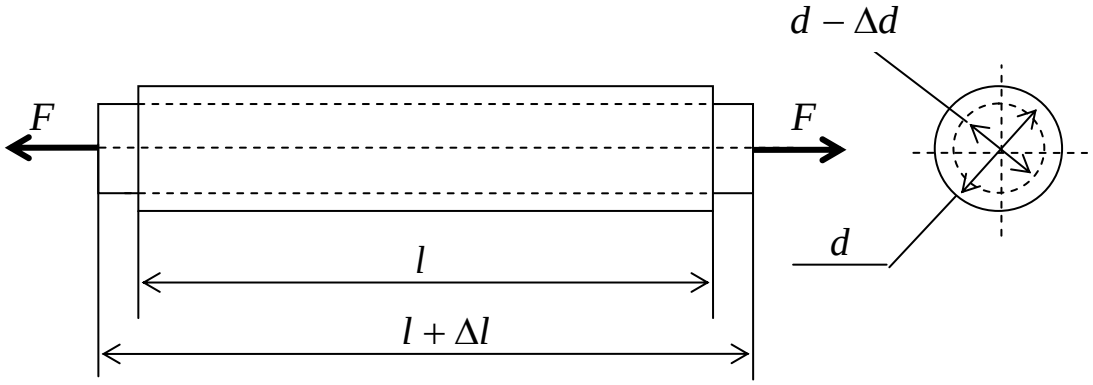


Рис. 5

начальных размеров бруса. Для характеристики деформации бруса вводятся понятия относительная продольная деформация ε и относительная поперечная деформация ε', которые рассчитываются по зависимостям

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l};\ \ \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

Отношение $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона.

Для большинства материалов в стадии упругой деформации выполняется соотношение, представляющее собой математическое выражение закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – коэффициент пропорциональности, который получил название модуля упругости первого рода.

Подставляя в выражение закона Гука σ и ε, получим зависимость для определения абсолютного удлинения бруса

$$\frac{N}{A} = E\frac{\Delta l}{l}, \text{ откуда } \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Произведение EA называется жесткостью бруса при растяжении (сжатии).

Определяя перемещения каждого сечения, строим эпюру продольных перемещений сечений бруса (рис. 3).

$$\Delta l_0 = 0; \quad \Delta l_{10} = \frac{Nl_1}{EA_1}; \; \Delta l_1 = \Delta l_0 + \Delta l_{10}; \; \Delta l_{21} = \frac{Nl_2}{EA_2}; \; \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{21}.$$

Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации.

Внешние силы при нагружении совершают работу на вызываемых ими перемещениях. Работа внешних сил W полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации U при статическом нагружении.

$$W = U = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации, накопленная в единичном объеме, определяется по зависимости:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N\Delta l}{2Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

Диаграмма растяжения. Основные механические свойства материала.

Необходимые сведения о различных механических свойствах материала получают экспериментальным путем. Самым распространенным является испытание на растяжение. Испытание производят на разрывной машине стандартного образца. При нагружении снимают показание растяги-

вающей силы и длину образца. Затем строится условная диаграмма растяжения в координатах ε и σ. Напряжение в сечении определяют по зависимости:

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

где F – сила нагружения;

A – площадь поперечного сечения образца.

Относительная линейная деформация определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где $\Delta l = l_i - l$ – относительное удлинение образца;

l – исходная длина образца;

l_i – длина образца в данный момент отсчета.

Диаграмма растяжения для пластичных материалов имеет вид, показанный на рис. 6.

На диаграмме растяжения можно выделить четыре характерные участка.

Участок AB – участок пропорциональности. На этом участке выполняется закон Гука

$$\sigma = \varepsilon E.$$

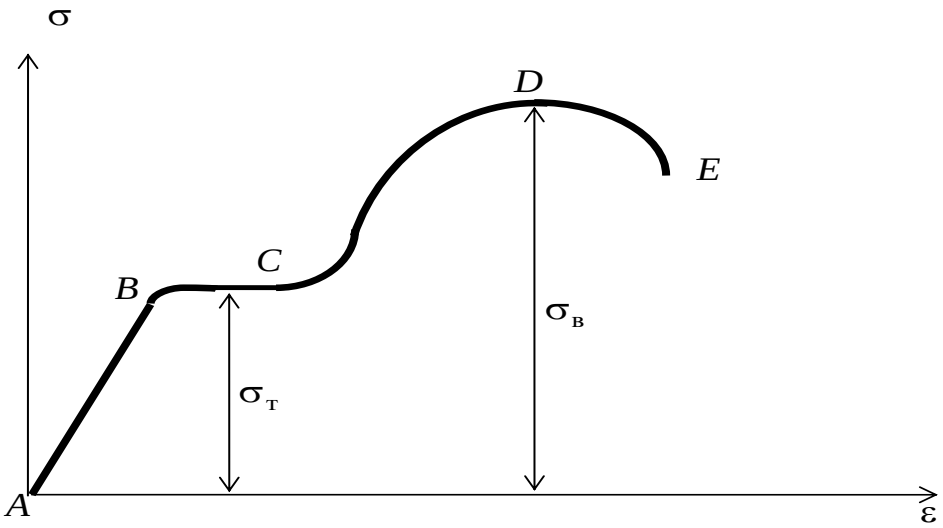


Рис. 6

Участок BC – площадка текучести. На этом участке наблюдается ползучесть металла - удлинение образца без изменения нагрузки. Напряжение, при котором происходит течение образца, называется пределом текучести и обозначается $\sigma_т$.

Участок CB – участок упрочнения. На этом участке для дальнейшего удлинения образца необходимо увеличить нагрузку.

В точке D происходит образование шейки и на участке DE происходит местное удлинение образца. Напряжение, при котором образуется шейка, называется пределом прочности и обозначается $\sigma_в$.

Допускаемые напряжения. На участке AB имеют место упругие деформации, т.е. снятия нагрузки образец будет иметь первоначальные размеры. Поэтому для деталей, изготовленных из пластичных материалов, действующие напряжения не должны превышать напряжения текучести $\sigma_т$. С этой целью вводят понятия допускаемых напряжений, которые рассчитываются по зависимости:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{[s]},$$

где $[s]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности, который зависит от назначения детали, точности расчетных формул и ряда других факторов.

Условие прочности и жесткости конструкции.

Прочность конструкции будет обеспечена, если максимальное напряжение в ней не будет превышать допускаемого напряжения

$$\sigma_{max} \le [\sigma].$$

Для бруса, испытывающего напряжения растяжения, условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma_p],$$

Условие жесткости при растяжении бруса будет определяться зависимостью

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \le [\Delta l],$$

где $[\Delta l]$ – допустимая деформация бруса.

3 Геометрические характеристики плоских сечений

Статические моменты сечения. Любое сечение бруса имеет определенную геометрическую форму и площадь (рис. 7).

Выделим в сечение элементарную площадку $\mathrm{d}A$, положение которой определено координатами *x* и *y*. Статическим моментом сечения S называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояние до оси. Статические моменты сечения относительно осей *x* и *y* будут соответственно равны

$$S_x = \int_A \mathrm{d}A \cdot y; \quad S_y = \int_A \mathrm{d}A \cdot x.$$

Определение центра тяжести сечения. Статические моменты сечения относительно осей проходящих через центр тяжести равны нулю, поэтому их используют для определения координат центров тяжести сечения. Для этого проводят вспомогательные оси *x* и *y* и координаты центра тяжести сечения определяют по зависимостям:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \; Y_c = \frac{S_x}{A}.$$

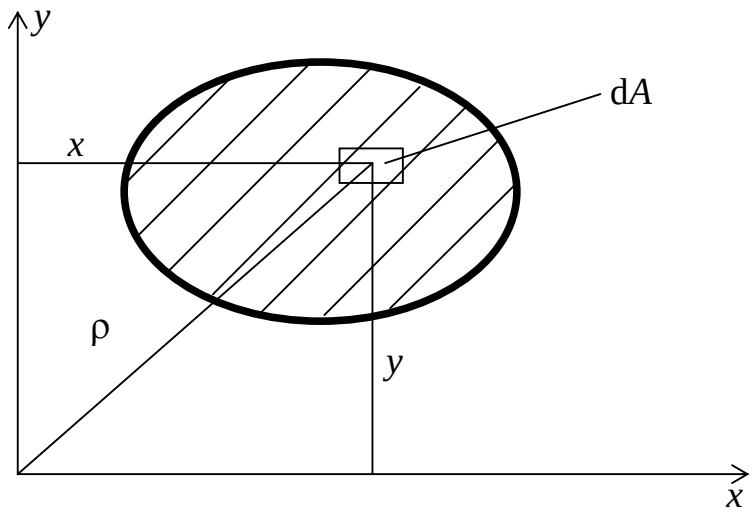


Рис. 7

Моменты инерции сечения. Осевым моментом инерции сечения I называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на

квадрат расстояния до оси. Осевые моменты инерции сечения относительно осей x и y будут соответственно равны

$$I_x = \int_A \mathrm{d}A \cdot y^2; \quad I_y = \int_A \mathrm{d}A \cdot x^2.$$

Полярным моментом инерции сечения I_ρ называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на квадрат расстояния до начало координат.

$$I_\rho = \int_A \mathrm{d}A \cdot \rho^2.$$

Учитывая, что $\rho^2 = x^2 + y^2$, получаем $I_\rho = I_x + I_y$.

Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции сечения.

Центробежным моментом инерции сечения I_{xy} называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояния до осей.

$$I_{xy} = \int_A \mathrm{d}A \cdot x \cdot y.$$

Если сечение имеет ось симметрии, то центробежный момент инерции сечения равен нулю.

Определение моментов инерции простых геометрических фигур. Рассмотрим определения момента инерции прямоугольного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести (рис. 8).

Выделим элементарную площадь $\mathrm{d}A$ на расстоянии y от центральной оси x_c толщиной $\mathrm{d}y$. Согласно определению, осевой момент инерции относительно оси x_c равен

$$I_{x_c} = \int_A \mathrm{d}A \cdot y^2.$$

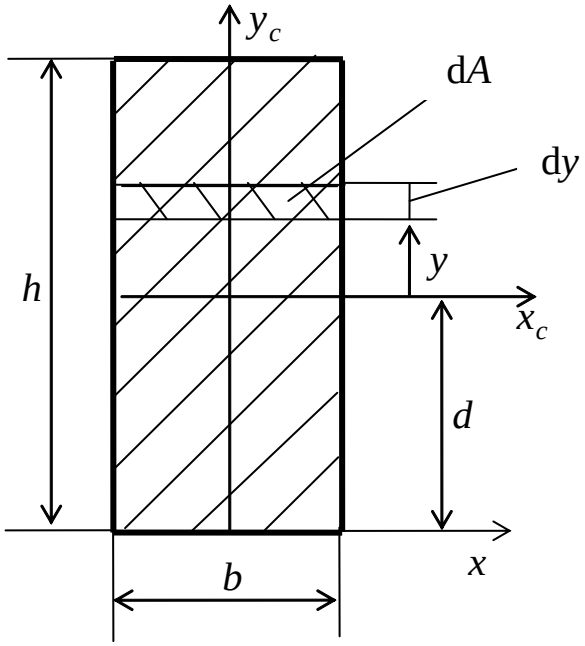


Рис. 8

В нашем случае элементарная площадь $\mathrm{d}A = b \cdot dy$. Подставляя значения $\mathrm{d}A$ и изменяя пределы интегрирования, получаем

$$I_{x_c} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \mathrm{d}y = \frac{by^3}{3}\Bigg|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичным образом определяются моменты инерции плоского сечения.

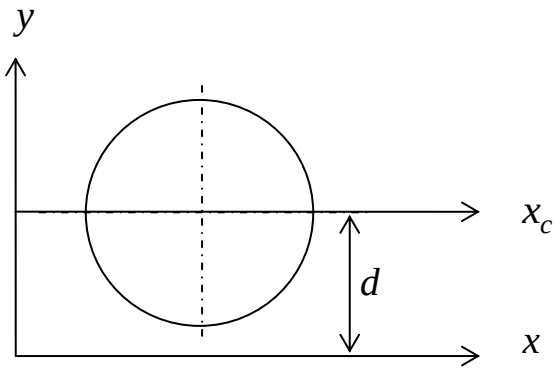


Рис. 9

Если известен момент инерции сечения относительно оси проходящей через центр тяжести (рис. 9), то момент инерции относительно другой параллельной оси, отстоящей на расстоянии d, определяется по формуле Штейнера

$$I_x = I_{x_c} + Ad^2.$$

Если сечение имеет сложную геометрическую форму, то его разбивают на простые фигуры и его момент инерции рассчитывают, как сумму моментов инерции отдельных фигур.

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей *x*, *y* и моментами инерции относительно осей *u*,*v*, повернутых на угол α. Угол α считается положительным, если поворот осуществляется и против часовой стрелки. Пусть координаты элементарной площадки до поворота – *x*, *y* , после поворота – *u*,*v* (рис. 10).

Из рисунка следует:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \qquad v = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

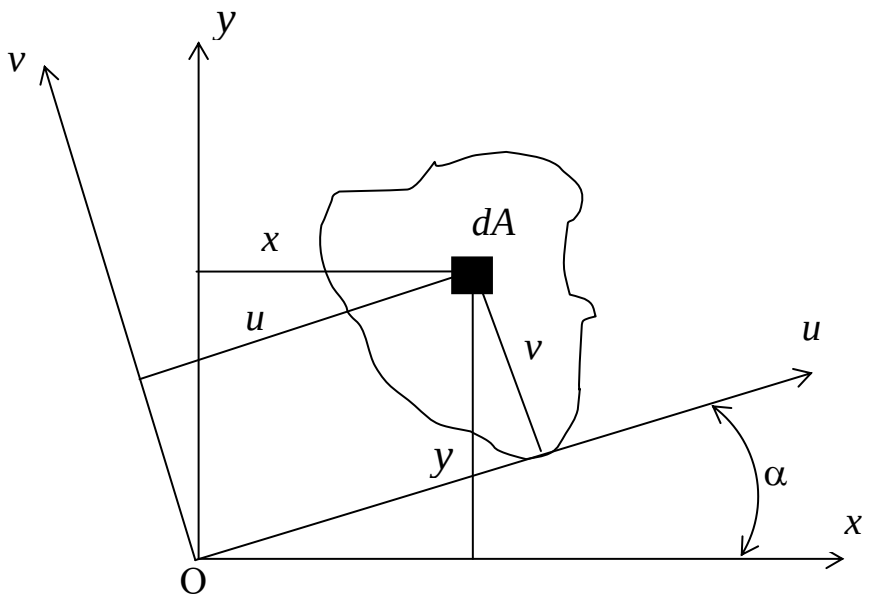


Рис. 10

В этом случае

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA =$$

$$= I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 dA =$$

$$= I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$I_{uv} = \int_A uvdA = \int (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)dA =$$

$$= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha.$$

Главные оси инерции и главные моменты инерции. С изменением угла поворота осей α каждая из величин I_u и I_v меняется, а сумма их остается неизменной. Следовательно, существует такое значение $\alpha = \alpha_0$, при котором моменты инерции достигают экстремальных значений, т.е. один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время другой момент инерции принимает минимальное значение. Для нахождения значения α_0 возьмем первую производную от I_u и приравняем ее нулю:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2I_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \dfrac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$.

Нетрудно показать, что центробежный момент относительно осей, повернутых на угол α_0, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями. Если эти оси являются также и центральными, то они называются главными центральными осями.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции. Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда является одной из главных центральных осей инерции сечения.

Момент сопротивления сечения. Момент сопротивления сечения относительно оси представляет собой отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения от этой же оси.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения, изображенного на рис. 8, относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

Полярный момент сопротивления представляет собой отношение полярного момента инерции к наибольшему расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной точки сечения

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}.$$

4 Теория напряженного состояния.

Вырежем из напряженного тела в окрестности исследуемой точки произвольно бесконечно малый параллелепипед. На гранях параллелепипеда будут действовать нормальные и касательные напряжения. Направление нормальных напряжений совпадает с направлением внешней нормали. Касательные напряжения разложим на составляющие, параллельные осям.

Напряженным состоянием тела в точке называют совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам содержащим данную точку.

Обозначения нормальных напряжений содержат один индекс - наименование оси, которой параллельно данное напряжение. В обозначении касательных напряжений используются два индекса: первый совпадает с индексом нормального напряжения, действующего по данной площадке, а второй - наименование оси, которой параллельно данное касательное напряжение.

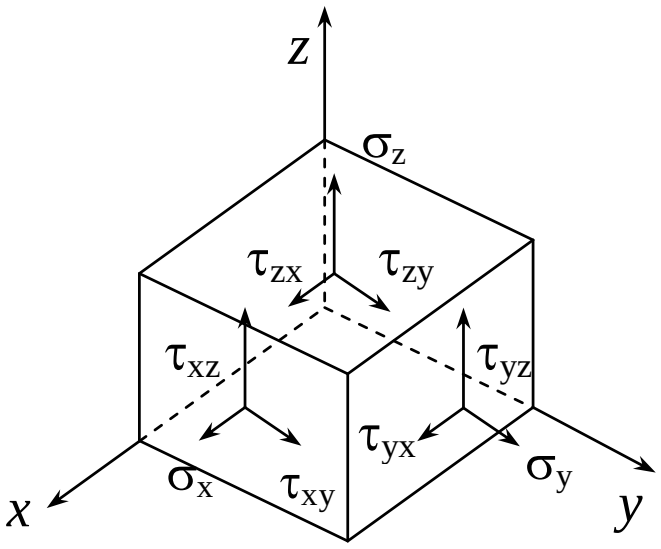


Рис. 11

Нормальное напряжение σ считается положительным, если оно направлено от площадки. Касательное напряжение τ считается положительными, если изображающий его вектор стремится вращать параллелепипед по часовой стрелки относительно любой точке, лежащей внутри параллелепипеда. Отрицательными считаются напряжения обратных направлений.

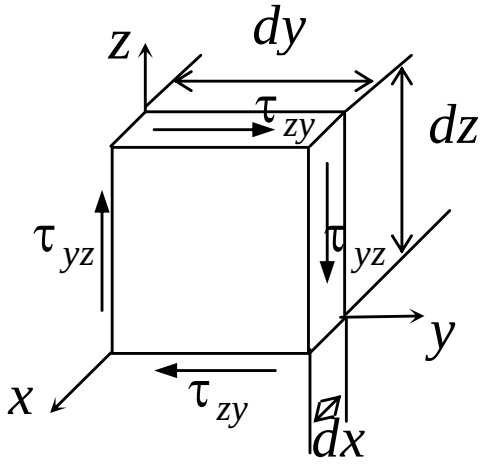


Рис. 12

Закон парности касательных напряжений. Закон парности касательных напряжений устанавливает зависимость между величинами и направлениями пар касательных напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам элементарного параллелепипеда.

Рассмотрим элементарный параллелепипед размеров dx, dy, dz (рис. 12).

Запишем уравнение равновесия параллелепипеда в виде суммы моментов относительно оси x, получим:

$-\tau_{zy} dxdydz - \tau_{yz} dxdzdy = 0$, откуда получаем $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$.

Аналогично можно получить $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$; $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$.

Это и есть закон парности касательных напряжений.

Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.

Главные площадки и главные напряжения. Рассмотрим две взаимно-перпендикулярные площадки с касательными напряжениями τ_{xy} и τ_{yx}. Согласно закону парности касательных напряжений знаки τ_{xy} и τ_{yx} противоположны. Поэтому, если площадку с напряжением τ_{xy} поворачивать до совпадения с площадкой с напряжением τ_{yx}, то обязательно найдется такое положение площадки, когда $\tau = 0$.

Площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, называются главными, а действующие по этим площадкам нормальные напряжения - главными напряжениями.

Главные напряжения обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Элемент, выделенный главными площадками, изображен на рис. 13.

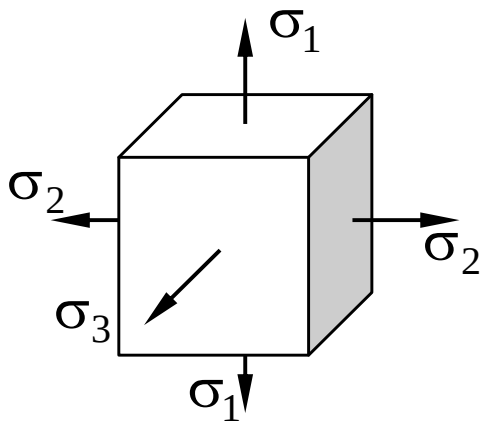
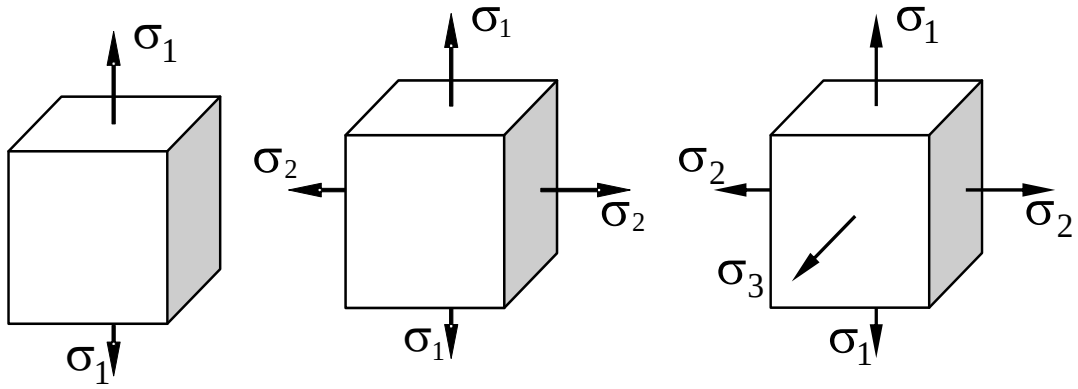


Рис. 13

Виды напряженного состояния тела. В зависимости от количества действующих главных напряжений различают три вида напряженных состояний: линейное, плоское и объемное.



а б в

Рис. 14

Линейное напряженное состояние. Линейным или одноосным называется напряженное состояние, при котором два из трех главных напряжений равны нулю (рис. 14,а).

Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении AB, нормаль к которому повернута на угол α к направлению σ_1.

За положительное направление отсчетов угла α примем направление против часовой стрелки.

В общем случае в наклонном сечении будут действовать как нормальные напряжения σ_α, так и касательные напряжения τ_α.

Их значения определим из условия равновесия нижней части.

Проектируя силы на направления σ_α, имеем:

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A\cos\alpha = 0,$$

учитывая, что $A_\alpha = \dfrac{A}{\cos\alpha}$, получаем $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha$.

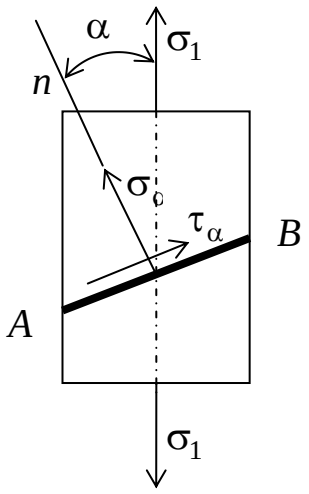


Рис. 15

Из суммы проекций сил на направления τ_α имеем:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha.$$

Плоское напряженное состояние. Плоским или двухосным называется напряженное состояние, при котором одно из трех главных напряжений равно нулю (рис. 14,б).

Для плоского напряженного состояния различают две задачи – прямую и обратную. В прямой задаче гранями рассматриваемого элемента являются главные площадки (рис. 16,а) . Известны $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$ и требуется определить напряжения σ_α и τ_α и σ_β и τ_β на произвольных площадках. В обратной задаче известны напряжения на двух взаимно произвольных перпендикулярных площадках σ_x, σ_y, τ_{yx} и τ_{xy} и требуется определить положение главных площадок и величины главных напряжений.

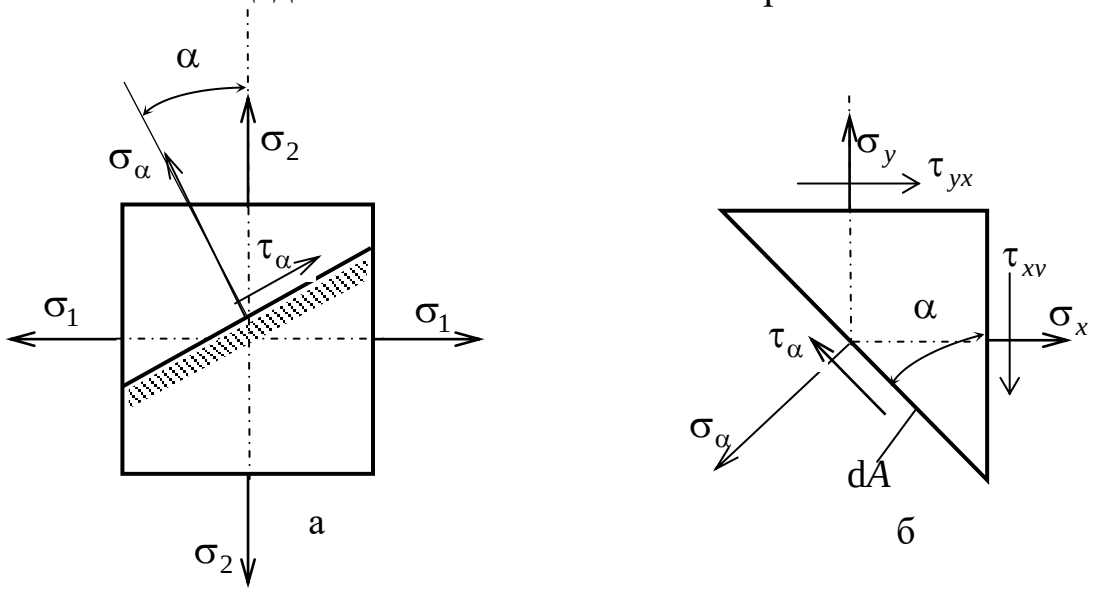


Рис. 16

Прямая задача. Для решения этой задачи воспользуемся принципом независимости действия сил. Представим плоское напряженное состояние в виде суммы двух независимых линейных напряженных состояний: первое – при действии только напряжений σ_1, второе – при действии только напряжений σ_2. От каждого из напряжений σ_1 и σ_2 напряжения σ_α и τ_α в произвольной площадке равны

$$\sigma_{\alpha 1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \;\; \sigma_{\alpha 2} = \sigma_2 \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_{\alpha 1} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha, \; \tau_{\alpha 2} = \frac{\sigma_2}{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Таким образом, суммируя напряжения, возникшие при каждом линейном напряженном состоянии, получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Определим напряжения, действующие на площадку с углом наклона $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, то есть перпендикулярную к площадке α.

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Суммируя нормальные напряжения, действующие по произвольным взаимно перпендикулярным площадкам, получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = const.$$

Сравнивая величины касательных напряжений, имеем $\tau_\alpha = -\tau_\beta$

Обратная задача. Определим сначала напряжения на наклонной площадке, наклоненной к исходной, при заданных напряжения на двух взаимно произвольных перпендикулярных площадках σ_x, σ_y, τ_{yx} и τ_{xy} (рис. 16,б).

Разрежем параллелепипед плоскостью, наклоненной под углом α к вертикальной грани, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части.

Если обозначить через dA площадь наклонной грани, то площади вертикальной и горизонтальной граней будут соответственно равны $dA\cos\alpha$ и $dA\sin\alpha$.

Спроектируем силы на направления σ_α и τ_α

$$\sigma_\alpha dA - \tau_{yx} dA \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_y dA \sin\alpha \sin\alpha + \tau_{xy} dA \cos\alpha \sin\alpha -$$
$$- \sigma_x dA \cos\alpha \cos\alpha = 0;$$
$$\tau_\alpha dA - \tau_{yx} dA \sin\alpha \sin\alpha + \sigma_y dA \sin\alpha \cos\alpha - \tau_{xy} dA \cos\alpha \cos\alpha -$$
$$- \sigma_x dA \cos\alpha \sin\alpha = 0.$$

Сокращая на dA и учитывая, что $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Для отыскания экстремального значения нормального напряжения продифференцируем σ_α по α.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha =$$
$$- 2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = -2\tau_\alpha.$$

Экстремум напряжения σ_α достигается при тех углах α, при которых $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha = 0$. Отсюда следует, что нормальные напряжения достигают экстремума на тех площадках, где касательные ускорения обращаются в нуль. Эти площадки называются главными, а напряжения, возникающие на них – главными напряжениями.

Предполагая, что главные площадки наклонены к исходным площадкам на угол α_0, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Полученному равенству удовлетворяют два значения угла α_0, отличающиеся на 90^0. Таким образом, данная формула определяет две взаимно перпендикулярные площадки, на которых нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Учитывая, что сумма нормальных напряже-

ний по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна, то на одной площадке будет действовать максимальное нормальное напряжения, а по другой – минимальное.

Модули главных напряжений определяют по зависимости:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\,.$$

Объемное напряженное состояние. Объемным или трехосным называется напряженное состояние, при котором все три главных напряжения отличны от нуля (рис. 14,в). Для объемного напряженного состояния справедливо равенство

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const\,.$$

Обобщенный закон Гука. Обобщенный закон Гука представляет собой связь между напряжениями и деформациями в случае объемного. Он может быть получен на основании закона Гука для линейного напряженного состояния и принципа независимости действия сил.

Представляя объемное напряженное состояние в виде суммы трех линейных напряженных состояний, и учитывая, что при линейном напряженном состоянии $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ и $\varepsilon' = \mu\varepsilon = \mu\frac{\sigma}{E}$, выражения для деформации в направлении действия главных напряжений будут иметь вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Эти выражения носят название *обобщенного закона Гука*, записанного для главных площадок. Деформации ε_1, ε_2 и ε_3, в направлении главных напряжений называются *главными деформациями*.

5 Теории прочности

Теории прочности. В каждой теории прочности используется определенная гипотеза прочности, которая представляет собой предположения

о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора.

Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

Эквивалентным напряжением называется напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным заданному напряженному состоянию.

Заменяя сложное напряженное состояние эквивалентным линейным, получаем возможность использовать при сложном напряженном состоянии условие прочности при простом растяжении:

$$\sigma_{экв} \le [\sigma_р].$$

Гипотеза наибольших нормальных напряжений. Эта гипотеза была выдвинута Галилеем 1638 году и носит название первой теорией прочности.

В основу теории наибольших напряжений положена гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине нормальных напряжений.

Согласно этой теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю главное напряжений достигает предельного значения для заданного материала при простом растяжении (сжатии). Условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \le [\sigma_p] \quad \text{или} \quad \sigma_{экв} = \sigma_3 \le [\sigma_{сж}].$$

Эта теория прочности дает положительные результаты лишь для некоторых хрупких материалов.

Гипотеза наибольших линейных деформаций. Эта гипотеза была выдвинута Мариоттом в 1682 году и носит название второй теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю относительная линейная деформация достигает предельного значения при простом растяжении или сжатии.

Максимальные относительные деформации согласно обобщенному закону Гука определяются при растяжении и сжатии соответственно по зависимостям:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad \varepsilon_{max} = |\varepsilon_3| = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)\right].$$

Предельное значение относительной деформации при растяжении

$$\varepsilon_{пред} = \frac{\sigma_в}{E}.$$

Откуда получаем

$$\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = \sigma_в.$$

Тогда условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{экв} = \left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \le \left[\sigma_p\right]; \quad \sigma_{экв} = \left[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)\right] \le \left[\sigma_{сж}\right].$$

Экспериментальная проверка данной гипотезы выявила ряд существенных недостатков, поэтому она не применяется для расчетов.

Гипотеза наибольших касательных. Эта гипотеза была выдвинута Кулоном в 1773 году и носит название третьей теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает значения, предельного для данного материала.

При объемном напряженном состоянии

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \le [\tau] = \frac{\left[\sigma_p\right]}{2}, \text{ или } \sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \left[\sigma_p\right].$$

Во многих практических случаях третья теория прочности дает удовлетворительные результаты.

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma_p].$$

Гипотеза энергии формоизменения. Эта гипотеза была выдвинута Бельтрами в 1885 году и Губером в 1904 году и носит название четвертой теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает предельного для данного материала значения.

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы, выраженная через главные напряжения, определяется следующим уравнением:

$$u_{\text{ф}} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Предельное значение при простом растяжении

$$u^{\text{р}}_{\text{фпред}} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{\text{т}}^2.$$

Условие прочности в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \le [\sigma_p]$$

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Гипотеза прочности Мора (пятая теория прочности). Гипотеза прочности Мора позволяет учесть различие в свойствах материала при растяжении и сжатии. Ее можно получить путем модификации гипотезы наибольших касательных напряжений.

Условие прочности по гипотезе Мора имеет следующий вид:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le [\sigma_p]; \quad k \approx \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]}.$$

6 Чистый сдвиг

Напряжения при чистом сдвиге. Чистым сдвигом называют такой вид нагружения, при котором в его поперечных сечениях действует только поперечная сила. Сдвиг, как вид нагружения, встречается редко и имеет место в заклепочных и сварных соединениях.

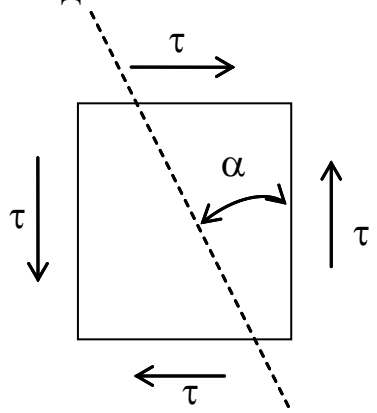


Рис. 17

При чистом сдвиге (рис. 17) в окрестности точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

Внутренняя поперечная сила при чистом сдвиге определяется методом сечений. Распределение касательных напряжений принимается равномерным и тогда связь между поперечной силой и касательным напряжением имеет вид:

$$Q = \int_A \tau dA; \tau = \text{const}; \; Q = \tau A, \text{ откуда } \tau = \frac{Q}{A}.$$

При чистом сдвиге возникает плоское напряженное состояние, тогда напряжения, действующие на площадке составляющей угол α с вертикальной исходной площадкой равны:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha; \quad \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha.$$

Касательные напряжения, показанные на рис. 17, по абсолютной величине больше касательных напряжений по любым другим площадкам. Следовательно, они являются экстремальными, а площадки, по которым

они действуют – площадками сдвига. Так как по этим площадкам не действуют нормальные напряжения, то их называют площадками чистого сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45^0.

Подставляя угол $\alpha = 45^0$, получаем $\sigma_\alpha = \tau = \tau_{max}$.

Следовательно, при чистом сдвиге главные напряжения и экстремальные касательные напряжения равны друг другу. Подставив в уравнения значения углов α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$, получаем

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1;\ \sigma_{\alpha_2} = \tau \sin(2\alpha_1 + 180^0) = -\tau \sin 2\alpha_1;\ \ \sigma_{\alpha_1} = -\sigma_{\alpha_2}.$$

При чистом сдвиге нормальные напряжения на любых двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по модулю и противоположны по направлению.

Деформации при чистом сдвиге. При чистом сдвиге длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями. Первоначально прямые углы становятся равными $90^0 + \gamma$ и $90^0 - \gamma$ (рис. 18).

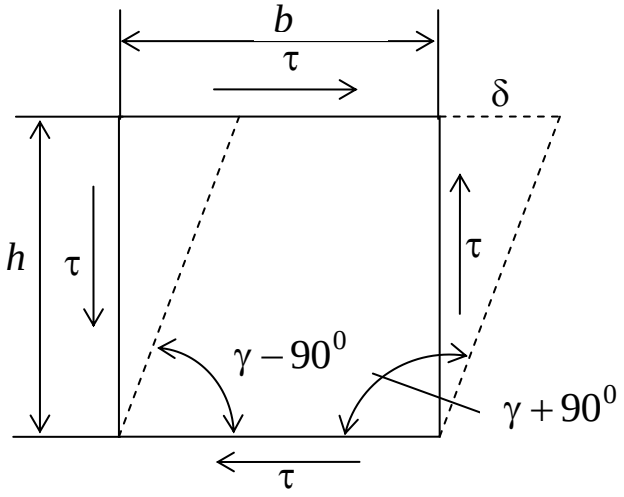


Рис. 18

Величина δ называется абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига δ к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом. При малых деформациях имеем

$$\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{h},$$

т.е. относительный сдвиг равен углу сдвига.

Угол сдвига γ пропорционален касательным напряжениям. Математическая зависимость между углом сдвига и касательным напряжением называется законом Гука при сдвиге.

$$\tau = \gamma G,$$

где G – коэффициент пропорциональности или модуль упругости второго рода.

Объемная деформация и потенциальная энергия при сдвиге. Относительное изменение объёма при сдвиге определяется из объёмного закона Гука

$$\theta = \frac{1-\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).$$

Величина θ не зависит от того, как в окрестности точки выделен элементарный параллелепипед. Так как при чистом сдвиге боковые грани выделенного элементарного параллелепипеда являются площадками чистого сдвига, то $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Тогда относительное изменение объёма при чистом сдвиги $\theta = 0$.

Полная удельная потенциальная энергия u равна сумме удельной потенциальной энергии изменения объёма $u_{об}$ и удельной потенциальной энергии изменения формы $u_ф$

$$u = u_{об} + u_ф.$$

Учитывая, что при чистом сдвиге $\sigma_1 = \tau_{max};\ \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\tau_{max}$, получаем

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\tau_{max} + 0 - \tau_{max}\right)^2 = 0;$$

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) =$$
$$= \frac{1+\mu}{3E}\left(\tau_{max}^2 + 0 + \tau_{max}^2 - 0 + 0 + \tau_{max}^2\right) = \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2;$$

$$u = 0 + \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2 = \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2 \ .$$

Работа при чистом сдвиге. В результате деформации выделенного параллелепипеда работа силы будет определяться по выражению

$$W = \frac{T}{2}\delta,$$

где T – сила, действующая на грань параллелепипеда.

Ее величина будет равна

$$T = \tau bl = \tau_{max} bl,$$

где l – размер параллелепипеда в направлении, перпендикулярном чертежу (рис. 18)

Учитывая, что $\delta = \gamma h = \frac{\tau}{G}h = \frac{\tau_{max}}{G}h,$ получаем

$$W = \frac{\tau_{max} bl}{2}\frac{\tau_{max} h}{G} = \frac{\tau_{max}^2 hbl}{2G} = \frac{\tau_{max}^2 V}{2G}.$$

Так как работа силы при статическом действии числена равна потенциальной энергии, имеем

$$U = W = \frac{\tau_{max}^2 V}{2G}.$$

Удельная потенциальная энергия в этом случае равна

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau_{max}^2 V}{2GV} = \frac{\tau_{max}^2}{2G}.$$

Приравнивая полученные выражения для удельной потенциальной энергии, получаем соотношение

$$\frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2 = \frac{\tau_{max}^2}{2G},$$

откуда получаем связь между модулем упругости первого рода E и модулем упругости второго рода G

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

7 Кручение

Кручением называют такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – крутящий момент. Брус, работающей на кручение называется валом. При кручении вала его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг оси бруса.

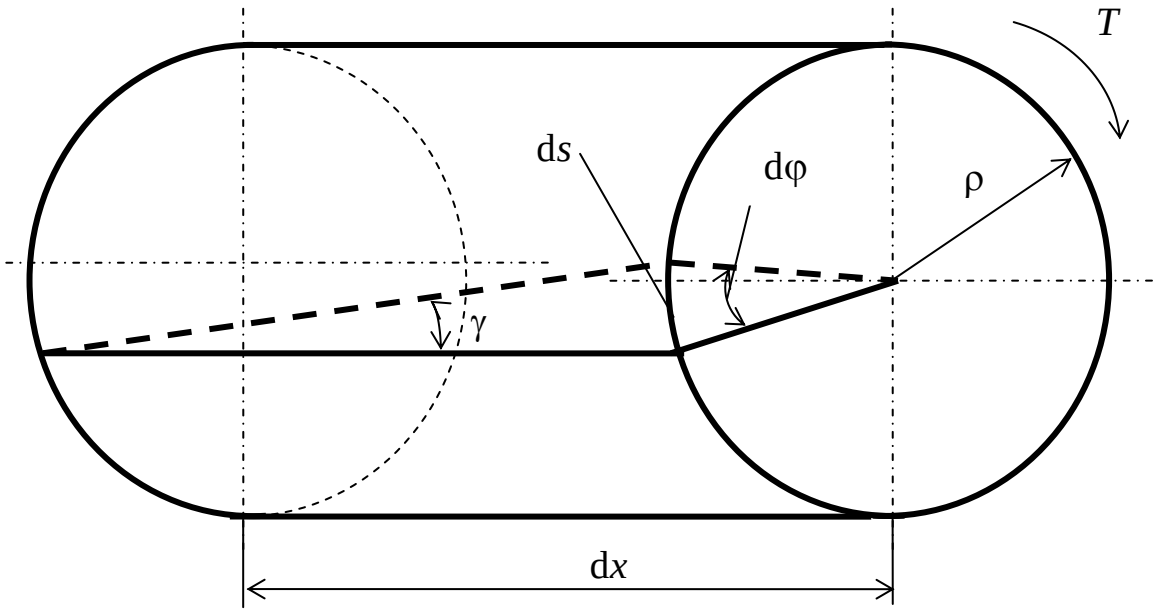


Рис. 19

Напряжения и деформации при кручении бруса. Под действием внешнего скручивающего момента, приложенного на правом конце бруса, левый конец которого жестко закреплен, брус будет закручиваться. Выделим из бруса элементарный цилиндр длиной dx (рис. 19). Будем считать, что левое сечение бруса жестко закреплено. Под действием крутящего момента T правое сечение повернется на некоторый угол $d\varphi$.

Из рис. 19 видно, что $ds = \gamma \cdot dx = \rho \cdot d\varphi$, откуда получаем

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx}\rho.$$

Из данной зависимости видно, что угол сдвига γ изменяется по радиусу вала по линейному закону.

Деформация бруса при кручении характеризуется относительным углом закручивания $\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$. Согласно закону Гука при сдвиге, имеем $\gamma = \frac{\tau}{G}$. Откуда получаем:

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} G\rho = \theta G\rho.$$

Из данной зависимости видно, что касательные напряжения изменяются по радиусу по линейному закону.

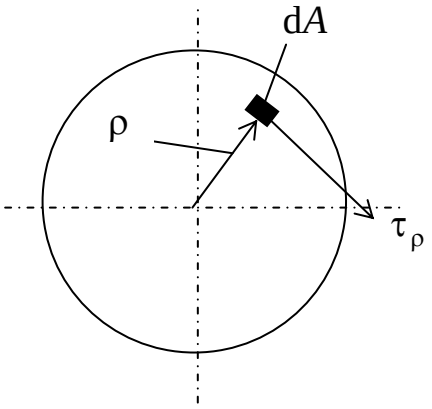


Рис. 20

При кручении все внутренние силы, распределенные по поперечному сечению, приводятся к одной составляющей - к крутящему моменту. Касательные напряжения перпендикулярны радиусам, проведенные через точки их действия (рис. 20). Крутящий момент T в сечении бруса определяется по уравнению

$$T = \int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A,$$

где ρ – плечо элементарной силы.

Подставляя значение касательного ускорения, получим

$$T = \int_A \theta G\rho^2 \mathrm{d}A = \theta G I_\rho = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} G I_\rho .$$

Элементарный угол закручивания

$\mathrm{d}\varphi = \frac{T \cdot \mathrm{d}x}{G I_\rho}$, а полный угол закручивания бруса $\varphi = \frac{Tl}{G I_\rho}$.

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса будет определяться по зависимости:

$$\tau_{max} = \theta G \rho_{max} = \frac{T}{I_\rho}\rho_{max} = \frac{T}{\frac{I_\rho}{\rho_{max}}} = \frac{T}{W_\rho}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

Расчеты на прочность и жесткость при кручении. Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} \le [\tau].$$

Условие жесткости при кручении

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_\rho} \le [\varphi].$$

Для бруса круглого сечения эти условия имеют вид

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \le [\tau]; \quad \varphi = \frac{32Tl}{G\pi d^4} \le [\varphi].$$

Построение эпюр крутящих моментов. Крутящий момент в сечении бруса определяется методом сечений. По модулю он численно сечения равен алгебраической сумме внешних моментов слева или справа от сечения.

Брус разбивается на участке и на каждом участке проводится сечение (рис. 21).

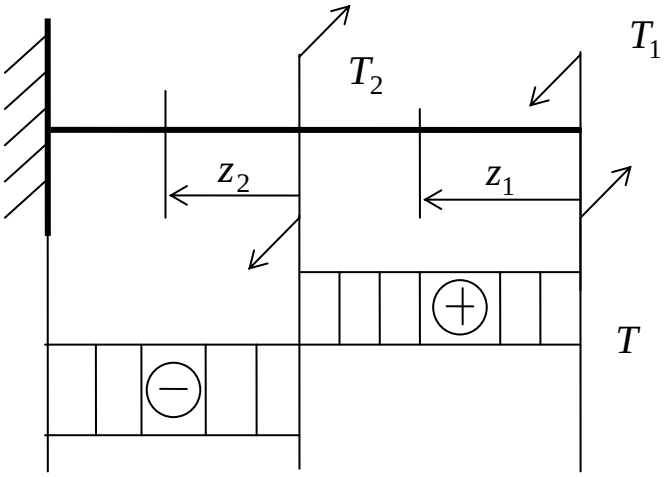


Рис. 21

В каждом сечении определяется крутящий момент, а затем строится эпюра крутящих моментов. Для случая, изображенного на рис. 20, крутящие моменты в сечениях 1 и 2 будут равны

$$T_{z_1} = T_1; \quad T_{z_2} = T_1 - T_2.$$

8 Плоский изгиб

Основные понятия и определения. В отличие от деформации растяжения-сжатия и кручения изгиб представляет такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса. Осью бруса называется геометрическое место точек центров тяжестей поперечных сечений бруса.

Если в сечении бруса действует только один изгибающий момент, то изгиб называется чистым. Если в поперечных сечениях кроме изгибающего момента действует и поперечная сила, то изгиб называется поперечным.

Брус, работающий на изгиб, называется балкой. Изгиб называется плоским, если ось балки после деформации остается плоской линией. В противном случае имеет место косой изгиб.

В настоящем разделе рассматривается плоский прямой изгиб.

Нормальные напряжения при чистом прямом изгибе. Так как нормальные напряжения зависят только от изгибающих моментов, то вывод формулы для вычисления σ можно производить применительно к чистому изгибу.

Статическая задача о плоском изгибе. Изгибающий момент в сечении представляет собой сумму моментов всех элементарных внутренних нормальных сил $\sigma \cdot \mathrm{d}A$, возникающих на элементарных площадках поперечного сечения балки (рис. 22), относительно нейтральной оси

$$M_x = \int_A \sigma y \mathrm{d}A.$$

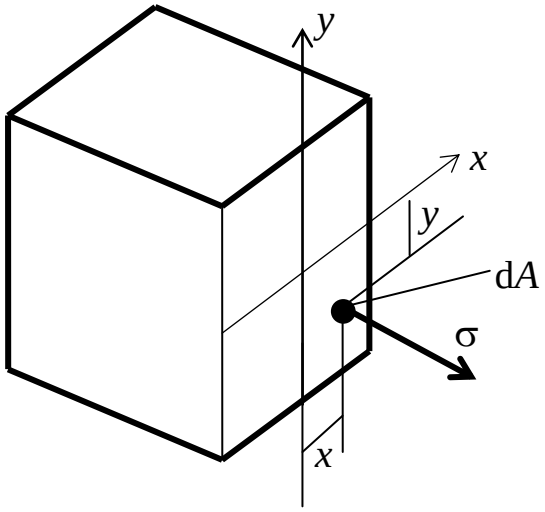


Рис. 22

Данное выражение представляет собой статическую сторону задачи о плоском изгибе.

Однако его нельзя использовать для определения нормальных напряжений, так как неизвестен закон распределения напряжений по сечению.

Геометрическая сторона задачи о плоском изгибе. Выделим двумя поперечными сечениями элемент балки длиной $\mathrm{d}z$ (рис. 23). Под нагрузкой нейтральная ось искривляется (радиус кривизны ρ), а сечения поворачиваются относительно своих нейтральных линий на угол $\mathrm{d}\theta$. Длина отрезка волокон нейтрального слоя при этом остается неизменной

$$\mathrm{d}z = \rho \cdot \mathrm{d}\theta.$$

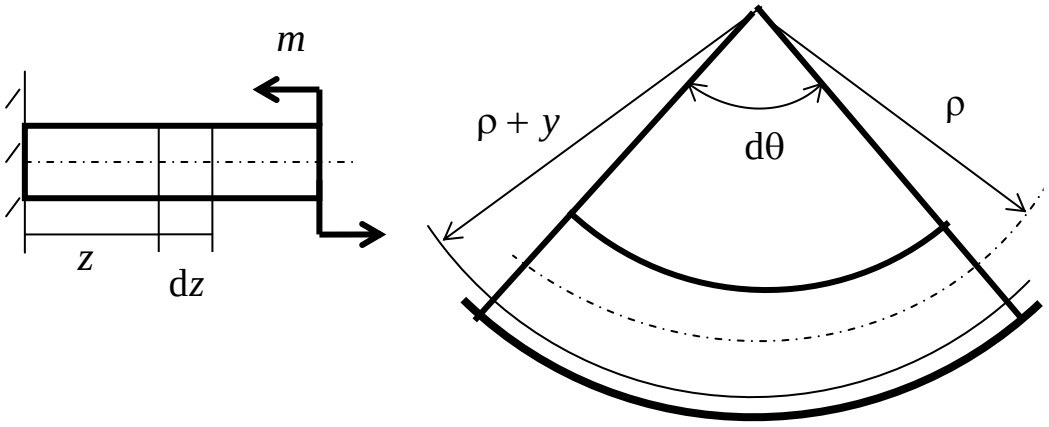


Рис. 23

Определим длину отрезка волокон, отстоящего от нейтрального слоя на расстоянии y

$$dz_1 = (\rho + y)d\theta.$$

Относительное удлинение в этом случае будет

$$\varepsilon = \frac{dz_1 - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)dz}{\rho \cdot dz} = \frac{y}{\rho}.$$

Зависимость $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ отражает геометрическую сторону задачи о плоском изгибе, из которой видно, что деформации продольных волокон изменяются по высоте сечения по линейному закону.

Физическая сторона задачи о плоском изгибе. Используя закон Гука при осевом растяжении, получаем

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}.$$

Подставив в выражение, отражающее статическую сторону задачи о плоском изгибе, значение σ, получаем

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \int_A E\frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x,$$

откуда $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$.

Подставив значение $\frac{1}{\rho}$ в исходную формулу, получаем

$$\sigma = E\frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Данное выражение отражает физическую сторону задачи о плоском изгибе, которое дает возможность рассчитать нормальные напряжения по высоте сечения.

Хотя это выражение получено для случая чистого изгиба, но как показывают теоретические и экспериментальные исследования, оно может быть использовано и для плоского поперечного изгиба.

Нейтральная линия. Положение нейтральной линии определим из условия равенства нулю нормальной силы в сечениях балки при чистом изгибе

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y dA.$$

Так как $M_x \neq 0$ и $I_x \neq 0$, то необходимо, чтобы нулю был равен интеграл $\int_A y dA$. Данный интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси. Так как статический момент сечения равен нулю только относительно центральной оси, следовательно, нейтральная линия при плоском изгибе совпадает с главной центральной осью инерции сечения.

Касательные напряжения. Касательные напряжения, которые возникают в сечениях балки при плоском поперечном изгибе, определяются по зависимости:

$$\tau = \frac{QS_{xo}}{bI_x},$$

где $Q -$ поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;

S_{xo} – статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси балки;

b – ширина сечения в рассматриваемом слое;

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Касательные напряжения равны нулю в крайних волокнах сечения и максимальны в волокнах нейтрального слоя.

Расчет балок на прочность при изгибе. Прочность балки будет обеспечена, если будут выполняться условия:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \ \tau_{max} \leq [\tau].$$

Максимальные нормальные напряжения при изгибе возникают в сечениях, где действует максимальный изгибающий момент, в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в сечениях балки, где действует максимальная поперечная сила

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{xo}}{bI_x}.$$

Касательные напряжения $\tau_{\max}$ обычно малы по сравнению с $\sigma_{\max}$ и в расчетах, как правило, не учитываются. Проверка по касательным напряжениям производится только для коротких балок.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. При расчете балок на прочность необходимо знать характер изменения изгибающего момента и поперечной силы вдоль оси балки и знать положение опасного сечения. С этой целью строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила Q_y в сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил справа или слева от сечения.

Изгибающий момент M_x в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил справа или слева от сечения.

Если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения, то поперечная сила положительна (рис. 24).

Изгибающий момент будет положительным, если при действии момента внешних сил балка искривляется выпуклостью вниз (рис. 25).



Рис. 24

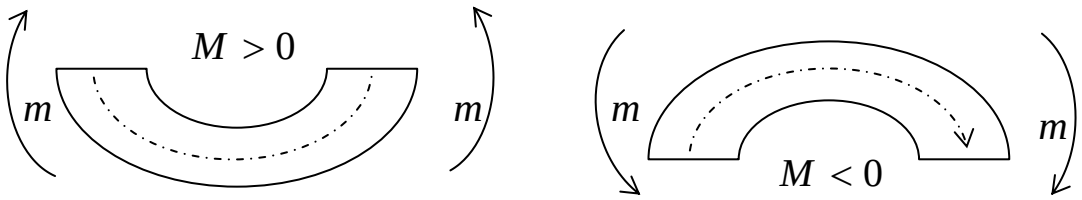


Рис. 25

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов рассмотрим на конкретном примере.

Пусть на балку действует внешний изгибающий момент $m = 6\text{кН}\cdot\text{м}$ и внешняя сила $F = 12\text{кН}$, $l = 1\text{м}$. Определим реакции в опорах A и B. Составим уравнения равновесия моментов всех внешних сил относительно опор A и B

$$\sum M_A = 0;\quad -F\cdot l + m + R_B\cdot 3l = 0;\sum M_B = 0;\quad -R_A\cdot 3l + F\cdot 2l + m = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{F\cdot l - m}{3l} = \frac{12\cdot 1 - 6}{3\cdot 1} = 2\text{кН};\quad R_A = \frac{F\cdot 2l + m}{3l} = \frac{12\cdot 2\cdot 1 + 6}{3\cdot 1} = 10\text{кН}.$$

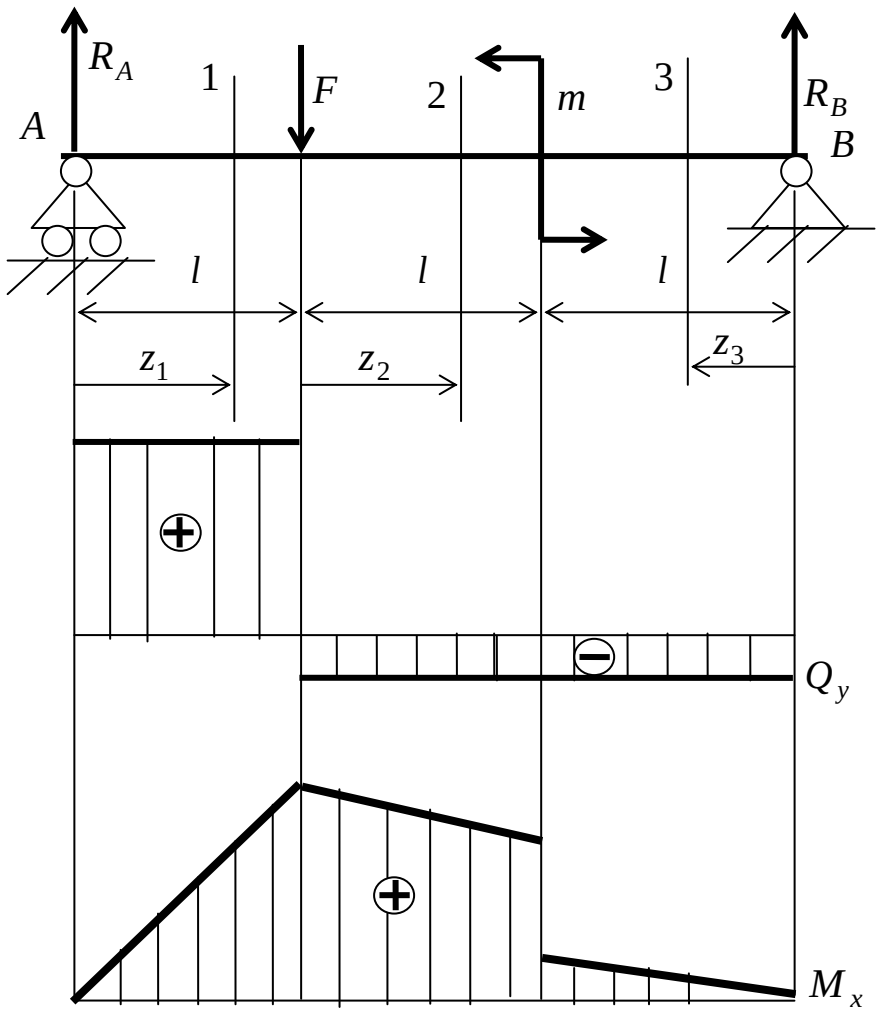


Рис. 26

Проведем сечения на каждом характерном участке и определим значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x.

В сечении 1

$Q_{y1} = R_A;\ M_{x1} = R_A z_1,$ где $0 \le z_1 \le l.$

При $z_1 = 0$м; $Q_{y1} = 10$кН; $M_{x1} = 10 \cdot 0 = 0$кН$\cdot$м;
при $z_1 = l = 1$м; $Q_{y1} = 10$кН; $M_{x1} = 10 \cdot 1 = 10$кН$\cdot$м.

В сечении 2

$Q_{y2} = R_A - F;\ M_{x2} = R_A(l + z_2) - Fz_2,$ где $0 \le z_2 \le l.$

При $z_2 = 0$м, $Q_{y2} = 10 - 12 = -2$кН; $M_{x2} = 10 \cdot 1 = 10$кН$\cdot$м;
при $z_2 = l = 1$м; $Q_{y2} = -2$кН; $M_{x2} = 10(1+1) - 12 \cdot 1 = 8$кН$\cdot$м.

В сечении 3

$$Q_{y3} = -R_B;\ M_{x3} = R_B z_3;\ \ 0 \le z_3 \le l.$$

При $z_3 = 0;\ Q_{y3} = -R_B = -2\text{кН};\ \ M_{x3} = 2 \cdot 0 = 0\text{кН} \cdot \text{м};$
при $z_3 = l = 1\text{м};\ Q_{y3} = -2\text{кН};\ M_{x3} = 2 \cdot 1 = 2\text{кН} \cdot \text{м}.$

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 26).

9 Сложное сопротивление

Понятие о сложном сопротивлении. К сложному сопротивлению относятся такие виды нагружения бруса, при которых в поперечных сечениях возникают одновременно не менее двух внутренних силовых факторов. Исключением является поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя в сечениях возникает изгибающий момент и поперечная сила. Это связано с тем, что в большинстве случаях расчеты на прочность и жесткость проводятся без учета влияние поперечной силы.

Случаи сложного сопротивления можно словно разделить на две группы.

К первой группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным. В эту группу относят косой изгиб (рис. 27,а), изгиб с растяжением (рис. 27,б), внецентренное растяжение-сжатие (рис. 27,в) и др.

При косом изгибе условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \le \left[\sigma_p\right]$$

Условие прочности при изгибе с растяжением, пренебрегая действием поперечных сил, имеет вид:

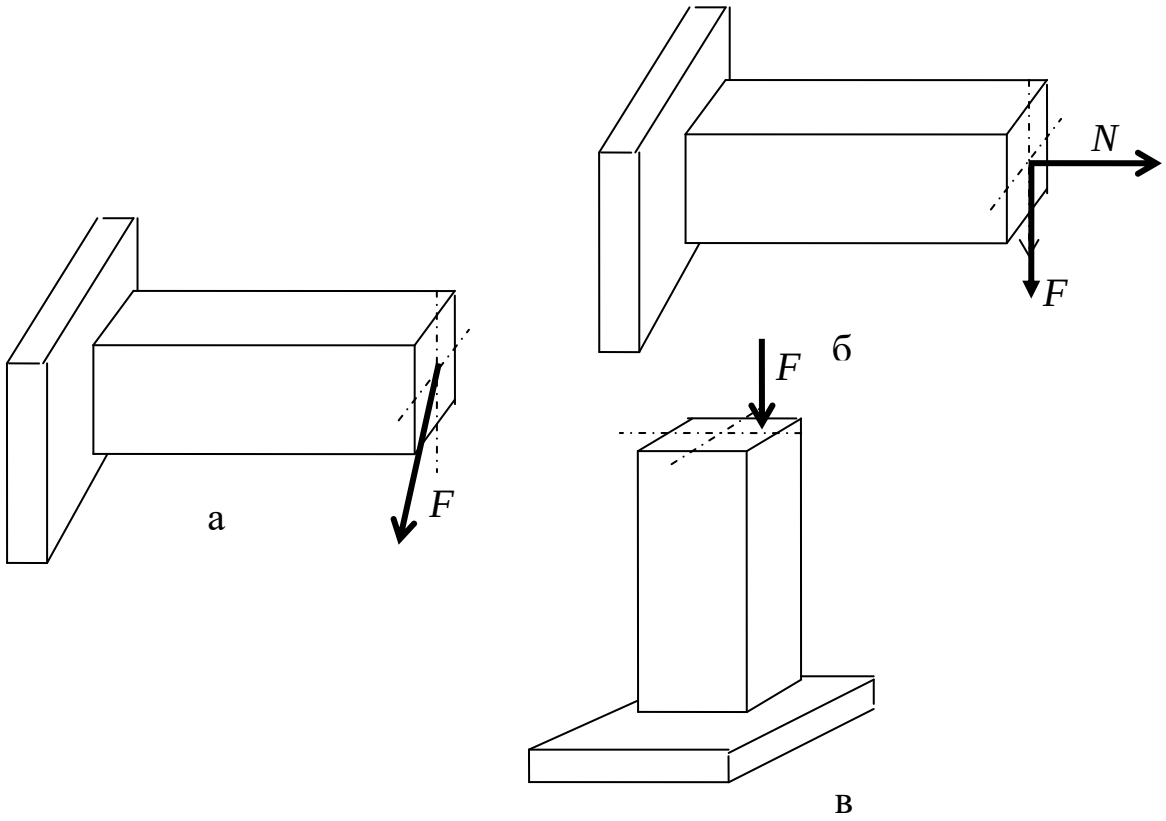


Рис. 27

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{N}{A} \le [\sigma_p].$$

Ко второй группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда напряженное состояние является плоским. Например, изгиб с кручением (рис. 28).

Для случая нагружения, относящейся к первой группе, в отличие от второй группы, нет необходимости в применении гипотез прочности.

Изгиб с кручением. На практике часто встречаются стержни круглого и некруглого сечения, подверженные одновременному действию крутящих и изгибающих моментов.

Такому нагружению подвержены валы машин и механизмов и многих других конструкций.

Для расчета бруса необходимо в первую очередь установить опасные сечения. Для этого необходимо построить эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 28).

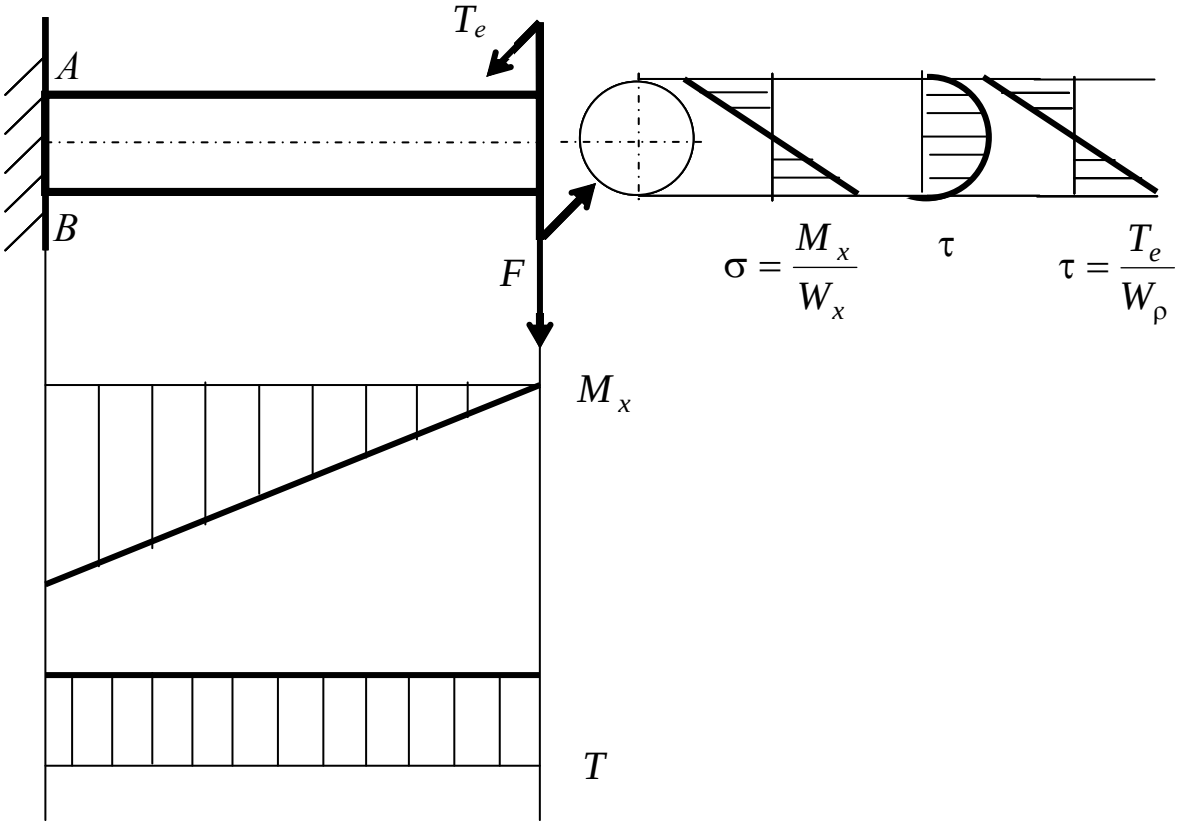


Рис. 28

Начнем с того, что, пользуясь принципом независимости действия сил, определим отдельно напряжения, возникающие в брусе при кручении, и отдельно при изгибе.

От кручения в поперечных сечениях бруса возникают касательные напряжения, достигающие наибольшего значения в точках контура сечения

$$\tau = \frac{T_e}{W_\rho}.$$

При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения, достигающие наибольшего значения в крайних волокнах бруса

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}$$

и касательные напряжения, достигающие наибольшего значения у нейтральной оси, и определяемые по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_{xo}}{I_x b}.$$

Эти напряжения значительно меньше напряжений от крутящего момента, поэтому ими пренебрегают.

Опасное сечение бруса будет у заделки, где действуют максимальные напряжения от изгиба и кручения. Опасными точками будут точки A и B.

Рассмотрим напряженное состояние в наиболее опасной точке A (рис. 29). Так как напряженное состояние двухосное, то для проверки прочности применяет одну из гипотез.

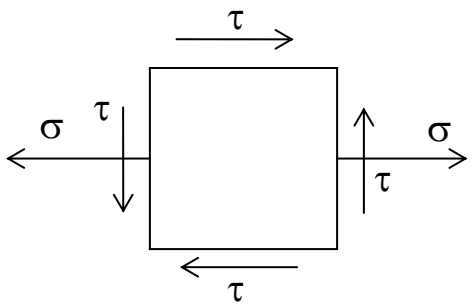


Рис. 29

Применим третью теорию прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma_p].$$

Учитывая, что $\sigma = \dfrac{M_x}{W_x}$ и $\tau = \dfrac{T_e}{2W_x}$, получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{W_x} \le [\sigma_p].$$

Отсюда для подбора сечения находим требуемый момент сопротивления

$$W_x \ge \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{[\sigma_p]}.$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности s вычисляется по формуле

$$s = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{экв}}}.$$

10 Устойчивость сжатых стержней.

Устойчивые и неустойчивые формы равновесия.

Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкций выполнять, предназначенные им функции в эксплуатационных режимах. Наряду с выполнением условий прочности и жесткости, необходимо обеспечить и *устойчивость конструкций*.

При неизменной схеме нагружения, под устойчивостью понимается свойство способности системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Значения внешних сил, при которых происходит потеря устойчивости, называются *критическими*.

Рассмотрим длинный тонкий стержень (рис. 30,а) нагруженный осевой сжимающей силой F. В этом случае возможны две формы равновесия стержня: прямолинейная и криволинейная. При малых значениях силы F стержень сжимается, оставаясь прямолинейным. Если его вывести из положения равновесия, то под действием упругих сил стержень, поколебавшись около положения равновесия, примет начальную форму. В этом случае устойчивой является прямолинейная форма (рис. 30,а).

Если увеличить сжимающую силу F, то при некотором ее значении отклоненный от вертикального положения стержень не возвратится к первоначальному положению по устранению причины, отклонившей его. В этом случае устойчивой является криволинейная форма равновесия (рис. 30,б).

Значение силы, при которой первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется критической силой. Наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму устойчивого равновесия, так же называют критической силой и обозначают $F_{кр}$.

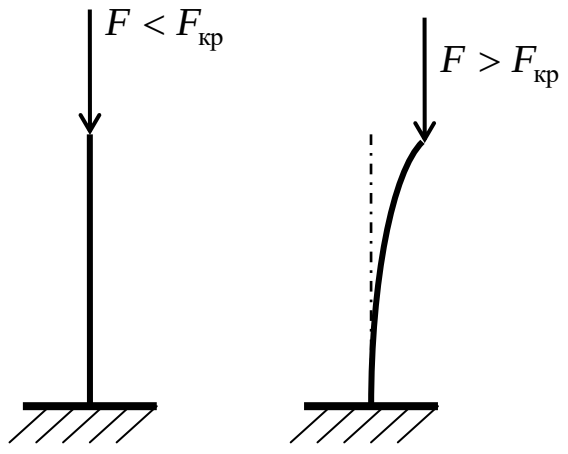


Рис. 30

Определение критической силы. Формула Эйлера. Рассмотрим решение задачи об устойчивости сжатого стержня силой $F_{кр}$, у которого оба конца закреплены шарнирно (рис. 31). Стержень искривился так, что в сечении z прогиб составил y.

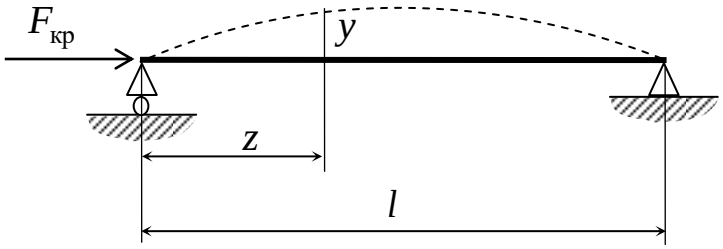


Рис. 31

Записывая дифференциальное уравнение упругой линии балки, и ограничиваясь рассмотрением только малых перемещений, имеем:

$$EI_x y''(z) = M_x(z),$$

где $I_x = I_{\min}$ – минимальный момент инерции сечения.

Изгибающий момент $M_x(z)$, действующий в поперечном сечении стержня, расположенного на расстоянии z от начала системы координат, будет равен

$$M_x = -F_{кр} y.$$

При положительном прогибе в выбранной системе координат знак “минус” означает, что момент является отрицательным. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в направлении минимальной жесткости в этом случае будет иметь вид:

$$EI_{\min} y'' + F_{кр} y = 0.$$

Обозначая $\dfrac{F_{кр}}{EI_x} = k^2$, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно прогиба y

$$y'' + k^2 y = 0$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = A\cos kz + B\sin kz$$

где A и B – постоянные интегрирования.
Постоянные интегрирования определяем из условий равенства нулю прогибов стержня на опорах. В этом случае имеем: при $z=0$, $y=0$, $A=0$; $z=l$, $y=0$, $B\sin kl = 0$. Последнее соотношение справедливо при $kl = \pi n$ (n – любое целое число).

Откуда $k = \dfrac{\pi n}{l}$, с учетом принятого ранее обозначения, получим

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 I_{min} E n^2}{l^2}.$$

Минимальное действительное значение критической силы получится при $n=1$.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 I_{min} E}{l^2},$$

Это и есть *формула Эйлера* для определения критической силы.

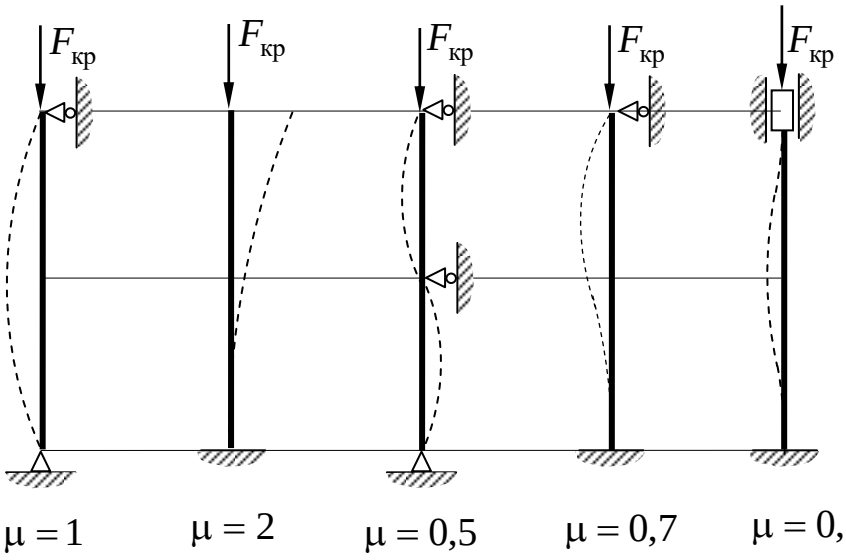


Рис. 32

Влияние способов закрепления концов стержня на критическую силу. Формула Эйлера получена для случая шарнирного закрепления концов стержня, когда потеря устойчивости происходит по одной полуволне. Для других случаев закрепления формула Эйлера принимает вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 I_{\min} E}{(\mu l)^2},$$

где μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня (рис. 32).

Критическое напряжение равно

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ – гибкость стержня.

Пределы применимости формулы Эйлера. При выводе формулы для критических сил и напряжений, использовалось приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, которое было получено в предположении, что материал стержня подчиняется закону Гука. Таким образом, формулу Эйлера можно применять только для значений напряжений, меньших или равных пределу пропорциональности

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{\text{пц}},$$

откуда $\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пр}}}}$. Таким образом, формула Эйлера может применяться при условии, что $\lambda \ge \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пр}}}}$.

В случаях, когда гибкость стержня $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ критическое напряжение определяется по эмпирическим зависимостям. В частности, Ф.С. Ясинский

предложил следующую формулу для критических по устойчивости напряжений:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где $a, b -$ постоянные величины, зависящие от материала стержня.

11 Прочность при переменных напряжениях

Механизм усталостного разрушения. В процессе эксплуатации большинство деталей машин и механизмов подвергаются циклически изменяющимся во времени воздействиям. Несмотря на то, что значение возникающих в деталях машин максимальных напряжений меньше предела прочности, спустя некоторое время при действии переменного напряжения в них возникают трещины, и они разрушаются.

Начало разрушения носит чисто местный характер. Микротрещина образуется в зоне повышенных напряжений, обусловленных конструктивными, технологическими или структурными факторами. При многократном изменении напряжений кристаллы, расположенные в зоне микротрещины, начинают разрушаться, и она проникает в глубь тела.

Контактируемые поверхности в зоне образовавшейся трещины испытывают контактное взаимодействие, в результате чего происходит истирание кристаллов, а поверхности приобретают внешний вид мелкозернистой структуры.

Поперечное сечение в результате развития трещины ослабляется и на последнем этапе происходит внезапное разрушение. Излом при этом имеет характерную поверхность с чистыми неповрежденными кристаллами.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к разрушению, называется *усталостью*. Свойство материала противостоять усталости называется *выносливостью*.

Основные характеристики цикла и предел усталости. При рассмотрении периодической циклической нагрузки обычно ограничиваются синусоидальным законом изменения напряжений (рис. 33) время цикла которого $T_{цикл}$.

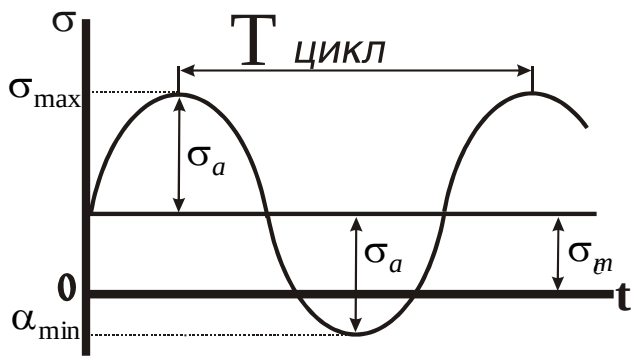


Рис. 33

Среднее напряжение и амплитуда переменного напряжения цикла определяются по зависимостям

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}.$$

Максимальное и минимальное напряжения цикла равны:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \ \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Для характеристики циклов нагружения используются коэффициент асимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Если $r = -1$, то цикл называется симметричным.
Если $r \neq -1$, то цикл называется асимметричным.
Если $r = 0$, то цикл называется пульсационным.

Наиболее распространенными являются испытания в условиях симметричного цикла. При этом обычно используется принцип чистого изгиба вращающегося образца (рис. 34).

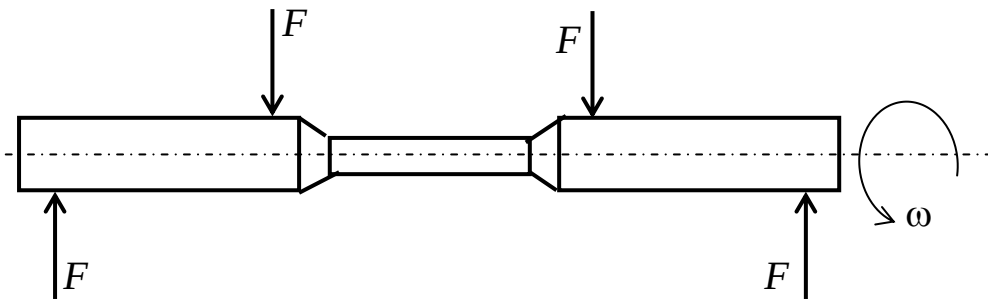


Рис. 34

Для испытаний в условиях несимметричных циклов используются либо специальные машины, либо же вводятся дополнительные

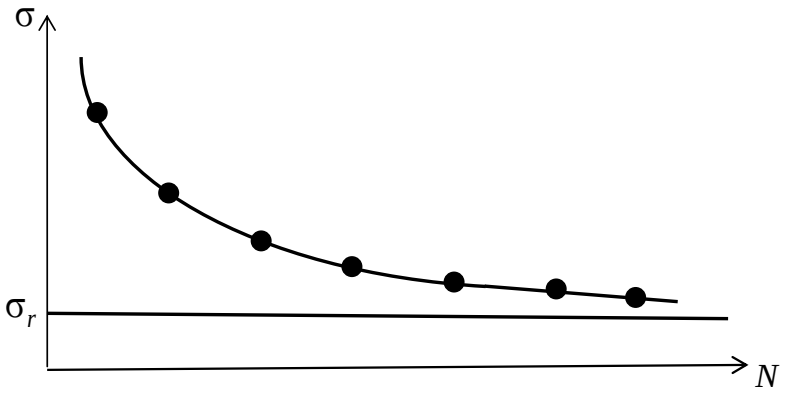


Рис. 35

приспособления. Так, например, можно на испытуемом образце установить пружину, создающую постоянное растяжение образца с напряжением σ_m. Во время испытания на это напряжение накладывается напряжение от изгиба, меняющееся по симметричному циклу. Путем многократных испытаний определяется число циклов, которое выдерживает образец до разрушения , в зависимости от величины напряжения σ в поперечном сечении образца. Эта зависимость имеет вид кривой, показанной на рис. 35.

Как показывают опыты, что для большинства черных металлов можно определить такое наибольшее максимальное напряжение, при котором материал не разрушается при любом числе циклов. Такое напряжение называется *пределом усталости*, или *пределом выносливости*.

Предел выносливости обозначается через σ_r, где индекс r соответствует коэффициенту цикла. Предела выносливости для симметричного цикла имеет обозначение σ_{-1}, для пульсирующего - σ_0.

Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей не удается установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы в дальнейшем. Поэтому в подобных случаях вводится понятие условного предела выносливости. За *условный предел выносливости* принимается напряжение, при котором образец способен выдержать 10^8 циклов.

Так как определение предела выносливости является трудоемкой операцией, поэтому его определяют по эмпирическим формулам через известные механические характеристики материала.

Обычно считается, что для сталей предел выносливости при изгибе составляет половину от предела прочности:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4...0{,}5)\sigma_в .$$

Для высокопрочных сталей можно принять:

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6}\sigma_{в}.$$

Для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}25...0{,}5)\sigma_{в}$$

Аналогично испытанию на чистый изгиб можно вести испытание на кручение в условиях циклически изменяющихся напряжений. В этом случае:

$$\tau_{-1} \approx (0{,}2...0{,}3)\sigma_{в}$$

Факторы, влияющие на сопротивление усталостному разрешению. На величину предела выносливости влияют: форма детали, качество обработки поверхности, абсолютные размеры детали, вид цикла изменения напряжений, частота циклов, эксплутационные и другие факторы.

Влияние формы детали (концентрации напряжений) учитывается эффективным коэффициентом концентрации

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}};\ k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}},$$

где σ_{-1} - предел выносливости стандартного образца при испытании на изгиб;

σ_{-1k} - предел выносливости образца при испытании на изгиб с концентратором;

τ_{-1} - предел выносливости стандартного образца при испытании на кручение;

τ_{-1k} - предел выносливости образца при испытании на кручение с концентратором.

Влияние абсолютных размеров учитывается масштабным фактором

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}};\ \varepsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{-1}},$$

где $\sigma_{-1д}$ – предел выносливости образца заданного размера при испытании на изгиб;

$\tau_{-1д}$ – предел выносливости образца заданного размера при испытании на кручение;

Чем больше размер образца, тем предел выносливости ниже.

Влияние качества обработанной поверхности учитывается коэффициентом качества поверхности

$$\beta_\sigma = \frac{\sigma_{-1п}}{\sigma_{-1}};\ \beta_\tau = \frac{\tau_{-1п}}{\tau_{-1}},$$

где $\sigma_{-1п}$ - предел выносливости образца с заданной обработкой поверхности при испытании на изгиб;

$\tau_{-1п}$ - предел выносливости образца с заданной обработкой поверхности при испытании на кручение.

При этом учитывается влияние механической (точение, шлифование, полировка, накатывание, дробеструйная обработка), термической (закалка, отпуск), химической (азотирование) и других видов обработки поверхности.

Определение коэффициента запаса прочности.

При симметричном цикле **напряжений к**оэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям вычисляются по зависимостям:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}\sigma_{max}};\quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau}\tau_{max}}.$$

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса прочности вычисляется по формуле:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}.$$

При несимметричном цикле напряжений коэффициенты запаса прочности определяются по зависимостям:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}\sigma_{max} + \psi_\sigma \sigma_m}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau}\tau_{max} + \psi_\tau \tau_m},$$

где ψ_σ, ψ_τ – эмпирические величины, определяемые на основе обработки экспериментальных данных.

При сложном напряженном состоянии, возникающем, например, при кручении с изгибом, коэффициент запаса прочности определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}.$$

Литература

1. Прикладная механика: Учеб. пособие / А.Т. Скойбеда, А.А. Миклашевич, Е.Н. Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т. Скойбеды.- Мн.: Выш. шк., 1997. – 552 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов.- М.: Машиностроение,1979.-560 с.
3. Любощиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов.- Мн.: Выш. шк., 1969.- 464 с.
4. Аркуша А.И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. спец. Техникумов.- 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1989. – 352 с.

Оглавление

1 Общие сведения и основные понятия
2 Растяжение – сжатие
3 Геометрические характеристики плоских сечений
4 Теории напряженного состояния
5 Теории прочности.
6 Чистый сдвиг
7 Кручение
8 Плоский изгиб
9 Сложное сопротивление
10 Устойчивость стержней
11 Прочность при переменных напряжениях