

*Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»*

Институт информационных технологий и коммуникаций

Кафедра "Высшая и прикладная математика"

Алгебра. Геометрия

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

для студентов ИЗО по дисциплине
«Алгебра. Геометрия.»

Астрахань 2019

Составители: Черкасова Г.С. ,старший преподаватель кафедры
«Высшая и прикладная математика»
Галяув Е. Р., к.т.н., доцент кафедры «Высшая и
прикладная математика»

Рецензент: Гамзатова А.Г., к.э.н., доцент кафедры «Математи-
ка»

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании
кафедры протокол № 2 от 21.02.2019 г. г.

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ.

Настоящее пособие для студентов индивидуального заочного обучения содержит методические указания и контрольные задания по дисциплине «Алгебра. Геометрия.» Предусматривается выполнение трех контрольных работ, содержащих 10 вариантов. Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы по учебным пособиям, рекомендованным в данных методических указаниях. Здесь же даются также некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить консультацию у преподавателя, указанного в его учебном плане.

Контрольные работы должны быть выполнены в отдельных тетрадях, на обложках которых студенту следует разборчиво написать свою фамилию, имя, отчество, аббревиатуру и номер группы, название дисциплины, номер варианта, который соответствует последней цифре номера зачётной книжки и дату выполнения контрольной работы. Решения задач необходимо приводить в той же последовательности, что и в условиях задач. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед её решением.

В прорецензированной зачётной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и представляют на повторную рецензию. Зачтённые контрольные работы предъявляются студентом при сдаче экзамена или зачёта на кафедру «Высшая и прикладная математика».

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2016. – 816 с.
2. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 1.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 2015. – 304 с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Уч. пособие для втузов. – 17-е изд. – СПб., Изд-во «Профессия», 20015. – 200 с.
4. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко.– М.: Айрис-пресс, 2014. – 576с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2016. – 608 с.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

1. *Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел. Если она содержит m строк и n столбцов, то таблица называется матрицей размерностью $m \times n$. Матрицы записывают в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

через a_{ij} обозначается ее элемент, находящийся в i -й строке и в j -ом столбце. если это важно, то размерность матрицы указывают в ее названии: $A_{m \times n}$. Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей* n -го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы.

Матрица E с элементами $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$ называется *единичной матрицей* n -го порядка.

Замена каждой строки матрицы A ее столбцом называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^T .

Суммой матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ *на число* α называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Пример 1. Вычислить линейную комбинацию $2A+B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

2. Произведением матрицы $A_{m \times l}$ на матрицу $B_{l \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Замечание: произведение матриц определено только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведение матриц содержит столько строк, сколько имеет первая матрица, и столько столбцов, сколько имеет вторая матрица.

Пример 2. Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

в том порядке, в котором оно определено.

Решение. Для заданных матриц определено только произведение

$A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 & -1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 & 3 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ -26 & 14 \end{pmatrix}.$$

3. Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие число, которое называется ее определителем и обозначается

$|A|$ или $\det A$. Определитель матрицы второго порядка вычисляется по правилу

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i -й строки и j -го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Рекуррентная формула для вычисления определителя n -го порядка имеет вид

$$|A| = \det A = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -1$$

4. Матрица A^{-1} называется обратной матрице A ($\det A \neq 0$), если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \quad (2)$$

Элементы a_{ij}^{-1} обратной матрицы $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ij}}{|A|}, \quad (3)$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , матрицы A , а $|A|$ - ее определитель.

Пример 4. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель матрицы $|A| = -1 \neq 0$ [см. пример 2]. Вычислим алгебраические дополнения для ее элементов:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Согласно формуле (3), матрица A^{-1} , обратная к A , имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1} , исходя из определения обратной матрицы (2) и используя формулу (1) (см. пример 1):

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

5. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными
 x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (4)$$

где a_{ij} - коэффициенты системы; b_i - свободные члены. Определитель третьего порядка Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*. Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (4) выражается *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (5)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 или 3-го столбца соответственно свободными членами b_1, b_2, b_3 .

Систему (4) можно записать в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид

$$X = A^{-1}B, \quad (6)$$

если определитель системы отличен от нуля.

Пример 5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. а) Решим используя формулы Крамера.

Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad [\text{см. пример 2}]$$

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

По формулам Крамера (5) найдем:

$$x_1 = \frac{1}{-1} = -1, \quad x_2 = \frac{-2}{-1} = 2, \quad x_3 = \frac{-1}{-1} = 1.$$

б) Найдем решение системы с помощью обратной матрицы.

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу A^{-1} [см. пример 3]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное решение системы в силу формулы (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда следует (из условия равенства двух матриц), что $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

6. Матрица A_r называется *ступенчатой*, если ниже главной диагонали все ее элементы равны нулю; например,

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица A может быть приведена к ступенчатому виду A_r путем элементарных преобразований: а) перестановкой строк; б) умножения строки на число, отличное от нуля; в) прибавления к элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число отличное от нуля.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными*: $A \sim A_r$.

Число r строк, ступенчатой матрицы A_r , не зависит от способа приведения матрицы A к ступенчатому виду и называется *рангом* исходной матрицы A : $r(A)=r$. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

7. Однородная система m линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0.$$

Если у однородной системы (7) $r(A)=n$, то она имеет только нулевое решение.

Если у однородной системы (7) $r(A)<n$, то она имеет ненулевые решения.

Пример 6. Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы A и преобразуем ее к ступенчатому виду A_r путем элементарных преобразований [см. пункт 6]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим 1-ю строку на (-2) и затем прибавим ее ко 2-й. Аналогично, умножим 1-ю строку на (-1) и прибавим к 3-ей:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим 2-ю строку на (-1), а затем прибавим ее к 3-й строке:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число неизвестных $n=4$, $r(A)=2$. Поскольку $r(A)<n$, то однородная система имеет ненулевые решения. Выпишем систему, которая соответствует полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_3 и x_4 - свободные, их можно задавать произвольно. Обозначим $x_3 = C_1$ и $x_4 = C_2$, где C_1 и C_2 - любые вещественные числа. Тогда получаем

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - C_1 + C_2 = 0; \\ 5x_2 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 - 8C_2/5; \\ x_2 = -C_2/5. \end{cases}$$

8. Вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \neq 0$ называется *собственным векто-*

ром квадратной матрицы A n -го порядка, соответствующим собственному значению λ , если он удовлетворяет матричному уравнению

$$AX = \lambda X, \text{ или } (A - \lambda E)X = 0.$$

Здесь E - единичная матрица n -го порядка, а 0 – нулевой вектор-столбец. При условии, что вектор $X \neq 0$, получаем *характеристическое уравнение* для определения собственных значений λ :

$$\det(A-\lambda E)=0 \quad (8)$$

Координаты собственного вектора X_i , соответствующего собственному значению λ_i , являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\dots+a_{2n}x_n=0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n=0. \end{cases} \quad (9)$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

Пример 7. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид (8):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$. Собственный вектор X_1 , соответствующий $\lambda_1=4$, определяется из системы уравнений вида (9)

$$\begin{cases} (1-4)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2-4)x_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = 2t$, $x_2 = t$. Следовательно, первый собственный вектор есть $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

Второй собственный вектор X_2 , соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -1$, определяется из системы уравнений вида (9):

$$\begin{cases} (1+1)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2+1)x_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений также сводится к одному уравнению. Полагая $x_2 = t$, получаем, что $x_1 = -3t$, $x_2 = t$. Следовательно, второй собственный вектор есть $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

Таким образом, матрица A имеет два собственных различных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ и два собственных вектора, равных (с точностью до постоянного множителя) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$, $X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

9. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ называется число, определяемое равенством

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (10)$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Длина вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (11)$$

Из формулы (10) следует, что

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (12)$$

10. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна произведению длин векторов

сомножителей на синус угла между ними и который направлен перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 1):

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \quad (13)$$

Геометрически $|\vec{c}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

11. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ есть число равное

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Пример 8. По координатам вершин пирамиды $A_1(3; -2; 2)$, $A_2(1; -3; 1)$, $A_3(2; 0; 4)$, $A_4(6; -4; 6)$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3 ; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 ; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

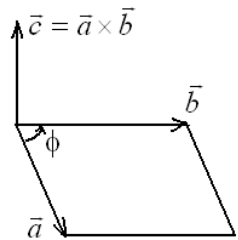


Рис.1

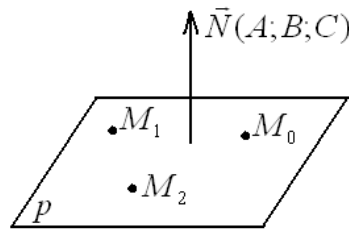


Рис.2

Решение. 1) Находим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1-3)\vec{i} + (-3-(-2))\vec{j} + (1-2)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k};$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-3)\vec{i} + (0-(-2))\vec{j} + (4-2)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_3 , находим по формуле (11):

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$|\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ находим по формуле (10):

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -2,$$

а косинус угла между ними – по формуле (12):

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}|} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} \approx -0,27.$$

Отсюда следует, что φ – тупой угол, равный $\pi - \arccos 0,27 = 1,84$ рад с точностью до 0,01. Это есть искомый угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 .

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, т.е. половине модуля векторного произведения этих векторов [см. формулу 13]:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке [см. пример 2]. Следовательно,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

4) Объем V пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Найдем вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1 A_4} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Используя формулу (14), получаем

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{A_1 A_2} \overrightarrow{A_1 A_3} \overrightarrow{A_1 A_4}| = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \bmod (-30) = 5.$$

12. Общее уравнение плоскости P имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ - нормальный вектор плоскости (рис.2).

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ и $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, определяется как угол между $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$; косинус этого угла находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}. \quad (16)$$

Пример 9. Найти угол между плоскостью P_1 , проходящей через точки $A_1(2; -4; 1)$, $A_2(-1; 2; 0)$, $A_3(0; -2; 3)$, и плоскостью P_2 , заданной уравнением $5x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости P_1 находим по формуле (15):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -1-2 & 2+4 & 0-1 \\ 0-2 & -2+4 & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $7(x-2) + 4(y+4) + 3(z-1) = 0$, $7x + 4y + 3z - 1 = 0$.

По уравнениям плоскостей определяем их нормальные векторы: $\vec{N}_1 = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Угол φ между плоскостями P_1 и P_2 находим по формуле (16):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} \approx 0,64,$$

откуда $\varphi = \arccos 0,64 \approx 0,86$ рад.

13. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (17)$$

Пример 10. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(4; -3; 1)$ и $A_2(5; -3; 0)$.

Решение. Используя формулу (17), получаем

$$\frac{x-4}{5-4} = \frac{y-(-3)}{-3-(-3)} = \frac{z-1}{0-1}, \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{-1}.$$

Равенство нулю знаменателя второй дроби означает, что прямая принадлежит плоскости $y = -3$.

14. Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y , т.е. уравнения вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (18)$$

называются *кривыми второго порядка*.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки этой же плоскости на одно и то же расстояние $R > 0$. Точка A называется *центром*, а R - *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad (19)$$

где $(a; b)$ - координаты ее центра (рис. 3). Уравнение (19) называется *каноническим уравнением окружности*.

15. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек

этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

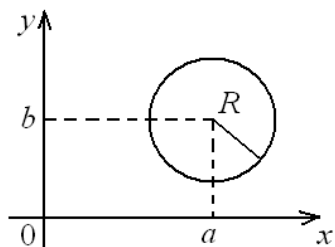


Рис. 3.

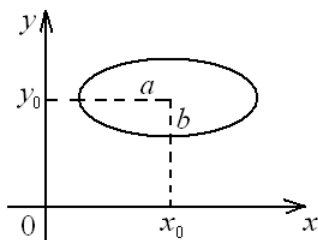


Рис. 4.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (20)$$

где a - большая полуось, b - малая полуось

Уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (21)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра эллипса (рис. 4).

16. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (22)$$

где a - действительная полуось, b - мнимая полуось гиперболы.

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (23)$$

где $(x_0; y_0)$ - координаты центра гиперболы (рис. 5).

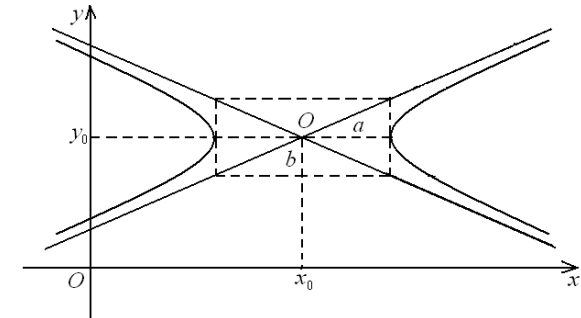


Рис. 5

17. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \quad (24)$$

где число $p > 0$ - расстояние от фокуса до директрисы, называемое параметром параболы.

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат, имеет уравнение

$$x^2 = 2py, \quad (25)$$

На рисунках 6-9 приведены уравнения и графики парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям.

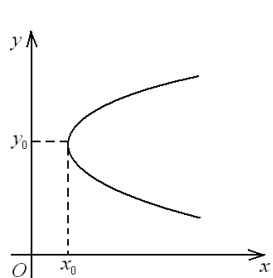


Рис. 6. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

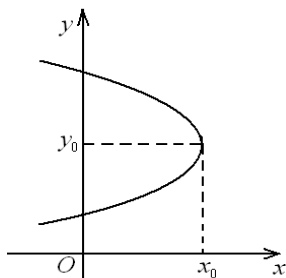


Рис. 7. $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

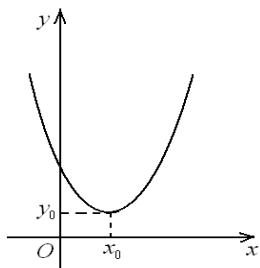


Рис. 8. $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

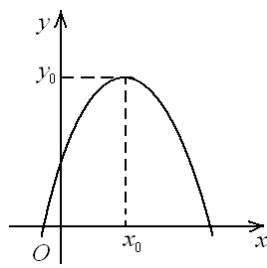


Рис. 9. $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

Пример 11. Упростить уравнение кривой и установить ее вид:

$$4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y - 89 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4(x^2 - 6x) - 25(y^2 - 2y) = 89$$

и каждую из скобок дополним до полного квадрата

$$4(x^2 - 6x + 9) - 25(y^2 - 2y + 1) = 89 + 36 - 25.$$

Следовательно,

$$4(x - 3)^2 - 25(y - 1)^2 = 100$$

и разделив обе части полученного равенства на 100, окончательно получаем

$$\frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы (23) с центром в точке (3;1).

Пример 12. Привести уравнение кривой второго порядка $4y^2 + 8y - 2x - 1 = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $2x - 4y + 1 = 0$. Построить графики кривой и прямой.

Решение. Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду для чего разрешим его относительно x

$$x = 2y^2 + 4y - \frac{1}{2}$$

и преобразуем его к виду: $x = 2\left(y^2 + 2y + 1\right) - 2 - \frac{1}{2}$, $x + \frac{5}{2} = 2(y+1)^2$.

Это уравнение параболы, вершина которой находится в точке $\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. ось симметрии параболы параллельна оси Ox ; ветви параболы направлены вправо [см. рисунок 6].

Найдем точки пересечения прямой и параболы:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4y^2 + 8y - 2x - 1 = 0, \\ 2x - 4y + 1 = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 8y - (4y - 1) - 1 = 0, \\ 2x = 4y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 4y = 0, \\ 2x = 4y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+1) = 0, \\ 2x = 4y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2, y_1 = 0, \\ x_2 = -5/2, y_2 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили две точки пересечения $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ и $B\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$.

Строим графики параболы и прямой (рис.10).

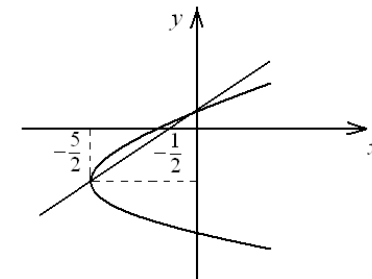


Рис. 10

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.

I. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления. Проверить правильность вычисления обратной матрицы, используя матричное умножение.

$$1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - 5x_3 = -9 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \\ -2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11 \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

II. Найти множество решений однородной системы трех линейных уравнений с четырьмя переменными.

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
5. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\
7. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \\
9. \begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} & 10. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}
\end{array}$$

III. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы второго порядка.

$$\begin{array}{lll}
1. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
4. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & 5. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
7. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & 8. \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & 9. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
10. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

IV. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:
 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 ;
 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой A_1A_2 ; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между прямой A_1A_2 и плоскостью.

$$\begin{array}{l}
1. A_1(-1;2;1), A_2(-2;2;5), A_3(-3;3;1), A_4(-1;4;3). \\
2. A_1(-2;1;-1), A_2(-3;1;3), A_3(-4;2;-1), A_4(-2;3;1).
\end{array}$$

3. $A_1(1;1;2), A_2(0;1;6), A_3(-1;2;2), A_4(1;3;4).$
4. $A_1(-1;-2;1), A_2(-2;-2;5), A_3(-3;-1;1), A_4(-1;0;3).$
5. $A_1(2;-1;1), A_2(1;-1;5), A_3(0;0;1), A_4(2;1;3).$
6. $A_1(-1;1;-2), A_2(-2;1;2), A_3(-3;2;-2), A_4(-1;3;0).$
7. $A_1(1;2;1), A_2(0;2;5), A_3(-1;3;1), A_4(1;4;3).$
8. $A_1(-2;-1;1), A_2(-3;-1;5), A_3(-4;0;1), A_4(-2;1;3).$
9. $A_1(1;-1;2), A_2(0;-1;6), A_3(-1;0;2), A_4(1;1;4).$
10. $A_1(1;-2;1), A_2(0;-2;5), A_3(-1;-1;1), A_4(1;0;3).$

V. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x;y)=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax+By+C=0$. Построить графики кривой и прямой.

1. $2x^2-4x-y+3=0, 2x-y-1=0.$
2. $x-2y^2+4y-3=0, x-2y+1=0.$
3. $x^2-2x-y+2=0, x-y=0.$
4. $x-y^2+2y-2=0, x+y-2=0.$
5. $x^2-2x+y+2=0, x-y-2=0.$
6. $x+y^2-2y+3=0, x+y+1=0.$
7. $2x^2+8x+y+7=0, 2x+y+3=0.$
8. $x+2y^2-4y+4=0, x-2y+4=0.$
9. $x^2+4x+y+3=0, x-y+3=0.$
10. $x+2y^2+4y+1=0, x+2y+1=0.$