

*Приложение к Методическим рекомендациям
по организации самостоятельной работы обучающихся
по программам высшего образования
в ФГБОУ ВО «Астраханский государственный
технический университет»*



**Федеральное агентство по рыболовству
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Астраханский государственный технический университет»
система менеджмента качества в области образования, воспитания, науки и
инноваций сертифицирована DQS
по международному стандарту ISO 9001:2015**

Институт информационных технологий и коммуникаций

Кафедра Высшая и прикладная математика

Математика

**Методические указания
по выполнению самостоятельной работы**

для обучающихся по направлению
**35.03.09 Техника и технология
рыболовства**

Автор: к.т.н., доцент кафедры «Высшая и прикладная математика»

Терновая Г.Н.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая и прикладная математика»

Ильясова А.К.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математика» утверждены на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»
«24» 06.2021 г., протокол № 5.

№ п/п	Тематика практических заданий	Трудоем кость (час)
1	<u>Элементы линейной и векторной алгебры</u> Определители. Свойства определителей. Вычисление определителей II и III порядков. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, матричным способом и методом Гаусса. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов. Определение и свойства. Скалярное произведение векторов в координатной форме. Векторное произведение векторов. Определение и свойства. Векторное произведение векторов в координатной форме. Смешанное произведение векторов. Определение, свойства, приложения в геометрии.	8
2	<u>Аналитическая геометрия</u> Прямая линия на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве. Кривые второго порядка	2
3	<u>Введение в математический анализ</u> Функция. Определение и основные свойства функции. Понятие предела функции на бесконечности и в точке. Основные теоремы о пределах. Бесконечно малые функции и их свойства. Эквивалентные бесконечно малые функции. Непрерывность функции в точке и на множестве. Вычисление пределов, раскрытие неопределенностей.	24
4	<u>Дифференциальное исчисление функции одной переменной</u> Производная. Теоремы о производных. Физический и геометрический смысл производной. Правило Лопиталя для вычисления пределов. Исследование функций при помощи производных. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	20
5	<u>Неопределенный интеграл</u> Неопределенный интеграл, свойства. Основные методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой (замена переменной) и по частям. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций.	10
6	<u>Определенный интеграл</u> Определение, основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.	10

	Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям. Геометрические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы I и II рода. Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения.	
7	<u>Дифференциальные уравнения.</u> Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.	12
8	<u>Числовые и функциональные ряды</u>	10
9	<u>Элементы теории вероятностей и математической статистики</u> Классическое определение вероятности, свойства. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Повторные испытания (формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона). Дискретные случайные величины, числовые характеристики. Функция распределения случайной величины. Непрерывные случайные величины, числовые характеристики. Функция плотности распределения вероятностей. Нормальный закон распределения. Функция Лапласа. Равномерное распределение. Элементы математической статистики, основные понятия. Числовые характеристики статистического распределения. Основы теории корреляции. Корреляционный и регрессионный анализ.	10

Практическое занятие №1

Определители. Свойства определителей. Вычисление определителей.

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Вычислить определители второго порядка.

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ & \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ & \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ & \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & \cos x \\ & \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \operatorname{ctg}^2 x & \operatorname{tg}^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители третьего порядка.

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & \end{vmatrix}; \\ \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. Решить уравнения.

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Решить неравенства.

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

5. Найти миноры всех элементов определителей.

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

6. Найти алгебраические дополнения всех элементов определителей.

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислить определители четвертого порядка.

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \\ \text{г)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме.

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13-е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №2

Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица.

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Найти произведения матриц.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & +2 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \\ \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{г)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 2 \ -4). \\ \text{д)} (3 \ 1 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти AB и BA .

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти

а) $A^2 + 2A - 3E$;	г) $(A + 2B)^2$;
б) $AB - BA$;	д) $A^2 - B^2$;
в) $B^2 - 3B + 2E$;	е) $(A - B)(A + B)$.

4. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{ж)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}; & \text{з)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

5. Решить матричные уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} XA = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \\ \text{б)} AXB = C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \\ \text{в)} AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме/

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №3

Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений. Критерий совместности системы линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Запись и решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричном виде. Метод Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. Однородная система линейных уравнений.

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Решить системы а) по формулам Крамера,

б) матричным методом, в) методом Гаусса.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1; \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16; \\ 5y - z = 10 \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0; \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3; \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \\ \text{ж)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 13 \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 19 \end{cases} & \text{и)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \end{array}$$

2. Решить однородные системы.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x + 2y - 4z = 0; \\ 2x + y - 5z = 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x - y + z = 0; \\ x - 3y - 2z = 0; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 3x - 2y + z = 0; \\ 5x - 8y + 9z = 0; \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 2x + 4y - 5z = 0; \\ 3x - 2y + z = 0; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0; \\ 5x + 3y + 4z = 0; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ж)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases} & \text{и)} \begin{cases} 2x + y + 3z - t = 0 \\ 3x - 2y + z + 2t = 0 \\ 4x + 3y + 2z - 8t = 0 \\ -3x + 4y + 3z - 2t = 0 \end{cases} \end{array}$$

3. При каком a система имеет ненулевые решения. Найти их.

$$\begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

3. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13 —е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
5. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие № 4

Действия над векторами.

Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = \{3, -5, 8\}$ и $\vec{b} = \{-1, 1, -4\}$.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\alpha = 120^\circ$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.
3. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$?
5. Определить угол между векторами $\vec{a} = -i + j$ и $\vec{b} = i - 2j + 2k$.
6. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Найти его внутренний угол φ_1 при вершине A и внешний угол φ_2 при вершине B .
7. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$ и $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$. Вычислить $\text{pr}_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a}$.
8. Вычислить какую работу производит сила $\vec{f} = \{3; -2; -5\}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2; -3; 5)$ в положение $B(3; -2; -1)$.
9. Раскрыть скобки и упростить выражения:
 - 1) $i \times (j + k) - j \times (i + k) + k \times (i + j + k)$
 - 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;
 - 3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;
 - 4) $2i \cdot (j \times k) + 3j \cdot (i \times k) + 4k \cdot (i \times j)$
10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$ 2) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.
11. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?
12. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\vec{a} \times \vec{b}$;
 - 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$;
 - 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.
13. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.
14. Показать, что векторы компланарны.
 - 1) $\vec{a} = -i + 3j + 2k$, $\vec{b} = 2i - 3j - 4k$, $\vec{c} = -3i + 12j + 6k$.
 - 2) $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$.
 - 3) $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$.
15. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.
16. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13-е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практическое занятие №5

Аналитическая геометрия

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Даны координаты точек A1 (4,5,-1), A2 (4,5,8), A3 (2,1,-1), A4 (4,4,4).
 - а) найти угол
 - б) найти проекцию вектора на вектор;
 - в) найти объем пирамиды A1 A2 A3 A4;
 - г) найти уравнение прямой, проходящей через A4, перпендикулярно плоскости;
2. Даны три вершины трапеции ABCD: A(-3,-2); B(4,-1); C (1,3). AD параллельна BC. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: $(x-2)/3=(y+1)/2=(z-3)/-2$ и $(x-1)/3=(y-2)/2=(z+3)/-2$.
4. Найти координаты вектора x , перпендикулярного к векторам $a=\{2;3;-1\}$, $b=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяющего условию $x(2i-j+k)=-6$.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>

Практические занятия № 6-17

Введение в математический анализ

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Вычислить следующие пределы, не применяя правило Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

$$4.52. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$4.54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2x}$$

$$4.56. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{7 - 3x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+5} \right)^{2x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$$

Исследовать функции на непрерывность и указать характер точек разрыва.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

$$f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f(x) = 6^{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4/x, & x < -2 \\ x, & -2 \leq x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -\operatorname{tg} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
3. Волкова А.А. Сборник типовых заданий по математическому анализу по теме «Предел функции и непрерывность» – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2020г. – 50 с. : <http://portal.astu.org>

Практические занятия № 18-27

Задание – решить задачи различного уровня сложности

1. Найти производные следующих функций:

$$y = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$y = (1 + \sqrt[3]{x})^5$$

$$y = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x.$$

$$y = \sin x \cdot e^{\cos x}.$$

$$y = \sqrt{x e^x + x}.$$

$$y = e^{-x^2} \ln x.$$

$$y = \arctg(x^2 - 3x + 2).$$

$$y = \lg(x - \cos x).$$

$$y = 3\cos^2 x - \cos^3 x.$$

$$y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}.$$

$$y = \arctg \frac{x+1}{x-1}.$$

$$y = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{x} \right).$$

$$y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}.$$

$$y = \sin^2 \left| \frac{1 - \ln x}{x} \right|.$$

$$y = \log_3(x^2 - \sin x).$$

2. Найти частные значения производной: $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ при $x=0$; 1 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$; $\sqrt{3}$.
3. Доказать, что функция $y = 2\sqrt{\ln x - x^2} + C$ при любом постоянном значении C удовлетворяет уравнению $xy' = 1 - x^2$.
4. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 1 + t + t^2$, S выражено в сантиметрах, t – в секундах. Определить кинетическую энергию ($mv^2/2$) тела через 5 секунд после начала движения.

Логарифмическое дифференцирование, дифференцирование функций,
заданных параметрически

5. Найдите производные от следующих функций:

$$a) y = x^{x^2}.$$

$$б) y = x^{\sin x}.$$

$$в) y = (1 - x^2)^{\arccos x}.$$

$$г) y = \sqrt[3]{\arctg x}.$$

$$д) y = (\arcsin 3x)_{\sqrt{1-9x^2}}.$$

$$е) y = \left(\frac{2x}{3x^2 - 7} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Найти производную $y' = \frac{dy}{dx}$ для функций y , заданных параметрически:

$$a) \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t}{(t+1)^2} \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad г) \begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^2 t \end{cases}$$

6. Найти дифференциалы функций для произвольных значений аргумента.

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

$$y = \frac{x+2}{x-1}.$$

$$y = \arctg 3x.$$

$$y = \ln(1 + x^2).$$

$$y = \sin^2 x.$$

$$y = e^x \cos x.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Найдите производные 2^{го} порядка от следующих функций:

$$y = \sin^2 x.$$

$$y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}.$$

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

$$y = (1 + x^2) \arctg x.$$

$$y = (\arcsin x)^2.$$

$$y = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$$

$$y = x e^{x^2}.$$

$$y = \frac{1}{1 + x^3}.$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x.$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}.$$

$$y = e^{\sqrt{x}}.$$

Найти производные 3^{го} порядка от следующих функций:

$$y = \frac{x}{6(x+1)}$$

$$y = \operatorname{sh}^2 x$$

$$y = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

$$y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$$

Найдите производные 2^{го} порядка следующих функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}, t \in (0; \infty).$$

$$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}, t \in (-1; 1).$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Правило Лопиталю

Найдите пределы используя правило Лопиталю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n \cdot e^{-x}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Волкова А.А. Сборник типовых заданий по математическому анализу по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2018 г. – 50 с. : <http://portal.astu.org>
2. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)
4. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL: <http://e.lanbook.com/book/92434>.

Практические занятия № 28-29

Задание – решить задачи различного уровня сложности

Исследование функций и построение графиков

Найти интервалы монотонности функций:

$$\begin{array}{lll} y=x^4+8x^3+5. & y=\frac{1}{(x-5)^2}. & y=\frac{2x-3}{x+7}. \\ y=\ln(1+x^2)-x. & y=xe^{-5x}. & y=-x^3\ln x. \end{array}$$

Исследовать на экстремум следующие функции:

$$\begin{array}{ll} y=x^3-3x^2-24x+7. & y=\frac{x}{9-x^2} \\ y=(x^2-8)e^x. & y=x\ln x. \end{array}$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

$$y=-3x^2+4x-8, x \in [0,1].$$

$$y=\sqrt{25-x^2}, x \in [-4,4].$$

$$y=x\ln^2 x, x \in [1/e, e].$$

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости, вогнутости графиков данных функций:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4, \quad y = (x+1)^4, \quad y = \frac{1}{x+3},$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 12}, \quad y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}, \quad y = x^2 \ln x$$

$$y = (1+x^2)e^x, \quad y = 2\sqrt{x} - 7x + 5, \quad y = 3x^{-3} + 5x$$

Найти асимптоты данных функций:

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^3}$$

$$y = \frac{x}{4-x^2}$$

Провести полное исследование функций и построить их графики:

$$y = x(x-1)^3, \quad y = x^4 - 2x^2 + 3,$$

$$y = \frac{(x+1)^2}{x-2}, \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+4},$$

$$y = x^3 e^{-x^2/2}, \quad y = \frac{\ln x}{x}.$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13 —е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

3. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие.

В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

[Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. —

Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 303 с. — URL:

<http://e.lanbook.com/book/92434>.

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

Практические занятия №30-32

Неопределенный интеграл.

Функция $F(x)$ называется *производной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет множество первообразных $F(x) + C$. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется *совокупность всех ее первообразных* и обозначается:

$\int f(x)dx = F(x) + C$. Нахождение неопределенного интервала называется интегрированием функции.

Приведем основные формулы интегрирования:

$$1) \int f'(x)dx = f(x),$$

$$2) d \int f(x)dx = f(x)dx,$$

$$3) \int dF(x) = F(x) + C,$$

$$4) \int af(x)dx = a \int f(x)dx,$$

$$5) \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx,$$

$$6) \text{ если } \int f(x) dx = F(x) + c \text{ и } u = u(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + c,$$

$$7) \text{ если } \int f(x) dx = F(x) + c, \text{ то } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием, т.е. $(F(x) + c)' = f(x)$

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов:

$$1) \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad (\alpha \neq -1),$$

$$2) \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c,$$

$$3) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c,$$

$$4) \int e^u du = e^u + c,$$

$$5) \int \sin u du = -\cos u + c,$$

$$6) \int \cos u du = \sin u + c,$$

$$7) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c,$$

$$8) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c,$$

$$9) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + c,$$

$$10) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c = -\arccos \frac{u}{a} + c,$$

$$11) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c,$$

$$12) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c,$$

$$13) \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + c = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u \right| + c,$$

$$14) \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u \right| + c,$$

$$15) \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + c,$$

$$16) \int \operatorname{ctg} u du = -\ln |\sin u| + c.$$

Здесь буква u может обозначать как независимую переменную так и непрерывную дифференцированную функцию.

Задача нахождения неопределённых интегралов решается методом их сведения к одному из табличных интегралов с помощью алгебраических преобразований подынтегральной функции $f(x)$ или подведения части ее множителей под знак дифференциала. Решим примеры.

1. Найти неопределённые интегралы.

a) $\int \left(3x + \frac{3}{x^3} - 12\sqrt[5]{x^2} \right) dx.$

Решение: $\int \left(4x + \frac{3}{x^3} - 14\sqrt[5]{x^2} \right) dx = \int 4x dx + \int \frac{3dx}{x^3} - 14 \int \sqrt[5]{x^2} dx =$

$$= 4 \int x dx + 3 \int x^{-3} dx - 14 \int x^{\frac{2}{5}} dx = 4 \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 14 \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} =$$

$$= x^2 - \frac{3}{2x^2} - 14 \cdot \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7} + C = 2x^2 - \frac{3}{2x^2} - 10 \cdot \sqrt[5]{x^7} + C.$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d3x}{\sqrt{2^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{3x}{2} + C.$$

c) $\int \frac{dx}{5x-4}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{5x-4} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-4)}{5x-4} = \frac{1}{5} \ln |5x-4| + C.$$

d) $\int \cos \frac{2x}{3} dx.$

Решение: $\int \cos \frac{2x}{3} dx = \frac{3}{2} \int \cos \frac{2x}{3} d\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{3}{2} \sin \frac{2x}{3} + C.$

e) $\int (x+2) \sin 3x dx$

Решение: Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int (x+2) \sin 3x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+2 & du = (x+2)' dx = dx \\ dv = \sin 3x dx & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3} (x+2) \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} (x+2) \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

4.1.

4.2.

$$\int \left(3x^2 + \frac{8}{x^5} + 11\sqrt[9]{x^2} \right) dx$$

$$\int \frac{(3x^2 - 2)^2}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{3x - 4}$$

$$\int \sin \frac{x}{3} d x$$

$$\int (x + 9) \sin x dx$$

$$\int \left(4 - \frac{1}{x^3} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$$

$$\int \frac{(x^3 - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}$$

$$\int e^{-3x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3 - 4x}}$$

$$\int x \ln(x + 1) dx$$

4.3

$$\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\int \frac{(1 - 2x^3)^2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\int \cos 2x dx$$

$$\int \frac{dx}{(3x - 1)^4}$$

$$\int (7x - 3) \cos \frac{x}{2} d x$$

4.4

$$\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^3} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^6 - 2x^2 + 3}}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

$$\int \sin 4x dx$$

$$\int (4 - x) e^{-3x} dx$$

4.5

$$\int \left(6x^5 - \frac{1}{x^2} - 8\sqrt[3]{x^3} \right) dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^3 - 3x^4 + 2}}{x} dx$$

$$\int (x + 9)^6 dx$$

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\int (5 - 2x) \sin \frac{x}{3} d x$$

4.6

$$\int \left(3x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^3} \right) dx$$

$$\int \frac{\sqrt{3x + 4x^2 - 5}}{2x^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{16 + x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x}}$$

$$\int x^2 \ln x d x$$

4.7

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^6 - 2x^2 + 3}}{x} dx$$

4.8

$$\int \left(4 - \frac{1}{x^3} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\int \sin 2x \, dx$$

$$\int (x+2) \ln x \, dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^3 - 3x^4 + 2}}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\int (x+2) \ln x \, dx$$

$$4.9 \int \left(x \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$$

$$\int \frac{(3x^2 + 4\sqrt{x})^2}{2x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{3-5x}$$

$$\int (4-5x) \sin 3x \, dx$$

4.10

$$\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx$$

$$\int \frac{(4 + 3\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \sin \frac{x}{4} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$$

$$\int (4+5x) e^{3x} \, dx$$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Волкова А.А. Сборник типовых заданий по математическому анализу по теме «Неопределённый интеграл» – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2017 г. – 50 с. : <http://portal.astu.org>
2. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – 12-е изд., 13 –е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

Практические занятия №33-37

Определенный интеграл

Определённые интегралы вычисляются по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Решение: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$

Решение:

б)

$$\begin{aligned} \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{(25+3x)^3}} &= \frac{1}{3} \int_0^{-3} (25+3x)^{-\frac{3}{2}} d(25+3x) = \frac{(25+3x)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \Big|_0^{-3} = \\ &= \frac{(25+3x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{-3} = -\frac{2}{\sqrt{25+3x}} \Big|_0^{-3} = -\frac{2}{\sqrt{25-9}} + \frac{2}{\sqrt{25}} = -\frac{2}{4} + \frac{2}{5} = \\ &= \frac{-10+8}{20} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10} = -0,1. \end{aligned}$$

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$y = (x-3)^2, \quad y = 4x-7$$

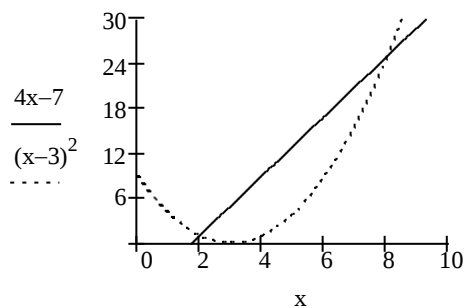
Решение: Найдём точки пересечения параболы и прямой. Приравняем уравнение прямой и параболы.

$$(x-3)^2 = 4x-7. \text{ Получим квадратное уравнение } x^2 - 10x + 16 = 0. \text{ Корни этого уравнения } x_1 = 2, x_2 = 8$$

Найдём $y_1 = 1, y_2 = 25$. Ниже изображён чертёж.

Вычислим площадь фигуры.

$$\begin{aligned} \int_1^{25} (4x-7 - (x-3)^2) dx &= \left(2x^2 - 7x - \frac{(x-3)^3}{3} \right) \Big|_1^{25} = \\ &= \left(128 - 56 - \frac{125}{3} \right) - \left(16 - 14 + \frac{1}{3} \right) = 72 - 2 - \frac{126}{3} = 28 \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$



2. Вычислить определённые интегралы.

2.1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$$

2.2.

$$\int_2^9 \frac{2-\sqrt{x}}{x} dx$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$$

2.3.

$$\int_0^\pi \sin \frac{3x-\pi}{3} dx$$

$$\int_0^1 (3x+1)^3 dx$$

2.4.

$$\int_0^{12} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$$

$$\int e^{5x-2} dx$$

2.5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{9x^2-4}$$

$$\int_0^\pi \cos \frac{3x}{4} dx$$

2.6.

$$\int_0^1 \frac{dx}{3x+5}$$

$$\int_1^4 \frac{x^2+3}{\sqrt{x}} dx$$

2.7.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}$$

$$\int_0^3 e^{\frac{x}{2}} dx$$

2.8.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$$

$$\int_1^9 3^{1+3x} dx$$

2.9.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$$

2.10.

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^3}$$

$$\int_0^2 (4-2x)^2 dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+4x^2}$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

3.1. $y = 2 - x^3/4, \quad x = 0, \quad y = 0$

3.16. $y = 6 - x, \quad y = 5/x$

3.2. $y = x^2, \quad y = 6-x, \quad y = 0$

3.17. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$

3.3. $y = x^2 - 3x, \quad y = 0$

3.18. $y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4$

3.4. $y = \frac{1}{x+1}, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0$

3.19. $y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{x^2}{2}$

3.5. $y = e^x, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0$

3.20. $y^2 = x+1, \quad y^2 = 9-x$

3.6. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

3.21. $y^2 = x^3, \quad x = 2$

3.7. $y = x^2, \quad y = -x+2$

3.22. $y = x^3, \quad y = 1, \quad x = 0$

3.8. $y = (x+1)^2, \quad x = -4, \quad y = 0$

3.23. $y = x^2 - 2x, \quad y = 0$

3.9. $y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = 4x, \quad y = 0$

3.24. $y = x^3, \quad y = 4x$

3.10. $3y = (x-1)^2, \quad y = x+5$

3.25. $y = 2 - x^2, \quad y = x$

3.11. $y = 3 - x, \quad y = x^2$

3.26. $y = x^2 + 1, \quad x + y = 3$

3.12. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 2-x$

3.27. $yx = 4, \quad y + x = 5$

3.13. $x = 4y - y^2, \quad x + y = 6$

3.28. $y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 5$

3.14. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$

3.29. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

3.15. $3y = (x-4)^2, \quad y = x + 2$

3.30. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов-н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. — 12-е изд., 13-е изд. - М.: Айрис Пресс, 2014. - 608с., 288 с. (Библиотека АГТУ, 13 экз.)

Практические занятия №38-43

Дифференциальные уравнения

а) Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Общий вид уравнение с разделяющимися переменными $M_1(x)N_1(y)dy = M_2(x)N_2(y)dx$. Разделим

переменные. $\frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx$. Проинтегрируем: $\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)} dx$ Решим уравнение

$$(2xy^2 + 4x)dx + (x^2y - y)dy = 0. (2xy^2 + 4x)dx = -(x^2y - y)dy$$

Вынесем за скобочки общий множитель.

$$2x(y^2 + 2)dx = -y(x^2 - 1)dy = 0$$

$$\frac{2xdx}{x^2 - 1} = -\frac{ydy}{y^2 + 2}, \text{ Проинтегрируем: } \int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = -\int \frac{ydy}{y^2 + 2} \int \frac{dx^2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy^2}{y^2 + 2},$$

$$\ln|x^2 - 1| = -\frac{1}{2} \ln|y^2 + 2| + \ln|C|, \ln|x^2 - 1| = \ln \frac{C}{\sqrt{y^2 + 2}}. \text{ Или, отбросив логарифмы, получим}$$

$$|x^2 - 1| = \frac{C}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

б) Решим однородное уравнение. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

$$y' = \frac{1 + 2\frac{y}{x}}{2 - \frac{y}{x}}, \text{ Введем замену } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x.$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u}{2 - u}, x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{2 - u}, \frac{2 - u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x}, \int \left(\frac{2}{1 + u^2} - \frac{u}{1 + u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x},$$

$$2 \arctg u - \frac{1}{2} \ln|1 + u^2| = \ln|x| + \ln C, 2 \arctg \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

в) Решим линейное уравнение $y' - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0$. Общий вид этого уравнения

$y' + P(x)y = Q(x)$. Решение ищем в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение, получим $u'v + uv' - uv \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Вынесем за скобочку u . $u'v + u(v' - v \cos x) = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Уравнение распадается на два уравнения с разделяющимися переменными. $\begin{cases} v' - v \cos x = 0 \\ u v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$ Решим первое

уравнение. $\frac{dv}{dx} = v \cos x, \frac{dv}{v} = \cos x, \ln|v| = \sin x, v = e^{\sin x}$. Решим второе уравнение с учётом

$$v = e^{\sin x}. \text{ Получим } u' e^{\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x. \quad u = \frac{\int \sin 2x dx}{\int e^{\sin x} dx} = \frac{1}{2} \int e^{-\sin x} \sin 2x dx = \int e^{-\sin x} \sin x \cos x dx =$$

$$= \int e^{-\sin x} \sin x d \sin x. \text{ Пусть } \sin x = t, \text{ тогда получим интеграл}$$

$$\int e^{-t} t dt = \left. \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = e^{-t} dt \\ v = -e^{-t} \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + C. u = -\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + C. \text{ Поскольку}$$

$y = uv$, получим

$$y = e^{\sin x} (-\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + C) = -\sin x - 1 + C \sin x, \text{ с учётом начальных}$$

условий получим

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C - 1.$$

$$y = -\sin x - 1$$

г) Найти решение дифференциального уравнения $y' + 3y' + 2y = 3 - 2x^2$.

Решение ищем в виде суммы решений $y_{OH} = y_{OO} + y_{CH}$. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ – характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. $y_{OO} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ – общее решение однородного уравнения.

$$y_{CH} = Ax^2 + Bx + C,$$

$$y' = 2Ax + B, \quad 2A = -2 \Rightarrow A = -1,$$

$$y' = 2A, \quad 6A + 2B = 0 \Rightarrow B = 3$$

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 3 - 2x^2, \quad 2A + 3B + 2C = 3 \Rightarrow C = -2.$$

$$2Ax^2 + x(6A + 2B) + 2A + 3B + 2C = 3 - 2x^2.$$

Отсюда $y_{CH} = -x^2 + 3x - 2$ – частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{OH} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - x^2 + 3x - 2.$$

д) Найти общее решение дифференциального уравнения. $y' - 2y' + y = (16 - 12x)e^{-x}$.

Решение ищем в виде суммы решений $y_{OH} = y_{OO} + y_{CH}$.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ – характеристическое уравнение. $y_{OO} = (C_1 + C_2 x)e^x$ – общее решение однородного

$$y_{CH} = (Ax + B)e^{-x},$$

$$y' = (A - B - Ax)e^{-x},$$

уравнения.

$$y' = (Ax - 2A + B)e^{-x}, B)e^{-x},$$

$$e^{-x} (Ax - 2A + B) - 2(A - B - Ax)e^{-x} + (Ax + B)e^{-x} = (16 - 12x)e^{-x},$$

$$4A = -12 \Rightarrow A = -3,$$

$$-4A + 4B = 16 \Rightarrow B = 7 \quad \text{Отсюда } y_{CH} = (-3x + 7)e^{-x} \text{ – частное решение неоднородного уравнения. Общее}$$

$$\text{решение } y_{OH} = (C_1 + C_2 x)e^x + (7 - 3x)e^{-x}.$$

е) Найти общее решение дифференциального уравнения. $y' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$.

Решение ищем в виде суммы решений $y_{OH} = y_{OO} + y_{CH}$.

$\lambda^2 + \lambda = 0$ – характеристическое уравнение. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, y_{00} = C_1 + C_2 e^{-x}$ – общее решение

$$y_{\text{чн}} = A \cos 7x + B \sin 7x,$$

$$y' = -7A \sin 7x + 7B \cos 7x,$$

однородного уравнения. $y' = -49A \cos 7x - 49B \sin 7x,$

$$-49A \cos 7x - 49B \sin 7x - 7A \sin 7x + 7B \cos 7x = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x,$$

$$(7B - 49A) \cos 7x + (-7A - 49B) \sin 7x = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x.$$

$$\begin{cases} 7B - 49A = 2, \\ -7A - 49B = 3 \\ A = -\frac{17}{350}, \\ B = -\frac{133}{2450}. \end{cases}$$

Отсюда $y_{\text{чн}} = -\frac{17}{350} \cos 7x - \frac{133}{2450} \sin 7x$ - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{\text{OH}} = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{17}{350} \cos 7x - \frac{133}{2450} \sin 7x.$$

Задача 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка

1.1.

$$x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{-2xy}$$

$$y' - \frac{y}{x} = x e^x$$

1.2.

$$\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + ydx = 0$$

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x$$

1.3.

$$(x + 2xy)dx + (1 + x^2)dy = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$$

$$y' + y \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$$

1.4.

$$2xy^2 dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

$$y' = \frac{4xy}{2x^2 - y^2}$$

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

1.5.

$$\sqrt{3 + y^2} dx - (x^2 y + y) dy = 0$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 3 \frac{y}{x} + 2$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$$

1.6.

$$x\sqrt{3 + y^2} dx + y^2 \sqrt{2 + x^2} dy = 0$$

$$y' = \frac{x^2 + xy - 9y^2}{x^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

1.7.

$$(xy^2 + x) dx + (x^2 y - y) dy = 0$$

$$y' - \frac{y}{x} = xe^x$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$$

1.8.

$$(xy^2 + x) dx - (x^2 y + y) dy = 0$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2$$

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$$

1.9.

$$3x^3 \sqrt{dx} + (1 - x^2) dy = 0$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$y' + \frac{y}{2x} = x^5$$

1.10.

$$\sqrt{2 + y^2} dx + 3(x^2 y + y) dy = 0$$

$$(x^2 + y^2) = 5xy'$$

$$y' - \frac{2y}{x+1} = \frac{3x-1}{x+1}$$

Практические занятия №44-48 **Числовые и функциональные ряды**

1. Исследуйте сходимость знакоположительных рядов.

1.1.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{8n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{10n}$;
г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{3n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

Исследуйте знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимость.

2.1.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(4n-3)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Найдите интервал сходимости степенных рядов, исследуйте сходимость на концах интервала.

3.1 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+1)^2}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n 5^n}$.

Практические занятия №49-53

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Задание- решить задачи различного уровня сложности

1. Классическое определение вероятностей.
2. Теоремы сложения и умножения для произвольных событий.
3. Формула полной вероятности, Формулы Байеса.
4. Повторные независимые испытания.
5. Дискретные и непрерывные случайные величины.
6. Нормальное распределение.

1. Имеется 10 одинаковых урн, в девяти из которых находится по два белых и два черных шара, а в одной пять белых и один черный. Из урны, взятой наудачу, был извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

2. Для сигнализации об аварии установлены 3 независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии не сработает первое устройство – 0,1; второе – 0,3; третье – 0,5. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) хотя бы одно устройство; б) только два устройства.
3. В ящике лежат 6 новых и 4 старых теннисных мячей. Из ящика для первой игры наудачу вынимается один мяч, а после игры возвращается в ящик. После этого вынимается один мяч для следующей игры. Определить вероятность того, что этот мяч окажется новым.
4. Студент озабочен предстоящими экзаменами по физике и математике. По его мнению, вероятность того, что он сдаст хотя бы физику, равна 0,4, вероятность того, что он сдаст хотя бы один предмет 0,6, а вероятность того, что он сдаст оба предмета равна, 0,1. Какова предполагаемая студентом вероятность того, что он сдаст хотя бы экзамен по математике?
5. В одной урне 1 белый и 4 черных шара, а в другой – 2 белых и 3 черных, в третьей – 3 белых и 2 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 1 белый и 2 черных шара.
6. Из колоды (36 карт) берутся три карты. Какова вероятность того, что среди взятых карт будет хотя бы два туза?
7. На 2-х автоматах производятся одинаковые детали. Производительность первого автомата в три раза больше производительности второго. Первый автомат производит 80% деталей первого сорта, а второй 90% первого сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь будет первого сорта.
8. На инструментальный склад поступили восемь новых инструментов. Каждой из трех смен выдается случайным образом один инструмент, который после окончания работы возвращается обратно на склад. Определить вероятность того, что третья смена получит новый инструмент.
9. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6 и для третьего – 0,7. Какова вероятность того, что в мишень попало не менее двух пуль.
10. Числа 1,2,3,4,5 написаны на 5 карточках. Наугад, последовательно, выбирают 3 карточки и располагают слева направо. Найти вероятность того, что оставленное при этом трехзначное число будет четным.
11. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение минуты позвонят 3 абонента или 4 абонента.
12. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит не более 3 бракованных книг?
13. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит: а) 75 раз; б) не более 85 раз и не менее 75 раз?
14. Вероятность того, что каждый из 8 спортсменов выполнит норму мастера спорта 0,6. Какова вероятность того, что норму мастера спорта выполнят не более 2-х человек. Найти наименьшее число спортсменов, получивших мастера спорта и обеспечить это число вероятностью.
15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность 4-х попаданий при пяти выстрелах.
16. К электросети подключено 36 приборов, каждый мощностью 5 киловатт и потребляет энергию с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что потребляемая в данный момент мощность:
а) составляет ровно 50 киловатт;
б) превышает 50 киловатт.
17. В некотором водоеме карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: а) ровно 4 карпа; б) не менее 4 карпов.
18. Вероятность того, что саженец елки приживется и будет успешно расти, равна 0,8. Посажено 400 саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастет не менее 250 деревьев? Ровно 300 саженцев?
19. Для повышения надежности контроля за ходом технологического процесса установлены 5 однотипных датчиков. Каждый из этих датчиков независимо от остальных может выйти из строя с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что количество датчиков не вышедших из строя, больше одного.
20. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости равна 0,02. Сверла упаковываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в данной коробке число сверл повышенной хрупкости окажется не более двух?

Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)$. Требуется: а) найти дифференциальную функцию $f(x)$; б) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; в) построить графики $F(x)$, $f(x)$.

$$21. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\pi} \left(x + \frac{\pi}{4} \right), & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$22. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{100}, & \text{при } 0 < x \leq 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$$

$$23. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{49}, & \text{при } 0 < x \leq 7 \\ 1, & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

$$24. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{81}, & \text{при } 0 < x \leq 9 \\ 1, & \text{при } x > 9 \end{cases}$$

$$25. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

$$26. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{x-2}{3}, & \text{при } 2 < x \leq 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

$$27. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{64}, & \text{при } 0 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

$$28. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{\pi}, & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 1, & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

$$29. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{2x}{\pi}, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$30. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{при } -1 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Дискретная случайная величина X задана законом распределения, где N - номер варианта:

x	$-N$	N	$2N$
p	p_1	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{2N}$

Найти: 1) вероятность p_1 ; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

31. Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Считая, что диаметр ствола – случайная величина, распределенная нормально, определить размер, который не превзойдет средний диаметр ствола с вероятностью 0,96.

32. Известно, что некоторый размер детали имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 0,5 мм и математическим ожиданием 240 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 239,5 мм и 240,5 мм. Определить вероятность изготовления годной детали.

33. Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со среднеекватическим отклонением 1,6 мм. Определить, сколько процентов стандартных валиков изготавливает автомат.

34. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 см, и дисперсией – 49 см². Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 2 см.

35. Диаметр деталей, изготовленных цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001 см², а математическое ожидание 2,5 см. в каких границах можно практически гарантировать диаметр деталей (за достоверное принимается событие, вероятность которого 0,9973)?

36. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со среднеекватическим отклонением 20г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превышающей по абсолютной величине 10г.

37. Изделие считается стандартным, если отклонение некоторого его размера от номинала находится в интервале (–1,8мм; 2мм). Случайные отклонения размера от номинала распределены нормально со среднеекватическим отклонением 0,7 мм. Найти число стандартных деталей в партии из 100 штук.

38. Детали, выпускаемые цехом, по размерам распределяются по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 5 см, среднеекватическое отклонение 0,9 см. Найти, в каких границах следует ожидать размер детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

39. Случайная величина X распределена по нормальному закону со среднеекватическим отклонением 5 мм и математическим ожиданием 0 мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

40. По статистическим данным 80% улова рыбы отклонялось от промыслового (стандартного) размера менее, чем на 3 см. Какой процент выловленной рыбы отклоняется от промыслового размера не более, чем на 5 см, если предположить, что размер рыбы имеет нормальный закон распределения.

Заданы среднеквадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X , выборочная средняя $\bar{x}$, объем выборки n . Требуется найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания (с надежностью $\gamma = 0,95$).

41. $\sigma = 2$ $\bar{x} = 12,45$ $n = 64$.

42. $\sigma = 3$ $\bar{x} = 12,47$ $n = 36$.

43. $\sigma = 7$ $\bar{x} = 12,49$ $n = 49$.

44. $\sigma = 5$ $\bar{x} = 12,51$ $n = 16$.

45. $\sigma = 2$ $\bar{x} = 12,53$ $n = 25$.

46. $\sigma = 9$ $\bar{x} = 12,55$ $n = 81$.

47. $\sigma = 5$ $\bar{x} = 12,57$ $n = 100$.

48. $\sigma = 9$ $\bar{x} = 12,59$ $n = 36$.

49. $\sigma = 10$ $\bar{x} = 12,61$ $n = 49$.

50. $\sigma = 6$ $\bar{x} = 12,63$ $n = 16$.

Требования к выполнению данного задания:

При подготовке к решению задач необходимо повторить соответствующие разделы учебника, учебных пособий по данной теме и конспектов лекций.

Порядок выполнения задания:

- изучить учебную информацию по теме;
- провести анализ содержания темы;
- изучить условия задачи;
- предложить вариант (или варианты) решения задачи.

Требования к оформлению задания: Решение задач должно быть представлено в письменной форме

Рекомендуемые источники:

1. Жуков В.М. Практические занятия по математике: теория, задания, ответы — Ростов- н/Д.: Феникс, 2015. — 343с. (Библиотека АГТУ, 100 экз.).
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2017. — 479 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-00211-9. <https://biblio-online.ru/book/636B8B1D-1DD9-4ABE-845B-2E048D04ED84>