

*Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Астраханский государственный технический университет»
Институт информационных технологий и коммуникаций
Кафедра математики*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа, методические указания, контрольные задания по
дисциплине «математический анализ» для студентов-
заочников
направлений подготовки
Института информационных технологий
и коммуникаций

Астрахань 2019

Автор:

Шамайло О.Н. – к.п.н., доцент кафедры «Математика»

Рецензент:

Жуков В.М. – к.т.н., доцент кафедры «Математика»

Ш19 Математический анализ.

Программа, методические указания, контрольные задания по дисциплине «Математический анализ» для студентов-заочников направлений подготовки института информационных технологий и коммуникаций. / О.Н. Шамайло. – Астрахань: АГТУ, 2019. – 84с.

Одобрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе заседанием кафедры «**Математика**», протокол № 9 от 29.08.19

Предисловие

Данное пособие «Математический анализ» представляет собой программу, методические указания, контрольные задания по дисциплине «математический анализ» для студентов-заочников направлений подготовки Института информационных технологий и коммуникаций АГТУ. Пособие содержит подробные разъяснения к решению контрольных заданий, что делает удобным его использование студентами при самостоятельном изучении материала. Настоящее пособие будет полезно также для студентов и слушателей всех форм обучения с использованием дистанционных образовательных технологий, а также для студентов высших технических учебных заведений, изучающих математический анализ.

Методика изучения математической дисциплины в высшем учебном заведении студентами заочной формы обучения

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом: по математическим дисциплинам она складывается из чтения учебников, решения задач и выполнения контрольных заданий. В помощь студентам-заочникам вузы организуют чтение лекций и практические занятия, кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для консультаций. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов является сдача зачётов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего.

2. Особое внимание следует обращать на определения основных понятий, подробно разбирать примеры, поясняющие эти определения, уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса.

3. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом ре-

комендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

6. Решение задач одного определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя каждый раз по учебнику.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задач получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, он может обратиться на кафедру математики для получения консультации.

2. Запрос о консультации не должен превращаться в просьбу решить ту или иную задачу из контрольной работы студента.

Контрольные работы

1. В процессе изучения дисциплины «Математический анализ» студент должен выполнить шесть контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в его учебной работе.

2. **Контрольные работы №1, №2, №3** выполняются студентами первого курса. Они включает задачи по разделам: **введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, функции нескольких переменных, неопределенный и определенный интегралы.**

3. **Контрольные работы №4, №5, №6** выполняются студентами второго курса. Они включают задачи по разделам: **дифференциальные уравнения, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, ряды.**

4. Оформленную контрольную работу студент присылает (приносит) в заочный деканат на рецензию. Правила оформления работ приведены в конце данного пособия. Наличие зачетов по контрольным работам является допуском к экзамену (зачету).

5. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельное выполнение работ не даст возможность студенту успешно усвоить теорию и закрепить ее практикой, что неизбежно приведет к затруднениям на экзамене.

6. Прорецензированные и зачтенные контрольные работы студент должен представить преподавателю при сдаче экзамена.

Лекции и практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения того или иного раздела курса, подчеркнуть важнейшие факты, указать главные практические приложения.

Программа курса

Введение в математический анализ

1. Числовые последовательности и операции над ними. Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно малые последовательности.
2. Сходящиеся последовательности и их основные свойства. Методы вычисления пределов числовых последовательностей.
3. Предел функции в точке. Предел функции на бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Методы вычисления пределов функций.
4. Бесконечно малые функции и бесконечно большие функции их основные свойства.
5. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Их использование при вычислении пределов.
6. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных в точке функций. Точки разрыва функции и их классификация.
7. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

15. Производная функция. Ее физическая и геометрическая интерпретация. Понятие дифференцируемости функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
16. Понятие дифференциала функции.
17. Производная суммы, произведения, частного сложной функции.
18. Вычисления производных элементарных функций.
19. Производная обратной функции. Вычисления производных обратных функций. Логарифмическая производная.
20. Производная параметрической и неявно заданной функции.
21. Инвариантность формы первых дифференциалов. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
22. Производная и дифференциалы высших порядков.
23. Теоремы Ферма, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталья.

24. Формула Тейлора. Различные формы остаточного члена. Формула Маклорена.
25. Условие возрастания и убывания функций. Точки локального экстремума. Необходимые условия локального экстремума. Достаточные условия локального экстремума.
26. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на замкнутом отрезке.
27. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
28. Асимптоты кривых.
29. Общая схема исследования функции и построение графиков.

Функции нескольких переменных

30. Понятие функции нескольких переменных.
31. Предельное значение функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия его существования.
32. Непрерывные функции нескольких аргументов и их свойства.
33. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость. Дифференцирование сложной функции.
34. Дифференциал функции нескольких переменных.
35. Производная по направлению. Градиент.
36. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
37. Дифференцирование неявных функций.
38. Локальный экстремум. Необходимые условия локального экстремума.
39. Достаточные условия существования локального экстремума.

Неопределенный и определенный интегралы

40. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
41. Основные методы интегрирования. Замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование простейших дробей.

- 42. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.
- 43. Интегрирование рациональных дробей.
- 44. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.
- 45. Интегрирование иррациональных выражений.
- 46. Задачи, приводящие к понятию интеграла. Определение определенного интеграла. Теорема существования. Свойства определенного интеграла.
- 47. Интегралы с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
- 48. Геометрические физические приложения определенного интеграла.
- 49. Несобственные интегралы. Признаки сходимости.

Дифференциальные уравнения

- 50. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
- 51. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.
- 52. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.
- 53. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
- 54. Линейные уравнения высших порядков. Линейные однородные уравнения. Структура общего решения.
- 55. Линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных. Метод подбора частного решения.
- 56. Системы дифференциальных уравнений.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

- 57. Обобщенное понятие интеграла по мере. Двойной интеграл и его свойства.

58. Вычисление двойного интеграла. Замена переменных. Приложение двойного интеграла.
59. Тройной интеграл и его свойства. Вычисление тройного интеграла. Сферические и цилиндрические координаты. Приложение тройного интеграла.
60. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам.
61. Определение криволинейных интегралов I-го и II-го рода, их основные свойства и вычисление.
62. Геометрические и механические приложения.
63. . Определение поверхностных интегралов, их свойства, вычисление и приложение.

Ряды

64. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Арифметические операции над рядами.
65. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.
66. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
67. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
68. Функциональные ряды. Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
69. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и границы сходимости. Свойства степенных рядов.
70. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
71. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.
72. Ряды Фурье для периодических функций. Теорема Дирихле.
73. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.
74. Практический гармонический анализ.

Образец выполнения заданий по разделу «Введение в математический анализ»

1. Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8}{x^3 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} = 2.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 2)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{1 + 1 - 2}{-1} = 0.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{x^2-9}(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+13-4x-4)}{\sqrt[3]{x^2-9}(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{x-3} \cdot \sqrt[3]{x+3}(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} =$$

$$= -3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+3}(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -3 \frac{0}{\sqrt[3]{6(4+4)}} = 0$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{4x^2} =$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{4x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{4x^2} \cdot (1+1+1) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x^2}{4 \cdot 4 \cdot x^2} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентными бесконечно малыми $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2} = \left[\frac{0}{0} \right];$$

Сделаем замену переменной:

$$x-2=t \Rightarrow t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2; x=t+2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(5-2t-4)}{\sqrt{10-3t}-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2t)}{\sqrt{4-3t}-2} =$$

(известно, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{\sqrt{4-3t}-2} = \left[\frac{0}{0} \right] = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{4-3t}+2)}{(\sqrt{4-3t}-2)(\sqrt{4-3t}+2)} = \\
&= -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{4-3t}+2)}{4-3t-4} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{4-3t}+2)}{-3t} = \\
&= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt{4-3t}+2) = \frac{2}{3}(2+2) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-3x}{2-3x} \right)^{2-5x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1-3x}{2-3x} - 1 \right)^{2-5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1-3x-2+3x}{2-3x} \right)^{2-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{2-3x} \right)^{\frac{2-3x}{-1}} \right]^{\frac{-1}{2-3x}(2-5x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{5x-2}{2-3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x(5-\frac{2}{x})}{x(\frac{2}{x}-3)}} = e^{\frac{5-0}{0-3}} = e^{-\frac{5}{3}}.$$

2. Исследуйте функцию на непрерывность. Определить характер точек разрыва. Сделать чертеж.

2.1. $y = 5^{\frac{2}{3-x}}$ Функция элементарная, следовательно, непрерывная во всех точках области определения. ОДЗ: $x \neq 3$. Поэтому функция непрерывна при $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 3$.

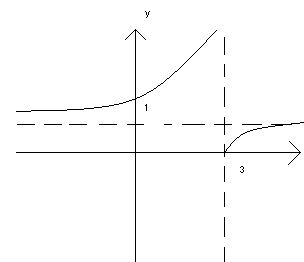
$$\lim_{x \rightarrow 3-0} y = \lim_{x \rightarrow 3-0} 5^{\frac{2}{3-x}} = 5^{\frac{2}{3-(3-0)}} = 5^{\frac{2}{3-3+0}} = 5^{\frac{2}{+0}} = 5^{+\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y = \lim_{x \rightarrow 3+0} 5^{\frac{2}{3-x}} = 5^{\frac{2}{3-(3+0)}} = 5^{\frac{2}{3-3-0}} = 5^{\frac{2}{-0}} = 5^{-\infty} = 0.$$

Так как один из односторонних пределов есть ∞ , то в точке $x = 3$ функция терпит разрыв 2-го рода (бесконечный разрыв).

Сделаем схематичный чертеж (рис.1), предварительно вычислив:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5^{\frac{2}{3-x}} = 5^{\frac{2}{\pm\infty}} = 5^0 = 1$$



(рис.1)

$$2.2. y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x < -1 \\ 3x, & \text{если } -1 \leq x \leq 3 \\ x + 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Функция задана различными аналитическими выражениями, которые являются элементарными функциями, следовательно, непрерывными в области своего задания. Поэтому разрыв возможен при смене аналитического выражения, т.е. в точках $x = -1$ и $x = 3$.

Исследуем поведение функций в указанных точках:

$$x = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x^2 - 4) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} 3x = 3(-1) = -3.$$

$$y(-1) = 3x|_{x=-1} = 3(-1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} y = y(-3).$$

Следовательно, функция непрерывна в точке $x = -1$.

$x = 3$;

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} y = \lim_{x \rightarrow 3-0} 3x = 3 \cdot 3 = 9$$

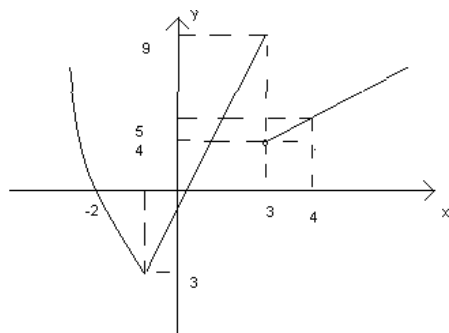
$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x+1) = 3+1 = 4$$

$$y(3) = 3x|_{x=3} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y \neq \lim_{x \rightarrow 3-0} y = y(3).$$

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв 1-го рода (разрыв-скачок).

Сделаем чертеж (рис.2).



(рис.2)

Образец выполнения заданий по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1. Пользуясь таблицей производных и основными правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$1.1. y = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x} \right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \right)' \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x} \right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x} \right)' = \\ &= \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} - 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right) \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x} \right) \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} \left(-\frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x^3-1}{x} \right) + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(1 - \sqrt[3]{x^2} \right) \left(\frac{2x^3+1}{x^2} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{x} \cdot x^3} \left((1-x^3)(1+x^2) + 3x(1-\sqrt[3]{x^2})(2x^3+1) \right). \end{aligned}$$

$$1.2. y = \frac{\sin x - 2}{\operatorname{tg} x + 3}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x - 2)'(\operatorname{tg} x + 3) - (\sin x - 2)(\operatorname{tg} x + 3)'}{(\operatorname{tg} x + 3)^2} = \\ &= \frac{\cos x(\operatorname{tg} x + 3) - (\sin x - 2) \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x + 3)^2} = \frac{(\sin x + 3 \cos x) \cos^2 x - (\sin x - 2)}{(\operatorname{tg} x + 3)^2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin x \cdot \cos^2 x + 3 \cos^3 x - \sin x + 2}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 3)^2}. \end{aligned}$$

$$1.3. y = x^3 \arctg x$$

$$y' = (x^3)' \arctg x + x^3 (\arctg x)' = 3x^2 \arctg x + x^3 \frac{1}{1+x^2}.$$

$$1.4. y = \ln^2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x.$$

$$y' = (\ln^2 t g x)' - \frac{1}{4} (t g^4 x)' = 2 \ln t g x (\ln t g x)' - \frac{1}{4} \cdot 4 t g^3 x (t g x)' =$$

$$= 2 \ln t g x \frac{1}{t g x} (t g x)' - t g^3 x \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \ln t g x \cdot c t g x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} (2 \ln t g x \cdot c t g x - t g^3 x)$$

$$1.5. y = \cos^3(2^{t g x})$$

$$y' = (\cos^3(2^{t g x}))' = 3 \cos^2(2^{t g x}) (\cos 2^{t g x})' = 3 \cos^2(2^{t g x}) (-\sin(2^{t g x})) (2^{t g x})' =$$

$$= -3 \cos^2(2^{t g x}) \sin(2^{t g x}) \cdot 2^{t g x} \cdot \ln 2 (t g x)' = -3 \ln 2 \cdot \cos^2(2^{t g x}) \sin(2^{t g x}) \cdot 2^{t g x} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$1.6. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$y' = (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' - \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' -$$

$$- \frac{(\sqrt{1+x^2})' \cdot x - \sqrt{1+x^2} \cdot x'}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) - \frac{\frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot x - \sqrt{1+x^2} \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} -$$

$$- \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2 - (1+x^2)}{x^2 \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}.$$

$$1.7. y = (tgx)^{\frac{\ln tgx}{4}}.$$

Дана степенно-показательная функция. Применим метод логарифмического дифференцирования.

$$\ln y = \ln (tgx)^{\frac{\ln tgx}{4}},$$

$$\ln y = \frac{\ln tgx}{4} \cdot \ln tgx,$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{4} (\ln^2 tgx)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{4} \cdot 2 \ln tgx \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = y \cdot \frac{1}{2} \ln tgx \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{(tgx)^{\frac{\ln tgx}{4}} \cdot \ln tgx}{\sin 2x}.$$

$$1.8. y = \ln \sin \left(\frac{2x+4}{x+1} \right).$$

$$y' = \frac{1}{\sin \left(\frac{2x+4}{x+1} \right)} \cdot \cos \left(\frac{2x+4}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{2x+4}{x+1} \right)' = ctg \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$\cdot \frac{(2x+4)'(x+1) - (2x+4)(x+1)'}{(x+1)^2} = ctg \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$\cdot \frac{2(x+1) - (2x+4)1}{(x+1)^2} = ctg \frac{2x+4}{x+1} \cdot \frac{2x+2-2x-4}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} ctg \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$1.9. y = \frac{(x^2-1)\sqrt[4]{2x^2-8x}}{\sqrt[3]{3x+1}}.$$

Можно применить метод логарифмического дифференцирования.

$$\ln y = \ln \frac{(x^2-1)\sqrt[4]{2x^2-8x}}{\sqrt[3]{3x+1}};$$

$$(\ln y)' = \left(\ln(x^2 - 1) + \frac{1}{4} \ln(2x^2 - 8x) - \frac{1}{3} \ln(3x + 1) \right)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{4x - 8}{2x^2 - 8x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x + 1} \cdot 3,$$

$$y' = y \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x - 2}{2x^2 - 8x} - \frac{1}{3x + 1} \right),$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1) \sqrt[4]{2x^2 - 8x}}{\sqrt[3]{3x + 1}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x - 2}{2x^2 - 8x} - \frac{1}{3x + 1} \right).$$

1.10. $3^{x+y} = 9^{x^2-y}$

Функция задана неявно. Дифференцируем обе части.

$$\left(3^{x+y} \right)' = \left(9^{x^2-y} \right)',$$

$$3^{x+y} \cdot \ln 3 \cdot (x+y)' = 9^{x^2-y} \ln 9 \cdot (x^2 - y)',$$

$$3^{x+y} \cdot \ln 3 \cdot (1+y') = 9^{x^2-y} 2 \ln 3 \cdot (2x - y'),$$

$$3^{x+y} + y' \cdot 3^{x+y} = 4x \cdot 9^{x^2-y} - y' \cdot 2 \cdot 9^{x^2-y},$$

$$y' \left(3^{x+y} + 2 \cdot 9^{x^2-y} \right) = 4x \cdot 9^{x^2-y} - 3^{x+y},$$

$$y' = \frac{4x \cdot 9^{x^2-y} - 3^{x+y}}{3^{x+y} + 2 \cdot 9^{x^2-y}}.$$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2.1. $y = \frac{\ln x}{x^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln(x^2) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - \ln x \cdot 2}{x^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \left(\frac{1-2\ln x}{x^3} \right)' = \frac{(1-2\ln x)' \cdot x^3 - (1-2\ln x)(x^3)'}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - (1-2\ln x) \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2x^2 + 3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = -\frac{5-6\ln x}{x^4}.\end{aligned}$$

2.2. $x = t \operatorname{tg} t$; $y = \frac{1}{\sin 2t}$. Функция задана параметрически.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ где } y'_t = \left(\frac{1}{\sin 2t} \right)' = -\frac{\cos 2t}{\sin^2 2t} \cdot 2; \quad x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2\cos 2t}{4\sin^2 t \cdot \cos^2 t} \cdot \frac{\cos^2 t}{1} = -\frac{\cos 2t}{2\sin^2 t}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)'_t}{x'_t}; \text{ где } \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t = \left(-\frac{\cos 2t}{2\sin^2 t} \right)' = \\ &= -\frac{-2\sin 2t \cdot \sin^2 t - \cos 2t \cdot 2\sin t \cdot \cos t}{2 \cdot \sin^4 t} = \\ &= \frac{\sin 2t(2\sin^2 t + \cos 2t)}{2\sin^4 t} = \frac{\sin 2t(1 - 2\cos 2t)}{2\sin^4 t} = \frac{\cos t}{\sin^3 t}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\cos t}{\sin^3 t} : \frac{1}{\cos^2 t} = \operatorname{ctg}^3 t.\end{aligned}$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8 \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 12x = 3x(x-4) \\ f'(x) &= 0, \quad 3x(x-4) = 0, \quad x = 0 \in [-1; 2], \quad x = 4 \notin [-1; 2]\end{aligned}$$

$$f(0) = 8$$

$$f(-1) = -1 - 6 + 8 = 1$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 = 8 - 24 + 8 = -8.$$

$$f_{\text{наиб.}} = 8 \text{ при } x = 0; \quad f_{\text{наим.}} = -8 \text{ при } x = 2.$$

4. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{1/x} = \frac{2 - 2}{1} = 0.$$

5. Провести полное исследование свойств данных функций и построить их графики.

5.1. $y = (x - 2) + \frac{4}{(x - 2)}.$

1) Область определения: $x \neq 2 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$

2) Множество значений $y = (x - 2) + \frac{4}{x - 2} \Rightarrow (x - 2)^2 - y(x - 2) + 4 = 0,$

уравнение квадратное относительно $(x - 2)$ и имеет решение, если

$$D \geq 0, \text{ т.е. } y^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow$$



$$E(f) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty).$$

3) Четкость или нечеткость: функция общего положения, т.к. $D(f)$ не симметрична относительно начала координат.

4) Не периодичная.

5) Точки пересечения с осями координат:

$$\begin{aligned} \text{с } ox: y = 0 &\Rightarrow (x - 2) + \frac{4}{(x - 2)} = 0 \Rightarrow \\ &(x - 2)^2 + 4 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

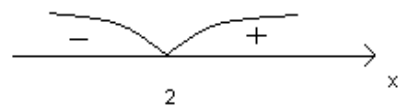
График функции не пересекает ось ox .

$$\text{с } oy: x = 0 \Rightarrow y = 0 - 2 + \frac{4}{0 - 2} = -2 - 2 = -4.$$

График пересекает ось oy в точке $A(0; -4)$.

6) Интервалы знакопостоянства:

$$y = (x - 2) + \frac{4}{x - 2} \Rightarrow y = \frac{(x - 2)^2 + 4}{x - 2}$$



$y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$.

7) Функция элементарная, следовательно, непрерывная на области своего определения, т.е. при $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

8) Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)^2 + 4}{x-2} = \frac{0^2 + 4}{2-0-2} = \frac{4}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)^2 + 4}{x-2} = \frac{0^2 + 4}{2+0-2} = \frac{4}{+0} = +\infty,$$

следовательно, $x = 2$ – вертикальная асимптота.

9) Наклонная асимптота:

$$y = kx + b, \text{ где } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-2)^2 + 4}{x(x-2)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x-2)^2 + 4}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 8 - x^2 + 2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + 8}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{8}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{-2+0}{1-0} = -2,$$

$y = x - 2$ – наклонная асимптота.

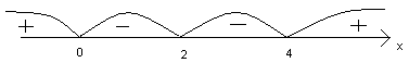
10) Интервалы монотонности. Экстремальные точки.

$$y' = (x-2)' + \left(\frac{4}{x-2} \right)' = 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{4}{(x-2)^2} = 1; (x-2)^2 = 4; \quad \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = 4; x_2 = 0.$$

y' не определена при $x = 2$



Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$,

убывает при $x \in (0; 2) \cup (2; 4)$

$x = 0$ – точка максимума $y_{\max} = y(0) = -4$; $A(0; -4)$

$x = 4$ – точка минимума

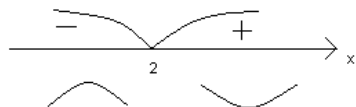
$$y_{\min} = y(4) = (4-2) + \frac{4}{4-2} = 2+2=4 \quad B(4; 4).$$

11) Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

$$y'' = \left(1 - \frac{4}{(x-2)^2} \right)' = -4((x-2)^{-2})' = 8(x-2)^{-3} = \frac{8}{(x-2)^3},$$

$$y'' = 0; \quad \frac{8}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

y'' не определена при $x = 2$.

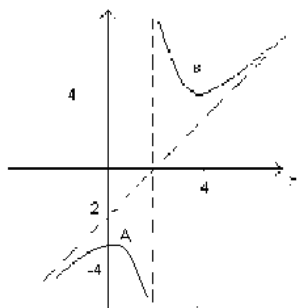


функция вогнутая при $x \in (2; +\infty)$,

выпуклая при $x \in (-\infty; 2)$.

Точек перегиба нет.

12) На основе изученных свойств, строим график (рис.3).



(рис.3)

5.2. $y = x - \ln(x+2)$

1) Область определения: $x + 2 > 0$; $x > -2$, $D(f) = (-2; +\infty)$.

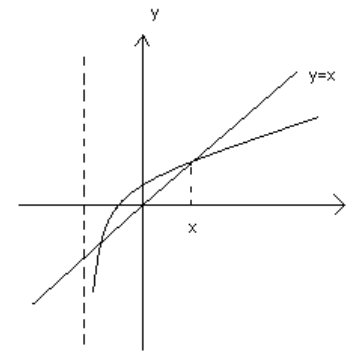
2) Четность или нечетность: функция общего положения, т.к. область определения не симметрична относительно начала координат.

3) Не периодичная.

4) Точки пересечения с осями координат.

с ox : $y=0 \Rightarrow x - \ln(x+2) = 0$ $x = \ln(x+2)$.

Это уравнение можно решить только приближенно, например, графически (рис.4)



(рис.4)

$$x_1 \approx -1,85$$

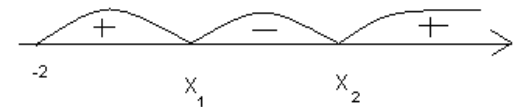
$$x_2 \approx 1,15$$

$$A(\approx -1,85; 0); B(\approx 1,15; 0)$$

$$\text{С } oy: x=0 \Rightarrow y = 0 - \ln 2 \approx -0,69$$

$$C(0; \approx -0,69)$$

5) Интервалы знакопостоянства:



$$y > 0 \text{ при } x \in (-2; \approx -1,85) \cup (\approx 1,15; +\infty),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (\approx -1,85; \approx 1,15)$$

6) Функция элементарная, следовательно, непрерывная на

области определения, т.е. при $x \in (-2; +\infty)$.

7) Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x - \ln(x+2)) = -2 - \ln(+0) = -2 - (-\infty) = +\infty.$$

Следовательно, $x = -2$ – вертикальная асимптота.

8) Наклонная асимптота $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \ln(x+2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+2)}{x} \right) =$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x+2}{1}} = 1 - 0 = 1$$

применили правило Лопиталя при вычислении предела.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+2) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x+2) = -\infty$$

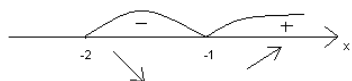
Наклонных асимптот нет.

9) Интервалы монотонности, точки экстремума.

$$y' = (x - \ln(x+2))' = 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$y' = 0 \text{ при } 1 - \frac{1}{x+2} = 0, \quad x+2=1, \quad x=-1$$

y' не определен при $x = -2$.



функция возрастает при $x \in (-1; +\infty)$,

убывает при $x \in (-2; -1)$.

$x = -1$ – точка минимума.

$$y_{\min} = y(-1) = -1 - \ln 3 \approx -2,09$$

$$D(1; \approx -2,09)$$

10) Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

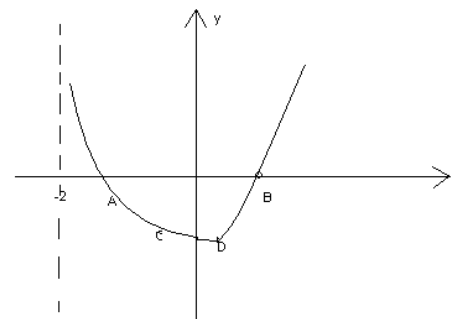
$$y'' = \left(1 - \frac{1}{x+2} \right)' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$y'' > 0 \quad \forall x \in D(f).$$

Функция вогнутая на всей области определения.

Точек перегиба нет.

11) На основании свойств, строим график (рис.5)



(рис.5)

Образец выполнения заданий по разделу «Функции нескольких переменных»

1. Найдите частные производные по каждому аргументу:

а) $u = \frac{y}{x^2} + \frac{x}{z^2} + \frac{z}{y^2}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2y}{x^3} + \frac{1}{z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2} - \frac{2z}{y^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2x}{z^3} + \frac{1}{y^2}.$$

б) $z = \arctg \frac{x}{y}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2 + x^2}.$$

2. Выполнить приближенное вычисление с применением полного

дифференциала (вычисления проводить с точностью до 0,01)

$$(2 - \sqrt{0,097})^{3,02}.$$

Введем функцию $z = (2 - \sqrt{x})^y = f(x; y)$.

Пусть $x_0 + \Delta x = 0,97 \Rightarrow x_0 = 1; \Delta x = -0,03$
 $y_0 + \Delta y = 3,02 \Rightarrow y_0 = 3; \Delta y = 0,02$.

Расчетная формула имеет вид:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + df(x_0; y_0)$$

$$f(x_0; y_0) = (2 - \sqrt{1})^3 = 1^3 = 1$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left((2 - \sqrt{x})^y \right)'_x = y(2 - \sqrt{x})^{y-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0=1, y_0=3} = 3(2 - \sqrt{1})^{3-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left((2 - \sqrt{x})^y \right)'_y = (2 - \sqrt{x})^y \ln(2 - \sqrt{x})$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0=1, y_0=3} = (2 - \sqrt{1})^3 \cdot \ln(2 - \sqrt{1}) = 1^3 \cdot \ln 1 = 0$$

$$df(x_0; y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0=1, y_0=3} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0=1, y_0=3} \cdot \Delta y =$$

$$= 1,5 \cdot (-0,03) + 0 \cdot 0,02 = -0,075.$$

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx 1 - 0,045 = 0,955 \approx 0,96$$

$$(2 - \sqrt{0,97})^{3,02} \approx 0,96.$$

3. Найти частные производные сложной функции:

$$z = x^3 y^2 + y^3 x^2; \text{ где } x = u \sin v; y = v \cos u.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (3x^2 y^2 + 2xy^3) \cdot 1 \cdot \sin v + (2x^3 y + 3x^2 y^2) v (-\sin u) = \\ &= xy^2(3x + 2y) \sin v - x^2 y(2x + 3y) v \cdot \sin u = \\ &= xy(y \sin v(3x + 2y) - x \cdot v \sin u(2x + 3y)) = \\ &= u \cdot v \cdot \sin v \cdot \cos u (y \cdot \cos u \cdot \sin v(3u \sin v + 2v \cos u) - u \cdot \sin v \cdot v \cdot \sin u(2u \sin v + 3v \cos u)) = \\ &= u \cdot v^2 \sin^2 v \cdot \cos u (3u \cdot \sin v \cdot \cos u + 2v \cos^2 u - 2u^2 \sin v \cdot \sin u - 3uv \sin u \cdot \cos u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (3x^2 y^2 + 2xy^3) u \cos v + (2x^3 y + 3x^2 y^2) \cos u = \\ &= xy^2(3x + 2y) u \cos v + x^2 y(2x + 3y) \cos u = \\ &= xy(y(3x + 2y) u \cdot \cos v + x(2x + 3y) \cos u) = \\ &= u \cdot v \cdot \sin v \cdot \cos u (v \cos u \cdot u \cdot \cos v(3u \sin v + 2v \cos u)) + \\ &+ u \cdot \sin v \cdot \cos v (2u \sin v + 3v \cos u) = u^2 \cdot v \cdot \sin v \cos u \cdot \cos v \cdot \\ &\cdot (3uv \cos u \cdot \sin v + 2v^2 \cos^2 u + 2u \cdot \sin^2 v + 3v \sin v \cos u). \end{aligned}$$

4. Доказать тождество:

$$z = \operatorname{tg}^3(2x - 3y); \quad 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \operatorname{tg}^2(2x - 3y) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x - 3y)} \cdot 2 = \frac{6 \operatorname{tg}^2(2x - 3y)}{\cos^2(2x - 3y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \operatorname{tg}^2(2x - 3y) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x - 3y)} \cdot (-3) = \frac{-9 \operatorname{tg}^2(2x - 3y)}{\cos^2(2x - 3y)};$$

$$3 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3 \cdot 6 \operatorname{tg}^2(2x - 3y)}{\cos^2(2x - 3y)} + \frac{2(-9) \operatorname{tg}^2(2x - 3y)}{\cos^2(2x - 3y)} =$$

$$= 18 \frac{\operatorname{tg}^2(2x-3y)}{\cos^2(2x-3y)} - 18 \frac{\operatorname{tg}^2(2x-3y)}{\cos^2(2x-3y)} = 0, \\ 0 = 0.$$

5. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + 4y - y = 0 \\ x = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases} \quad M_0(4; -2).$$

Применим достаточное условие экстремума:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0} = (6 - 2x - y)'_x \Big|_{M_0} = -2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0} = (6 - 2x - y)'_y \Big|_{M_0} = -1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0} = (-x - 2y)'_y \Big|_{M_0} = -2,$$

$$\Delta = B^2 - AC = (-1)^2 - (-2)(-2) = 1 - 4 = -3 < 0.$$

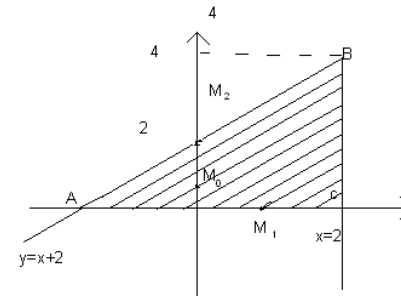
В точке M_0 есть экстремум.

$$A = -2 < 0 \rightarrow M_0 - \text{точка максимума.}$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3 \quad \text{в} \quad \text{заданной} \quad \text{области} \\ D: y \leq x + 2; \quad y \geq 0; \quad x \leq 2.$$

Построим область D (рис.6):



(рис.6)

Границы области $y = x + 2$; $y = 0$; $x = 2$.

Неравенства определяют область, заштрихованную на рисунке.

Необходимое условие экстремума
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 2y - 2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2x - 2y + 2 \end{aligned} \begin{cases} 2x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, M_0(0; 1) \in D.$$

Исследуем функцию на границе области:

$$AC: y = 2 \Rightarrow z = x^2 - 2x + 3, x \in [-2, 2]$$

$$z' = 2x - 2; 2x - 2 = 0, x = 1 \in [-2, 2]$$

$$M_1(1; 0) \in D.$$

Границы отрезка $A(-2; 0)$; $B(2; 0)$.

$$BC: x = 2 \Rightarrow z = 4 + 4y - y^2 - 4 + 4y + 3 = -y^2 + 8y + 3; y \in [0; 4]$$

$$z' = -2y + 8; -2y + 8 = 0, y = 4 \in [0; 4]$$

Совпадает с концом отрезка.

Получим точки $C(2; 0)$; $B(2; 4)$.

$$AB: y = x + 2 \Rightarrow z = x^2 + 2x(x + 2) - (x + 2)^2 - 2x + 2(x + 2) + 3 \Rightarrow$$

$$z = x^2 + 2x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 - 2x + 2x + 4 + 3 \Rightarrow$$

$$z = 2x^2 + 3; x \in [-2; 2]$$

$$z' = 4x; 4x = 0, x = 0, M_2(0; 2).$$

Границы отрезка $A(-2; 0); B(2; 4)$

Вычислим значения функции $z = f(x, y)$ в отобранных точках:

$M_0(0;1); M_1(1;0); M_2(0;2)$ и $A(-2;0); B(2;0); C(2;4)$.

$$z(M_0) = z(0;1) = 0 + 0 - 1^2 - 0 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4,$$

$$z(M_1) = z(1;0) = 1 + 0 - 0 - 2 + 0 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2,$$

$$z(M_2) = z(0;2) = 0 + 0 - 2^2 - 0 + 2 \cdot 2 + 3 = -4 + 4 + 3 = 3,$$

$$z(A) = z(-2;0) = (-2)^2 + 0 - 0 - 2 \cdot (-2) + 0 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11,$$

$$z(C) = z(2;0) = 2^2 + 0 - 0 - 2 \cdot 2 + 3 = 4 - 4 + 3 = 3,$$

$$z(B) = z(2;4) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 4^2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 = 4 + 16 - 16 - 4 + 8 + 3 = 11.$$

$z_{\text{наиб.}} = 11$ в точках $B(2; 4)$ и $A(-2; 0)$

$z_{\text{наим.}} = 2$ в точке $M_1(1; 0)$.

Образец выполнения заданий по разделу «Неопределенный и определенный интегралы»

1. Найти неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} 1.1. \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx = \\ &= 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{3}{2} \int (x^2-4)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-4) - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| = \\ &= \frac{3}{2} \frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + c = 3\sqrt{x^2-4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2. \int (x+2)^2 \cdot \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = (x+2)^2 \\ dv = \sin 3x dx \\ du = 2(x+2) dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{3} (x+2)^2 \cdot \cos 3x - \int -\frac{1}{3} \cos 3x \cdot 2(x+2) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}(x+2)^2 \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int (x+2) \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x+2 \\ dv = \cos 3x dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{3}(x+2)^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left((x+2) \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \cdot \sin 3x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{3}(x+2)^2 \cdot \cos 3x + \frac{2}{9}(x+2) \sin 3x + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x + c.
\end{aligned}$$

$$1.3. \int \frac{5x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2} dx$$

Под знаком интеграла стоит правильная дробь. Ее нужно разложить на сумму простейших дробей. Разложение на простейшие дроби зависит от разложения знаменателя дроби на множители.

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 + 2x - 2 &= (x^3 - x^2) + (2x - 2) = \\
&= x^2(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^2 + 2);
\end{aligned}$$

$$\frac{5x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2};$$

$$5x^2 - 2x + 3 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x-1)$$

$$5x^2 - 2x + 3 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx - Bx - C;$$

$$\begin{array}{l}
x^2 \left| \begin{array}{l} A+B=5 \\ C-B=-2 \\ 2A-C=3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B=5-A \\ 2A-3-5+A=-2 \\ C=2A-3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3A-8=-2 \\ 3A=6 \\ A=2 \\ B=5-2=3 \\ C=4-3=1 \end{array}
\end{array}$$

$$\int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+2} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{x dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$= 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

$$\begin{aligned}
1.4. \int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2}=t; \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \\
&= \int \frac{2dt}{3+3t^2+2t+1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{(t+2)^2-\frac{1}{4}+2} = \\
&= \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.5. \int \frac{\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x=t^6; t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^6-t^4} = 6 \int \frac{t^8 dt}{t^4(t^2-1)} = \\
&= 6 \int \frac{t^4}{t^2-1} dt = 6 \int \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1} dt = 6 \int \left(\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \\
&= 6 \int \left(t^2+1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + c = \\
&= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.6. \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = - \int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = \\
&= - \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) d\cos x = -\cos x + 2 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.
\end{aligned}$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+1^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \pi/8.$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4-x^2) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} \Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{4-x^2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{4-(2-\varepsilon)^2} + \sqrt{4-0} = 0 + 2 = 2.$$

Интеграл сходится.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

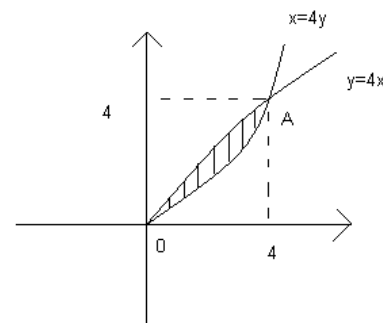
$$y^2 = 4x \text{ и } x^2 = 4y.$$

Найдем точки пересечения линий $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 4y \end{cases}.$

$$\frac{y^4}{16} - 4y = 0, \quad y(y^3 - 64) = 0: y_1 = 0, y_2 = 4$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$O(0; 0); A(4; 4)$$

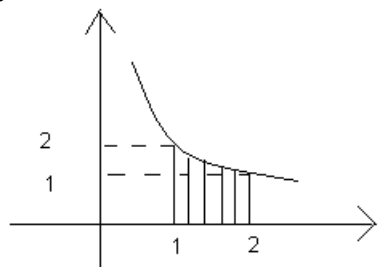


(рис. 7)

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{4}{3}(4^{3/2} - 0) - \frac{1}{12}(4^3 - 0) = \frac{4}{3} \cdot 8 - \frac{1}{12} \cdot 64 = \frac{16}{3}.$$

5. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$.



(рис.8)

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$y = \frac{2}{x} \Rightarrow V_{Ox} = \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 dx = 4\pi \int_1^2 x^{-2} dx = 4\pi \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{4\pi}{x} \Big|_1^2 =$$

$$= -4\pi \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -4\pi \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi.$$

6. Вычислить длину дуги, заданной линией $y = 1 - \ln \cos x$ от точки $M(0; 1)$ до точки $N\left(\frac{\pi}{4}; \ln e\sqrt{2}\right)$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

$$y = 1 - \ln \cos x; \quad y' = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \operatorname{tg} x$$

$$l = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{|\cos x|} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \Big|_0^{\pi/4} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right| - \ln |\operatorname{tg} \pi/4| = \\
&= \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \ln 1 = \ln \operatorname{tg} \pi/8.
\end{aligned}$$

Образец выполнения заданий по разделу «Дифференциальные уравнения»

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения I порядка $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Чтобы разделить переменные, поделим обе части уравнения на xy :

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0; \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln |x| + x + \ln |y| - y = C, \quad \text{или} \quad \ln |xy| + x - y = C.$$

Последнее равенство есть общий интеграл данного уравнения.

2. Найдите общий интеграл уравнения $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Решение. Правая часть уравнения – это однородная функция нулевого измерения, следовательно, данное уравнение является однородным. Делаем замену $y = ux$, тогда $y' = u + xu'$. Получаем:

$$u + xu' = \frac{u}{1-u^2}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}.$$

Разделим переменные: $\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}.$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c|, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln|uxc|.$$

Подставляя $y = ux$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cy|.$$

3. Найдите общее решение уравнения $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Решение. Уравнение является линейным уравнением первого порядка, поэтому, полагая $y = uv$, получим $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в исходное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \Rightarrow u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) + vu' = (x+1)^3.$$

Напоминаем, что одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно выбрать произвольно, поэтому подберем $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в скобках, оказалось равным нулю:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0.$$

Тогда последнее уравнение примет вид $u'v = (x+1)^3$.

В первом из этих двух уравнений разделим переменные, получим

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

откуда

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| \Rightarrow v = (x+1)^2.$$

Подставляя v во второе уравнение, получим

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3, \text{ или } \frac{du}{dx} = x+1,$$

откуда

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

4. Найдите общее решение уравнения Бернулли $y' + xy = x^3 y^3$.

Решение. Разделив все члены на y^3 , получим:

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^3.$$

Введем новую функцию: пусть $z = y^{-2}$, тогда $z' = -2y^{-3}y'$.

Подставляя в последнее уравнение, получим линейное уравнение относительно функции z :

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

Найдем его общее решение, введя замену $z = uv$.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } z' = u'v + uv' &\Rightarrow u'v + uv' - 2xuv = -2x^3 \Rightarrow \\ u(v' - 2xv) + uv' &= -2x^3. \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Для определения функции u решаем уравнение:

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Разделив переменные, получим

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \quad \text{тогда } z = uv = x^2 + 1 + C e^{-x^2}.$$

Наконец, получаем общее решение данного уравнения:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{-x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{-x^2}}}.$$

5. Найдите общий интеграл уравнения $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

Решение. Нетрудно видеть, что уравнение не является ни однородным, ни линейным. Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. В данном случае

$$M(x, y) = \frac{2x}{y^3}, \quad N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}.$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Как видно, условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x, y)$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$. Найдем функцию $u(x, y)$.

Интегрируя равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ по переменной x , получаем

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — не определенная пока функция аргумента y . Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

находим:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + \frac{1}{y^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}.$$

Таким образом, $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$ – общий интеграл исходного уравнения.

6. Решите уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка. Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения действительные и разные, $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, следовательно общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

7. Найдите частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, следовательно, общее решение данного однородного уравнения запишется так:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого сначала найдем производную общего решения, затем подставим начальные условия в само общее решение и его производную.

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) = \\ &= e^{-x}((2C_2 - C_1) \cos 2x - (C_1 + 2C_2) \sin 2x). \end{aligned}$$

По условию $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$, значит, полагая $x = 0$, получим систему двух линейных уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 0, \\ e^0((2C_2 - C_1) \cos 0 - (C_1 + 2C_2) \sin 0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ 2C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2 = 0,5.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

8. Найдите общее решение уравнения II порядка $y'' + 4y' + 3y = x$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением. Известно, что его общее решение равно сумме общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения y^* данного неоднородного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Запишем однородное уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$ и его характеристическое квадратное уравнение $k^2 + 4k + 3 = 0$. Корни последнего действительны и различны: $k_1 = -3, k_2 = -1$. Получаем общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

Найдем теперь частное решение y^* по специальному виду правой части. Так как правая часть $f(x) = x$, т.е. имеет вид $P_1(x)e^{0x}$, причем $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то кратность совпадения $m = 0$ и частное решение будем искать в форме $y^* = Ax + B$. Подставляя это выражение в заданное уравнение, получим:

$$4A + 3(Ax + B) = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений относительно A и B :

$$\begin{cases} 3A=1, \\ 4A+3B=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{4}{9}.$$

Следовательно, $y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$, а общее решение получит вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

9. Найдите общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Решение. Общее решение данного уравнения равно $y = \bar{y} + y^*$.

Нетрудно видеть, что соответствующее однородное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$ имеет общее решение $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Правая часть данного уравнения имеет вид $f(x) = P_1(x)e^{1 \cdot x}$, причем коэффициент $\alpha = 1$ у показательной функции является простым корнем характеристического уравнения. Следовательно, кратность совпадения $m = 1$, и частное решение ищем в виде

$$y^* = xQ(x)e^x, \text{ или } y^* = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Найдем производные этой функции и подставим в исходное уравнение.

$$y^* = (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$(y^*)' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x;$$

$$\begin{aligned} (y^*)'' &= (2Ax + 2A + B + Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x. \end{aligned}$$

Умножив первое равенство на 6, второе – на -7, сложим почленно все три равенства.

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему

$$\begin{cases} -10A=1, \\ -5B+2A=-2, \end{cases}$$

откуда $A=-\frac{1}{10}$, $B=\frac{9}{25}$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения принимает вид

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x,$$

а общее решение –

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x.$$

10. Найдите частное решение уравнения $y'' + 4y = \cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -2$, $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет пару сопряженных комплексных корней

$k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$, где $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = e^{0x}(1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x)$, при этом $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ совпадает с решением характеристического уравнения, кратность совпадения m в этом случае считается равной 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в форме

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Тогда

$$(y^*)' = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$(y^*)'' = -4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Подставляя эти выражения производных в данное уравнение и приравнявая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем:

$$4B = 1, -4A = 0, \text{ откуда } A = 0, B = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Найдем теперь частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Дифференцируя полученную функцию и подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему относительно постоянных C_1 и C_2 .

$$\begin{aligned} y' &= -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{4}(\sin 2x + 2x \cos 2x) \Rightarrow \\ &\begin{cases} C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi + \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} \sin \pi = -2, \\ -2C_1 \sin \pi + 2C_2 \cos \pi + \frac{1}{4}(\sin \pi + \pi \cos \pi) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} -C_1 = -2, \\ -2C_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Итак, искомое частное решение:

$$y = 2 \cos 2x - \frac{\pi}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x = 2 \cos 2x + \frac{1}{4} (x - \pi) \sin 2x.$$

Образец выполнения заданий по разделу « Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы »

1.0. Измените порядок интегрирования. Сделайте чертеж области интегрирования.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение. Запишем уравнения всех линий, ограничивающих данную область интегрирования.

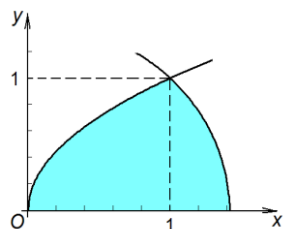
$$x=0, x=1, x=\sqrt{2}, y=0, y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2-x^2}.$$

Первые четыре уравнения – это уравнения прямых, параллельных координатным осям. Следующая кривая – это верхняя часть параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox . Последняя кривая – полуокружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$, лежащая в верхней полуплоскости. Построив эти линии, получим область интегрирования D (рис. 9).

Как видно, прямая $x=1$ делит область D на две части. Если через область D провести прямые, параллельные оси Oy , то точки выхода из области могут оказаться как на параболе, так и на окружности. Поэтому исходный интеграл представлен в виде суммы двух двукратных интегралов, у которых интегрирование по переменной y происходит с разными границами.

Чтобы изменить порядок интегрирования необходимо спроектировать область на ось Oy и переписать уравнения ограничивающих линий.

Проекцией области на ось Oy является отрезок $[0;1]$. Если через область D провести прямую, параллельную оси Ox , точка входа будет лежать на единственной кривой – параболе с уравнением $x=y^2$, а точка выхода –



(рис.9)

на окружности $x=\sqrt{2-y^2}$.

Тогда двойной интеграл по этой области будет выражен через двукратный с измененным порядком интегрирования следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2.0. Вычислите двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области, заданной

линиями $y = 6 - x^2$, $y = x^2 - 4x$.

Решение. Найдем точки пересечения заданных линий и построим область интегрирования.

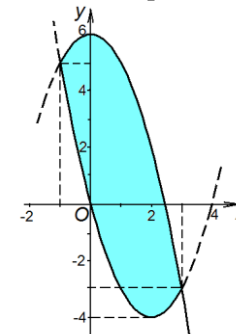
Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 6 - x^2, \\ y = x^2 - 4x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x^2, \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - x^2, \\ x_1 = -1, x_2 = 3. \end{cases}$$

Получили две точки: $(-1; 5)$ и $(3; -3)$.

Заметим, что данные параболы $y = 6 - x^2$ и $y = x^2 - 4x$ пересекают ось Ox в точках $x = \pm\sqrt{6}$ и $x = 0, x = 4$ соответственно, а их вершины имеют координаты $(0; 6)$ и $(2; 4)$.

Используя все эти точки, построим область интегрирования.



(рис.10)

Из рисунка (рис.10) видно, что порядок интегрирования должен быть таким: сначала данную функцию следует проинтегрировать по переменной y , а затем по переменной x .

$$\begin{aligned}\iint_D xy dS &= \int_{-1}^3 dx \int_{x^2-4x}^{6-x^2} xy dy = \int_{-1}^3 x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-4x}^{6-x^2} = \\ &= \int_{-1}^3 x \left(\frac{(6-x^2)^2}{2} - \frac{(x^2-4x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (8x^4 - 28x^3 + 36x^2) dx = \\ &= \left(\frac{4x^5}{5} - \frac{14x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 = -12,4.\end{aligned}$$

3.0. Вычислить данные криволинейные интегралы.

1) $\int_L \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, где L – отрезок прямой AB ; $A(1,2)$; $B(3, 6)$.

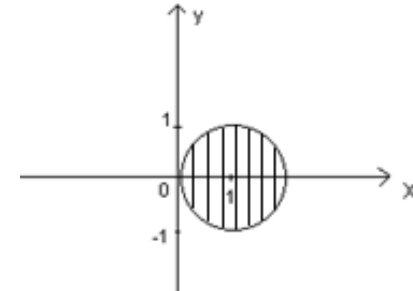
Решение. Данный интеграл – криволинейный интеграл II рода. Находим уравнение прямой AB по двум точкам: $y = 3x$. Далее, имеем: $dy = (3x)' dx = 3dx$,

$$\int_2^3 \frac{dx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_1^3 \frac{3xdx + x \cdot 3dx}{x^2 + 9x^2} = \int_1^3 \frac{6x}{10x^2} dx = \frac{3}{5} \int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{3}{5} \ln|x| \Big|_1^3 = \frac{3}{5} \ln 3.$$

2)

$$\oint_L (x-y) dl, \text{ где } L - \text{окружность } x^2 + y^2 = 2x.$$

Решение. Данный интеграл – криволинейный интеграл I рода. Запишем уравнение окружности в виде $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Отсюда находим, что центр окружности $(1; 0)$, радиус равен 1 (рис.11).



(рис. 11)

В полярной системе координат уравнение окружности будет иметь вид: $r^2 = 2r\cos\varphi$ или $r = 2\cos\varphi$.

Угол φ , как видно из чертежа, будет меняться от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \sqrt{4\cos^2\varphi + (-2\sin\varphi)^2} d\varphi = 2d\varphi, \quad \oint_L (x-y)dl = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi - r\sin\varphi) d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi) d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + \\ &\quad + 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\cos\varphi = 2 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \cos^2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

Образец выполнения заданий по разделу «Ряды»

1.0. Исследуйте сходимость знакоположительных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lg n}\right), \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n^3 - 2n^2 + 5}, \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^{n+1}},$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}.$$

Решение: а) Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$,

то ряд расходится – не выполняется необходимое условие сходимости.

б) Сравним данный ряд с гармоническим. Так как $\lg n < n$ при любом $n \in N$, то $\frac{1}{\lg n} > \frac{1}{n}$.

Известно, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, значит, на основании первого признака сравнения расходится и данный ряд.

в) Общий член этого ряда является дробно-рациональной функцией, причем степень знаменателя на 2 больше степени числителя. Это говорит о том, что данный ряд можно сравнить с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, так как у него показатель $p = 2 > 1$.

Воспользуемся вторым признаком сравнения (11.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)n^2}{4n^3 - 2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2}{4n^3 - 2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

Как видно, предел отношения общих членов существует и отличен от нуля, следовательно, данный ряд сходится так же как и вспомогательный.

г) В тех случаях, когда общий член ряда содержит показательную функцию или факториал, рекомендуется использовать признак Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 4^{n+1}}{4^{n+2} \cdot n^3} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} < 1.$$

По признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

д) Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

е) Используем интегральный признак Коши. Пусть

$$f(x) = \frac{2}{3+x^2}. \text{ Рассмотрим несобственный интеграл}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{2dx}{3+x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2dx}{3+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_1^b = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Как видно, интеграл сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

2.0. Исследуйте знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Решение: а) Данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно, так как ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Действительно, для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

б) Проверим этот ряд по признаку Лейбница.

1) очевидно, что члены ряда убывают: $\frac{3}{2} > \frac{5}{6} > \frac{7}{12} > \dots$;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0.$$

Как видно, данный знакочередующийся ряд сходится. Однако соответствующий знакоположительный ряд расходится. Это можно доказать на основании признака сравнения. В качестве вспомога-

тельного ряда можно использовать гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. В

итоге делаем вывод, что исследуемый ряд сходится условно.

3.0. Найдите интервал сходимости степенных рядов, исследуйте их сходимость на концах интервала:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

Решение: а) Найдем сначала радиус сходимости ряда, для чего используем формулу (11.9).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{n! \cdot 3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty.$$

Интервалом сходимости ряда является вся числовая ось, т.е. исследуемый степенной ряд сходится при всех значениях x .

б) Используем ту же формулу (11.9) и находим радиус сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 2.$$

Получаем предварительный вариант интервала сходимости $(-2; 2)$.

Исследуем степенной ряд на концах интервала.

При $x = 2$ (на правой границе интервала сходимости) получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Зна-

чит, эта граница не принадлежит интервалу сходимости.

При $x = -2$ (на левой границе) получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, называемый рядом Лейбница. На основании соответствующего признака этот ряд сходится, причем условно.

Таким образом, интервалом сходимости данного ряда является промежуток $[-2; 2)$.

в) Легко видеть, что этот ряд имеет в первоначальном варианте тот же интервал сходимости $(-2; 2)$, что и предыдущий ряд. Однако здесь в правой границе (при $x = 2$) мы получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, и это обстоятельство позволяет сделать вывод: на основании признака об абсолютной сходимости в левой границе интервала (при $x = -2$) знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ тоже сходится, причем абсолютно. Следовательно, интервалом сходимости этого ряда является отрезок $[-2; 2]$.

4.0. Вычислите интеграл $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Заменяя в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2} \left(1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right) dx = \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) dx = \left[\frac{1}{2!} x - \frac{x^3}{4! \cdot 3} + \frac{x^5}{6! \cdot 5} - \dots \right]_0^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2! \cdot 2} - \frac{1}{4! \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1}{6! \cdot 5 \cdot 2^5} - \dots = 0,25 - 0,0017 + 0,00001 - \dots \approx 0,2483. \end{aligned}$$

5.0. Найдите три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд частного решения дифференциального уравнения

$$y'' = -yx^2,$$

удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

Решение. Искомое частное решение $y = \varphi(x)$ представим в виде разложения в степенной ряд

$$y = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Задача сводится к тому, чтобы найти коэффициенты разложения, т.е. вычислить значения производных $\varphi^{(n)}(x)$ в точке $x = 0$.

По условию $y|_{x=0} = \varphi(0) = 1, y'|_{x=0} = \varphi'(0) = 0$. Подставив начальные условия в данное уравнение, получим $\varphi''(0) = -1 \cdot 0 = 0$.

Дифференцируя исходное уравнение, получим производные более высоких порядков.

$$y''' = -y'x^2 - 2xy \Rightarrow \varphi'''(0) = 0;$$

$$y^{IV} = -y''x^2 - 4xy' - 2y \Rightarrow \varphi^{IV}(0) = -2;$$

$$y^V = -y'''x^2 - 6y''x - 6y' \Rightarrow \varphi^V(0) = 0;$$

$$y^{VI} = -y^{IV}x^2 - 8y'''x - 12y'' \Rightarrow \varphi^{VI}(0) = 0;$$

$$y^{VII} = -y^Vx^2 - 10y^{IV}x - 20y''' \Rightarrow \varphi^{VII}(0) = 0;$$

$$y^{VIII} = -y^{VI}x^2 - 12y^Vx - 30y^{IV} \Rightarrow \varphi^{VIII}(0) = 60.$$

Подставляя найденные значения в ряд Маклорена, получаем решение уравнения:

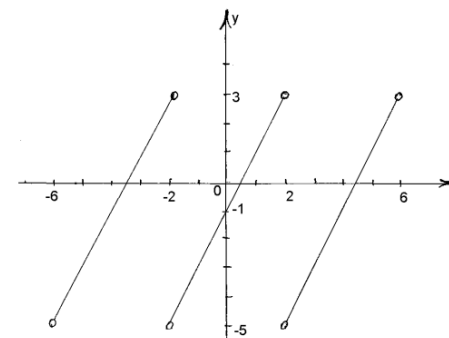
$$y = 1 - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{60}{8!}x^8 - \dots$$

6.0. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-2; 2)$.

$$f(x) = 2x - 1.$$

Графиком этой функции в интервале $(-2, 2)$ является отрезок, соединяющий точки $(-2; -5)$ и $(2; 3)$. На чертеже изображен график функции $y = S(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Эта сумма является периодической функцией с периодом $T = 2l = 2 \cdot 2 = 4$ и совпадает с функцией $f(x)$ на сегменте $(-2, 2)$ (рис.12).

Функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, т.к. $f(-x) \neq f(x)$ для $x \in (-2; 2)$. Ряд Фурье имеет вид $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$.



(рис. 12)

Определим коэффициенты ряда

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2x-1) dx = \int_{-2}^2 x dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 dx.$$

Первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала

координат. Таким образом $a_0 = -\frac{1}{2} \int_{-2}^2 dx = -\frac{1}{2} x \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{2} (2+2) = -2$.

Далее находим коэффициенты a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_{-2}^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{n\pi} (\sin n\pi + \sin \pi) = 0. \end{aligned}$$

Первый интервал равен нулю, т.к. подынтегральная функция нечетная как произведение четной функции на нечетную. Найдём теперь коэффициент b_n :

$$e_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx.$$

Второй интеграл равен нулю. Подынтегральная функция первого интеграла – четная как произведение двух нечетных функций.

Таким образом,
$$e_n = 2 \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx.$$

Интегрируя по частям, примем $u = x$,

$$dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx, du = dx, v = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \text{ и получим } e_n = -\frac{4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 +$$

$$\frac{4}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = -\frac{8}{n\pi} (-1)^n = \frac{8}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье на $(-2; 2)$ имеет вид:

$$f(x) = -1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} = -1 + \frac{8}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right).$$

Контрольная работа №1

Контрольные задания по разделу «Введение в математический анализ»

1.1-1.10. Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^5 + x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{6 + x - x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+4x} - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{x+1}$.

1.2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 4}{5x^3 - 2x + 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 3x}{x^2 + x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x-1}$;

- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{4}{x}}$.
- 1.3.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 + 7}{3x^2 + 5x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{7x^2 + 23x + 6}{x^2 + 8x + 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.
- 1.4.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x + 4}{x^4 - x^2 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 + 14x - 3x^2}{x^2 - 2x - 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2-x} - 1}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{8x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+2} \right)^{2x+5}$.
- 1.5.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 + 5x^3 + 4}{2x^2 + 3x^3 - 6x^6}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$.
- 1.6.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x + 1}{3x^5 - 2x^2 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 + x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+3) - \ln x)$.
- 1.7.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{2x^2 + 3x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{2 + x - x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$.
- 1.8.** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + 2x + 4x^3}{2x^3 - 5x^2 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 5x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \right)^{2x^2 + 1}$.

$$1.9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x^2 + 1}{7x^4 - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{-x^2 + 5x - 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1 - \sqrt{3 - x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{1+x} \right)^{3x}.$$

$$1.10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 12x^3 + 3}{7x - 3x^5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 2x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

2.1-2.10. Исследуйте функцию на непрерывность. Определите характер точек разрыва. Сделайте чертеж.

$$2.1. \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{9^{(2-x)}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{если } x < -1, \\ x^2+2, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.2. \quad \text{a) } f(x) = 4^{\frac{1}{(3-x)}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2+1, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2.3. \quad \text{a) } f(x) = 12^{\frac{1}{x}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$2.4. \quad \text{a) } f(x) = 3^{\frac{1}{(4-x)}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.5. \quad \text{a) } f(x) = 8^{\frac{1}{(5-x)}}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
2.6. \text{ а) } f(x) &= 10^{\frac{1}{(7-x)}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & \text{если } x > \pi. \end{cases} \\
2.7. \text{ а) } f(x) &= 14^{\frac{1}{(6-x)}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -(x+1), & \text{если } x \leq -1, \\ (x+1)^2, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases} \\
2.8. \text{ а) } f(x) &= 15^{\frac{1}{(8-x)}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } -1 < x \leq 0, \\ 2, & \text{если } x > 0. \end{cases} \\
2.9. \text{ а) } f(x) &= 11^{\frac{1}{(4+x)}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases} \\
2.10. \text{ а) } f(x) &= 13^{\frac{1}{(5+x)}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x < 4, \\ 1, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Контрольная работа №2
Контрольные задания по разделу
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1.1. – 1.10. Найдите производные заданных функций.

$$\begin{aligned}
1.1. \text{ а) } y &= \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}; & 1.2. \text{ а) } y &= \sqrt{\frac{2x-5}{2x+3}}; \\
\text{б) } y &= \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3; & \text{б) } y &= (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4; \\
\text{в) } y &= \frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}; & \text{в) } y &= \frac{\ln(5x-3)}{4 \operatorname{tg} 3x^4}; \\
\text{г) } y &= (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin x}; & \text{г) } y &= (\cos(x+2))^{\ln x}; \\
\text{д) } x &= y^2 + \arccos \frac{x}{y}; & \text{д) } x &= y^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x};
\end{aligned}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = 7 - 5t. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.3.} \text{ a) } y = \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}};$$

$$\text{б) } y = 2^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 7x^4;$$

$$\text{в) } y = \frac{\ln(7x+2)}{5 \cos 42x};$$

$$\text{г) } y = (\sin 3x)^{\arccos 3x};$$

$$\text{д) } e^y = e^{-x} - xy;$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = 9^{-t}, \\ y = \log_9 t. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.5.} \text{ a) } y = \sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}};$$

$$\text{б) } y = 3^{\cos x} \cdot \ln(x^2 - 3x + 7);$$

$$\text{в) } y = \frac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)};$$

$$\text{г) } y = (\sin(x+2))^{\arcsin 2x};$$

$$\text{д) } \ln(y-x) = yx^2;$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = 4 \arcsin 3t, \\ y = 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.7.} \text{ a) } y = \sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}};$$

$$\text{б) } y = \arccos^3 5x \cdot \operatorname{tg} x^4;$$

$$\text{в) } y = \frac{\log_3(4x+5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sin 2x};$$

$$\text{д) } y^2 - 1 = 2xy;$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = 2 \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.4.} \text{ a) } y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$\text{б) } y = (x+6)^6 \cdot \operatorname{arccotg} 3x^5;$$

$$\text{в) } y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+10)};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{tg} 5x)^{\arcsin(x+1)};$$

$$\text{д) } e^y + xy = e;$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2}, \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.6.} \text{ a) } y = \sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}};$$

$$\text{б) } y = \log_2(x-7) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$\text{в) } y = \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\lg(5x+1)};$$

$$\text{г) } y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}};$$

$$\text{д) } y = x + \operatorname{arctg} y;$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = 7 \sin 3t, \\ y = 4 \cos 3t. \end{cases}$$

$$\mathbf{1.8.} \text{ a) } y = \sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}};$$

$$\text{б) } y = (x-5)^7 \cdot \operatorname{arctg} 7x^3;$$

$$\text{в) } y = \frac{\ln(7x-3)}{3 \operatorname{tg}^2 4x};$$

$$\text{г) } y = (3 + \ln 2x)^{x^2 - 4x + 4};$$

$$\text{д) } e^{xy} = xy;$$

$$e) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t^2), \\ y = \frac{1}{1+t^4}. \end{cases}$$

$$1.9. a) y = \sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}};$$

$$1.10. a) y = \sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}};$$

$$б) y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3;$$

$$б) y = 5^{-x^2} \cdot \arccos 5x^4;$$

$$в) y = \frac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x};$$

$$в) y = \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)};$$

$$г) y = (\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x};$$

$$г) y = (\sin 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)};$$

$$д) x \ln y - y \ln x = 1$$

$$д) \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$e) \begin{cases} x = \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} 2t, \\ y = -\operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 2^{\frac{t}{2}}, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$$

2.1. – 2.10. Вычислите пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\ln(2x-1)}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \operatorname{ctg} x).$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}}{e^{x^3} - 1}.$$

3.1. – 3.10. Решите задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции.

3.1. Прямоугольный участок земли площадью в 1536 м² под строительство усадьбы требуется огородить забором и отделить хозяйственный двор таким же забором, параллельным меньшей

стороне участка. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы на постройку заборов пошло наименьшее количество материала?

3.2. Требуется отгородить прямоугольную площадку вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 180 руб. за метр; стоимость ограждения двух других сторон составляет 270 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если для этой цели отпущено 32400 руб.?

3.3. Из прямоугольного листа жести размером 48×30 см² требуется изготовить открытую коробку. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырех углов листа, чтобы объем полученной коробки был наибольшим? Каков объем такой коробки?

3.4. Из сектора радиуса R изготовлена коническая воронка. Каким должен быть центральный угол сектора, чтобы вместимость воронки была наибольшей?

3.5. Имеется ограждение длиной 320 м для прямоугольного участка земли. Найдите размеры участка наибольшей площади, который можно обнести этим ограждением.

3.6. Окна в загородном доме имеют форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен P . При каком радиусе полукруга площадь окна будет наибольшей?

3.7. Шатер имеет коническую форму и собран из деревянных брусков (образующих конуса) длиной 3,6 м. При каком радиусе основания объем шатра будет наибольшим?

3.8. Площадь полной поверхности цилиндрического контейнера с крышкой равна 6π кв. м. Каковы должны быть размеры контейнера наибольшего объема?

3.9. Палатка имеет форму прямого кругового конуса. Верх палатки (боковая поверхность конуса) изготовлен из легкой водонепроницаемой ткани стоимостью 180 руб. за кв. м. Объем палатки равен $2\pi\sqrt{2}$ куб. м. Найдите ее размеры, при которых стоимость изготовления палатки будет минимальной.

3.10. Расход дизельного топлива для катера пропорционален кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расход составляет 60 руб. в час, остальные расходы (не зависящие от скорости) составляют 960 руб. в час. При какой скорости катера общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей?

4.1. – 4.10. Провести полное исследование функции и построить их графики.

$$1.1 \quad \text{a) } y = \frac{1}{e^x - 1}, \quad \text{б) } y = \frac{5x^3}{x^2 - x + 1}.$$

$$1.2 \quad \text{a) } y = \frac{4x + 2x^2 - 4}{x + 3}, \quad \text{б) } y = -\ln^2 x.$$

$$1.3 \quad \text{a) } y = x + 3\sqrt[3]{x^2}, \quad \text{б) } y = \frac{2x + 1}{(x + 1)^2}.$$

$$1.4 \quad \text{a) } y = \frac{1}{x(x - 8)}, \quad \text{б) } y = \frac{2x^3}{x^2 - 9}.$$

$$1.5 \quad \text{a) } y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 4}, \quad \text{б) } y = (x + 3)x^{\frac{2}{3}}.$$

$$1.6 \quad \text{a) } y = e^{-x^2 + 8x - 14}, \quad \text{б) } y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^3}.$$

$$1.7 \quad \text{a) } y = \frac{2x^4}{(1 - x)^3}, \quad \text{б) } y = \frac{-3\ln x}{x}.$$

$$1.8 \quad \text{a) } y = \frac{8 - x^5}{x^4}, \quad \text{б) } y = 1 - e^{-x^3}.$$

$$1.9 \quad \text{a) } y = 3\sqrt[3]{x^2} - x, \quad \text{б) } y = \frac{\ln(x - 2)}{x - 2}.$$

$$4.10 \quad \text{a) } y = \frac{-2e^{-x^2}}{2x + 3}, \quad \text{б) } y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

Контрольные задания по разделу «Функции нескольких переменных»

1.1– 1.10. Дана функция $z = f(x, y)$. Проверьте указанные равенства.

$$1.1. \quad z = \arctg \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.2. \quad z = y \cdot \ln(x^2 - y^2), \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$1.3. \quad z = \frac{y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0.$$

$$1.4. \quad z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy), \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

$$1.5. \quad z = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

$$1.6. \quad z = y^2 \sin(x^2 - y^2), \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy.$$

$$1.7. \quad z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.8. \quad z = e^{xy}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 y^2 z.$$

$$1.9. \quad z = \frac{x}{y^2}, \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$1.10. \quad z = \ln(x + e^{-y}), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

2.1. – 2.10. Вычислите приближенно, заменяя полное приращение функции полным дифференциалом.

$$2.1. \quad (2,003)^2 \cdot (3,004)^3.$$

$$2.2. \quad \ln(\sqrt{4,02} - \sqrt[3]{0,97}).$$

$$2.3. \quad \sqrt{1,02} \cdot \sqrt[3]{0,97}.$$

$$2.4. \quad (2 - \sqrt{0,97})^{3,02}.$$

$$2.5. \quad \arctg\left(\frac{1,98}{1,03} - 1\right).$$

$$2.6. \quad \frac{10}{(4,98)^3 - (5,03)^2}.$$

$$2.7. \quad \ln[(0,09)^3 + (0,99)^2].$$

$$2.8. \quad \sqrt{3,98 \cdot 1,03^{3,98}}.$$

$$2.9. \quad (0,97)^{2,02}.$$

$$2.10. \quad \sqrt[5]{(2,97)^3 + (2,02)^2 + 1}.$$

3.1 – 3.10. Исследуйте на экстремум функцию.

$$3.1. \quad z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$3.2. \quad z = x^3 + y^3 - 15xy.$$

$$3.3. \quad z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$$

$$3.4. \quad z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

$$3.5. \quad z = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1.$$

$$3.6. \quad z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2.$$

$$3.7. \quad z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

$$3.8. \quad z = (x - y)^2 - 2y^2.$$

3.9. $z = x^2 + xy + 6x + y^2$. 3.10. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

4.1 – 4.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области D .

4.1. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$; $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

4.2. $z = x^2 + xy$; $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$.

4.3. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$; $D: x \geq 0, y \geq 0, x = y \leq 1$.

4.4. $z = x^2 + xy - 2$; $D: 4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.

4.5. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$; $D: 1 \leq x \leq 5, y \geq 0, x - y \geq 1$.

4.6. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $D: x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0$.

4.7. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$; $D: y = x + 1, y = 0, x = 3$.

4.8. $z = 10 + 2xy - x^2$; $D: 0 \leq y \leq 4 - x^2$.

4.9. $z = x^2 + xy - 2$; $D: y \geq 4x^2 - 4, y \leq 0$.

4.10. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$; $D: x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1$.

5.1–5.10. Дана функция $z = f(x, y)$, точка A и вектор l . Требуется найти $\text{grad} z$ в точке A , и производную в т. A в направлении вектора l .

5.1. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $A(3; 4)$, $l = i - j$.

5.2. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $A(2; 1)$, $l = 5i - 12j$.

5.3. $z = xy$, $A(1; 2)$, $l = i + j$.

5.4. $z = x^2 + y^2$, $A(2; -2)$, $l = -i + j$.

5.5. $z = x \sin y - y \cos x$, $A(0; 0)$, $l = 3i + 2j$.

5.6. $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$, $A(1; 1)$, $l = 3i - 4j$.

5.7. $z = \ln(x^2 + 4y^2)$, $A(6; 4)$, $l = 4i + 3j$.

5.8. $z = x^2 + 4y^2$, $A(2; 1)$, $l = -i + 2j$.

5.9. $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$, $A(1; 2)$, $l = 2i - 3j$.

5.10. $z = x^3 + y^2$, $A(3; 2)$, $l = i - j$.

Контрольная работа №3

Контрольные задания по разделу «Неопределенный и определенный интегралы»

1.1-4.10. Найдите неопределенные интегралы.

$$1.1. \int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx. \quad 1.2. \int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx.$$

$$1.3. \int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx. \quad 1.4. \int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$1.5. \int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2} dx. \quad 1.6. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.7. \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx. \quad 1.8. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.9. \int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx. \quad 1.10. \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx.$$

$$2.1. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx. \quad 2.2. \int \sin^4 2x \cos 2x dx.$$

$$2.3. \int e^{2x^3 - 1} x^2 dx. \quad 2.4. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1 + x^2} dx.$$

$$2.5. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}. \quad 2.6. \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx.$$

$$2.7. \int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx. \quad 2.8. \int x e^{1 - 6x^2} dx.$$

$$2.9. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1 - 25x^2}} dx. \quad 2.10. \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx.$$

$$3.1. \int x \cos(x+6) dx.$$

$$3.5. \int \arctg 8x dx.$$

$$3.3. \int \arcsin 3x dx.$$

$$3.7. \int x e^{-6x} dx.$$

$$3.9. \int x \cos(x+4) dx.$$

$$4.1. \int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx.$$

$$4.3. \int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx.$$

$$4.5. \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx.$$

$$4.7. \int \frac{x+4}{3x^2-6x-8} dx.$$

$$4.9. \int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx.$$

$$3.2. \int x \cos 6x dx$$

$$3.6. \int x \sin(x-2) dx.$$

$$3.4. \int \arccos 2x dx$$

$$3.8. \int x \sin(x+3) dx.$$

$$3.10. \int \ln(x-7) dx.$$

$$4.2. \int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx.$$

$$4.4. \int \frac{x dx}{2x^2+x+5}.$$

$$4.6. \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx.$$

$$4.8. \int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx.$$

$$4.10. \int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx.$$

5.1 – 5.10. Вычислите определенные интегралы.

$$5.1. \text{ а) } \int_6^9 \frac{dx}{x^2-7x+10};$$

$$5.2. \text{ а) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x};$$

$$5.3. \text{ а) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{б) } \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$$

$$\text{б) } \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

$$5.4. \text{ a) } \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4\delta}};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

$$5.5. \text{ a) } \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/12} \sin 2x \cos 6x dx.$$

$$5.6. \text{ a) } \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

$$5.7. \text{ a) } \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$5.8. \text{ a) } \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-2\cos x}.$$

$$5.9. \text{ a) } \int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

$$5.10. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

6.1 – 6.10. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость.

$$6.1. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}.$$

$$6.2. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+2)};$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$6.3. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$6.4. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{5 + 3x^3}}; \quad \text{б) } \int_0^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$6.5. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x + 1}}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$6.6. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x+2)^3} dx; \quad \text{б) } \int_0^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$6.7. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$6.8. \text{ а) } \int_0^{\infty} x \tilde{a}^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

$$6.9. \text{ а) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

$$6.10. \text{ а) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

7.1 – 7.10. Найдите площади фигур, ограниченных заданными линиями.

$$7.1. \text{ а) } y = (x - 3)^2, y = 4x - 7; \text{ б) } \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} y = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\text{в) } \rho = 1 + \cos \varphi, \quad \rho = \cos \varphi.$$

$$7.2. \quad \text{a) } y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi;$$

$$\text{в) } \rho = \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi.$$

7.3.

$$\text{a) } y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 4 \quad (y \geq 4);$$

$$\text{в) } \rho = 3(1 - \cos \varphi), \quad \rho = 3 \cos \varphi.$$

$$7.4. \quad \text{a) } y = (x + 1)^2, \quad y^2 = x + 1; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 4t - t^3, \end{cases} \quad y = 0 \quad (y \geq 0);$$

$$\text{в) } \rho = 2 \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$7.5. \quad \text{a) } x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 4 \quad (y \geq 4);$$

$$\text{в) } \rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = \sqrt{3} \quad (\rho \geq \sqrt{3}).$$

$$7.6. \quad \text{a) } x = (y - 2)^2, \quad x = 4y - 8; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \geq 2);$$

$$\text{в) } \rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi.$$

$$7.7. \quad \text{a) } y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 4; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3});$$

$$\text{в) } \rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad \rho = 2(1 + \cos \varphi).$$

$$7.8. \quad \text{а) } x = y^3, \quad x = -\sqrt{y}, \quad y = 1; \quad \text{б) } \begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = 8(t^3 - t); \end{cases}$$

$$\text{в) } \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi.$$

7.9

$$\text{а) } \begin{cases} y = \sin x, & y = \cos x, \\ x = 0 & (x \geq 0); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 0, \quad \pi \leq t \leq 2\pi;$$

$$\text{в) } \rho = 4 \sin \varphi, \quad \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

$$7.10. \quad \text{а) } y = e^x, \quad x + y = 1, \quad y = e; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad y = 1 \quad (y \geq 1);$$

$$\text{в) } \rho = 2(1 + \cos \varphi), \quad \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

Контрольная работа №4

Контрольные задания по разделу «Дифференциальные уравнения»

1.1 – 1.10. Найдите общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

$$1.1. \quad \text{а) } (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; \quad \text{б) } y' = \frac{x+y}{x-y};$$

$$\text{в) } y' - \frac{2}{x}y = 2x^3; \quad \text{г) } y' + \frac{2y}{x} = y^2x;$$

$$\text{д) } 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

$$1.2. \quad \text{а) } xy dx + (x+1) dy = 0; \quad \text{б) } (x+2y) dx - x dy = 0;$$

$$\text{в) } y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; \quad \text{г) } y' + 2y = y^2 e^x;$$

- д) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.
- 1.3.** а) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; б) $y^2 + x^2 y' = xy y'$;
 в) $x^2 y' + xy + 1 = 0$; г) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$;
 д) $(3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)dy = 0$.
- 1.4.** а) $xyy' = 1 - x^2$; б) $y' = -\frac{x+y}{x}$;
 в) $y = x(y' - x \cos x)$; г) $(1 - x^2)y' + 2xy = xy^2$;
 д) $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.
- 1.5.** а) $xy' - y = y^3$; б) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;
 в) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$; г) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$;
 д) $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$.
- 1.6.** а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; б) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;
 в) $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$; г) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2 y^2$;
 д) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0$.
- 1.7.** а) $xy' + y = y^2$; б) $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$;
 в) $xy' + y - e^x = 0$; г) $y' + y = x\sqrt{y}$;
 д) $e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0$.
- 1.8.** а) $y'y(1 + e^x) = e^x$; б) $xdy - ydx = ydy$;
 в) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$; г) $xydy = (y^2 + x)dx$;
 д) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0$.
- 1.9.** а) $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0$; б) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;
 в) $xy' - 2y = 2x^4$; г) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$;
 д) $(2x + y + 3x^2 \sin y)dx + (x + x^3 \cos y + 2y)dy = 0$.
- 1.10.** а) $y' = 10^{x+y}$; б) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

$$\text{в) } y' = 2x(x^2 + y); \quad \text{г) } y'x^3 \sin y = xy' - 2y;$$

$$\text{д) } (3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$

2.1 – 2.10. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$\text{2.1. а) } y'' + y' - 2y = 0; \quad \text{б) } y'' + 4y = 0.$$

$$\text{2.2. а) } y'' - 2y' + y = 0; \quad \text{б) } y'' + 9y = 0.$$

$$\text{2.3. а) } y'' - 4y' + 13y = 0; \quad \text{б) } y'' - 4y' = 0.$$

$$\text{2.4. а) } y'' - 5y' + 6y = 0; \quad \text{б) } y'' + 3y' = 0.$$

$$\text{2.5. а) } y'' - 2y' + 10y = 0; \quad \text{б) } y'' - 2y' = 0.$$

$$\text{2.6. а) } y'' + 2y' + 17y = 0; \quad \text{б) } y'' - 4y = 0.$$

$$\text{2.7. а) } y'' - 4y' + 20y = 0; \quad \text{б) } y'' + 9y' = 0.$$

$$\text{2.8. а) } y'' - 4y' + 5y = 0; \quad \text{б) } y'' - 49y = 0.$$

$$\text{2.9. а) } y'' - 5y' + 4y = 0; \quad \text{б) } y'' + 16y = 0.$$

$$\text{2.10. а) } y'' + 4y' + 5y = 0; \quad \text{б) } y'' + 5y' = 0.$$

3.1 – 3.10. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

$$\text{3.1. } y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{3.2. } y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

$$\text{3.3. } y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

$$\text{3.4. } y'' - 2y' + y = -24\cos 4x + 9\sin 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

$$\text{3.5. } y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$$

$$\text{3.6. } y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

$$\text{3.7. } y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$\text{3.8. } y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

$$\text{3.9. } y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

$$\text{3.10. } y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Контрольная работа № 5

Контрольные задания по разделу «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»

1.1 – 1.10. Измените порядок интегрирования. Сделайте чертеж области интегрирования.

$$1.1. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx.$$

$$1.2. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$1.3. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

$$1.4. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

$$1.5. \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dy \int_x^0 f(x, y) dy.$$

$$1.6. \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx$$

$$1.7. \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx$$

$$1.8. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx$$

$$1.9. \int_{-\sqrt{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$1.10. \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy.$$

2.1. – 2.10. Вычислите двойной интеграл по области, ограниченной указанными линиями.

$$2.1. \iint_D (9x^2y^2 + 2) dx dy, \quad D: y = x^3, y = 0, x = 3, y = 8.$$

$$2.2. \iint_D x(2x + y) dx dy, \quad D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$$

$$2.3. \iint_D x^2 \cos xy dx dy, \quad D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 2, x = 3.$$

$$2.4. \iint_D x(5 + y) dx dy, \quad D: y - x = 5, x + y + 5 = 0, x \leq 0.$$

$$2.5. \iint_D y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy, \quad D: x = 0, y = 3, y = x.$$

$$2.6. \iint_D (x^2 - xy) dx dy, \quad D: y = x^2 - 2, y = 7, x \geq 0.$$

$$2.7. \iint_D (x^3 + y) dx dy, \quad D: x + y = 1, x + y = 2, 0 \leq x \leq 1.$$

$$2.8. \iint_D (x^3 + 3y) dx dy, \quad D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0.$$

$$2.9. \iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy, \quad D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = \frac{x}{2}.$$

$$2.10. \iint_D 2ye^{2xy} dx dy, \quad D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{2}, x = 1.$$

3.1. – 3.10. Вычислите указанные криволинейные интегралы.

$$3.1. \int_L y^2 dl; \text{ где } L - \text{ дуга кривой } x = \ln y \text{ от т. } A(0; 1) \text{ до т. } B(1; e).$$

3.2. $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, где AB – дуга параболы $y = x^2$

от точки $A(1; 1)$ до $B(2; 4)$.

3.3.

$\int_L xy^2 dl$,

, где L – дуга окружности $y = R \sin t$, $x = R \cos t$, расположенная в первой четверти.

3.4.

$\int_{AB} x^2 dx + y^2 dy$, где AB – дуга кривой $y = e^x$ от точки $A(0, 1)$ до $B(1, e)$.

3.5.

$\int_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dl$, где L – дуга синусоиды $y = \sin x$, от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{2}$.

3.6.

$\int_C (y^2 dx + x^2 dy)$, где C – дуга параболы $y = 4 - x^2$, находящаяся в

верхней полуплоскости и пробегаемая по часовой стрелке.

3.7. $\int \sin^4 x \cos x dl$, где L – дуга кривой $y = \ln \sin x$, от $x=\frac{\pi}{4}$ до $x=\frac{\pi}{2}$.

3.8. $\int_{AB} xy dx + (y - x) dy$, где AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(0; 0)$

до $B(3; 9)$.

3.9. $\int_L xy dl$, где L – прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, y

$= 0$, $x = 4$, $y = 2$.

3.10. $\int_C y dx + x dy$, где C – верхняя половина эллипса $x = 3 \cos t$, $y =$

$\sin t$, пробегаемого против хода часовой стрелки.

Контрольная работа №6

Контрольные задания по разделу «Ряды»

1.1 – 1.10. Исследуйте сходимость знакоположительных рядов.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{8n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{10n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{3n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{5n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{(3n+5)^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{4n-3}}$.

1.3 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{9}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{(7n+8)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{5^{3n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{5n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+9}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 10 \cdot 17 \cdot \dots \cdot (7n-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{3n+1}}$.

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n-1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n+5}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot \dots \cdot (10n-9)}{2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (6n-4)}$.

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+8}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;

1.7. г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{3n-1}}$.
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5n - 1}{4n^3 + 6n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 - 1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 5)^2}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (6n - 4)}{6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (5n + 1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^n}$.
 1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)^2}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot e^{2n}}{n^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
 1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n + 1}{9n^2 + 2n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n + 5)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(\sqrt{5})^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{4n-3}}{n\sqrt{n}}$.
 1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n - 1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n + 1)}$;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{5n-3}}{(n + 1)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

2.1 – 2.10. Исследуйте знакпеременные ряды на абсолютную и условную сходимость.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(4n - 3)^2}$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4^n}$.
 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n + 4}}$. 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(5n - 3)}$.
 2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2 + 5}$. 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
 2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \sqrt{n}}$. 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{5n - 4}$.

$$2.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad 2.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}.$$

3.1 – 3.10. Найдите интервал сходимости степенных рядов, исследуйте сходимость на концах интервала.

$$3.1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n(n+3)}. \quad 3.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n^2 - 4}}.$$

$$3.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)x^n}{4^n(n+1)}. \quad 3.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

$$3.5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^{n-1}\sqrt{n}} \quad 3.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}.$$

$$3.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}. \quad 3.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

$$3.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+1)^2}{2^n}. \quad 3.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n 5^n}.$$

4.1 – 4.10. Вычислите с точностью до 0,001:

$$4.1. \quad \int_0^{0.5} \cos(4x^2) dx. \quad 4.2. \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

$$4.3. \quad \int_0^{0.4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx. \quad 4.4. \quad \int_0^{0.3} e^{-2x^2} dx.$$

$$4.5. \quad \int_0^{0.5} \sin(4x^2) dx. \quad 4.6. \quad \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx.$$

$$4.7. \quad \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}. \quad 4.8. \quad \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

$$4.9. \quad \int_0^{0.2} e^{-3x^2} dx. \quad 4.10. \quad \int_0^{0.1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$$

5.1 – 5.10. Найдите четыре первых отличных от нуля члена разложения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

5.1. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

5.2. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$.

5.3. $y' = 2x + e^x y^2$, $y(0) = -1$.

5.4. $y'' = x + y\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.5. $y' = x - 2y$, $y(0) = 0$.

5.6. $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5.7. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

5.8. $y'' + xy' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5.9. $y' = y^2 + x$, $y(0) = 1$.

6.10. $y'' - xy' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 1$.

6.1-6.10. Разложите данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале.

6.1.
 $f(x) = 4x$, $x \in (-1; 1)$, $T = 2$.

6.2.
 $f(x) = 2 - 3x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

6.3.
 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; T = 2\pi$

6.4.
 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -2x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; T = 2\pi$

6.5.
 $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ 3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}; T = 4$.

6.6.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x - \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi.$$

6.7.

$$f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x \leq 2, \\ 3x - \pi, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad T = 4.$$

6.8.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq 0, \\ -x - \pi, & 0 < x \leq 2 \end{cases}; \quad T = 4.$$

6.9.

$$f(x) = x + x^2, \quad x \in (-\pi; \pi), \quad T = 2\pi.$$

$$\mathbf{6.10.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -2 + x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}; \quad T = 2\pi.$$

Правила выполнения и оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в тетради, отдельной для каждой работы, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы должны быть ясно написаны фамилия и инициалы студента, учебный номер (шифр), номер контрольной работы. Заголовок работы надо поместить на обложке тетради, здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует указать список использованной литературы, проставить дату её выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены задачи строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью её условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условия задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной контрольной работы, как не зачтённой, так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты.

8. При высылаемых исправлениях должна быть обязательно прорецензированная работа и рецензия на неё. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

Студент обязан выполнить контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

Рекомендуемая литература

Основная литература

- 1 Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1,2. М.: Физматлит, 2010.
- 2 Берман Г.Л. Сборник задач по математическому анализу. М., Наука. 2010-2012.— 448с
- 3 Щипачёв В.С, Высшая математика М., Высшая школа. 2009-2012 . — 480 с.
- 4 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 4-е изд. — М.: Айрис-пресс. 2008-2012. — 608 с.

Дополнительная литература

- 5 Сборник задач по математике для втузов, т. 1, под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.Л. М. : Физматлит. 2003. — 468 с
- 6 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа, т. 2, под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.Л. М. : Физматлит. 2003. — 368 с.
- 7 Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Высшая школа. 2005. — 307 с.
- 8 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М., Высшая школа. 2003-2006 . — 176 с.
- 9 Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа. 2003-2005.- 126с.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

— электронная библиотечная система АГТУ.- URL:
<http://library.astu.org>;
— вузовские электронно-библиотечные системы учебной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Методика изучения математической дисциплины в высшем учебном заведении студентами – заочниками.....	4
Программа курса.....	7
Образец выполнения заданий по разделу «Введение в математический анализ».....	11
Образец выполнения заданий по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».....	14
Образец выполнения заданий по разделу «Функции нескольких переменных».....	25
Образец выполнения заданий по разделу «Неопределённый и определённый интегралы».....	30
Образец выполнения заданий по разделу «Дифференциальные уравнения».....	35
Образец выполнения заданий по разделу «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».....	43
Образец выполнения заданий по разделу «Ряды».....	47
Контрольная работа №1.....	54
Контрольная работа №2.....	57
Контрольная работа №3.....	64
Контрольная работа №4.....	69
Контрольная работа №5.....	72
Контрольная работа №6.....	75
Правила выполнения и оформления контрольных работ.....	80
Рекомендуемая литература.....	81
Содержание.....	82

Ольга Николаевна Шамайло

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа, методические указания, контрольные задания по
дисциплине «математический анализ» для студентов-
заочников направлений подготовки
Института информационных технологий
и коммуникаций

Для заметок

Типография АГТУ

Тираж . Заказ от .