

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Введение в математический анализ	10
1.1. Комплексные числа	10
1.1.1. Понятие комплексного числа, различные формы записи (10).	
1.1.2. Алгебраические операции над комплексными числами (11).	
1.1.3. Возведение в степень и извлечение корня (12).	
1.2. Числовые последовательности.	13
1.2.1. Предел числовой последовательности (13). 1.2.2. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (15). 1.2.3. Свойства сходящихся последовательностей (16). 1.2.4. Предельный переход в неравенствах (17). 1.2.5. Монотонные последовательности (18). 1.2.6. Подпоследовательности и частичный предел последовательности. (19). 1.2.7. Необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей (20).	
1.3. Контрольные вопросы	21
1.4. Методические указания по решению задач	22
1.5. Примеры для самостоятельного решения.	25
1.5.1. Ответы (26).	
Лекция 2. Функции	27
2.1. Предельное значение функции	27
2.1.1. Арифметические операции над функциями, которые имеют предельное значение (28). 2.1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (29).	
2.2. Непрерывность функции	31
2.2.1. Свойства непрерывных функций (33). 2.2.2. Непрерывность функции на сегменте (отрезке) (34).	
2.3. Контрольные вопросы	35
2.4. Методические указания по решению задач	36
2.5. Примеры для самостоятельного решения.	39
2.5.1. Ответы (40).	

Лекция 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	41
3.1. Производная, основные понятия и правила дифференцирования	41
3.1.1. Геометрический смысл производной (41). 3.1.2. Физический смысл производной (42). 3.1.3. Понятие дифференцируемости функции в точке (42). 3.1.4. Правила дифференцирования (42). 3.1.5. Вычисление производных элементарных функций (44).	
3.2. Понятие дифференциала функции	46
3.3. Производные и дифференциалы высших порядков	46
3.4. Производные функций, заданных в параметрической форме	47
3.4.1. Контрольные вопросы (48).	
3.5. Методические указания по решению задач	48
3.6. Примеры для самостоятельного решения.	52
3.6.1. Ответы: (53).	
Лекция 4. Основные теоремы. Экстремумы функции	55
4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления	55
4.1.1. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя) (57).	
4.2. Формула Тейлора	59
4.3. Исследование графика функции на наличие экстремумов	61
4.3.1. Наибольшее и наименьшее значение функции на сегменте (63).	
4.4. Контрольные вопросы	63
4.5. Методические указания по решению задач	64
4.6. Примеры для самостоятельного решения	65
4.6.1. Ответы: (66).	
Лекция 5. Исследование функций и их графиков	67
5.1. Направление выпуклости графика функции	67
5.1.1. Точки перегиба (68).	
5.2. Асимптоты графика функции	69
5.3. Исследование графика функции	70
5.3.1. Контрольные вопросы (72).	
5.4. Методические указания по решению задач	72
5.5. Примеры для самостоятельного решения.	77
5.5.1. Ответы (78).	
Лекция 6. Функции многих переменных	79
6.1. Понятие евклидова пространства	79
6.2. Понятие функции нескольких переменных	80
6.3. Предельное значение функции нескольких переменных	81

6.4. Контрольные вопросы	84
6.5. Методические указания по решению задач	85
6.6. Примеры для самостоятельного решения.	86
6.6.1. Ответы (87).	
Лекция 7. Непрерывность функций и производные	88
7.1. Непрерывность функции нескольких переменных.	88
7.1.1. Основные свойства непрерывных функций (89).	
7.2. Производные и дифференциал функции нескольких переменных. .	90
7.2.1. Производная сложной функции (93). 7.2.2. Инвариантность	
формы полного дифференциала (94).	
7.3. Контрольные вопросы	94
7.4. Методические указания по решению задач	94
7.5. Примеры для самостоятельного решения.	95
7.5.1. Ответы (96).	
Лекция 8. Производные высших порядков	98
8.1. Производная по направлению. Градиент.	98
8.2. Частные производные и дифференциалы высших порядков	99
8.2.1. Дифференциалы высших порядков (101).	
8.3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных	102
8.4. Экстремумы функций нескольких переменных.	103
8.4.1. Контрольные вопросы (106).	
8.5. Методические указания по решению задач	106
8.5.1. 8.6. Примеры для самостоятельного решения (110).	
8.5.2. Ответы (110).	
Лекция 9. Неявные функции и условный экстремум.	112
9.1. Наибольшие и наименьшие значения функции.	112
9.2. Неявные функции	113
9.3. Условный экстремум	116
9.3.1. Контрольные вопросы (118).	
9.4. Методические указания по решению задач	118
9.5. Примеры для самостоятельного решения.	120
9.5.1. Ответы (120).	
Лекция 10. Приложение дифференциального исчисления	121
10.1. Метод неопределенных множителей Лагранжа.	121
10.2. Приложение дифференциального исчисления в геометрии	123
10.2.1. Контрольные вопросы (127).	
10.3. Методические указания по решению задач	127

10.4. Примеры для самостоятельного решения.	130
10.4.1. Ответы (131).	
Лекция 11. Неопределенный интеграл	132
11.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла . . .	132
11.2. Основные методы интегрирования	134
11.2.1. Замена переменной в неопределенном интеграле (134).	
11.2.2. Подведение функции под дифференциал (135). 11.2.3. Ин-	
тегрирование по частям (136).	
11.3. Контрольные вопросы.	137
11.4. Методические указания по решению задач.	138
11.5. Примеры для самостоятельного решения.	142
Лекция 12. Интегрирование дробно-рациональных функций	146
12.1. Алгебраические многочлены	146
12.2. Многочлены с действительными коэффициентами.	147
12.3. Разложение рациональных дробей	148
12.4. Интегрирование дробно рациональных функций	152
12.5. Методические указания по решению задач.	154
12.6. Примеры для самостоятельного решения.	156
12.6.1. Ответы (157).	
Лекция 13. Некоторые способы интегрирования	159
13.1. Интегрирование некоторых тригонометрических функций	159
13.2. Интегралы от иррациональных функций.	160
13.3. Подстановки Эйлера	162
13.4. Тригонометрические подстановки.	162
13.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов	163
13.6. Контрольные вопросы	164
13.7. Методические указания по решению примеров	164
13.8. Примеры для самостоятельного решения.	170
Лекция 14. Определенный интеграл.	174
14.1. Понятие определенного интеграла	174
14.2. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу.	175
14.2.1. Основные свойства верхних и нижних сумм. (176).	
14.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости	177
14.4. Классы интегрируемых функций	178
14.5. Основные свойства определенного интеграла.	180
14.6. Контрольные вопросы	181

Лекция 15. Основные свойства определенного интеграла и его приложение	182
15.1. Оценки интегралов	182
15.2. Существование первообразной для непрерывной функции	184
15.2.1. Основная формула интегрального исчисления (185).	
15.3. Замена переменных в определенном интеграле	185
15.4. Формула интегрирования по частям	186
15.5. Геометрические приложения определенного интеграла.	187
15.5.1. Полярная система координат. (188).	
15.6. Вычисление длины кривой	189
15.7. Вычисление объемов тел.	190
15.8. Методические указания по решению задач.	192
15.9. Примеры для самостоятельного решения.	196
 Лекция 16. Несобственные интегралы	199
16.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования	199
16.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций	200
16.3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов	202
16.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций.	203
16.5. Контрольные вопросы	205
16.6. Методические указания по решению задач	206
16.7. Примеры для самостоятельного решения.	208
16.7.1. Ответы (208).	
 Лекция 17. Двойные интегралы	209
17.1. Определение и существование двойного интеграла.	209
17.1.1. Существование двойного интеграла (210).	
17.2. Основные свойства двойного интеграла	211
17.3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.	212
17.4. Замена переменных в двойном интеграле	215
17.4.1. Цилиндрические координаты (215).	
17.5. Приложения двойного интеграла	216
17.5.1. Вычисление объемов (216). 17.5.2. Механические приложения (217). 17.5.3. Вычисление площади поверхности (218).	
17.6. Контрольные вопросы	219
17.7. Методические указания по решению задач	219
17.8. Примеры для самостоятельного решения	224
17.8.1. Ответы (225).	

Лекция 18. Тройные и криволинейные интегралы	227
18.1. Тройные интегралы	227
18.1.1. Вычисление тройного интеграла (227). 18.1.2. Замена переменных в тройном интеграле (229). 18.1.3. Механические приложения тройного интеграла (230).	
18.2. Криволинейные интегралы	231
18.2.1. Способы вычисления криволинейных интегралов (232). 18.2.2. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода (233). 18.2.3. Формула Грина (234).	
18.3. Методические указания по решению задач	235
18.4. Примеры для самостоятельного решения.	237
18.4.1. Ответы (238).	
Лекция 19. Криволинейные и поверхностные интегралы	239
19.1. Интегралы не зависящие от пути интегрирования	239
19.2. Приложение криволинейных интегралов	241
19.2.1. Вычисление площади фигуры. (241). 19.2.2. Вычисление массы кривой (242). 19.2.3. Вычисление работы силы (242).	
19.3. Поверхностные интегралы	243
19.3.1. Понятие поверхности. (243). 19.3.2. Понятия поверхностных интегралов и способы их вычисления (244). 19.3.3. Формула Остроградского (245). 19.3.4. Формула Стокса (246).	
19.4. Контрольные вопросы	247
19.5. Методические указания по решению примеров	247
19.6. Примеры для самостоятельного решения.	249
19.6.1. Ответы (250).	
Лекция 20. Элементы векторного анализа	251
20.1. Основные понятия и определения.	251
20.1.1. Основные формулы теории поля (253). 20.1.2. Специальные поля (254).	
20.2. Контрольные вопросы	255
20.3. Методические указания по решению задач	255
20.4. Примеры для самостоятельного решения.	259
20.4.1. Ответы (260).	
Лекция 21. Числовые ряды	261
21.1. 21.1. Основные понятия и теоремы	261
21.1.1. Критерий Коши сходимости ряда (261). 21.1.2. Необходимое условие сходимости рядов (262).	
21.2. Ряды с положительными членами	263

21.2.1. Признаки сравнения (263).	21.2.2. Признак Даламбера (263).	21.2.3. Радиальный признак Коши (265).	21.2.4. Интегральный признак Коши (265).
21.3. Знакопередающие ряды	267	21.3.1. Абсолютная сходимость рядов (267).	21.3.2. Условная сходимость рядов (267).
21.4. Контрольные вопросы	268		
21.5. Методические указания по решению примеров	269		
21.6. Примеры для самостоятельного решения.	271		
21.6.1. Ответы (272).			
Лекция 22. Функциональные ряды	273		
22.1. Основные свойства равномерно сходящихся рядов	274		
22.1.1. Почленный переход к пределу (274).		22.1.2. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов (275).	22.1.3. Способы определения области сходимости (277).
22.2. Степенные ряды	278		
22.2.1. Разложение функции в степенные ряды (279).			
22.3. Ряды Фурье	280		
22.3.1. Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье (280).		22.3.2. Разложение функции с произвольным периодом (282).	
22.4. Контрольные вопросы	283		
22.5. Методические указания по решению примеров	283		
22.6. Примеры для самостоятельного решения.	285		
22.6.1. . Ответы (285).			

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Комплексные числа

1.1.1. Понятие комплексного числа, различные формы записи.

Определение 1.1. Число $z = x + yi$, где x и y любые действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — так называемая мнимая единица, называется комплексным числом.

Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической. Действительные числа x и y называются действительной и мнимой частями комплексного числа z соответственно и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$$

Два комплексных числа $x_1 + y_1 i$ и $x_2 + y_2 i$ считаются равными, если у них равны действительные и мнимые части, т. е. $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Множество комплексных чисел будем обозначать символом $\mathbb{C}$. Если в декартовой системе координат по оси абсцисс откладывать действительные части комплексных чисел, а по оси ординат их мнимые части, то каждому комплексному числу на плоскости, которую будем называть комплексной, будет соответствовать точка.

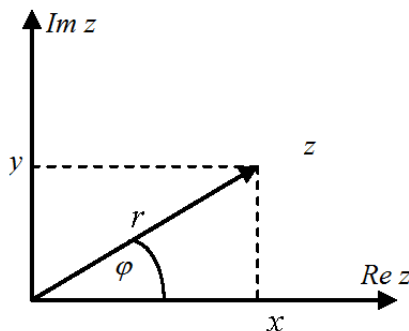


Рис. 1.1.

Из рисунка видно, что положение комплексного числа на плоскости можно задать с помощью формулы

$$z = r \cos \varphi + ri \sin \varphi$$

Эта форма записи комплексного числа называется тригонометрической. Число $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ является модулем комплексного числа. Угол φ называют аргументом комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначна и определена лишь с точно-

стью до целого кратного числа 2π . В качестве главного значения величины $\operatorname{Arg} z$ выбирают значение, определенное неравенством

$-\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$. Из определения аргумента следует: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. Значение $\operatorname{Arg} z$ удобнее всего вычислять по формуле $\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arccos(x/r), & \text{если } y \geq 0, \\ -\arccos(x/r), & \text{если } y < 0. \end{cases}$ Пользуясь приведенными формулами можно любое комплексное число, заданное в алгебраической форме записать в тригонометрической форме.

Пример 1.1. $z = -1 - \sqrt{3}i$. Вычислим модуль комплексного числа $r = \sqrt{1+3} = 2$. Так как $y < 0$, то значение аргумента определим по формуле $\varphi = -\arccos(-1/2) = -\pi + \arccos(1/2) = -\pi + \pi/3 = -2\pi/3$. Тригонометрическая форма приведенного комплексного числа будет иметь вид $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

Кроме приведенных форм записи комплексных чисел, существует еще показательная форма. Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}$$

Тогда, имея тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, получим $z = re^{i\varphi}$. Преобразуем комплексное число, полученное в примере 1.1 в тригонометрическую форму $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$. Из школьного курса математики известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня, если дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$ и не имеет корней если, $D < 0$. Это было справедливо, так как в школе не изучаются комплексные числа. Если $D < 0$, то корни тоже существуют, только они комплексные.

Пример 1.2. Найти корни уравнения $x^2 + 2x + 5 = 0$. $D = 4 - 20 = -16$, $x_{1,2} = -1 \pm 2i$

1.1.2. Алгебраические операции над комплексными числами.

Определение 1.2. Суммой комплексных чисел $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$ называется комплексное число $z = (x + a) + (y + b)i$, т.е. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$

Так же, как и в области действительных чисел, нулем называется такое комплексное число z_0 сумма которого с любым комплексным числом z равна этому числу $z + z_0 = z$. Из определения 1.3 следует, что $z_0 = 0 + 0i$

Легко видеть, что при данном определении суммы комплексных чисел сохраняются переместительный и сочетательный законы сложения, т. е. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ и $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Определение 1.3. Произведением комплексных чисел $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$ называется комплексное число z такое, что $\operatorname{Re} z = xa - yb$, $\operatorname{Im} z = xb + ay$

Иными словами умножение осуществляется, как умножение двух сумм. Только следует принимать во внимание следующие соотношения:

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Пример 1.3. $(2 + i)(3 - i) = 2 \cdot 3 - 2i + 3i - i^2 = 7 + i$

Для операции умножения сохраняются переместительный и сочетательный законы, т. е. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ и $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

Операция деления двух комплексных чисел $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$ осуществляется следующим образом. Числитель и знаменатель дроби умножается на сопряженное комплексное число знаменателя, а затем выделяются действительная и мнимая части.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x + yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(xa + yb) + i(ya - xb)}{a^2 + b^2} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + i \frac{ya - xb}{a^2 + b^2}$$

Пример 1.4. $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + i$ Вычислить z_2/z_1

$$\frac{4 + i}{3 - 2i} = \frac{(4 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{10}{13} + i \frac{11}{13}$$

1.1.3. Возведение в степень и извлечение корня. Рассмотрим задачу возведения в степень с натуральным показателем комплексного числа. Запишем комплексное число в показательной форме $z^n = r^n (e^{i(Arg z + 2\pi k)})^n = r^n e^{i(n\varphi + 2\pi kn)}$ Преобразуем полученный результат в тригонометрическую форму

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi + 2\pi kn) + i \sin(n\varphi + 2\pi kn)).$$

Так как число $2\pi kn$ кратно числу 2π , то пользуясь свойствами тригонометрических функций, получим окончательный результат

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Пример 1.5. Вычислить $(1 - \sqrt{3}i)^4$. Определим модуль и аргумент комплексного числа $r = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\varphi = -\arccos(1/2) = -\pi/3$. Тогда получим $(1 - \sqrt{3}i)^4 = 16(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3})$. Принимая во внимание то, что главное значение $Arg z \in (-\pi; \pi]$ воспользуемся формулами приведения, в результате чего получим $(1 - \sqrt{3}i)^4 = 16(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

Вывод формулы для извлечения корня с натуральным показателем из комплексного числа осуществляется аналогично.

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (e^{i(Arg z + 2\pi k)})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{r} \left(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}) \right)$. Изменяя число k от 0 до $n - 1$, получим n значений $\sqrt[n]{z}$ корня. Геометрически это означает, что на комплексной плоскости значения корня находятся в вершинах правильного n угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$

Пример 1.6. Вычислить $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$. Для подкоренного комплексного числа $\varphi = \pi/3$, $r = 2$. Тогда $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right) \right)$. Приравнявая число k числам 0, 1, 2, получим три значения корня из комплексного числа: $z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right)$, $z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - i \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right)$

Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$. $z = -8$, $r = 8$, $\varphi = \pi$. Тогда имеем $\sqrt[3]{-8} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right)$ При $k = 0, 1, 2$ получим

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z_2 = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right), z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Подставив значения тригонометрических функций, получим значения корня в алгебраической форме: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Определение 1.5. Два комплексных числа, имеющих одинаковые действительные части, а мнимые части равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку называют взаимно сопряженными. Комплексные числа: $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ являются взаимно сопряженными.

Сопряженные комплексные числа обладают следующими свойствами.

1. Если z действительное число, то $\bar{z} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
5. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Справедливость этих свойств доказывается непосредственной постановкой. Первое свойство очевидно.

Докажем второе свойство. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда $z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$, $\overline{z_1 + z_2} = a + c - (b + d)i = a - bi + c - di$. Аналогично доказываются другие свойства.

1.2. Числовые последовательности.

1.2.1. Предел числовой последовательности. Определение 1.5. Если каждому числу $n \in N$ – натурального ряда чисел ставится в соответствие по определенному правилу некоторое вещественное число $x_n \in R$, то множество занумерованных вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, называется числовой последовательностью.

Для краткости будем обозначать ее символом $\{x_n\}$

Определение 1.6. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

существует число $N > 0$ такое, что при выполнении неравенства $n > N$ справедливо условие $|x_n - a| < \varepsilon$

Условное обозначение

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Последовательность, которая имеет предел, называется сходящейся.

Запишем это определение, используя обозначения: $\forall$ – означает любой или для любого, $\exists$ – соответствует словам: существует или найдется.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$.

В дальнейшем будем использовать сокращенные формы записи.

Пример 1.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, так как $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ при $n > N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, где символ $\lceil \cdot \rceil$ – означает целую часть числа.

Пример 1.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, так как $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $n > N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

Введем понятия арифметических операций для числовых последовательностей. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда суммой, разностью, произведением, частным будем называть последовательности: $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ соответственно. В последнем случае $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу (сверху), если $\exists m \in \mathbb{R} (\exists M \in \mathbb{R})$ такое, что для $\forall x_n$ выполнено условие $x_n \geq m$, $(x_n \leq M)$

При этом M и m называются верхней и нижней гранями последовательности. Минимальное значение величины M называют точной верхней гранью, а максимальное значение величины m называют точной нижней гранью и обозначают $M = \sup_n x_n, m = \inf_n x_n$ соответственно.

Из этого определения следуют два свойства точных граней.

1. Если $A = \sup_n x_n$, то $\forall n \quad x_n \leq A$ ($B = \inf_n x_n \quad \forall n \quad x_n \geq B$)
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: x_N > A - \varepsilon$ ($x_N < A + \varepsilon$, если $A > 0$,

$$x_N < A + \varepsilon, \text{ если } A < 0).$$

Если последовательность ограничена сверху и снизу, то ее называют ограниченной.

Определение 1.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists A > 0$ такое, что для $\forall n$ выполнено условие $|x_n| \leq A$.

Определение 1.9. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если $\forall A > 0, \exists x_i \in \{x_n\} : |x_i| > A$.

Определение 1.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для $\forall A > 0 \exists N > 0: n > N \implies |x_n| > A$

Определение 1.11. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: n > N \implies |\alpha_n| < \varepsilon$

Будем бесконечно малые последовательности обозначать греческими буквами. Определение 1.7 означает, что пределом бесконечно малой последовательности является ноль т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

1.2.2. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. Теорема 1.1. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей – являются бесконечно малыми последовательностями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем две последовательности $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$. По определению 1.11 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, : n > N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, и $\exists N_2 > 0: n > N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $n > N$, где $N = \max(N_1, N_2)$, имеем следующую цепочку неравенств $|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, откуда следует справедливость первого свойства. $\square$

Аналогичным образом доказываются следующие свойства.

Теорема 1.2. Произведение бесконечно малых последовательностей является последовательностью бесконечно малой.

Теорема 1.3. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть последовательность бесконечно малой.

Теорема 1.4. Бесконечно малая последовательность ограничена

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда, начиная с некоторого числа N выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Обозначим через B наибольшее из следующих чисел: $\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|$. В этом случае $|\alpha_n| < B$ для $\forall n$ что означает ограниченность последовательности. $\square$

С л е д с т в и е 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

С л е д с т в и е 2. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 1.5. Если все элементы бесконечно малой последовательности отличны от нуля ($\alpha_n \neq 0$ для $\forall n$), то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно большая, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно большая. По определению 1.10 для $\forall A > 0 \exists N > 0: n > N \implies |\alpha_n| > A$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{A}$. Тогда $\frac{1}{|\alpha_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. Имеем, что $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: n > N \implies$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha_n} \right| < \varepsilon$ Следовательно, в соответствии с определением 1.11, последовательность $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$ является бесконечно малой. $\square$

1.2.3. Свойства сходящихся последовательностей. Лемма 1.1.

Для того чтобы число b было пределом последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы было справедливо равенство $x_n = b + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n \rightarrow b$. Обозначим $\alpha_n = x_n - b$. По определению 1.6, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$. Тогда в соответствии с определением 1.11 последовательность $\alpha_n = x_n - b$ является бесконечно малой, т. е. $x_n = b + \alpha_n$.

Достаточность. Пусть $x_n = b + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, b – число. Тогда по определению 1.11 для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. $\square$

Теорема 1.6. Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходящиеся, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ тоже сходятся. Кроме того, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1.1, имеем

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Тогда $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$. Последовательность $(\alpha_n \pm \beta_n)$ является бесконечно малой (см. теорема 1.1). По определению 1.11 для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: n > N \Rightarrow |x_n \pm y_n - (a \pm b)| < \varepsilon$, откуда следует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$. $\square$

Теорема 1.7. Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходящиеся, то последовательность $\{x_n y_n\}$ тоже сходится. Кроме того, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab.$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1, имеем

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Тогда $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = (ab) + x_n \beta_n + y_n \alpha_n + (\alpha_n \beta_n)$. В соответствии с теоремами 1.2 и 1.3, последовательности $x_n \beta_n$, $y_n \alpha_n$, $\alpha_n \beta_n$ являются бесконечно малыми. Тогда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab. \square$$

Лемма 1.2. Если последовательность $\{x_n\}$ – сходящаяся и имеет конечный предел $a \neq 0$, то с некоторого номера определена последовательность $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$, которая является ограниченной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Последовательность $\{x_n\}$ – сходящаяся. Поэтому, начиная с некоторого номера N , выполнено неравенство $|a - x_n| < \left|\frac{a}{2}\right|$. Тогда, имеем следующую цепочку равенств и неравенств $|a| = |a - x_n + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n| < \left|\frac{a}{2}\right| + |x_n| \implies |x_n| > \left|\frac{a}{2}\right|$, откуда следует справедливость утверждения $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$. $\square$

Теорема 1.8. Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходящиеся, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с леммой 1.1, имеем $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$, а лемма 1.2 гласит, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ является ограниченной. Покажем, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ бесконечно малая.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{y_n b} = \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)$$

Последовательность $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ – бесконечно малая (теоремы 1.1 и 1.2), а $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограничена. (лемма 1.2). Тогда, последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ бесконечно малая. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}. \square$$

Теорема 1.9. Если последовательность $\{x_n\}$ – сходящаяся, то она имеет только один предел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b . Тогда $x_n = a + \alpha_n, x_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – элементы бесконечно малых последовательностей. Из данных соотношений имеем $\alpha_n - \beta_n = a - b$. $\{\alpha_n - \beta_n\}$ – бесконечно малая, а величина $a - b$ постоянная. Следовательно, $a - b = 0$. $\square$

Теорема 1.10. Если последовательность $\{x_n\}$ – сходящаяся, то она ограничена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы и леммы 1.1 имеем $x_n = a + \alpha_n$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, а a – величина ограничена имеем $\exists A > 0 \forall n : |x_n| \leq |a| + |\alpha_n| < |a| + A$. $\square$

1.2.4. Предельный переход в неравенствах. Теорема 1.11. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, и начиная с некоторого номера N , выполнено неравенство $x_n > a$ при $n > N$, то $A > a$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать от противного. Пусть $A < a$. Возьмем $\varepsilon = a - A$. Тогда (определение 1.6) $\exists N > 0$: $n > N \implies |x_n - A| < a - A$ откуда следует $x_n < a$. Противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

С л е д с т в и е 1. Если, начиная с некоторого номера N , элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n > y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

С л е д с т в и е 2. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ находятся на сегменте $[a, b]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$

Теорема 1.12. Предположим, что последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ — сходящиеся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, а начиная с некоторого номера N элемента последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n < z_n < y_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы имеем $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$: $n > N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$ и $\exists N_2 > 0$: $n > N_2 \implies |y_n - a| < \varepsilon$. Принимая во внимание неравенство $x_n < z_n < y_n$, получим $x_n - a < z_n - a < y_n - a$. Если взять $N = \max N_1, N_2$, то при $n > N$ будем иметь $|z_n - a| < \varepsilon$, откуда следует справедливость теоремы.?

1.2.5. Монотонные последовательности. Определение 1.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (невозрастающей), если каждый член этой последовательности, начиная со второго, не меньше (не больше) предыдущего. Иными словами, для всех номеров n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$

$(x_n \geq x_{n+1})$ Если выполняются строгие неравенства $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1}) \forall n$, то последовательность называется *возрастающей* (убывающей) или *строго возрастающей* (строго убывающей).

Такие последовательности называются еще *монотонными*.

Теорема 1.13. Если монотонная последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу) и $A \geq x_n$ ($B \leq x_n$), то она сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему для возрастающей последовательности. По определению 1.6. Если $x_n < A$, то $\exists N > 0$: $x_N > A - \varepsilon$. Так как $\{x_n\}$ — возрастающая $\forall n > N, A - \varepsilon < x_N < x_n \leq A < A + \varepsilon \implies A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$: $n > N \implies |x_n - A| < \varepsilon$, т. е. $x_n = A$. $\square$

С л е д с т в и е. Если имеется бесконечная система сегментов $[a_1; b_1], \dots [a_n; b_n], \dots$, такая, что $a_{i-1} \leq a_i \leq b_i \leq b_{i-1}, i \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, то существует единственная точка ξ , принадлежащая всем сегментам. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$

Пример 1.9. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена снизу $\left\{\frac{1}{n} > 0\right\}$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пример 1.10. Докажем, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху. Применим формулу бинома Ньютона

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Если записать аналогичным образом формулу для x_{n+1} , то каждая скобка вида $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$. Поэтому $x_n < x_{n+1} \implies \{x_n\}$ – возрастающая. Принимая во внимание то, что $\frac{1}{m!} < \frac{1}{2^{m-1}}$ при $m \geq 2$, а выражение в круглых скобках меньше единицы, получим

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Получили сумму единицы с суммой геометрической прогрессии, у которой первый элемент равен единице, а знаменатель $1/2$. Сумма этой прогрессии равна двум. В результате имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3.$$

Получили, что последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ограничена. Ее предел равен числу e , которое широко используется в математике

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281\dots$$

Этот предел носит название второго замечательного предела.

1.2.6. Подпоследовательности и частичный предел последовательности.. **Определение 1.13.** Последовательность $\{z_k\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если $\forall k \in N \exists n_k \in N : z_k = x_{n_k}$

Следует отметить, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_k = A$. Интервал $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ называется ε -окрестностью точки $b \in \mathbb{R}$, где $\varepsilon > 0$.

Определение 1.14. Точка $b \in R$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε -окрестности точки b имеется бесконечно много элементов этой последовательности.

Пример 1.11. Последовательность $\{\sin \gamma n\}$, $0 < \gamma < 1$ не имеет предела, но она имеет бесконечно большое количество предельных точек, так как любое число из сегмента $[-1; 1]$ имеем в окрестности бесконечно большое количество элементов этой последовательности.

Пример 1.12. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n = (-1)^n(1 - e^{-n})$ имеет две предельные точки 1 и -1 .

Определение 1.15. Наибольшая предельная точка называется верхним пределом и обозначается $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, а наименьшая предельная точка называется нижним пределом и обозначается $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

В примере 1.11 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Из данного определения и теоремы 1.9 следует, что сходящиеся последовательности имеют только одну предельную точку, совпадающую с пределом.

Теорема 1.14. (Больцано-Вейерштрасс) *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящую подпоследовательность.*

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существуют числа a и b такие, что $a \leq x_n \leq b$. В сегменте $[a; b]$ имеется бесконечно большое количество элементов последовательности $\{x_n\}$. Разделим данный сегмент пополам и возьмем ту половину, в которой имеется бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим этот сегмент $[a_1; b_1]$. Этот сегмент снова разделим пополам и возьмем ту половину, в которой имеется бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим полученную половину сегмента $[a_1; b_1]$ через $[a_2; b_2]$. Будем повторять эту процедуру бесконечное число раз. В результате получим систему вложенных сегментов. Воспользуемся следствием к теореме 1.13, согласно которому существует единственная точка ξ , принадлежащая всем сегментам. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$. Если из каждого k сегмента взять одну точку y_k , то получим сходящую подпоследовательность $\{y_k\}$. При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \xi$. $\square$

Из этой теоремы следует

С л е д с т в и е. Ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку. Действительно, точка ξ является пределом последовательности. Следовательно, в ее окрестности имеется бесконечно большое количество элементов последовательности. Это означает, что она является предельной точкой.

Теорема 1.15. *Если последовательность имеет предельную точку, то из нее можно выделить сходящую подпоследовательность.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.14. Возьмем сегмент $[a; b]$, внутри которого находится предельная точка последовательности. Далее, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1.14, получим справедливость утверждения.

1.2.7. Необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей. **Теорема 1.16.** *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к числу A необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы ее верхний и нижний пределы $\bar{x}$ и $\underline{x}$ совпадали.*

Доказательство. Необходимость. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена и имеет одну предельную точку (Теоремы 1.9, 1.10). Следовательно $\bar{x} = \underline{x}$.

Достаточность. В интервале $(\underline{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon)$ содержатся все элементы последовательности, начиная с некоторого номера N . Так как $\bar{x} = \underline{x}$, то данный интервал совпадает с окрестностью точки A , т. е. A является пределом последовательности $\{x_n\}$. $\square$

Определение 1.16 Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0; n > N$, для $\forall m > n \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 1.17. (Критерий Коши) Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Необходимость. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу A , то $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0; n > N \implies |x_n - A| < \varepsilon/2$

Пусть $n > N, m > N$ Тогда, $|x_m - x_n| = |(x_m - A) - (x_n - A)| \leq |x_m - A| + |x_n - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ Доказали, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная.

Достаточность. Последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная. Пусть $m = n + k, k \in \mathbb{N}$. Тогда, начиная с некоторого номера N все элементы последовательности будут находиться внутри интервала

$(x_N - \varepsilon; x_N + \varepsilon)$. Этот интервал содержит интервал $(\underline{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon)$. Следовательно, $\bar{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$, откуда следует $\bar{x} = \underline{x}$. В соответствии с теоремой 1.16 такая последовательность сходящаяся.?

1.3. Контрольные вопросы

1. Что такое модуль комплексного числа?
2. Что такое аргумент комплексного числа?
3. Объясните геометрическую интерпретацию комплексного числа.
4. Объясните, какие формы записи существуют для комплексных чисел.
5. Сформулируйте определение предела последовательности.
6. Какие типы последовательностей вы знаете?
7. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
8. Сформулируйте необходимые и достаточные условия сходимости последовательности.
9. Сформулируйте определение монотонной последовательности.
10. Какая точка называется предельной точкой?
11. Сформулируйте определение верхнего и нижнего пределов.
12. Каким условиям должна удовлетворять монотонная последовательность, чтобы она была сходящейся?
13. Какая последовательность называется фундаментальной?
14. В каком случае у последовательности можно выделить сходящую подпоследовательность?

1.4. Методические указания по решению задач

1.1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$ (указать $N(\varepsilon)$).

Решение: Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между n -м членом последовательности и числом $\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| &= \left| \frac{2(3n-2) - 3(2n-1)}{2(2n-1)} \right| = \left| \frac{6n-4-6n+3}{2(2n-1)} \right| = \\ &= \left| \frac{-1}{2(2n-1)} \right| = \frac{1}{2(2n-1)}. \end{aligned}$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер N такой, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Для отыскания номера N решим это неравенство относительно n .

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}.$$

В качестве N можно взять любое целое число из сигмента целую часть числа $[\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}; \infty]$: Получаем, что при $\varepsilon \leq 0,5$, $\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \geq 1$, тогда $N \geq 1$.

Если $\varepsilon > 0,5$, то неравенство $\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon$ выполнено для $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, доказано, что для произвольного $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$.

Это означает (по определению 1.6), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

1.2. Вычислить предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 - (2-n)^2}{(3-n)^2 + (3+n)^2}$.

Решение: В данном примере имеем неопределенность типа $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 - (2-n)^2}{(3-n)^2 + (3+n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-6n+n^2 - (4-4n+n^2)}{9-6n+n^2 + (9+6n+n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-2n}{2n^2+18} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} - 2}{\left(2n + \frac{18}{n}\right)} = 0, \end{aligned}$$

так как $\left\{ \frac{5}{n} \right\}$ — бесконечно малая, а $\left\{ 2n + \frac{18}{n} \right\}$ — бесконечно большая последовательности.

1.3. (раскрытие неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$)

Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$.

Решение: Преобразуем выражение под знаком предела, заменив радикалы рациональными степенями:

$$\frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}} = \frac{n^{\frac{2}{3}} - (n^2 + 5)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{7}{5}} - (n + 1)^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

Цель дальнейших преобразований – вынесение старших степеней переменной n за скобки в числителе и знаменателе:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{n^{\frac{2}{3}} - n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{7}{5}} - n^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{n \cdot \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{n^{\frac{7}{5}} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{n^{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} \frac{\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся результатами теорем 1.6-1.8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} \frac{\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} - \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)},$$

которые позволяют рассмотреть отдельно следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} = 0;$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{5}}} = 0$, так как $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, при $\alpha > 1$. Таким образом, данный предел имеет значение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0.$$

1.4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 1})$.

Решение: Имеем неопределенность типа $\infty - \infty$. Умножим и разделим на "сопряженное выражение":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \left(\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 - 1} \right)}{\left(\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 - 1} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(n^2 - 2n - (n^2 - 1) \right)}{\left(\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 - 1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3 - 2n)}{\left(\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 - 1} \right)}.
\end{aligned}$$

Данный предел, при $n \rightarrow \infty$, имеет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки переменную n в старшей степени

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{n} \right)}{\left(\sqrt{1 - \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \infty,$$

так как $\{n\}$ — бесконечно большая последовательность, а $\left\{ \frac{2}{n} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ — бесконечно малые.

1.5. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}$.

Решение: Данный предел имеет неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Вынесем за скобки показательную функцию с наибольшим основанием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 5 \right)}{5^n \left(2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + 25 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n - 5}{2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + 25} = -\frac{1}{5},$$

так как $\left\{ \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ — бесконечно малая последовательность, когда основание меньше 1.

1.6. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n - n^2 + 3}$.

Решение: Так как $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ — сумма членов арифметической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n - n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n - n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 1 + \frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

В силу того, что $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \frac{3}{n^2} \right\}$ — бесконечно малые последовательности, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n - n^2 + 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -\frac{1}{2}.$$

1.7. (Раскрытие неопределенности 1^∞). Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n+1}$.

Решение: Вычисляя предел последовательности, стоящей в основании $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1$, убеждаемся, что в данной задаче имеет место неопределенность типа 1^∞ . Для ее раскрытия воспользуемся II замечательным пределом, для чего выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 - 1}{n^2} - 1 \right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 - 1 - n^2}{n^2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{-n^2} \right]^{\frac{n+1}{-n^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-1}{n^2} \right]^{-n^2} = (1^\infty)$. Положим $t = -n^2$. При $n \rightarrow \infty$ $t \rightarrow -\infty$, имеем $\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$. Принимая во внимание равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{-n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 0$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n+1} = e^0 = 1.$$

1.5. Примеры для самостоятельного решения

1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$). (воспользуйтесь определением 1.2 и разобранным примером 1.1).

а) $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}$, $a = \frac{7}{2}$; б) $a_n = \frac{5n+15}{6-n}$, $a = -5$; в) $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}$, $a = 3$.

Вычислить пределы числовых последовательностей

2. а) $\frac{3n^3+2n^2+5}{n^3+5n^2+6n+8}$; б) $\frac{2n^2+5n+7}{n^3+6n+8}$; в) $\frac{n^3+5n^2+7}{n^2+6n+8}$.
 3. а) $\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$; б) $\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$; в) $\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$.
 4. а) $\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n-1}}$; б) $\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3-n}}$; в) $(n-\sqrt{5+n^2})$.

5. а) $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$; б) $\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; в) $\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

6. а) $\frac{3^n + 6^{n+1}}{3^{n-1} - 6^{n-1}}$; б) $\frac{2^{n+2} + 7^{n+1}}{2^{n-1} - 7^n}$; в) $\frac{3^n + 9^{n+1}}{3^{n-1} + 9^{n-1}}$.

1.5.1. Ответы. 2. а) 3, б) 0, в) ∞ ; 3. а) 2, б) 1, в) 3; 4. а) 1, б) 3, в) 0;
5. а) e^{-4} , б) $e^{1/2}$, в) e^{-2} ; 6. а) -36 , б) -7 , в) 81.

Лекция 2

ФУНКЦИИ

2.1. Предельное значение функции

Определение 2.1. Если каждому значению переменной $x \in X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число $y \in Y \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана вещественная функция $y = f(x)$. Множества X и Y называются областями определения и значения функции соответственно.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором множестве X и точку $a \in X$. Эта точка может и не принадлежать множеству X , но любая ε -окрестность этой точки содержит точки множества X , отличные от a .

Приведем два эквивалентных определения предельного значения функции в точке.

Определение 2.2.

1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , отличных от a и сходящейся к a , последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

2. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$.

Условное обозначение такое же, как для предела последовательности

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Аналогичное определение имеет место, если аргумент стремится к бесконечности

Определение 2.3. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

Условное обозначение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

Часто возникает необходимость вычислить односторонние пределы, когда x стремится к числу a слева или справа.

Определение 2.4. Число b называется *правым (левым) пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x > a$ ($x < a$), отличных от a и сходящейся к a , последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

Условное обозначение правого и левого пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b.$$

2.1.1. Арифметические операции над функциями, которые имеют предельное значение. Используя результаты теорем 1.6-1.8, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть имеются две функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие предел в точке a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad (2.1)$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c, \\ 2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c, \\ 3. \lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b/c, c \neq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы имеем равенства (2.1). Из определения 2.1 следует, что последовательности $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ сходятся к числам b и c , если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a . В соответствии с теоремами 1.6-1.8, если последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a , то последовательности

$$\{f(x_n) \pm g(x_n)\}, \{f(x_n) \cdot g(x_n)\}, \{f(x_n)/g(x_n)\}$$

имеют пределы $b \pm c$, $b \cdot c$, b/c , $c \neq 0$ соответственно. Тогда, из определения 2.1 получаем равенства (2.2). $\square$

При вычислении пределов по формулам (2.2) часто возникают неопределенности следующего вида: $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Иными словами, когда вычисляется предел от исходной функции, то может получиться одна из возможных неопределенностей. В этом случае необходимо выполнить эквивалентные преобразования, чтобы неопределенность исчезла.

Пример 2.1.

а) Вычислить предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{4x^3 + 5x^2 + 3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 3x^2 + 5)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 5x^2 + 3x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Имеем неопределенность. Преобразуем исходную функцию. Вынесем x^3 за скобки и сократим числитель и знаменатель на x^3 , в результате чего получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2}}{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Разложим многочлены на множители

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Числитель разложим на множители и умножим и разделим на "сопряженное" выражение знаменателя

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{2x-6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{2} = 7. \end{aligned}$$

Существуют и другие типы неопределенности, когда вычисляются пределы вида $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$. Могут возникнуть следующие неопределенные ситуации. $[1^\infty]$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $[0^0]$, $[\infty^0]$

Для вычисления пределов $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, в которых возникает неопределенность, пользуются следующим правилом. Введем обозначение $y = f(x)^{g(x)}$. Логарифмируем слева и справа. $\ln y = g(x) \ln f(x)$, откуда получаем $y = e^{g(x) \ln f(x)}$. В результате получили выражение, предел которого можно вычислить, либо получим неопределенности вида

$$[0 \cdot \infty], \left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

2.1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение 2.5. Функции $y = \beta(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$, если $\beta(x) = 0$.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, как и бесконечно малые последовательности (теоремы 1.1-1.5).

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями в точке $x = a$

Определение 2.6. Функции $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (имеет более высокий порядок малости), если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Условно это записывается в виде $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Определение 2.7. Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ существует и равен константе.

Определение 2.8. Функции $\alpha(x), \beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Если две бесконечно малые функции эквивалентны, то при вычислении пределов одну функцию можно заменять другой.

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых в при $x \rightarrow 0$

- 1) $\sin x \sim x$; 4) $\arctg x \sim x$; 7) $\ln(1+x) \sim x$;
 2) $tg x \sim x$; 5) $e^x - 1 \sim x$; 8) $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$;
 3) $\arcsin x \sim x$; 6) $a^x - 1 \sim x \ln a$.

Пользуясь этой таблицей, легко доказать существование предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Этот предел носит название первого замечательного предела.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая в точке $x = 0$, то справедлива следующая таблица

- 1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 4) $\arctg \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 7) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
 2) $tg \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$; 8) $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$;
 3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 6) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$.

Пример 2.2.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\arctg(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{5}{x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}} = 5.$$

Определение 2.9. Функции $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = a$ справа (слева), если для любой последовательности $\{x_n\}$ $x > a$ ($x < a$) сходящей к точке $x = a$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью определенного знака.

Функция $y = \frac{1}{x-1}$ является бесконечно большой и слева и справа при $x \rightarrow \pm 1$. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Определение 2.10. Функции $f(x)$ имеет в точке $x = a$ более высокий порядок роста, чем $\varphi(x)$ справа (слева) если функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ является бесконечно большой справа (слева) в точке $x = a$.

Условно это записывается в виде $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Определение 2.11. Функции $f(x)$, $\varphi(x)$ имеют одинаковый порядок роста справа (слева) в точке $x = a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ справа (слева) существует и равен константе.

Пример 2.3.

а) Функции $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ имеют одинаковый порядок роста слева и справа в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$$

б) Функции $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x - 1}$ имеют одинаковый порядок роста слева и справа в точке $x = 1$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

2.2. Непрерывность функции

Определение 2.12. Функции $y = f(x)$, определенная в окрестности точки a , называется непрерывной в точки a , если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Принимая во внимание равенство $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, получим

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a).$$

Приведем два эквивалентных определения непрерывности функции в точке.

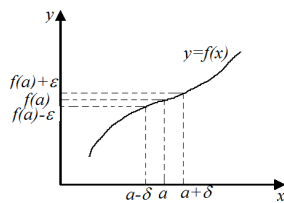


Рис. 2.1.

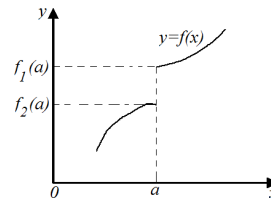


Рис. 2.2.

Определение 2.13. Функции $y = f(x)$ называется непрерывной в точки a , если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , сходящей к a , последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к локальному значению функции $f(a)$

Определение 2.14. Функции $y = f(x)$ называется непрерывной в точки a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta(x, \varepsilon) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Сравните два рисунка. На рис. 2.1, какую бы мы не взяли ε -окрестность для значения $f(a)$, всегда $\exists \delta(x, \varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta(x, \varepsilon) \implies$

$\implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ На рис. 2.2 существует два значения $f(a)$. $f(x) = f_1(a)$, $f(x) = f_2(a)$. Для данной функции выполнены условия: $\exists \delta(x, \varepsilon) > 0 : x > a \quad |x - a| < \delta(x, \varepsilon) \implies |f(x) - f_1(a)| < \varepsilon$

$$\exists \delta(x, \varepsilon) > 0 : x < a \quad |x - a| < \delta(x, \varepsilon) \implies |f(x) - f_2(a)| < \varepsilon$$

В данном случае функция непрерывна справа в точке a и слева. Однако, она не является непрерывной в точке a . Если бы, например $f_2(a)$ не существовало, то функция будет непрерывной справа, а слева она была бы не непрерывной в точке a .

Таким образом, условием для проверки непрерывности функции в точке является равенство

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a). \quad (2.3)$$

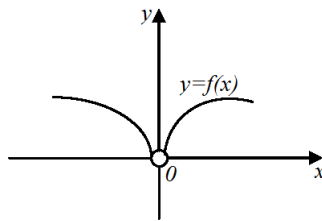


Рис. 2.3.

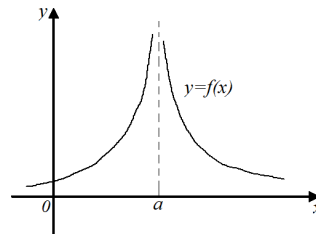


Рис. 2.4.

На рис. 2.3 выполнено условие $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = 0$. Однако, значения $f(0)$ не существует. Следовательно, функция в точке $x=0$ не является непрерывной. На рис. 2.4 пределы справа и слева равны бесконечности, а функция на бесконечности не определена.

Определение 2.15. Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, а функция $f(a)$ не определена, то говорят, что функция имеет устранимый разрыв.

Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$, $\alpha = \text{const.}$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$, $\beta = \text{const.}$, $\alpha \neq \beta$, то говорят, что функция имеет разрыв в точке $x=a$ первого рода.

Если хотя бы один предел слева или справа равен ∞ или $-\infty$, то говорят, что функция имеет предел второго рода.

Пример 2.4. а) $y = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Эта функция имеет устранимый разрыв в точке $x=0$. Если доопределить функцию $y=0$ при $x=0$, то разрыв устраняется.

б) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ 2 + x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} (2 + x^2) = 2$.

Эта функция в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода.

в) $y = 2^{1/x}$. $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{1/x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{1/x} = +\infty$. Следовательно, имеем разрыв второго рода в точке $x=0$.

Определение 2.16. Функция $y = f(x)$ называется равномерно непрерывной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0$, зависящее только от ε такое, что для любых двух точек x', x'' , удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

2.2.1. Свойства непрерывных функций. Теорема 2.2. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке $x=a$. Тогда, функции: $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ тоже непрерывны в точке $x=a$, при условии, что при делении $g(a) \neq 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание непрерывность функций $f(x)$, $g(x)$, имеем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Тогда, по свойству пределов (теорема 2.1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = f(a)/g(a). \square$$

Пусть задана сложная функция $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$.

Теорема 2.3. Если функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x=a$, а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке b , где $b = \varphi(a)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ является непрерывной в точке a

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы имеем. Для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , сходящей к a последовательность значений функции $\{\varphi(x_n)\}$ сходится к локальному значению функции $b = \varphi(a)$ (определение 2.13). Функция $y = f(z)$ непрерывна в точке b . Последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ является для нее последовательностью аргумента z . Следовательно, последовательность $\{f(\varphi(x_n))\}$ сходится к числу $f(\varphi(a))$. $\square$

Эта теорема дает возможность вычислять пределы сложных непрерывных функций, пользуясь формулой $\lim_{x \rightarrow a} (f(\varphi(x))) = f(\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)) = f(\varphi(a))$.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2.5. } \lim_{x \rightarrow a} \log_4 \left(1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + x}{x^2 + 4} \right) &= \log_4 \left(1 + \frac{3x^2 + x}{x^2 + 4} \right) = \\ &= \log_4 \left(1 + \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{x}{4}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Пример 2.6. Требуется вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, который называется вторым замечательным пределом. Пользуемся правилом раскрытия неопределенности типа $[1^\infty]$. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \implies \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $y = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. Аргумент $\frac{1}{x}$ стремится к нулю, тогда $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \implies e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{x}} = e$. Аналогичным образом можно доказать равенство $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2.2.2. Непрерывность функции на сегменте (отрезке). **Определение 2.16.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке сегмента $[a; b]$, то она непрерывна на всем сегменте.

Теорема 2.3. (Теорема о сохранении знака) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, $f(a) \neq 0$, то существует ε -окрестность точки a , в которой функция имеет знак, совпадающий со знаком $f(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $f(x)$ непрерывна $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Выберем величину ε из условия $\varepsilon < |f(a)|$. Тогда, из неравенства $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ получим $\varepsilon + f(a) < f(x) < \varepsilon + f(a)$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2.4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то

$$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(b) > 0$, $f(a) < 0$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ то график функции непрерывная кривая. График не может перейти из нижней полуплоскости координатной плоскости в верхнюю, не пересекая, хотя бы в одной точке, ось абсцисс. Следовательно, $\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$. $\square$

Теорема 2.5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, и $f(a) < C < f(b)$, где C – любое число, то $\exists c \in [a; b] : f(c) = C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную функцию $\psi(x) = f(x) - C \implies \psi(a) = f(a) - C < 0$, $\psi(b) = f(b) - C > 0$. Функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Следовательно, $\exists c \in [a; b] : \psi(c) = 0 \implies f(c) - C = 0 \implies f(c) = C$. $\square$

Теорема 2.6. (первая теорема Вейерштрасса) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция не ограничена сверху. Тогда для $\forall A > 0 \exists c \in [a; b] : f(c) < A$. Следовательно, существует последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента $x \in [a; b]$, сходящая к точке $x = c$. Тогда, в соответствии с теоремой 1.5, из этой последовательности можно выделить подпоследовательность

$\{x_{n_k}\}$, сходящую к точке $x = c$. В этом случае, подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$ должна сходиться к значению $f(c)$, которое является неограниченным. Это невозможно, так как по условию теоремы функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, а, следовательно, в точке $x = c \in [a; b]$ правосторонний и левосторонний пределы должны быть равны и иметь конечное значение. Противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 2.7. (вторая теорема Вейерштрасса) *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она достигает на этом сегменте своих точных верхней и нижней граней.*

Доказательство. Пусть $\sup_{x \in [a; b]} f(x) = M$. Предположим, что функция не достигает значения M . Тогда $M - f(x) > 0$. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Эта функция непрерывна на заданном сегменте по свойствам непрерывных функций. По теореме 2.6, она является ограниченной. Тогда $\exists B : \frac{1}{M - f(x)} \leq B$. Разрешив это неравенство, получим $f(x) \leq M - \frac{1}{B}$. В соответствии с этим неравенством, число M не является точной верхней гранью. Противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 2.8. (теорема о равномерной непрерывности) *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на этом сегменте.*

Доказательство. Пусть функция не является равномерно непрерывной. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ не выполняется условие $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Поэтому для каждого $\delta = 1/n, n = \overline{1, \infty}, n > 0$ найдутся точки x_n'', x_n' такие, что при выполнении неравенства $|x_n'' - x_n'| < 1/n$ будет справедливо $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$. Из последовательности x_n'' можно выделить подпоследовательность x_{n_k}'' , которая будет сходиться к некоторой точке c . Если теперь выделить подпоследовательность x_{n_k}' из последовательности x_n' , то эта подпоследовательность тоже должна сходиться к точке c , в силу непрерывности функции в точке c . Тогда последовательность $f(x_{n_k}'') - f(x_{n_k}')$ будет бесконечно малой, что противоречит условию $|f(x_{n_k}'') - f(x_{n_k}')| \geq \varepsilon$. $\square$

2.3. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения о пределе функции.
2. Какими арифметическими свойствами обладают пределы функций?
3. Как сравниваются бесконечно малые и бесконечно большие функции?
4. Сформулируйте определения непрерывности функции.
5. Докажите теорему о свойствах непрерывных функций в точке.
6. Сформулируйте теорему о сохранении знака.

7. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса.

2.4. Методические указания по решению задач

2.1. Доказать $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$ (найти $\delta(\varepsilon)$).

Решение: Рассмотрим модуль разности функции и предполагаемого значения предела:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} + 7 \right| &= \left| \frac{2x^2 + 5x - 3 + 7x + 21}{x + 3} \right| = \left| \frac{2x^2 + 12x + 18}{x + 3} \right| = \\ &= 2 \left| \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} \right| = 2|x + 3|. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, тогда при $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ $2|x + 3| < \varepsilon$, следовательно, $\left| \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} + 7 \right| = 2|x + 3| < \varepsilon$. Таким образом, по определению, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

2.2. Доказать непрерывность функции $f(x) = 5x^2 - 1$ в точке $x_0 = 6$ (найти $\delta(\varepsilon)$).

Решение: $f(x_0) = 5 \cdot 36 - 1 = 179$. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности функции и ее значения в точке x_0 .

$$\begin{aligned} |5x^2 - 1 - 179| &= |5x^2 - 180| = \\ &= 5|x^2 - 36| = 5|(x - 6)^2 + 12(x - 6)| \leq 5(|x - 6|^2 + 12|x - 6|) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Решив последнее неравенство, получим

$$0 < |x - 6| < \frac{(\sqrt{36 + 5\varepsilon} - 6)(\sqrt{36 + 5\varepsilon} + 6)}{5(\sqrt{36 + 5\varepsilon} + 6)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{36 + 5\varepsilon} + 6}. \text{ Из це-}$$

почки неравенств

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{36 + 5\varepsilon} + 6} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{36 + 5\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{36 + 12\varepsilon + \varepsilon^2}} > \frac{\varepsilon}{2(6 + \varepsilon)} = \delta(\varepsilon) > |x - 6|$$

следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(6 + \varepsilon)} : |x - 6| < \delta \implies$

$$|5x^2 - 1 - 179| < \varepsilon.$$

Это и означает непрерывность функции в точке $x_0 = 6$ по определению.

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(6 + \varepsilon)}.$$

2.3. Раскрытие неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Решение: Подстановкой предельного значения 1 убеждаемся в том, что имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. В силу теоремы Безу, т.к. $x = 1$ является корнем полиномов в числителе и знаменателе, они делятся без остатка на одночлен $x - 1$. Выполняя деление, получаем следующие разложения на множители:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2), \quad x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1).$$

Таким образом, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Так как неопределенность сохранилась, то разложим многочлены на множители: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

В результате получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{3}{2}.$$

2.4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} - 2}{x^2 - 2}$.

Решение: Подстановкой предельного значения убеждаемся, что в данном пределе имеется неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для решения данной задачи избавимся от иррациональности в числителе:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} - 2 \right) \left(\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 2)^2} + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} + 4 \right) = \\ & = x^2 + 3x - 2 - 8 = x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} - 2}{x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 2) \left(\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 2)^2} + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} + 4 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 5)}{(x + 2) \left(\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 2)^2} + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 2} + 4 \right)} = \frac{7}{48}. \end{aligned}$$

2.5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$.

Решение: Рассмотрим цепочки эквивалентностей:

$$\begin{aligned} (x \rightarrow 0) &\Rightarrow (\sin x \rightarrow 0) \Rightarrow \ln(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x; \\ (x \rightarrow 0) &\Rightarrow (4x \rightarrow 0) \Rightarrow \sin 4x \sim 4x. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

2.6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x + 1)}$.

Решение: В данном случае непосредственно воспользоваться методом решения предыдущих задач невозможно т.к.

$(x \rightarrow 0) \Rightarrow \left(\pi \left(1 + \frac{x}{2}\right) \rightarrow \pi\right)$. Преобразуем при помощи формул приведения $tg\left(\pi + \frac{\pi x}{2}\right) = tg\frac{\pi x}{2}$. Теперь рассмотрим цепочки эквивалентностей:

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow \left(\frac{\pi x}{2} \rightarrow 0\right) \Rightarrow tg\frac{\pi x}{2} \sim \frac{\pi x}{2}, \quad (x \rightarrow 0) \Rightarrow \ln(x+1) \sim x.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg\left(\pi \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi x}{2}}{x} = \frac{\pi}{2}$.

2.7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{tg 3x}$.

Решение: Сделав замену переменных $x - \pi = t$, получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(5t + 5\pi)}{tg(3t + 3\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 5t)}{tg 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 5t}{tg 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-5t}{3t} = -\frac{5}{3},$$

так как $(t \rightarrow 0) \Rightarrow (5t \rightarrow 0) \Rightarrow (\sin 5t \sim 5t)$, $(t \rightarrow 0) \Rightarrow (3t \rightarrow 0) \Rightarrow (tg 3t \sim 3t)$.

2.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{\sin^2 x}$.

Решение: Рассмотрим выражение, стоящее в числителе:

$$e^{2x} + e^{-2x} - 2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x} = (e^x - e^{-x})^2 = e^{-2x} (e^{2x} - 1)^2.$$

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow (e^{2x} - 1 \sim 2x); \quad (x \rightarrow 0) \Rightarrow (\sin x \sim x).$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} (2x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4e^{-2x} = 4$.

2.9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$.

Решение: Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела к виду:

$$\frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x} = \frac{(e^{7x} - 1) - (e^{-2x} - 1)}{\sin x - 2x} = \frac{\frac{e^{7x} - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x} - 2} - \frac{\frac{e^{-2x} - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x} - 2}.$$

Рассмотрим цепочки эквивалентностей:

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow (7x \rightarrow 0) \Rightarrow (e^{7x} - 1 \sim 7x),$$

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow (-2x \rightarrow 0) \Rightarrow (e^{-2x} - 1) \sim (-2x).$$

Вычислим пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x} = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 2} - \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 2} = \frac{7}{1 - 2} - \frac{-2}{1 - 2} = -9..$$

2.10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

Решение: Вычисляя пределы основания и показателя, убеждаемся в том, что имеет место неопределенность 1^∞ . Предположим, что данный предел существует и его величина равна A . Рассмотрим $\ln A$:

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln (\cos \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos \sqrt{x})}{x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

В результате данного преобразования исходная неопределенность (1^∞) преобразована к виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Рассмотрим числитель:

$$\ln (\cos \sqrt{x}) = \ln (1 + \cos \sqrt{x} - 1) = \ln (1 - (1 - \cos \sqrt{x}));$$

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow \left((1 - \cos \sqrt{x}) \sim \frac{x}{2} \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left(\ln (1 - (1 - \cos \sqrt{x})) \right) \sim \left(-\frac{x}{2} \right).$$

Таким образом, $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{x} = -\frac{1}{2}$, следовательно, $A = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2.5. Примеры для самостоятельного решения

2.1. Сформулировать на языке “ $\varepsilon - \delta$ ” окрестностей:

а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$;	б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;	в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$;
г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;	д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$;	е) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;
ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$;	з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;	и) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

Вычислить следующие пределы.

2.2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})$,

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 8}$.

2.3. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 - 1}$

2.4. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x+2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7} - \sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2-9}}$,

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{3x-2}}{6x}$.

2.5. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x/2) - \sin(x/2)}{\cos x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 7x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$.

$$2.6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin \pi x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$2.7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x} - 1}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4\sin x)}{\sin 4x}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}.$$

$$2.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}$$

$$2.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{\frac{1}{8x+2}}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

2.10. Доказать, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$

$$\text{ а) } f(x) = 2x^2 - 4, a = 3 \quad \text{ б) } f(x) = -2x^2 - 5, a = 2.$$

2.11. Исследовать на непрерывность функции и указать характер точек разрыва.

$$\text{ а) } f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}, \quad \text{ б) } f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 1}, \quad \text{ в) } f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x-1)^2}$$

$$\text{ г) } f(x) = 3^{\frac{2}{x-2}}, \quad \text{ д) } f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2, & x > 2, \end{cases} \quad \text{ е) } f(x) = \begin{cases} x, & x < 3, \\ -x^2, & 3 \leq x \leq 5, \\ x - 50, & x > 5. \end{cases}$$

2.5.1. Ответы. 2.2. а) 0 б) 0 в) 0 2.3. а) 12 б) 3/2 в) 1/4

2.4. а) 1/4 б) 0 в) ∞ . 2.5. а) 32/3 б) 25/14 в) 1/4

2.6. а) $-1/\pi$ б) 1/8 в) 0 . 2.7. а) $1/\ln 9$ б) 1 в) $7/\pi$.

2.8. а) 8/3 б) 1 в) 1. 2.9. а) e^{-16} б) e^2 в) -1

Лекция 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Производная, основные понятия и правила дифференцирования

Определение 3.1. Приращением функции $y=f(x)$ в точке x , соответствующим приращению аргумента Δx , называется число

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение 3.2. Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в точке x , когда приращение аргумента Δx стремится к нулю

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Условные обозначения производной: $\frac{dy}{dx}$, $\dot{y}$, y'

3.1.1. Геометрический смысл производной. Пусть задана функция $y = f(x)$, график которой приведен на рис.3.1. Покажем, что производная в точке x , $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$

Отрезки: $AC = \Delta x$, $BC = \Delta y$, $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \operatorname{arctg} f'(x) = \alpha. \implies \operatorname{tg} \alpha = f'(x).$$

Знание углового коэффициента касательной позволяет получить уравнение касательной в точке $x = x_0$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

а учитывая условия перпендикулярности двух прямых, получаем уравнение нормали в точке $x = x_0$ (прямая перпенди-

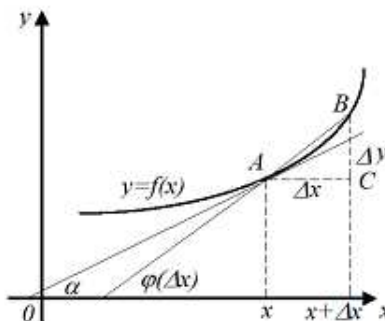


Рис. 3.1.

кулярная касательной в точке $x = x_0$)

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

3.1.2. Физический смысл производной. Пусть точка M движется по прямой. Предположим, что за время t_0 она прошла путь $S(t_0)$. За время $t_0 + \Delta t$ точка проходит путь $S(t_0 + \Delta t)$. Тогда, отношение $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость за время Δt . Предел отношения $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = v(t_0)$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t_0 . $v(t_0) = S'(t_0)$

3.1.3. Понятие дифференцируемости функции в точке. Определение 3.3. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если приращение функции можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, A – некоторое число не зависящее от Δx

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке x необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Если функция дифференцируема, то $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Вычислим предел отношения $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$. Так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$, что следует из условия $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, то имеем $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Достаточность. $A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - A \right| < \varepsilon \Rightarrow$ Функция $\frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой. Обозначим $\frac{\Delta y}{\Delta x} - A = \alpha$, откуда следует

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x \square$$

С л е д с т в и е. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке.

Справедливость следует из соотношения $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A\Delta x + \alpha\Delta x) = 0$. Обратное утверждение не верно. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но в этой точке она не имеет производной. Следовательно, она не дифференцируема.

3.1.4. Правила дифференцирования. 1. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

$$3. \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

4. Дифференцирование сложной функции. Пусть функция $x = \psi(t)$ дифференцируема в точке x , а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \psi(t)$. Тогда функция $y = f(\psi(t))$ дифференцируема в точке t , а производная вычисляется по формуле $(f(\psi(t)))' = f'(x)\psi'(t)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $y = u(x) \pm v(x) \implies$

$$\begin{aligned} \implies \Delta y &= (u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x)) = \\ &= (u(x + \Delta x) - u(x)) \pm (v(x + \Delta x) - v(x)) \end{aligned}$$

Разделив данное равенство на Δx и переходя к пределу, получим

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x). \square$$

2. $y = (u(x)v(x))$,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \pm u(x + \Delta x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)(v(x + \Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x + \Delta x) - u(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \frac{u(x)}{v(x)}, \Delta y &= \left(\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{(u(x + \Delta x) - u(x))v(x) - u(x)(v(x + \Delta x) - v(x))}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{\Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \end{aligned}$$

Вычисляя предел отношения $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \square$$

4. Из условий дифференцируемости функций $y = f(x)$, $x = \psi(t)$ следует

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \Delta x = \psi'(t)\Delta t + \beta\Delta t,$$

где $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, $\beta\Delta t = o(\Delta t)$ Тогда будем иметь

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha(\psi'(t)\Delta t + \beta\Delta t).$$

Разделим левую и правую части равенства на Δt В результате получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha\psi'(t) + \alpha\beta$$

Вычислим предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha \psi'(t) + \alpha \beta) = f'(x) \psi'(t). \square$$

3.1.5. Вычисление производных элементарных функций.

Производные тригонометрических функций. $y = \sin x$, $y' = \cos x$.
Докажем справедливость этой формулы.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \cos x, y' = -\sin x \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \Delta x/2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = -\sin x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ y' &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляется производная функции $y = \operatorname{ctg} x$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Производная логарифмической функции. $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x \ln a}$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым замечательным пределом

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

Производная обратной функции

Теорема 3.2. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x_0 и является дифференцируемой в

этой точке, то существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая имеет производную $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$ в точке $y_0 = f(x_0)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x_0 , она имеет обратную функцию. Из условия дифференцируемости следует непрерывность функции. Тогда, если $\Delta y \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0$. В этом случае имеем

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = 1/f'(x_0). \quad (3.1)$$

Производная показательной функции.

Функция $y = a^x$ является обратной к функции $x = \ln_a y$. Пользуемся формулой (3.1) $y' = \frac{1}{\log_a' y} = \frac{1}{1/y \ln a} = y \ln a = a^x \ln a$

Производные обратных тригонометрических функций.

Функция $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$ служит обратной для функции $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда, $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Аналогичным образом выводится формула $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Вычислим производную функции $y = \arctg x$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Эта функция является обратной для функции $x = \tg y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$(y = \arctg x)' = \frac{1}{(\tg y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогичным образом выводится формула $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Логарифмическая производная. Если функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема, то справедливы следующие равенства:

$\ln y = \ln f(x)$, $(\ln f(x))' = y'/y$. Величина, определяемая последней формулой, называется логарифмической производной. Ей удобно пользоваться для вычисления производных от функций вида $y = u(x)^{v(x)}$

Предполагается, что функции $u(x)$, $v(x)$ являются дифференцируемыми и $u(x) > 0$. Прологарифмируем равенство $y = u(x)^{v(x)}$. $\ln y = v(x) \ln u(x)$. Тогда, $y'/y = (v(x))' \ln u(x) + v(x) \frac{(u(x))'}{u(x)}$, откуда полу-

чаем $y' = u(x)^{v(x)} \left((v(x))' \ln u(x) + v(x) \frac{(u(x))'}{u(x)} \right)$

Производная степенной функции $y = x^a$, $x > 0$.

$$\ln y = a \ln x \implies y'/y = a/x \implies y' = ya/x = ax^{a-1}$$

3.2. Понятие дифференциала функции

Определение 3.3. Линейная часть приращения функции относительно Δx $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$ называется дифференциалом функции

$$dy = A\Delta x$$

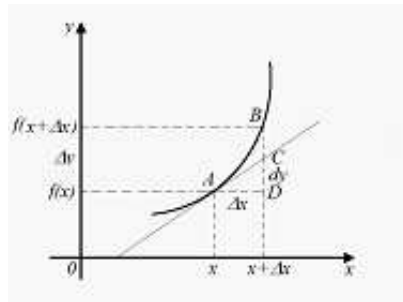


Рис. 3.2.

Геометрическая интерпретация дифференциала приведена на рис. 3.2. Из треугольника ACD имеем

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{Отрезок } CD = dy, \quad BD = \Delta y, \quad BC = \alpha\Delta x$$

В качестве дифференциала независимой переменной x будем брать число равное приращению Δx , $dx = \Delta x$. Тогда формулу для дифференциала функции можно записать в виде $dy = f'(x)dx$

Инвариантность формы первого дифференциала.

Покажем, что приведенная формула является справедливой и для сложной функции.

$y = f(\psi(t))$, где $x = \psi(t)$. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции имеем $y' = f'(x)\psi'(t)$. Запишем эту формулу в другом виде $\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$. Умножив это равенство на dt , получим

$dy = f'(x)dx$. Таким образом, независимо от того какой является функция сложной или простой, дифференциал ее равен произведению производной на дифференциал аргумента. Другими словами форма дифференциала не зависит от того, каким является аргумент зависимой или независимой переменной.

3.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, которая имеет дифференцируемую производную $y' = f'(x)$ в точке $x \in (a; b)$. Если производная $f'(x)$ является дифференцируемой функцией, то можно вычислить ее производную $(y')' = (f'(x))'$. Эта производная является второй производной для функции $y = f(x)$, которая имеет следующие обозначения: y'' , $\ddot{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если вторая производная является дифференцируемой функцией, то можно вычислить производную этой функции, которая будет третьей производной $y''' \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)$, для исходной функции $y = f(x)$. Повторяя эти процедуры, при условии, что полученные производные являются дифференцируемыми функциями, можно получить

производные любого порядка. Условно будем пользоваться следующими обозначениями для производной n -ого порядка $y^{(n)}$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Пример 3.1. $y = \ln(x^2 + 1)$. Вычислим производную $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
Вычислим вторую производную $y'' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$
$$= \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Определение 3.4. Дифференциал от дифференциала $d(dy) = d(df(x))$ функции $y = f(x)$ называется дифференциалом второго порядка и обозначается $d^2 y$.

Найдем формулу для вычисления дифференциала второго порядка

$$d^2 y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx)$$

Принимая во внимание то, что x является независимой переменной, получаем равенство $d(dx) = 0$. В результате имеем

$$d^2 y = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2$$

Аналогичным образом получается формула для дифференциала n -ого порядка

$$d^n y = f^n(x)dx^n.$$

Следует отметить, что дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности. Иными словами, если переменная x не является независимой, то формула для вычисления принимает другой вид.

Для дифференциала второго порядка имеем

$$d^2 y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x.$$

3.4. Производные функций, заданных в параметрической форме

Пусть функция y от x задана в параметрической форме

$y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0; T]$. Предположим, что эти функции дифференцируемы в точке $t \in [t_0; T]$, $\varphi'(t) \neq 0$, функция $\varphi(t)$ в окрестности точки t имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Требуется найти формулу для вычисления производной $\frac{dy}{dx}$. Будем рассматривать функцию

$y = \psi(t)$ как сложную функцию $y = \psi(\Phi(x))$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим $\frac{dy}{dx} = \psi'_t \Phi'_x$. Здесь

индекс указывает по какой переменной осуществляется дифференцирование.

Воспользуемся правилом вычисления производной для обратной функции (теорема 3.2) $\Phi'_x = \frac{1}{\varphi'_t}$. В результате получаем формулу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$$

Будем считать, что в параметрической форме задана функция

$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \chi(t)$, $x = \varphi(t)$. Тогда, пользуясь полученной формулой для первой производной, получим формулу для вычисления второй производной

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\chi'_t}{\varphi'_t} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\varphi'_t}$$

Аналогичным образом получаем формулу для вычисления производной любого порядка, предполагая, что они существуют и выполнены предположения, сделанные вначале

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{\varphi'_t}$$

Пример 3.2 $\begin{cases} y = \cos t, \\ x = \sin t. \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \implies$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{((- \operatorname{tg} t))'_t}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}$$

3.4.1. Контрольные вопросы. 1. Сформулируйте определение производной и поясните ее геометрический и физический смысл.

2. Выведите правила дифференцирования.

3. Выведите формулы дифференцирования для элементарных функций.

4. Что такое дифференциал функции и его геометрический смысл?

5. В чем состоит инвариантность первого дифференциала?

6. Выведите формулы для вычисления производных для функций, заданных в параметрической форме.

3.5. Методические указания по решению задач

Для вычисления производных пользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^m)' = mx^{m-1}$,	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
2. $(e^x)' = e^x$,	11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $(a^x)' = a^x \ln a$,	12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
5. $(\ln_a x)' = \left(\frac{1}{x \ln a}\right)$,	14. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$,
6. $(\sin x)' = \cos x$,	15. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$,
7. $(\cos x)' = -\sin x$,	16. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,
8. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$,	17. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$,	

Дифференцирование функций, заданных в параметрической форме

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'^2_t}.$$

1. Найти производную: .

Решение: Воспользуемся правилами нахождения производной частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1-x^4}} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 + 2)' \sqrt{1-x^4} - (x^2 + 2)(\sqrt{1-x^4})'}{(\sqrt{1-x^4})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x\sqrt{1-x^4} - \frac{(x^2 + 2) \cdot (-4x^3)}{2\sqrt{1-x^4}}}{(1-x^4)} \right) = \\ &= \frac{x(1-x^4) + x^3(x^2 + 2)}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}} = \frac{x - x^5 + x^5 + 2x^3}{\sqrt{(1-x^4)^3}} = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}. \end{aligned}$$

2. Найти производную функции: $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \operatorname{arcsine}^{-x}$.

Решение: Воспользуемся правилами нахождения производной суммы и производной сложной функции:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}))' + (\arcsin e^{-x})' = \\
 &= \frac{(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})'}{e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}} + \frac{(e^{-x})'}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \frac{e^x + \frac{(e^{2x} - 1)'}{2\sqrt{e^{2x} - 1}}}{e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}} + \\
 &+ \frac{(-e^{-x})}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \frac{e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x} - 1}}}{e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \\
 &= \frac{e^x \sqrt{e^{2x} - 1} + e^{2x}}{(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) \cdot \sqrt{e^{2x} - 1}} - \frac{1}{e^x \sqrt{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}}} = \\
 &= \frac{e^x(\sqrt{e^{2x} - 1} + e^x)}{(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) \cdot \sqrt{e^{2x} - 1}} - \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \\
 &= \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1} \cdot \sqrt{e^x + 1}} = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}.
 \end{aligned}$$

3. Найти производную: $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

Решение: При дифференцировании некоторых логарифмических выражений рациональнее предварительно упростить первоначальную функцию по свойствам логарифма:

$$\begin{aligned}
 y &= \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+2x}{1-2x} = \frac{1}{4} (\ln(1+2x) - \ln(1-2x)); \\
 y' &= \frac{1}{4} (\ln(1+2x))' - (\ln(1-2x))' = \frac{1}{4} \left(\frac{(1+2x)'}{1+2x} - \frac{(1-2x)'}{1-2x} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+2x} - \frac{-2}{1-2x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-2x} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1 - 2x + 1 + 2x}{1 - 4x^2} = \frac{1}{1 - 4x^2}.
 \end{aligned}$$

4. Найти производную: $y = \sqrt{1-x^2} - x \cdot \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sqrt{1-x^2})' - (x \cdot \arcsin \sqrt{1-x^2})' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} - (x' \arcsin \sqrt{1-x^2} + \\
 &+ x \cdot (\arcsin \sqrt{1-x^2})') = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - (\arcsin \sqrt{1-x^2} + \\
 &+ x \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \sqrt{1-x^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-1+x^2}} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \sqrt{1-x^2} + \\
 + \frac{x^2}{|x|\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \sqrt{1-x^2}.
 \end{aligned}$$

5. Найти производную: $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}$.

Решение: Прологарифмируем выражение: $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}$, $\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}$.

Упростим правую часть по свойству логарифмической функции:

$$\ln y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4} \cdot \ln \operatorname{tg} x.$$

Продифференцируем левую и правую части этого равенства, учитывая, что y – функция от x , а $\ln y$ – сложная функция: $\frac{y'}{y} = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right)' \ln \operatorname{tg} x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4} \cdot (\ln \operatorname{tg} x)'$;

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{y} &= \frac{\frac{1}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \cdot \ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \frac{x}{4}} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4} \cdot \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{4 \cos \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{4}} + \\
 &+ \frac{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}{\sin x \cos x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}{\sin 2x};
 \end{aligned}$$

$$y' = \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}{\sin 2x} \right) y; \quad y' = \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}{\sin 2x} \right) (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}.$$

6. Найти производную: $y = x^{e^{\sin x}}$.

Решение: Данная функция показательная – степенная. Прологарифмируем все выражение: $\ln y = \ln x^{e^{\sin x}}$. По свойству логарифмической функции имеем: $\ln y = e^{\sin x} \ln x$. Продифференцируем все выражение, учитывая, что y – функция от x , а $\ln y$ – сложная функция:

$$\frac{y'}{y} = (e^{\sin x})' \ln x + e^{\sin x} (\ln x)'; \quad \frac{y'}{y} = e^{\sin x} \cos x \cdot \ln x + \frac{e^{\sin x}}{x};$$

$$y' = e^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right) y; \quad y' = e^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right) x^{e^{\sin x}}.$$

7. Найти производную от параметрической функции:

$$\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t} \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}} \end{cases}.$$

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования параметрической функции: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = (\sqrt{1+\sqrt{t}})' = \frac{(1+\sqrt{t})'}{2\sqrt{1+\sqrt{t}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{2\sqrt{1+\sqrt{t}}} = \frac{1}{4\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}};$$

$$x'_t = (\arcsin \sqrt{t})' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1-(\sqrt{t})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}};$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}{4\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{t}}\sqrt{1+\sqrt{t}}}{2\sqrt{1+\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{t}}}{2}.$$

8. Составить уравнение нормали и уравнение касательной к кривой $y = x + \sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение: Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$.

Уравнение нормали имеет вид: $y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$. Найдем производную функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

$$y' = (x + \sqrt{x^3})' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad y'(1) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{1} = \frac{5}{2};$$

$$y(1) = 1 + \sqrt{1^3} = 2.$$

Запишем уравнения касательной к кривой $y = x + \sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$: $y - 2 = \frac{5}{2}(x - 1)$, $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$. Пользуясь условием перпендикулярности двух прямых $k_1 k_2 = -1$, получим уравнение нормали в этой же точке:

$$y - 2 = -\frac{2}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{5}.$$

3.6. Примеры для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций.

1. $y = 2x^5 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$ 2. $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[7]{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^5}$
3. $y = \sin 2x \cdot \sqrt{x}$ 4. $y = \sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 5. $\cos 3x \cdot \sqrt[4]{x^3}$
6. $y = \operatorname{tg} 3x \cdot \ln(4x)$ 7. $y = \operatorname{ctg}(5x) \cdot \ln_3(2x)$ 8. $\operatorname{tg}(5x) \cdot 2^{3x}$
9. $y = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}$ 10. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 11. $y = \frac{\ln x}{x}$ 12. $\frac{\cos x}{x}$

13. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ 14. $y = \sin^2 2x$ 15. $y = 3^{\sin x}$ 16. $y = \arcsin(\sqrt{x})$.
 17. $y = tg^2(\ln x)$ 18. $y = \log_3^2(tg x)$ 19. $y = \log_5(tg^2 x)$ 20. $y = \arcsin(4^{2x})$
 21. $5^{\cos \sqrt{x}} \ln(x^2 + 1)$ 22. $y = \cos^3(3x) \ln(5x)$ 23. $y = \sqrt[3]{x^2} \ln(3x)$
 24. $y = \sqrt[5]{x^4} \bullet 3^{tg 2x}$ 25. $y = \ln^2(5x) \bullet \sqrt[3]{x}$ 26. $y = 7^{\cos 3x} ctg(3x)$
 27. $y = (\sin x)^x$ 28. $y = (tg x)^x$ 29. $y = (\sin x)^{\cos x}$ 30. $y = x^{\ln x}$

Найти производные от y по x , когда функция задана в параметрической форме.

31. $\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 4 \cos t. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} y = 4 \sin^3 t, \\ x = 4 \cos^3 t. \end{cases}$ 33. $\begin{cases} y = t - t^3, \\ x = 1 - t^2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y = \frac{t-1}{t}, \\ x = \frac{t+1}{t}. \end{cases}$

35. Составить уравнения касательной и нормали для функции $y = f(x)$ в точке x_0

а) $y = \arctg x$, $x_0 = \sqrt{3}$. б) $y = \ln(x^2 + 1)$, $x_0 = 2$.

Составить уравнения касательной и нормали для функций, заданных в параметрической форме, в точке t_0

36. $\begin{cases} y = \cos 2t, \\ x = \sin t, \end{cases} t_0 = \pi/6$. 37. $\begin{cases} y = t(tsint + 2cost), \\ x = t(tcost - 2sint), \end{cases} t_0 = \pi/4$.

Найти производные второго порядка.

38. $y = x^{\sqrt[3]{x^2}}$ 39. $y = 5^{\cos 3x}$ 40. $y = \sin^2 2x$ 41. $y = tg 3x$
 42. $y = \ln(x^2 + 1)$ 43. $y = \arctg 2x$ 44. $y = \arcsin 2x$
 45. $\begin{cases} y = \cos 2t, \\ x = \sin t, \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$ 46. $\begin{cases} y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \cos^3 t, \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
 47. $\begin{cases} y = \ln t, \\ x = t^2, \end{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

3.6.1. Ответы: 1. $10x^4 + \frac{8}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 2. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^6}$
 3. $2\sqrt{x} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{2\sqrt{x}}$ 4. $\frac{5 \cos 5x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sin 5x}{3x\sqrt[3]{x}}$ 5. $\frac{3 \cos 3x}{4\sqrt[4]{x}} - 3\sqrt[4]{x^3} \sin 3x$
 6. $\frac{3 \ln(4x)}{\cos^2(3x)} + \frac{tg 3x}{x}$ 7. $\frac{ctg(5x)}{x \ln 3} - \frac{5 \ln_3(2x)}{\sin^2(5x)}$ 8. $\frac{5 \bullet 2^{3x}}{\cos^2(5x)} + 3tg(5x) \bullet 2^{3x} \ln 2$
 9. $\frac{1 - 2x \arctg(x)}{(1 + x^2)^2}$ 10. $\frac{\sqrt{1 - x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$ 11. $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{e}{x}\right)$.

- 12.** $\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$. **13.** $\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$. **14.** $2 \sin(4x)$. **15.** $\ln 3 \bullet 3^{\sin x} \cos x$.
16. $\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.
17. $\frac{2 \operatorname{tg}(\ln x)}{x \cos^2(\ln x)}$. **18.** $\frac{4 \log_3(\operatorname{tg} x)}{\ln 3 \bullet \sin 2x}$. **19.** $\frac{4}{\ln 5 \bullet \sin 2x}$. **20.** $\frac{2 \bullet 4^{2x} \ln 4}{\sqrt{1 - 4^{4x}}}$.
21. $5^{\cos \sqrt{x}} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{\ln 5 \sin \sqrt{x} \ln(x^2 + 1)}{2\sqrt{x}} \right)$.
22. $\frac{\cos^3(3x)}{x} - 9 \cos^2(3x) \sin(3x) \ln 5x$. **23.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} (\ln 9x^2 + 3)$.
24. $\frac{4 \bullet 3^{\operatorname{tg} 2x}}{5\sqrt[5]{x}} + \frac{2\sqrt[5]{x^4} \bullet 3^{\operatorname{tg} 2x} \ln 3}{\cos^2 2x}$. **25.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left(2 \ln 5x + \frac{\ln^2 5x}{3} \right)$.
26. $-3 \bullet 7^{\cos 3x} \left(\ln 7 \cos 3x + \frac{1}{\sin^2 3x} \right)$. **27.** $(\sin x)^x (\ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x)$.
28. $(\operatorname{tg} x)^x \left(\ln(\operatorname{tg} x) + \frac{2x}{\sin 2x} \right)$. **29.** $(\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x) \right)$.
30. $\frac{2x^{\ln x} \ln x}{x}$ **31.** $-\frac{3}{4} \operatorname{ctg} t$. **32.** $\operatorname{tg} t$. **33.** $\frac{3t^2 - 1}{2t}$. **34.** -1 .
35. а) $y = \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = -4x + \frac{\pi}{3} + 4\sqrt{3}$, б) $y = 0, 8x + \ln 5 - 1, 6$, $y = -1, 25x + \ln 5 + 2, 5$. **36.** $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$. **37.** $x + y = \pi^2 \sqrt{2} / 16$; $y - x = \pi \sqrt{2} / 2$. **38.** $\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$.
39. $9 \bullet 5^{\cos 3x} \ln 5 (\sin^2 3x \ln 5 - \cos 3x)$. **40.** $8 \cos 4x$ **41.** $-\frac{18 \sin 3x}{\cos^3 3x}$.
42. $\frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$. **43.** $-\frac{16x}{(4x^2 + 1)^2}$ / **44.** $\frac{8x}{\sqrt{(1 - 4x^2)^3}}$. **45.** -4 / **46.** $\frac{1}{6 \cos^4 t \sin t}$ / **47.** $\frac{-1}{2t^4}$.

Лекция 4

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Определение 4.1. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в точке $x = c$, если в окрестности этой точки $f(x) < f(c)$, когда $x < c$, $f(x) > f(c)$, когда $x > c$, ($f(x) > f(c)$, когда $x < c$, $f(x) < f(c)$, когда $x > c$).

Теорема 4.1. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ в точке $x = c$ была возрастающей (убывающей) в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$).

Доказательство. Необходимость. Докажем теорему для возрастающей функции. Функция возрастает в точке $x = c$. Из условия дифференцируемости следует существование производной $f'(c)$ (Теорема 3.1). Из определения производной имеем $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - c| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$. Раскроем последнее неравенство $f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon < |f'(c)|$. Тогда $f'(c) - \varepsilon$ и $f'(c) + \varepsilon$ будут иметь знак $f'(c)$. По условию функция возрастает в точке $x = c$. В соответствии с определением в окрестности этой точки $f(x) < f(c)$, когда $x < c$, $f(x) > f(c)$, когда $x > c$. Тогда $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. Из неравенства $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$ следует $f'(c) + \varepsilon > 0$. В этом случае $f'(c) > 0$, так как знак $f'(c) + \varepsilon$ совпадает со знаком $f'(c)$.

Достаточность. $f'(c) > 0$. Рассуждая так же, как при доказательстве необходимости и выбирая величину $\varepsilon < |f'(c)|$, получаем

$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$ По условию $f'(c) > 0$. Тогда $f'(c) + \varepsilon > 0$, $f'(c) - \varepsilon > 0$. В этом случае

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \iff \left[\begin{cases} f(x) - f(c) > 0, \\ x - c > 0, \\ f(x) - f(c) < 0, \\ x - c < 0, \end{cases} \iff \left[\begin{cases} f(x) > f(c), \\ x > c, \\ f(x) < f(c), \\ x < c, \end{cases}$$

откуда, в соответствии с определением, следует, что функция возрастает. $\square$

Определение 4.2. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = c$ локальный максимум (минимум), если существует окрестность точки c такая, что в этой окрестности выполнено неравенство $f(x) < f(c)$, ($f(x) > f(c)$). Локальный максимум и локальный минимум называются точками экстремумами.

Иными словами, в окрестности точки $x = c$ значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) значением.

Теорема 4.2. (Теорема Ферма о необходимом условии наличия экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и в точке $c \in (a; b)$ имеет экстремум, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как в точке $x = c$ локальный экстремум, то функция $f(x)$ в этой точке не возрастает и не убывает. В соответствии с теоремой 4.1 в этой точке $f'(c) \not\geq 0$ и $f'(c) \not\leq 0$. Следовательно, $f'(c) = 0$. $\square$

Теорема 4.3. (теорема Ролля) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Из условий непрерывности следует, что функция достигает на отрезке $M = \sup_x f(x)$ и $m = \inf_x f(x)$ (теорема 2.7). Рассмотрим два случая. 1. $M = m = \text{const}$ Тогда $f'(x) = 0$ для любого $x \in [a; b]$. 2. $M > m$ В этом случае, хотя бы одно из значений M или m , достигается во внутренней точке c сегмента. Следовательно, в этой точке имеется экстремум и $f'(c) = 0$. $\square$

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что внутри сегмента имеется, хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

Теорема 4.4. (теорема Лагранжа) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что справедлива формула

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4.1)$$

Доказательство. Возьмем на сегменте $[a; b]$ вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Эта функция непрерывна и дифференцируема. Кроме того $F(a) = F(b) = 0$. Выполнены условия теоремы Ролля. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Вычислим производную $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Подставив значение c , получим $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, откуда следует формула $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. $\square$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что на сегменте $[a; b]$ найдется, хотя бы одна точка, в которой касательная

параллельна хорде, соединяющей точки $f(a)$ и $f(b)$. На рис. 4.1 касательная в точке C параллельна хорде AB .

Формулу Лагранжа (4.1) еще называют формулой конечных приращений.

Теорема 4.5. (теорема Коши)
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a; b]$, дифференцируемы во всех внутренних точках этого сегмента и $g'(x) \neq 0$ для любых $x \in (a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.2)$$

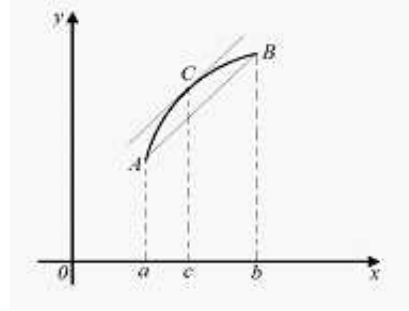


Рис. 4.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Возьмем на сегменте $[a; b]$ вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$. Эта функция непрерывна и дифференцируема. Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Выполнены условия теоремы Ролля. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Вычислим производную $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$. Подставив значение c , получим $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$, откуда следует формула (4.2). $\square$

4.1.1. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталья).

Рассмотрим правило Лопиталья, которое является универсальным способом раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 4.6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки c , за исключением, может быть, самой точки c и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Кроме того, в данной

окрестности $g'(x) \neq 0$. Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим значения функций в точке $x = c$, $f(c) = g(c) = 0$. Тогда функции будут непрерывны на

сегменте $[c; x]$ и дифференцируемы внутри этого сегмента. Выполнены условия теоремы Коши, в соответствии с которой имеем

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in [c; x].$$

Так как $g'(x) \neq 0$, то существует $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Принимая во внимание доопределение значений функций $f(c) = g(c) = 0$, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in [c; x].$$

Найдем пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. При $x \rightarrow c$, переменная $\xi \rightarrow c$. Поэтому можно записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \square$$

Формула (4.3) справедлива и для неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Неопределенность $[0 \cdot \infty]$ сводится к неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$. Следует отметить, что число c может быть любым числом, в том числе $\pm\infty$.

Примеры 4.1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{(tg x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)'}{((tg x)^2)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2}{2tg x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{tg x} (\cos x^2 \cos^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{tg x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = 1. \text{ В данном случае два раза воспользовались}$$

правилом Лопиталя, так как после первого применения этого правила неопределенность не была раскрыта.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = [0^0]$. Введем обозначение $y = x^{\sin x}$ и прологифмируем это равенство $\ln y = \sin x \ln x$. Решив это уравнение $y = e^{\sin x \ln x}$ получим $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x}$. Принимая во внимание непрерывность экспоненциальной функции, получаем $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\sin x \ln x)}.$$

Вычисляем предел $(\sin x \ln x)$. Имеем неопределенность $[-\infty \cdot 0]$ Преобразуем выражение под знаком предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1} = 0 \text{ В результате получаем } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

4.2. Формула Тейлора

Теорема 4.7. (теорема Тейлора) Если функция $f(x)$ имеет в окрестности некоторой точки a производные до $n+1$ ого порядка включительно, тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что будет справедлива формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (4.4)$$

где $R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$ — остаточный член $p > 0$ — произвольное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем полином $\varphi(x, a) =$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Тогда из (4.4) получим $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a)$. Задача состоит в доказательстве того, что данная разность равна остаточному члену, приведенному в теореме. Зафиксируем значение $x > a$ в окрестности точки $x = a$ и возьмем переменную $t \in [a; x]$.

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p G(x), \quad G(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$$

Подставим значение полинома $\varphi(x)$

$$\psi(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) - (x-t)^p G(x).$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема. Проверим ее значение на концах сегмента $[a; x]$. Очевидно, что в точке $t = x$, $\psi(x) = 0$. Подставим значение $t = a$, принимая во внимание равенство $G(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$ и формулу (4.4) $\psi(a) = f(x) - f(a) = 0$. Функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда, существует точка $\xi \in [a; x]$ Такая, что

$$\begin{aligned} \psi'(\xi) = 0. \text{ Вычислим } \psi'(t) = \\ = - \left(f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - 2\frac{f''(t)}{2!}(x-t) + \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - p(x-t)^{p-1}G(x) \right) = \\ = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}G(x). \end{aligned}$$

Подставив $t = \xi$, получим $-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p(x-\xi)^{p-1}G(x)$, откуда имеем $G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n-p+1}$. Принимая во внимание равенство $G(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$, определим $R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi) \square$

Придавая различные значения величине p , можно получить различные формы остаточного члена. Пусть $p = n+1$. Тогда будем иметь

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^{n+1} \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Эта форма остаточного члена является формой Лагранжа.

Остаточный член в форме Пиано. Покажем, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x)$, $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$.

Из формулы $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a)$ следуют равенства:

$$R_{n+1}(a) = R'_{n+1}(a) = R''_{n+1}(a) = \dots = R^{(n)}_{n+1}(a) = 0.$$

Найдем предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}$, применив n раз правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_{n+1}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R^{(n)}_{n+1}(x)}{n!} = 0.$$

Из правила сравнения бесконечно малых следует равенство

$$R_{n+1}(x) = o((x-a)^n). \square$$

Если в формуле (4.4) $a = 0$, то она называется формулой Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \quad (4.5)$$

Примеры 4.2. а) Пусть $f(x) = e^x$. Разложим функцию по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пиано. $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ для любого значения n . Тогда, получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\text{б) } f(x) = \sin x, f(0) = 0, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1}$$

Тогда, приравняв в формуле (4.5) $n = 2m$, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

$$\text{в) } f(x) = \cos x, f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), f(0) = 0, f^{(2m)}(0) = (-1)^m, f^{(2m-1)}(0) = 0. \text{ Если в формуле (4.5) взять } n = 2m - 1, \text{ то получим}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m-1}).$$

4.3. Исследование графика функции на наличие экстремумов

Пусть задана функция $y = f(x)$. Требуется исследовать ее на наличие экстремумов, и если они есть, то определить их тип.

Точки возможного экстремума определяются путем решения уравнения $f'(x) = 0$, так как это уравнение является необходимым условием существования экстремумов у дифференцируемой функции (теорема 4.2). Эти точки будем называть стационарными точками.

Для определения типа экстремума необходимо иметь достаточные условия наличия экстремумов.

Теорема 4.8. (первое достаточное условие экстремума) Пусть точка $x = \alpha$ является точкой возможного экстремума функции $f(x)$ ($x = \alpha$ является решением уравнения $f'(x) = 0$). Тогда, если в окрестности этой точки слева $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$, то эта точка локального максимума. Если в окрестности этой точки слева $f'(x) < 0$ а справа $f'(x) > 0$, то эта точка локального минимума. Если слева и справа производная имеет одинаковые знаки, то экстремума нет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в окрестности точки $x = \alpha$ сегмент $[x; a]$. На этом сегменте функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Тогда имеем

$$f(a) - f(x) = f'(\xi)(a - x), \xi \in [x; a]. \quad (4.6)$$

$f'(\xi)$ находится слева от точки a . Пусть $f'(\xi) > 0$. Так как $a - x > 0$, то $f(a) > f(x)$. На сегменте $[a; x]$ имеем

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \xi \in [a; x]. \quad (4.7)$$

$f'(\xi)$ находится справа от точки a . Пусть $f'(\xi) < 0$. Так как $x - a > 0$, то $f(a) > f(x)$. Следовательно, точка $x = a$ является точкой максимума. Аналогично доказывается условие минимума. Пусть функция слева и справа имеет один знак $f'(\xi) > 0$. Тогда, из формулы (??) имеем $f(a) > f(x)$, а из формулы (??) получаем $f(x) > f(a)$. Следовательно экстремума нет. $\square$

Теорема 4.9. (второе достаточное условие экстремума) Пусть функция $f(x)$ имеет в точке возможного экстремума $x = a$

$(f'(a) = 0)$ и конечную вторую производную. Тогда, если $f''(a) > 0$, то это точка минимума, а если $f''(a) < 0$, то это точка максимума.

Доказательство. Пусть $f''(a) > 0$, тогда функция $f'(x)$ в этой точке возрастает, а $f'(a) = 0$. В этом случае, в соответствии с определением 4.1, в окрестности этой точки $f'(x) < 0$, когда $x < a$ и $f'(x) > 0$ когда $x > a$. Тогда, в соответствии с теоремой 4.8 это точка минимума. Аналогично доказывается условие для точки максимума. $\square$

Однако, следует учесть, что функция может иметь экстремумы в точках, в которых производная не определена.

Теорема 4.10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x = a$, а в точке $x = a$ производная не определена, но сама функция является непрерывной в этой точке. Тогда, если в окрестности этой точки слева $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$, то эта точка локального максимума. Если в окрестности этой точки слева $f'(x) < 0$, а справа $f'(x) > 0$, то эта точка локального минимума. Если слева и справа производная имеет одинаковые знаки, то экстремума нет.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 4.8, поэтому оно не приводится. Стационарные точки и точки, где экстремум есть, а функция не дифференцируема, будем называть критическими точками.

Примеры 4.3. а) Исследовать на экстремумы функцию

$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. Область определения функции множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Вычислим производную

$$y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Решаем уравнение $f'(x) = 0$. $\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0$. Получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Для удобства построим таблицу интервалов с указанием знака производных на этих интервалах.

$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Используя первое достаточное условие экстремума, получаем, что в точке $x = 0$ имеем максимум, в точке $x = 2$ имеем минимум.

б) Исследовать на экстремумы функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x - 5)^2}$. Функция определена на всей числовой оси и является непрерывной. Вычисляем производную $y' = \frac{2(2x-4)}{3\sqrt[3]{x^2-4x-5}}$. В точках $x = -1$ и $x = 5$ производная не определена, а в точке $x = 2$ $y' = 0$

$(-\infty; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; 5)$	$(5; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

В точках $x = -1$ и $x = 5$ имеем минимум, а в точке $x = 2$ максимум.

4.3.1. Наибольшее и наименьшее значение функции на сегменте. Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Требуется определить наибольшее и наименьшее значения функции. Так как функция непрерывна, то она принимает наибольшее и наименьшее значения или в точках экстремума или на краях сегмента. Поэтому алгоритм решения этой задачи состоит из следующих этапов.

1. Определяются критические точки функции на сегменте.
2. В критических точках и на краях сегмента вычисляются значения функции, среди которых определяются наибольшее и наименьшее значения.

Примеры 4.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, $x \in [0; 3]$.

Вычисляем производную $f'(x) = x^2 - 6x + 5$. Решаем уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$. Определяем критические точки: $x_1 = 1 \in [0; 3]$

$x_2 = 5 \notin [0; 3]$. Вычисляем значения функции: $f(0) = -2$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(3) = -15$. Получили: $f(x) = \frac{1}{3}$, $f(x) = -15$.

4.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимые условия экстремумов.
2. Сформулируйте достаточные условия экстремумов.
3. Сформулируйте правило Лопиталя.
4. Перечислите виды неопределенностей, которые возникают при вычислении пределов и способы их раскрытия.
5. Сформулируйте теорему Тейлора.
6. Какие формы остаточного члена в формуле Тейлора Вы знаете?
7. Приведите формулу Лагранжа и поясните ее геометрический смысл.
8. Сформулируйте теорему для обобщенных конечных приращений.

4.5. Методические указания по решению задач

Рассмотрим порядок решения некоторых типовых задач.

1. Требуется получить оценку разности двух функций $y = \arctg x$ и $y = \arctg z$

Решение: Воспользуемся формулой Лагранжа $\arctg x - \arctg z = (\arctg \xi)'(x - z) = \frac{1}{1 + \xi^2}(x - z)$, $\xi \in [z; x]$ Принимая во внимание неравенство $\left| \frac{1}{1 + \xi^2} \right| \leq 1$, получаем следующую оценку

$$|\arctg x - \arctg z| \leq |x - z|$$

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}$$

3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos 3x)^{-1} \sin 3x}{(\cos x)^{-1} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 3x} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cos 3x}{\cos x} = 9. \end{aligned}$$

4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x^{tg x} = [0^0]$.

Решение: Введем обозначение $y = x^{tg x}$ и прологарифмируем это равенство $\ln y = tg x \ln x$. Решив это уравнение $y = e^{tg x \ln x}$ получим $x^{tg x} = e^{tg x \ln x}$ Принимая во внимание непрерывность экспоненциальной функции, получаем $e^{tg x \ln x} = e^{(tg x \ln x)}$. Вычисляем предел $(tg x \ln x)$. Имеем неопределенность $[-\infty \cdot 0]$. Преобразуем выражение под знаком предела

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{tg x} \right)} &= \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)}{\left(- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{tg^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right)} = - \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1} = 0. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{tg x} = e^0 = 1.$$

5. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$$

Решение: Воспользуемся результатами теоремы 4.1.

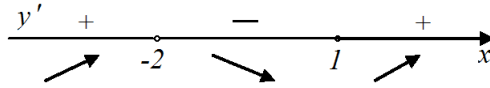


Рис. 4.2.

$y' = 6x^2 + 6x - 12$. Ищем критические точки, решая уравнение $6x^2 + 6x - 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Определяем знаки производной на полученных интервалах рис.4.2.

В результате имеем: интервалы возрастания $(-\infty; -2)$ и $(1; +\infty)$, интервал убывания $(-2; 1)$. В соответствии с теоремой 4.8, в точке $x = -2$ имеем максимум, а в точке $x = 1$ минимум функции.

6. Найти экстремумы функции $y = x^2(4 - x)^2$

Решение: Ищем критические точки

$$y' = 4x(x^2 - 6x + 8). \text{ Решаем уравнение } 4x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

Получаем: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремумы, теорема 4.9. $y'' = 4(3x^2 - 12x + 4)$. Вычисляем значения второй производной в критических точках $y''(0) = 16$, $y''(2) = -32$, $y''(4) = 16$. Следовательно, в точках $x_1 = 0$, $x_3 = 4$ имеем минимум, а в точке $x_2 = 2$ максимум.

7. Записать формулу Тейлора для функции $y = \ln x$ в окрестности точки $x = 1$. Остаточный член записать в форме Пеано.

Решение: В соответствии с теоремой 4.7, имеем

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o((x-1)^n)$$

Вычисляем две производные: $f' = 1/x$, $f'' = -1/x^2$, $f^{(3)} = 2/x^3$

$f^{(4)} = -6/x^4, \dots, f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. Вычисляем значения этих производных и значение функции в точке $x = 1$,

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f^{(3)}(1) = 2, f^{(4)}(1) = -6,$$

$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. В результате получаем

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x-1)^n + o((x-1)^n)$$

4.6. Примеры для самостоятельного решения

1. Доказать следующие неравенства;

3 Цыкунов А. М.

$$\begin{aligned} \text{а) } |\sin x - \sin y| &\leq |x - y|. \text{ б) } |\ln(x+1) - \ln(y+1)| \leq |x - y| \\ x > 0, y > 0. \text{ в) } |\ln(x^2+1) - \ln(y^2+1)| &\leq 2|x - y| \quad x > 1, y > 1. \end{aligned}$$

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя.

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}. \\ 3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{tg^2 2x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{\cos 3x - e^{-x}}. \\ 4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{5x}\right), \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\ln x}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2+x) - \ln(x+1)). \end{aligned}$$

$$5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2^x)^{1/x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\sin x}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}.$$

Найти экстремумы функций и определить их тип.

$$6. \text{ а) } y = x^2(x-1)^3, \text{ б) } y = \frac{4x-x^2-4}{x}, \text{ в) } y = x - 2\ln(3+x^2).$$

$$7. \text{ а) } y = \frac{x^2}{x-2}, \text{ б) } y = x + \sqrt{1-x}, \text{ в) } y = x^{1/x}.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на сегменте.

$$8. \text{ а) } f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2), x \in [0; 3], \text{ б) } y = \ln x / x, x \in [1; 4].$$

$$4.6.1. \text{ Ответы: } 2. \text{ а) } 0, \text{ б) } 2, \text{ в) } \infty. 3. \text{ а) } 8, \text{ б) } 1/3, \text{ в) } 0.$$

$$4. \text{ а) } 1/5, \text{ б) } 1, \text{ в) } 1. 5. \text{ а) } 2, \text{ б) } 1, \text{ в) } 1.$$

$$6. \text{ а) } \max \text{ при } x = 0, \min \text{ при } x = 0, 4,$$

$$\text{б) } \max \text{ при } x = 2, \min \text{ при } x = -2,$$

$$\text{в) } \max \text{ при } x = 1, \min \text{ при } x = 3.$$

$$7. \text{ а) } \max \text{ при } x = 0, \min \text{ при } x = 4, \text{ б) } \max \text{ при } x = 3/4,$$

$$\text{в) } \max \text{ при } x = e.$$

$$8. \text{ а) } \sup_{x \in [0;3]} f(x) = \ln 5, \inf_{x \in [0;3]} f(x) = 0,$$

$$\text{б) } \sup_{x \in [0;4]} f(x) = e^{-1}, \inf_{x \in [0;3]} f(x) = 0.$$

Лекция 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

5.1. Направление выпуклости графика функции

Определение 5.1. График функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если график функции на этом интервале лежит выше (ниже) любой касательной проведенной к функции на данном интервале.

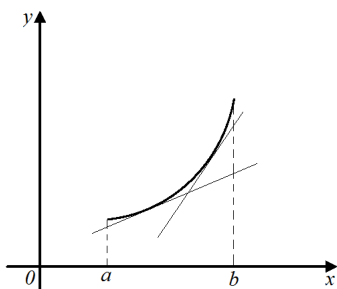


Рис. 5.1.

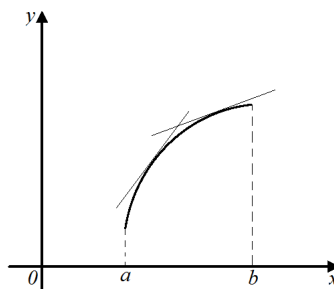


Рис. 5.2.

Иллюстрация данного определения приведена на рис. 5.1 и 5.2.

Часто, функцию, имеющую направление выпуклости вверх, называют выпуклой, а функцию, имеющую направление выпуклости вниз, называют вогнутой.

Следующее утверждение дает условия, по которым можно определять, куда направлена выпуклость.

Теорема 5.1. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и вторые производные имеют конечные значения, то при $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ функция вогнута, а при $f''(x) < 0 \forall x \in (a; b)$ функция выпуклая.

Доказательство. Составим уравнение касательной в точке $x = \beta$ $y_k = f(\beta) + f'(\beta)(x - \beta)$. Разложим функцию в окрестности точки $x = \beta$ по формуле Тейлора (4.4) с остаточным членом в форме

Лагранжа, положив $n = 1$

$$y = f(\beta) + \frac{f'(\beta)}{1!}(x - \beta) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \beta)^2.$$

Вычитая из этого уравнения уравнение касательной, получим

$$y - y_k = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \beta)^2.$$

Если выполнено условие $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$, то из $f''(\xi) > 0 \implies y > y_k \forall x \in (a; b) \implies$ функция вогнута. Если выполнено условие $f''(x) < 0 \forall x \in (a; b)$, то из $f''(\xi) < 0 \implies y < y_k \forall x \in (a; b) \implies$ функция выпуклая. $\square$

5.1.1. Точки перегиба. **Определение 5.2.** Точка $A(c; f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба, если в окрестности точки $x = c$ график функции слева и справа имеет разные направления выпуклости.

Теорема 5.2. (необходимое условие) Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = c$ и график функции имеет в этой точке перегиб, то $f''(c) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать от противного. Пусть в точке $x = c$ $f''(c) < 0$ или $f''(c) > 0$. Следовательно, в соответствии с теоремой 5.1, функция в окрестности этой точки имеет направление выпуклости вверх или вниз. Тогда в этой точке нет перегиба. Противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

Эта теорема дает только необходимое условие наличия точки перегиба. Например, функция $y = x^4$ имеет в точке $x = 0$ нулевую вторую производную. Однако эта точка не является точкой перегиба.

Теорема 5.3. (первое достаточное условие перегиба) Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x = c$, $f''(c) = 0$, а слева и справа вторая производная имеет конечные значения разных знаков, то точка $x = c$ является точкой перегиба.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнено необходимое условие перегиба. Так как по условиям теоремы производные в окрестности точки $x = c$ слева и справа имеют разные знаки, следует, что слева и справа разные направления выпуклости. Следовательно, точка $x = c$ является точкой перегиба. $\square$

Теорема 5.3. (второе достаточное условие перегиба) Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = c$, $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$ то график функции имеет в точке $x = c$ перегиб.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f'''(c) \neq 0$ функция $f''(x)$ в окрестности точки $x = c$ возрастает или убывает, но $f''(c) = 0$. Следовательно, слева и справа функция $f''(x)$ имеет разные знаки, что говорит о том, что точка $x = c$ является точкой перегиба. $\square$

Теорема 5.4. (третье достаточное условие наличия экстремума или точки перегиба) Пусть функция $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки $x = c$, и выполнены условия:

$$f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0, \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0.$$

Тогда, если n — четное, то точка $x = c$ является точкой перегиба.

Если n — нечетное и $f'(c) = 0$, то точка $x = c$ является точкой экстремума. Кроме того если $f^{(n+1)}(c) > 0$, то это минимум, если $f^{(n+1)}(c) < 0$, то это максимум.

Доказательство. Пусть n — четное, $n \geq 4$. Из условий $f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ следует, что функция $f^{(n)}(x)$ в точке $x = c$ возрастает или убывает и слева и справа имеет разные знаки. Разложим функцию $f''(x)$ по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-3)!}(x-c)^{n-2} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-3)!}(x-c)^{n-2} \end{aligned}$$

Точка $x = \xi$ лежит между точками x и c . Поэтому функция $f^{(n)}(\xi)$, а следовательно и функция $f''(x)$ будут иметь разные знаки слева и справа от точки $x = c$. Следовательно, это точка перегиба.

Пусть теперь n — нечетное и $f'(c) = 0$, $n \geq 3$. Предположим, что $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда, принимая во внимание условие $f^{(n)}(c) = 0$, получаем, что функция $f^{(n)}(x)$ в окрестности точки $x = c$ возрастает, причем слева она отрицательна, а справа положительна.

Разложим функцию $f'(x)$ по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \end{aligned}$$

Так как n — нечетное, точка $x = \xi$ лежит между точками x и c . Функция $f^{(n)}(\xi)$, а следовательно и функция $f'(x)$ в окрестности точки $x = c$ возрастает, причем слева она отрицательна, а справа положительна. Следовательно, это точка минимума. $\square$

Если $f^{(n+1)}(c) < 0$, то наличие максимума доказывается аналогично.

5.2. Асимптоты графика функции

Определение 5.3. Прямая $x = c$ называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если, хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Таким образом, для того, чтобы выяснить, имеется ли у функции вертикальные асимптоты, необходимо вычислить левосторонний и правосторонний пределы в интересующей точке. Такими точками, как правило являются корни уравнения $\frac{1}{f(x)} = 0$. Эти корни называются полюсами функции $f(x)$.

Определение 5.3. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции $y = f(x)$, если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \delta(x)$, где $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$.

Теорема 5.5. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доказательство.

Необходимость. График функции имеет асимптоту $y = kx + b$. Тогда, функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \delta(x)$. Найдем пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx + b + \delta(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\delta(x)}{x} \right) = k. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b + \delta(x) - kx) = b. \end{aligned}$$

Достаточность. Существуют пределы: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда функция $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой. Обозначив ее $\delta(x)$, получим $f(x) = kx + b + \delta(x)$. $\square$

5.3. Исследование графика функции

Изучены все вопросы, позволяющие исследовать график функции и построить ее эскиз. Общая схема исследования состоит из следующих этапов.

1. Уточняется область определения функции и, если это возможно определяются точки пересечения с осями координат.
2. Определяется поведение функции при стремлении аргумента к $+\infty$ и $-\infty$.
3. Выясняется вопрос о существовании вертикальных и наклонных асимптот и производится исследование поведения функции у асимптот.
4. Определяются интервалы убывания и возрастания функции. Находятся точки экстремума и их тип. Вычисляются значения функции в точках экстремума.
5. Определяются интервалы, на которых функция сохраняет направления выпуклости, а также точки перегиба. Вычисляются значения функции в точках перегиба.

Пример 5.1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ и построить эскиз графика функции.

1. Областью определения является множество $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. Точка пересечения с осями координат имеет координаты $(0; 0)$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1 - \frac{1}{x^2})} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(1 - \frac{1}{x^2})} = -\infty.$$

3. Вертикальными асимптотами являются прямые: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Исследуем поведение функции вблизи асимптот.

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = +\infty.$$

Выясняем наличие наклонных асимптот

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 3/x} = 0. \text{ Получили уравнение наклонной асимптоты } y = x.$$

4. Находим интервалы возрастания и убывания. Вычисляем производную $y' = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$. Строим таблицу

Интерв.	$(\infty; -3)$	$(-3; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; 3)$	$(3; \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+
Повед. функции	Возраст.	Убывает	Убывает	Убывает	Убывает	Возраст.

В точке $x = -3$ имеем максимум, а в точке $x = 3$ имеем минимум.

$$y(-3) = \frac{-27}{6} = -4,5, \quad y(3) = \frac{27}{6} = 4,5.$$

5. Определяем интервалы, на которых функция сохраняет направления выпуклости, а также точки перегиба. Вычисляем вторую производную

$$y''(x) = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}. \text{ Строим таблицу}$$

Интервал	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; 0)$	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
Знак $f''(x)$	—	+	—	+
Направление выпуклости	вверх	вниз	вверх	вниз

В точке $x = 0$ имеем точку перегиба. Теперь легко можно построить эскиз графика функции. Эскиз графика представлен на рис.5.3.

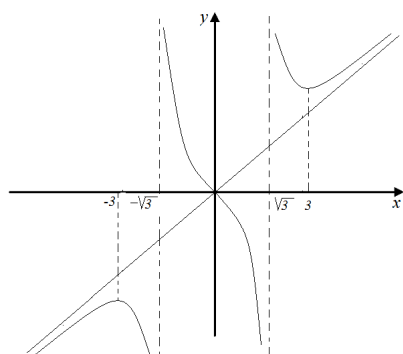


Рис. 5.3.

наклонной асимптоты?

6. Докажите теорему 5.4 для случая $f^{(n+1)}(c) < 0$

5.3.1. Контрольные вопросы.

1. Как определить направление выпуклости графика функции на интервале?

2. Как определить точку перегиба?

3. Сформулируйте первое и второе достаточные условия наличия точки перегиба.

4. Сформулируйте третье достаточное условие наличия точки перегиба и точки экстремума.

5. Как определить уравнение

5.4. Методические указания по решению задач

1. Построить график функции $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ с помощью производной первого порядка.

Решение:

1. Произведем исследование функции без привлечения производных.

Данная функция задана аналитическим выражением, элементарная, т.к. это многочлен третьей степени, поэтому область определения

$D(y) = \mathbb{R}$. Так как $D(y) = \mathbb{R}$, то абсциссой точки графика может служить любая точка, лежащая на оси OX , т.е. никакие точки, лежащие на оси OX , не исключаем.

Так как заданная функция элементарная, то она непрерывна на $D(y) = \mathbb{R}$, поэтому точек разрыва нет. $D(y)$ – симметричное множество относительно $O(0;0)$, поэтому, если $x \in D(y)$, то $-x \in D(y)$.

Найдем $y(-x) = 16(-x)^3 + 12(-x)^2 - 5 = -16x^3 + 12x^2 - 5 = -(16x^3 - 12x^2 + 5)$. Итак, $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, поэтому заданная функция не является ни четной, ни нечетной, значит график функции $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ не будет симметричен ни относительно оси OY , ни относительно начала координат.

Функция не является периодической, т.к. мы знаем, какие из элементарных функций являются периодическими, многочлены к ним не относятся.

Находим точки пересечения графика функции с осью OY : $x = 0$, $y = -5$; с осью OX (нули функции) $16x^3 + 12x^2 - 5 = 0$.

Разложим многочлен $16x^3 + 12x^2 - 5$ на множители, используя метод группировки и вынесения общего множителя за скобки.

$$\begin{aligned} 16x^3 + 12x^2 - 5 &= 16x^3 + 20x^2 - 8x^2 + 10x - 10x - 5 = \\ &= 8x^2(2x - 1) + 10x(2x - 1) + 5(2x - 1) = (2x - 1)(8x^2 + 10x + 5). \end{aligned}$$

Теперь решаем уравнение $16x^3 + 12x^2 - 5 = 0 \implies (2x - 1)(8x^2 + 10x + 5) = 0$. $2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$ или $8x^2 + 10x + 5 = 0$ – действительных корней нет, т.к. $D = 10^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 < 0$. Итак, график функции пересекает ось OX в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Найдем интервалы знакопостоянства.

На интервале $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ $y < 0$, т.к. на нем функция непрерывна, $0 \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $y(0) = -5 < 0$. Наши рассуждения основаны на теореме о сохранении знака непрерывной функции. Аналогично, на $y(0) = -5 < 0$ $y > 0$, т.к. $1 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $y(1) = 16 + 12 - 5 = 23 > 0$.

На график наносим точки $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $(0; -5)$.

Так как данная функция непрерывна на $D(y) = \mathbb{R}$, то вертикальных асимптот нет. Будем искать наклонные асимптоты.

$y = kx + b$ – уравнение наклонной асимптоты.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x^3 + 12x^2 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(16x^2 + 12x - \frac{5}{x}\right) = +\infty, \text{ т.к. при}$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{5}{x} \rightarrow +0.$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16x^3 + 12x^2 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(16x^2 + 12x - \frac{5}{x}\right) = +\infty, \text{ т.к. при}$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{5}{x} \rightarrow -0.$$

График функции не имеет наклонных асимптот.

II. Исследование с применением первой производной

$$y' = (16x^3 + 12x^2 - 5)' = 48x^2 + 24x = 24x(2x + 1), D(y') = \mathbb{R}.$$

Так как $D(y') = \mathbb{R}$, то точек $\in D(y)$, в которых y' не существует нет, поэтому для нахождения критических точек достаточно решить уравнение $y' = 0$.

$$24x(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ или } 2x + 1 = 0, x_1 = 0 \in D(y), x_2 = -\frac{1}{2} \in D(y).$$

Теперь выясним, есть ли локальный экстремум в этих точках.

Для этого будем использовать первое достаточное условие. Для простоты построим таблицу:

Интервал	$(-\infty; -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+		-		+
y	возрастает	-4	убывает	-5	возрастает
Тип экстр.		max		min	

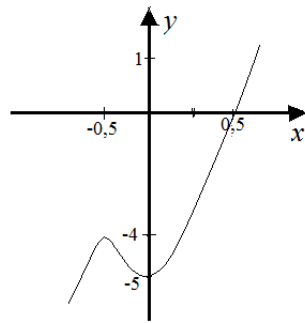


Рис. 5.4.

$\forall x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, то функция $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ возрастает на этом интервале). Аналогично, для $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(0; +\infty)$.

Строим полученные точки $(-1/2; -4)$ и $(0; -5)$. Первая точка будет “вершиной горы”, а вторая “дном впадины”; касательные проведенные к графику функции в этих точках будут параллельны оси Ox . Нанесим интервалы возрастания и убывания функции (стрелочками как в таблице). По результатам исследования $E(y) = (-\infty; +\infty)$. Построим график:

2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.

Решение: Область определения функции $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, т.к. функция не определена при $x = 1$. Из точек, лежащих на оси Ox исключаем точку 1.

Знаки производной на интервалах определяли, используя теорему о сохранении знака непрерывной функции.

Точка $(-\frac{1}{2}; -4)$ — точка локального максимума, точка $(0; -5)$ — точка локального минимума по достаточному условию локального экстремума.

Интервалы возрастания и убывания функции находим на основании достаточного условия монотонности функции. (Если функция $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ дифференцируема на $(-\infty; -\frac{1}{2})$ и $y'(x) > 0$ для

Данная функция элементарная, поэтому непрерывная на $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Так как в точке $x = 1$ функция не определена, то точка $x = 1$ является точкой разрыва. Определим характер разрыва.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot (1-2x) = -\infty, \text{ т. к., если } x \rightarrow 1-0, \text{ то } x-1 \rightarrow -0, (x-1)^2 \rightarrow +0, \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow +\infty, 1-2x \rightarrow -1.$$

Точка $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода. Найдем еще:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1-2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (1-2x) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ т.к., если } x \rightarrow 1+0, \text{ то } x-1 \rightarrow +0, (x-1)^2 \rightarrow +0, \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow +\infty, 1-2x \rightarrow -1. \text{ Точка } x=1 \text{ является точкой разрыва 2-го рода.}$$

Область определения. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не является множеством симметричным относительно начала координат. Поэтому функция ни четная, ни нечетная. Данная функция не является периодической, т.к. $\forall x \in D(y)$.

$$\frac{1-2(x+T)}{(x+T-1)^2} = \frac{1-2(x-T)}{(x-T-1)^2} = \frac{1-2x}{(x-1)^2}, \text{ только при } T=0.$$

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства.

$$\text{Ох: } y=0, \frac{1-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}. \text{ Оу: } x=0, y=\frac{1-2 \cdot 0}{(0-1)^2} = 1.$$

Для определения знака функции на каждом из интервалов, используем теорему о сохранении знака непрерывной на (a, b) функции.

$$f(0) = \frac{1-2 \cdot 0}{(0-1)^2} = 1 > 0, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-2 \cdot \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}-1\right)^2} = \frac{-1 \cdot 16}{2 \cdot 1} = -8 < 0, \quad f(2) = \frac{1-2 \cdot 2}{(2-1)^2} = -3 < 0.$$

Так как точка $x=1$ является точкой разрыва 2 рода, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции. У

Учитывая значения левого и правого односторонних пределов, делаем вывод о том, что при подходе к точке разрыва слева, справа график функции уходит в минус бесконечность.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{(x-1)^2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2(x-1)x + (x-1)^2} = -0$$

(использовали правило Лопиталя),

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{2(x-1)x + (x-1)^2} = -0,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-2x}{(x-1)^2} + 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2(x-1)} = -0,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-2x}{(x-1)^2} + 0x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{2(x-1)} = +0.$$

Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции. Особенности расположения графика при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ отметим на чертеже.

Уточним характер графика функции с использованием производной 1-го- порядка.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1-2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(1-2x)' \cdot (x-1)^2 - (1-2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{-2(x-1)^2 - 2(1-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2(x-1)(x-1+1-2x)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{-2(-x)}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

$$D(y') = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) = D(y)$$

Ищем критические точки. Так как $\forall x \in D(y)$ y' существует, то для нахождения критических точек достаточно решить уравнение

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x-1)^3} = 0, x = 0 \in D(y).$$

Одна точка претендует на локальный экстремум, а именно $x=0$.

Строим таблицу:

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	+
y		1		
	интервал возрас- тания	точка максимума	интервал убыва- ния	интервал возрас- тания

Уточнение графика функции с помощью производной 2-го порядка.

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{2x}{(x-1)^3} \right)' = \frac{2 \cdot (x-1)^3 - 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(x-1)^2(x-1-3x)}{(x-1)^6} = \\ &= -\frac{(2x+1)2}{(x-1)^4} = -\frac{4(x+\frac{1}{2})}{(x-1)^4}, D(y'') = D(y') = D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty). \end{aligned}$$

$$y''(0) = -\frac{4\left(0+\frac{1}{2}\right)}{(0-1)^4} = -2 < 0 \text{ согласно II достаточного условия локаль-}$$

ного экстремума точка $(0;1)$ является точкой локального максимума.

Убедились в правильности нашего вывода. Ищем критические точки на перегиб. Так как $D(y'') = D(y)$, то $\forall x \in D(y)$ y'' всегда существует, поэтому для нахождения критических точек на перегиб достаточно решить уравнение $y'' = 0$.

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in D(y)$$

Для нахождения интервалов сохранения направления выпуклости и точки перегиба строим таблицу:

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	+	0	-	-
	$\cup$	$\frac{8}{9}$	$\cap$	$\cap$
	интервал выпуклости вниз	Точка перегиба	интервал выпуклости вверх	интервал выпуклости вверх

Результаты отмечаем в системе координат.

Строим график функции. Для уточнения графика можете взять несколько вспомогательных точек.

Теперь очевидно, что $E(y) = (-\infty; +1]$.

3. Исследовать поведение функции $y = x^2 - 2e^{x-1}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ с помощью производных высших порядков.

Решение:

Воспользу-

емся

теоремой

5.4.

$$y'(x) = 2x - 2e^{x-1}, \quad y'(1) =$$

$= 2 \cdot 1 - 2e^{1-1} = 2 - 2 = 0$, $y''(x) = 2 - 2e^{x-1}$, $y''(1) = 2 - 2e^{1-1} = 2 - 2 = 0$, $y'''(x) = -2e^{x-1}$, $y'''(1) = -2e^{1-1} = -2e^0 = -2 < 0$. В точке $x_0 = 1$ экстремума нет, т.к. не обращается в нуль производная третьего порядка, т.е. $n + 1$ – нечетное, значит это точка перегиба.

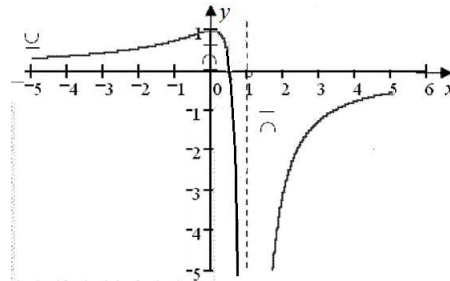


Рис. 5.5.

5.5. Примеры для самостоятельного решения

Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости.

1. $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 15$. **2.** $y = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 20$.

3. $y = \ln(1 + x^2)$ **4.** $y = 2\arctg x - x$ **5.** $y = \ln(x - 1) + 0,5x^2$

Найти асимптоты графиков функций.

$$\mathbf{6.} \ y = \frac{2x^2 + x}{x + 1} \quad \mathbf{7.} \ y = \frac{x^2 - 1}{x} \quad \mathbf{8.} \ y = \frac{x^3}{4 - x^2} \quad \mathbf{9.} \ y = \sqrt{x^2 - 16} \quad \mathbf{10.} \\ y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 6}}.$$

$$\mathbf{11.} \ y = \ln(1 - x^2) \quad \mathbf{12.} \ y = \arctg x \quad \mathbf{13.} \ y = \sqrt[3]{8 - x^3} \quad \mathbf{14.} \ y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Провести полное исследование функций.

$$\mathbf{15.} \ y = \frac{1}{x^2 - 7x + 6} \quad \mathbf{16.} \ y = \frac{x^3 + 4}{x^2} \quad \mathbf{17.} \ y = -\frac{3x}{9 - x^2} \quad \mathbf{18.} \ y = \sqrt[3]{x^2} - 2x.$$

$$\mathbf{19.} \ y = \sqrt[3]{x^3 - 3x} \quad \mathbf{20.} \ y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

5.5.1. Ответы. **1.** $x_p = 5/3$ – точка перегиба, $(-\infty; 5/3)$ – интервал выпуклости, $(5/3; \infty)$ – интервал вогнутости **2.** $x_{p1} = 1$, $x_{p2} = 5$ – точки перегиба, $(1; 5)$ – интервал выпуклости, $(-\infty; 1)$ и $(5; \infty)$ – интервалы вогнутости **3.** $x_{p1} = -1$, $x_{p2} = 1$ – точки перегиба, $(-1; 1)$ – интервал вогнутости, $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ – интервалы выпуклости. **4.** $x_p = 0$ – точка перегиба, $(-\infty; 0)$ – интервал вогнутости, $(0; \infty)$ – интервал выпуклости. **5.** $x_p = 3$ – точка перегиба, $(1; 3)$ – интервал выпуклости, $(3; \infty)$ – интервал вогнутости. **6.** $x = -1$, $y = 2x + 1$. **7.** $x = 0$, $y = x$. **8.** $x = \pm 2$, $y = -x$. **9.** $y = \pm x$. **10.** $x = 6$, $y = x + 3$, $y = -x - 3$. **11.** $x = \pm 1$. **12.** $y = \frac{\pi x}{2} - 1$, $y = -\frac{\pi x}{2} - 1$. **13.** $y = -x$. **14.** $y = x$. **15.** $y_{\max} = y(3, 5) = -6, 25$, $x = 1$, $x = 6$, $y = 0$ – асимптоты. **16.** $y_{\min} = y(2) = 0$, $x = \pm 1$, $y = x$ – асимптоты. **17.** $(0; 0)$ – точка перегиба, $x = \pm 3$, $y = 0$ – асимптоты. **18.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(\frac{1}{27}) = \frac{1}{27}$. **19.** $y_{\min} = y(1) = -\sqrt[3]{2}$; $y_{\max} = y(-1) = \sqrt[3]{2}$; $(\pm\sqrt{3}, 0)$; $(0, 0)$ – точки перегиба; $y = x$ – асимптота. **20.** $(0, 0)$; $(\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ – точки перегиба; $y = x$ – асимптота.

Лекция 6

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Понятие евклидова пространства

Пусть задано множество X , элементами которого являются множества упорядоченного наборов $(x_1, \dots, x_m)$, состоящих из m действительных чисел. Каждый такой набор будем обозначать одной буквой $x = (x_1, \dots, x_m)$ и называть точкой (элементом) множества $X (x \in X)$.

Определение 6.1. Метрическим пространством называется пара (X, ρ) , состоящая из некоторого множества X и однозначной, неотрицательной действительной функции $\rho(x, y), (x \in X, y \in X)$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Функция ρ характеризует расстояние между элементами множества X .

Приведем несколько примеров:

1. Если для элементов произвольного множества X

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \quad \text{то мы получим метрическое пространство изолированных точек.}$$

2. Множество упорядоченных наборов $(x_1, \dots, x_m)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} \quad \text{называют арифметическим евклидовым}$$

пространством $\mathbb{E}^m$, которым мы и будем пользоваться при изучении функций многих переменных.

3. Множество всех непрерывных функций на сегменте $[a, b]$ с расстоянием $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|$ являются метрическим пространством $\mathbb{C}$ непрерывных функций.

Обозначим через M точку в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^m$ с координатами $(x_1, \dots, x_m)$.

Определение 6.2. Множество $G \subset \mathbb{E}^m$ называется открытым в $\mathbb{E}^m$, если для $\forall M \in G$ найдется ε окрестность такая, что все ее элементы принадлежат множеству G .

Определение 6.3. Множество $\{M\}$ всевозможных точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$\rho(M, M_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} \leq R$, где $(x_1, \dots, x_m)$ - координаты точки M , называется m -мерным шаром радиуса R с центром в точке M_0 .

Если заменить неравенство равенством, то множество $\{M\}$ называется m -мерной сферой.

Определение 6.4. Множество $\{M\}$ точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_i - x_i^0| < d_i$, ($d_i > 0, i = 1, \dots, m$) называется m -мерным координатным параллелепипедом. При этом точка $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ называется центром этого m -мерного параллелепипеда.

Определение 6.5. Будем называть ε -окрестностью точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ m -мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^m$ открытый m -мерный шар радиуса ε с центром в точке M_0 .

Определение 6.6. Точка $\in G$ называется внутренней точкой множества G , если существует ε -окрестность этой точки, все точки которой принадлежат этому множеству G .

Определение 6.7. Точка $M \in G$ называется граничной, если любая ε -окрестности этой точки содержит как точки, принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему.

Сформулируем еще одно определение открытого множества.

Определение 6.8. Множество $G \subset \mathbb{E}^m$ называется областью или открытым множеством в пространстве $\mathbb{E}^m$, если любая его точка является внутренней.

Определение 6.9. Множество $\overline{G}$ является замкнутым, если к открытому множеству G присоединены все граничные точки этого множества.

Определение 6.10. Множество G называется связным, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение 6.11. Множество $G \subset \mathbb{E}^m$ называется ограниченным, если для любых точек $M_1, M_2 \in G$, $d(G) = \sup \rho(M_1, M_2)$ есть величина конечная. Величину $d(G)$ называют диаметром множества $G \subset \mathbb{E}^m$.

6.2. Понятие функции нескольких переменных

Сформулировав вспомогательные определения можно ввести понятие функции многих переменных.

Определение 6.12. Если каждой точке $M \in G, G \subset \mathbb{E}^m$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u \in \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \in \mathbb{E}$, то говорят, что на множестве $G \subset \mathbb{E}^m$ задана функция $u = f(M)$ ($u = f(x_1, \dots, x_m)$). При этом множество G называется областью определения функции $u = f(M)$, а $\mathbb{Q} \in \mathbb{E}$ областью значений.

Пример 6.1. 1. Областью определения функции $u = \arcsin(x + y)$ является множество $G \in \mathbb{E}^2$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \geq -1 - x, y \leq 1 - x\}$. Областью значений при этом является отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$.

2. Пусть $u = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$. Областью определения служит m -мерный шар радиуса 2 с центром в точке $O(0, \dots, 0)$ множеством значений является сегмент $[0, 2]$.

6.3. Предельное значение функции нескольких переменных

Рассмотрим последовательность $\{M_n\}$ точек в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^m$.

Определение 6.13. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства R^m называется сходящейся, если существует точка A такая, что для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0$ такая, что при $n \geq N$ выполнено неравенство $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. При этом точка A называется пределом последовательности $\{M_n\}$ и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$ или $M_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n, A) = 0$.

Лемма 6.1. Для того чтобы последовательность точек $\{M_n\} \subset \mathbb{E}^m$ сходилась к точке $A \in \mathbb{E}^m$ необходимо и достаточно, чтобы последовательности координат $\{x_1^n\}, \dots, \{x_m^n\}$ точек M_n сходились к числам $a_1, \dots, a_m$, которые являются координатами точки $A \in \mathbb{E}^m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ тогда для $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \rho(M_n, A) < \varepsilon$ при $n \geq N$. Принимается во внимание неравенство $\rho(M_n, A) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i^n - a_i)^2} < \varepsilon$ имеем $|x_i^n - a_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, m$. Иными словами последовательности $\{x_i^n\}$ координат точки M_n сходятся к числам $a_i (i = 1, \dots, m)$, которые являются координатами точки $A \in \mathbb{E}^m$.

Достаточность. Пусть $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i, i = 1, \dots, m$, тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 > 0, \dots, N_m > 0$ такие, что $n \geq N_1, \dots, n \geq N_m$ выполнены неравенства $|x_i^n - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ но тогда при $n \geq N = \max(N_1, \dots, N_m)$ выполнено неравенство $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. $\square$

Сформулируем определение фундаментальной последовательности точек в m -мерном евклидовом пространстве.

Определение 6.14. Последовательность $\{M_n\}$ точек ($\{M_n\} \subset \mathbb{E}^m$) называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для $\forall k > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ выполнено неравенство $\rho(M_{n+k}, M_n) < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Справедлив критерий сходимости последовательности $\{M_n\}$. Критерий Коши.

Теорема 6.1. Для того чтобы последовательность $\{M_n\} \subset \mathbb{E}^m$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Теорему легко доказать, используя лемму 1.1 и критерий Коши для числовых последовательностей (лекция 1). Предлагается самостоятельно.

Следует отметить, что с помощью леммы 1.1 можно доказать теоремы, которые доказаны для обычных числовых последовательностей. В качестве примера докажем одну из них.

Теорема 6.2. (теорема Больцано - Вейерштрасса) Из любой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся последовательность.

Доказательство. Так как последовательность $\{M_n\}$ ограничена, то существует конечное число A такое, что $\rho(O, M_n) < A$, но тогда тем более $|x_i^n| < A$, $i = 1, \dots, m$. Следовательно, в соответствии с теоремой Больцано - Вейерштрасса для числовых последовательностей из последовательностей $\{x_i^n\}$ можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\{x_i^{n_k}\}$, которые сходятся к некоторым числам a_i , $i = 1, \dots, m$, но тогда последовательность $\{M_n\} \subset \mathbb{E}^m$, координатами которой являются элементы $x_i^{n_k}$ сходятся к точке A с координатами a_i , $i = 1, \dots, m$. Принимая во внимание, что последовательности $\{x_i^{n_k}\}$ выделены из последовательностей $\{x_i^n\}$, которые являются координатами последовательности $\{M_n\}$, делаем вывод, что последовательность $\{M_n^{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{M_n\}$. $\square$

Сформулируем два эквивалентных определения предельного значения функции нескольких переменных.

Определение 6.15. Число b называется предельным значением функции $u = f(M)$ в точке A (или пределом функции при $M \rightarrow A$), если для любой сходящейся к A последовательности $\{M_n\}$, элементы которой отличны от A , соответствующие последовательности $\{f(M_n)\}$ значений функции сходятся к b .

Определение 6.16. Число b называется предельным значением функции $u = f(M)$ в точке A , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \geq 0$, таких, что для всех точек M из области определения функции, удовлетворяющих условию $\rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Сформулируем определение предельного значения функции при стремлении точки M к бесконечности.

Определение 6.17. Число b называется предельным значением функции $u = f(M)$ при $M \rightarrow \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ такая, что для всех M из области определения функции из неравенства $\rho(O, M) > \eta$ следует $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Следует отметить, что арифметические операции над функциями m - переменных, имеющих предельное значение в точке A , приводят к функциям, также имеющих предельное значение в этой точке. Точнее справедливы утверждения о предельных значениях, аналогичные для функции одной переменной.

Если функции $f(M)$ и $q(M)$ имеют в точке A предельные значения b и c , то функции $f(M) \pm q(M)$, $f(M) \cdot q(M)$ и $\frac{f(M)}{q(M)}$ ($c \neq 0$) имеют предельные значения равные соответственно $b \pm c$, $b \cdot c$, b/c .

Доказательство этих утверждений аналогично доказанным ранее таким же утверждениям для функции одной переменной.

Следует отметить, что при вычислении пределов функции нескольких переменных есть одна особенность, которую следует учитывать, а именно, часто предел функции нельзя определить, вычисляя последовательно пределы для каждой из координат.

Пример 6.2.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Имеем $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$, однако $f(0, y) = f(x, 0) = 0$, а $f(x, x) = \frac{1}{2}$ при $x \neq 0$, т.е. если устремить $(x, y) \rightarrow 0$ по прямой $y = x$, то получим последовательность, раскрывая которую получим значение $\frac{1}{2}$, т.е. в этом случае функция не имеет предела.

Следующий пример демонстрирует, что вычисленные повторные пределы получаются разные, если изменить порядок их вычисления.

Пример 6.3.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-x^2}{x^2} \right) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^2}{y^2} \right) = 1,$$

В то же время не существует предела при $(x, y) \rightarrow 0$.

Действительно, если взять $x = \frac{2}{k}$, $y = \frac{1}{k}$ и устремить $k \rightarrow \infty$, т.е. x и y одновременно стремятся к нулю, тогда получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\frac{4}{k^2} - \frac{1}{k^2}}{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

С другой стороны при $x = \frac{1}{k}$, $y = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k > 0$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1 - k}{1 + k} = 1.$$

Эти два примера показывают, что следует очень осторожно вычислять предельное значение функции нескольких переменных и не следует

делать поспешных выводов о их существовании, если существуют повторные пределы, т.е. вычисленные отдельно по каждой координате.

Теорема 6.3. Если существует (конечный или бесконечный) двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$ и для любого y из области

определения (или любого x из области определения) существует (конечный) простой предел $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} (\psi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$, то существует повторный предел

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \quad (\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$$

и он равен двойному.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как существует двойной предел A , то для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что, как только

$\rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$, где точки M и M_0 имеют координаты соответственно x, y и a, b , то будут справедливы неравенства $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$.

Зафиксируем y так, чтобы было выполнено $|y - b| < \delta$. Тогда в силу существования конечного предела $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x, y))$, получим, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что, если $|x - a| < \delta$, то

$|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon$, но так как $|y - b| < \delta$, то получим

$|\varphi(y) - A| < \varepsilon$, откуда следует $A = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. $\square$

Также как и для функции одной переменной для функции нескольких

переменных справедлив критерий Коши.

Теорема 6.4. Для того чтобы функция $f(M)$ имела конечное предельное значение в точке $M = A \in \mathbb{E}^m$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(M)$ удовлетворяла условию Коши, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любых двух точек M_1 и M_2 из m -мерного евклидова пространства, удовлетворяющих условиям $\rho(M_1, A) < \delta$, $\rho(M_2, A) < \delta$ было выполнено неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$.

Теорема доказывается точно так же, как критерий Коши для функции одной переменной, поэтому ее доказательство здесь не приводится.

6.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение метрического пространства.
2. В каком случае метрическое пространство является Евклидовым?
3. Сформулируйте определение внутренней и граничной точек множества
4. Сформулируйте определение связного множества.
5. Сформулируйте определение ограниченного множества.
6. Сформулируйте определение функции многих переменных.
7. Сформулируйте определение предела последовательности.

8. Сформулируйте определение необходимые и достаточные условия сходимости последовательности.
9. Сформулируйте определение предела функции.
10. Какими свойствами обладают пределы функции при выполнении арифметических операций?

6.5. Методические указания по решению задач

1. Найти область определения функции $z = \ln(y^2 - x + 4)$

Решение:

Область определения функции $z = \ln t$ задается неравенством $t > 0$. Следовательно, для исходной функции имеем

$$y^2 - x + 4 > 0 \iff x < y^2 + 4$$

Это левая часть от параболы рис. 6.1. Область определения заштрихована.

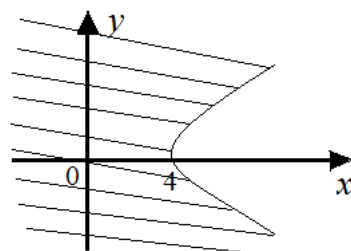


Рис. 6.1.

2. Найти поверхности уровня для функции $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

Решение: Для получения поверхностей уровня, необходимо придавать некоторые фиксированные значения функции, в результате чего будем получать различные уравнения поверхностей. Пусть $u = c$ является константой. Тогда получим уравнение параболоида $z = \frac{1}{c}(x^2 + y^2)$.

Для двух значений константы c поверхности представлены на рис. 6.2.

Если функция двух переменных, то вместо поверхностей будут получаться линии уровня. Они являются проекциями линии пересечения поверхности и плоскости параллельной координатной плоскости xOy на плоскость xOy .

3. Найти линии уровня для функции $z = x^2 - y$.

Решение: Это уравнение поверхности, изображенной на рис. 6.3. Пусть $z = c$ является константой. Тогда получаем уравнение $y = x^2 - c$. Придавая различные значения для величины c , получим набор уравнений, кото-

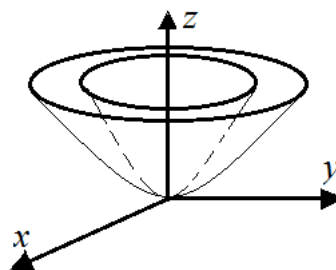


Рис. 6.2.

рые описывают линии уровня для данной функции. В данном случае получаются параболы вершины, которых смещены по оси Oy

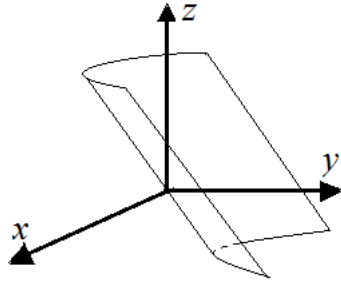


Рис. 6.3.

4. Вычислить $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Решение: Для нахождения пределов для функции двух переменных $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

удобно переходить к полярным координатам путем замены: $x - x_0 = \rho \cos \varphi$, $y - y_0 = \rho \sin \varphi$. В результате получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi).$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho}{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\sqrt{\rho^2 + 1} = 2.$$

5. Вычислить $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Решение:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \cos \varphi \sin \varphi.$$

Зависимость величины предела от φ означает, что предела не существует.

6.6. Примеры для самостоятельного решения

Найти и изобразить области определения следующих функций.

1. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 2. $u = 1 + \sqrt{4 - (x - y)^2}$. 3. $u = \ln(x + y)$.

4. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$. 5. $u = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

6. $u = \arccos(y/x)$.

Вычислить следующие пределы.

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{7.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \mathbf{8.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x} & \mathbf{9.} \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x \\
\mathbf{10.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x+y} & \mathbf{11.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \mathbf{12.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \\
\mathbf{13.} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.
\end{array}$$

Найти линии уровня следующих функций и начертить их.

$$\mathbf{14.} z = xy. \mathbf{15.} z = x^2 y + x. \mathbf{16.} z = y(x^2 + 1) \mathbf{17.} z = \frac{xy - 1}{x^2}$$

6.6.1. Ответы. **1.** $x^2 + y^2 \leq 1$. **2.** $\begin{cases} y \geq x - 2, \\ y \leq x + 2. \end{cases}$ **3.** $y > -x$ **4.** $x \in [-1; 1], y \in [-1; 1]$. **5.** $\begin{cases} x \in (-\infty - 2] \cup [2; \infty), \\ y \in [-2; 2]. \end{cases}$ **6.** Часть плоскости, примыкающая к оси Ox и заключенная между прямыми $y = \pm x$ вместе с этими прямыми, исключая начало координат. **7.** 0. **8.** 2. **9.** e^3 . **10.** не существует. **11.** не существует. **12.** 0. **13.** 0.

Лекция 7

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫЕ

7.1. Непрерывность функции нескольких переменных.

Пусть в области задания функции G $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{R}^m$ определена точка A такая, что любая ε - окрестность этой точки содержит отличные от A точки из области задания этой функции. Сформулируем эквивалентные определения непрерывности функции нескольких переменных в точке A .

Определение 7.1. Функция $f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, называется непрерывной в точке A , если предельное значение этой функции в точке A существует и равно частному значению функции в этой точке $f(A)$, т.е. $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(\lim_{M \rightarrow A} M)$.

Определение 7.2. Функция $f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, называется непрерывной в точке A , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что, если для $\forall M \in G$ выполнено неравенство $\rho(M, A) < \delta$, то $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Определение 7.3. Функция $f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, называется непрерывной в области G , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Будем называть полным приращением функции $u = f(M)$ в точке A функцию Δu , определяемую формулой

$$\Delta u = f(M) - f(A).$$

Тогда можно сформулировать следующее очевидное утверждение.

Теорема 7.1. Если функция непрерывна $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, в точке A , то ее полное приращение в точке A является бесконечно малой функцией, т.е.

$$\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - f(A)) = 0.$$

Введем понятие частного приращения функции нескольких переменных. Частным приращением функции называется разность между значениями функции, когда одному аргументу функции дано приращение

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

Введем теперь понятие непрерывности функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по одной из переменных.

Определение 7.4. Функция непрерывна $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M(x_1 \dots x_m)$ по переменной x_k , если частное приращение Δ_{x_k} этой функции в точке M стремится к нулю при $\Delta x_k \rightarrow 0$, т.е. $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} |f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)| = 0$.

Можно дать и другие определения аналогично определениям непрерывности функции в точке по всем переменным, что предлагается сделать самостоятельно. Следует отметить, что из непрерывности функции по каждой из переменных не следует непрерывность функции в точке по всем переменным. В качестве примера можно исследовать на непрерывность функцию, приведенную в первом примере раздела, когда повторные пределы равны частному значению в точке $x = 0, y = 0$, однако функция не является непрерывной в этой точке так как при стремлении (x, y) к нулю по прямой $y = x$ предел не равен частному значению функции в этой точке.

7.1.1. Основные свойства непрерывных функций. Теорема 7.2. (о непрерывности сложной функции) Если функции $y_i = \varphi_i(M), M \in G \subset \mathbb{E}^m, i = 1, \dots, k$ непрерывны в точке $M = A$, а функция $u = f(Y), Y \in Q \subset \mathbb{E}^k$ непрерывна в точке B с координатами $(b_1 \dots b_k)$, где $b_i = \varphi_i(A)$, то сложная функция $u = f(\varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M))$ непрерывна в точке A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции $u = f(Y)$ в точке B , для $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ такие, что из $\rho(Y, B) < \eta$ следует $|f(Y) - f(B)| < \varepsilon$. А из непрерывности функций $\varphi_i(M)$ в точке A следует, что для $\forall \eta_i, \exists \delta > 0$ такие, что из неравенств $\rho(M, A) < \delta$ следует $|\varphi_i(M) - \varphi_i(A)| < \eta_i$. Если взять $\eta_i = \frac{\eta}{\sqrt{k}}$, то из последнего неравенства следует $\rho(Y, B) < \eta$, откуда имеем

$$|f(\varphi_1(M), \dots, \varphi_k(M)) - f(A)| < \varepsilon. \square$$

Теорема 7.3. Пусть функции $f(M)$ и $q(M)$ непрерывны в точке A . Тогда функции $f(M) \pm q(M), f(M) \cdot q(M)$ и $\frac{f(M)}{q(M)} (q(A) \neq 0)$ непрерывны в точке A .

Теорема 7.4. (1-я теорема Вейерштрасса). Если функция $f(M)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{E}^m$, то она ограничена, т.е. существуют конечные $\sup_{M \in G} f(M)$ и $\inf_{M \in G} f(M)$.

Теорема 7.5. (2-я теорема Вейерштрасса). Если функция $f(M)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^m$, то она достигает в этой области своих точных верхней и нижней граней.

Приведенные утверждения доказываются точно так же, как аналогичные утверждения для функции одной переменной.

Теорема 7.6. Если функция $f(M)$ непрерывна в точке $A \in \mathbb{E}^m$ и если $f(A) \neq 0$, то существует δ -окрестность точки A , в которой функция $f(M)$ имеет тот же знак, что и в точке A . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из определения непрерывности в точке A , если величину ε взять в виде $\varepsilon \leq |f(A)|$.

Теорема 7.7. Если функция $f(M)$ непрерывна в связанной области $G \subset \mathbb{E}^m$ и принимает в точках $b, a \in G$ значения $B = f(a)$, $A = f(b)$, то для любого числа C , лежащего между A и B найдется точка $c \in G$, в которой $f(c) = C$.

Доказательство. Пусть $x_i = \varphi_i(t)$ $i = 1, \dots, m$, где x_i - координаты точки M , уравнение непрерывной кривой L , содержащей точки A и B целиком лежащая в области G . Пусть α и β значения аргумента t такие, что $\varphi_i(\alpha)$ и $\varphi_i(\beta)$ являются координатами точек A и B , тогда функция $f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ является сложной функцией одного аргумента $t \in [\alpha, \beta]$. В силу непрерывности функций $f(M)$ и $\varphi_i(t)$, функция $f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ является непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$, но тогда в соответствии со второй теоремой Больцано-Коши, для любого числа C , лежащего между точками A и B , существует число $\gamma \in [\alpha, \beta]$ такое, что $f(\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_m(\gamma)) = C$. Если взять $\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_m(\gamma)$ координатами точки $c \in G$, то получаем утверждение теоремы. $\square$

7.2. Производные и дифференциал функции нескольких переменных

Пусть точка $M(x_1, \dots, x_m) \in G \subset \mathbb{E}^m$ и задана функция $u = f(M)$. Рассмотрим в произвольной внутренней точке $M \in G$ отношение частного произведения $\Delta_{x_n} u$ к соответствующему приращению Δ_{x_n} .

Определение 7.5. Если существует предел $\lim_{\Delta_{x_n} \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_n} u}{\Delta_{x_n}}$, то этот предел называется частной производной функции $u = f(M)$ в точке M по аргументу x_k и обозначается одним из следующих символов $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f(M)}{\partial x_k}$, u'_{x_k} , $f'_{x_k}(M)$. Таким образом, частная производная функций по аргументу x_k представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных x_i , $i = 1, \dots, m, i \neq k$.

Примеры 7.1. 1. $u = e^{xyz} + \ln(2x - y + z)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz} + \frac{2}{2x - y + z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz} - \frac{1}{2x - y + z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz} + \frac{1}{2x - y + z},$$

$$2. u = \arctg \sqrt{\frac{xz}{y}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{yz}}{2(y+xz)\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sqrt{yx}}{2(y+xz)\sqrt{z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\sqrt{xz}}{2(y+xz)\sqrt{y}}.$$

Рассмотрим полное приращение функции $f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Определение 7.6. Функция $f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение Δu можно представить в виде $\Delta u = \sum_{i=1}^m \delta_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i$, где δ_i – некоторые постоянные, зависящие от x_i ; α_i – бесконечно малые при $\Delta x_i \rightarrow 0$.

Теорема 7.8. Если функция $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, дифференцируема в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, то в этой точке существуют частные производные и $\delta_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Доказательство. Из условия дифференцируемости следует, что частное приращение $\Delta u = \delta_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i$, $i = 1, \dots, m$, но тогда $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i} = \delta + \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i$. Учитывая условие $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0$, получаем $\delta_i = u'_{x_i}$. $\square$

Из условия дифференцируемости следует очевидное утверждение.

Теорема 7.9. Если функция дифференцируема в точке $M \in G \subset \mathbb{E}^m$, то она в этой точке непрерывна.

Справедливость следует из условия $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$.

Следует отметить, что в отличие от функции одной переменной, наличие частных производных в точке не является достаточным условием, как дифференцируемости, так и ее непрерывности в данной точке.

Пример 7.2. Функция $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0, \\ 1, & \text{если } xy \neq 0, \end{cases}$

равна нулю на осях координат и поэтому имеет в точке $(0,0)$ обе частные производные

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Однако эта функция не дифференцируема в точке $(0,0)$ так как она в этой точке имеет разрыв.

Следующее утверждение обеспечивает достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.

Теорема 7.10. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки

$M_0(\xi_1, \dots, \xi_m)$, причем все эти частные производные непрерывны в этой точке, то функция дифференцируема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем эту теорему для функции двух переменных $u = f(x, y)$. Для большего количества переменных доказательство аналогично. Предположим, что в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ существуют непрерывные производные f'_x, f'_y . Полное приращение в этой точке запишется в виде

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Выражения в квадратных скобках являются частными приращениями по одной переменной, что позволяет применить к ним формулу Лагранжа

$$\begin{aligned}\Delta_x u &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x \\ \Delta_y u &= f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \eta \Delta y) \Delta y\end{aligned}$$

где $\theta \in (0; 1)$, $\eta \in (0; 1)$. Принимая во внимание непрерывность производных в точке $M_0(x_0, y_0)$, формулы для частных приращений можно записать в виде

$$\Delta_x u = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \alpha_1 \Delta x, \quad \Delta_y u = f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha_2 \Delta y$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 = 0$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_2 = 0$.

Таким образом, имеем $\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \alpha_1 \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha_2 \Delta y$. $\square$

Определение 7.7 Дифференциалом du дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$ функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется главная линейная относительно приращений аргументов часть полного приращения функции в точке $M(x_1, \dots, x_m)$. $du = \sum_{i=1}^m A_i \Delta x_i$.

Точно также, как для функций одной переменной, под дифференциалом dx_i переменной x_i будем понимать любое число, в качестве которого будем брать Δx_i . Тогда формула для дифференциала примет вид

$$du = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) dx_i.$$

Пример 7.3. Вычислить дифференциал функции $u = x^3 y z^2$

$$du = 3x^2 y z^2 dx + x^3 z^2 dy + 2x^3 y z dz$$

Дифференциал часто используют для вычисления приближенного значения функции в некоторой точке, заменяя приращение функции дифференциалом $\Delta u \approx du$. Тогда

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) = f(x_1, \dots, x_m) + df(x_1, \dots, x_m).$$

7.2.1. Производная сложной функции. Пусть заданы дифференцируемые функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$, и $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, \dots, m$. Выведем формулы для вычисления частных производных $\frac{\partial f}{\partial t_j}$, $j = 1, \dots, k$. Формула полного приращения функции u по аргументам $x_1, \dots, x_m$ имеет вид

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i, \quad \alpha_i \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x_i \rightarrow 0.$$

Частное приращение функции x_i по аргументу t_j запишется следующим образом $\Delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta_j \Delta t_j$, где $\beta_j \rightarrow 0$, когда $\Delta t_j \rightarrow 0$. Подставим это выражение в формулу полного приращения

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta_j \Delta t_j \right) + \alpha_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta_j \Delta t_j \right).$$

Разделим левую и правую части этого равенства на Δt_j , и вычислим пределы при $\Delta t_j \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} + \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \beta_j + \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} + \alpha_i \beta_j \right).$$

В силу дифференцируемости функций $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ они непрерывны, а значит $\Delta x_i \rightarrow 0$ при $\Delta t_j \rightarrow 0$. Принимая во внимание $\alpha_i \rightarrow 0$, $\beta_i \rightarrow 0$ при $\Delta t_j \rightarrow 0$, получаем $\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \beta_j + \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} + \alpha_i \beta_j \right) = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пример 7.4. $u = tx^2 + y + t + z^3t$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t^2$. Требуется вычислить производную по переменной t . В данном случае независимая переменная одна и частная производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ равна полной производной $\frac{du}{dt}$. Запишем вначале формулу для задачи

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Вычисляем производные и подставляем в приведенную формулу

$$\frac{du}{dt} = 2tx \cos t - \sin t + 6z^2 t^2 + (x^2 + z^3 + 1)$$

Подставим значения $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t^2$

$$\frac{du}{dt} = t \sin 2t - \sin t + 6t^6 + (\sin^2 t + t^6 + 1)$$

7.2.2. Инвариантность формы полного дифференциала. Для функции одной переменной было введено понятие инвариантности формы дифференциала. Исследуем это свойство для функции нескольких переменных. Для простоты возьмем функции двух переменных. Пусть заданы дифференцируемые функции в области определения

$z = f(x, y)$, $x = \varphi(v, t)$, $y = \psi(v, t)$. Имеем сложную дифференцируемую функцию двух переменных $z = f(\varphi(v, t), \psi(v, t))$. Ее дифференциал имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Подставив в формулу полного дифференциала $\frac{\partial z}{\partial v}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$, получим

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Таким образом, форма полного дифференциала от сложной функции имеет такую же форму, как дифференциал для не сложной функции.

7.3. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение непрерывности в точке функции нескольких переменных.
2. Перечислите свойства непрерывных функций.
3. Сформулируйте первую и вторую теоремы Вейерштрасса для функций нескольких переменных.
4. Сформулируйте теорему о сохранении знака.
5. Дать определение частной производной.
6. Запишите формулу для вычисления производной от сложной функции.
7. В чем суть понятия “инвариантности формы дифференциала”?

7.4. Методические указания по решению задач

1. Найти частные производные функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение: При вычислении производной по одной переменной, все остальные независимые переменные считаем константами.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

2. $u = x^{zy}$.

Решение: При вычислении производной по переменной x считаем, что функция степенная, а по переменным y и z функцию считаем показательной.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = zyx^{zy-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{zy} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{zy} \ln x.$$

3. $u = x^2 + y^2 + zx$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2^t$. Требуется вычислить производную du/dt .

Решение: Имеем сложную функцию $u = f(x, y, z)$ трех переменных. При этом каждый из аргументов является функцией переменной t .

Запишем формулу для вычисления искомой производной

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \\ \frac{du}{dt} &= (2x + z) \cos t - (2y) \sin t + (x) 2^t \ln 2. \end{aligned}$$

Подставим вместо переменных x, y, z : $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2^t$.

$$\frac{du}{dt} = (2 \sin t + 2^t) \cos t - \sin 2t + 2^t \ln 2 \sin t = 2^t (\cos t + \ln 2 \sin t).$$

3. $z = \operatorname{tg}(xyt) + x^2 t^2$, $x = \ln t$, $y = 3^t$. Требуется вычислить производную du/dt .

Решение: В данном случае основная функция зависит от независимой переменной t . Формула для вычисления искомой производной имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{yt}{x \cos^2(xyt)} + \frac{xt 3^t \ln 3}{\cos^2(xyt)} + \frac{xy}{\cos^2(xyt)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(xyt)} \left(\frac{yt}{x} + x(t 3^t \ln 3 + y) \right) = \frac{3^t}{\cos^2(\ln t \bullet 3^t t)} \left(\frac{t}{\ln t} + \ln t(t \ln 3 + 1) \right). \end{aligned}$$

4. Вычислить дифференциал функции $z = \arctg(xy^2)$.

Решение: Пользуемся формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Вычисляем частные производные и подставляем в приведенную формулу

$$dz = \frac{y^2}{1 + x^2 y^4} dx + \frac{2xy}{1 + x^2 y^4} dy.$$

7.5. Примеры для самостоятельного решения

Найти частные производные следующих функций.

1. $z = x \ln(xy + 1)$. **2.** $z = x^2 y^3 + xy$. **3.** $z = \sqrt[3]{x^2 y + y^2}$.

4. $z = \frac{xy}{x+y}$. **5.** $z = xy \operatorname{tg}(xy)$. **6.** $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. **7.** $u = x^{\frac{y}{z}}$.

8. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. **9.** $z = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. **10.** $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Найти полные дифференциалы следующих функций.

11. $z = x^2 y^3$. **12.** $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. **13.** $z = \sin^2 x + \cos^2 y$. **14.** $z = yx^y$.

15. $z = \ln(x^2 + y^2)$. **16.** $z = \operatorname{Intg}(y/x)$. **17.** $u = xyz$. **18.** $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}$.

Найти производные сложных функций.

19. $u = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}, x = 3t^2, y = \sqrt{t^2 + 1}, \frac{du}{dt} = ?$ **20.** $u = xyz, x = t^2 + 1, y =$

$= \ln t; z = \operatorname{tg} t; \frac{du}{dt} = ?$ **21.** $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x = R \cos t, y = R \sin t; z = H, \frac{du}{dt} = ?$

22. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, y = x^2, \frac{dz}{dx} = ?$ **23.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, x = u \sin v, y = u \cos v,$

$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \frac{\partial z}{\partial v} = ?$ **24.** $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v, \frac{\partial z}{\partial u} = ? \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

7.5.1. Ответы. **1.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy}{xy+1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{xy+1}$. **2.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 +$
 $+ y, \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 y^2 + x.$

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^2 y + y^2)^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + 2y}{3\sqrt[3]{(x^2 y + y^2)^2}}$. **4.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} =$
 $= \frac{x^2}{(x+y)^2}.$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \operatorname{tg}(xy) + \frac{xy^2}{\cos^2(xy)}, \frac{\partial z}{\partial y} = x \operatorname{tg}(xy) + \frac{yx^2}{\cos^2(xy)}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2)$. **7.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x,$

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$. **8.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. **9.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **10.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}$.

11. $dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$. **12.** $dz = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (y dx - x dy).$

13. $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy$. **14.** $dz = y^2 x^{y-1} dx + x^y (1 + y \ln x) dy.$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{15.} \quad dz = \frac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}. \quad \mathbf{16.} \quad dz = \frac{2}{x^2 \sin \frac{2y}{x}} (xdy - ydx). \\
& \mathbf{17.} \quad du = yzdx + zx dy + xydz. \quad \mathbf{18.} \quad du = \frac{z(yzdx + xzdy - 2xydz)}{x^2 y^2 + z^4}. \\
& \mathbf{19.} \quad \frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt[4]{t^2 + 1}} \operatorname{ctg} \frac{9t^2}{\sqrt[4]{t^2 + 1}} \left(2 - \frac{t^2}{2\sqrt{t^2 + 1}} \right). \\
& \mathbf{20.} \quad \frac{du}{dt} = 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}. \quad \mathbf{21.} \quad \frac{du}{dt} = 0. \quad \mathbf{22.} \quad \frac{dz}{dx} = \\
& = \frac{2 - x^2}{1 + x^2}. \\
& \mathbf{23.} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1. \quad \mathbf{24.} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 2 \frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}, \\
& \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}.
\end{aligned}$$

Лекция 8

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

8.1. Производная по направлению. Градиент.

Частные производные функции $f(M) = f(x, y, z)$ по x, y, z выражают скорость изменения функции по направлению координатных осей. Однако во многих практических задачах возникает вопрос о вычислении скорости в данном направлении.

Пусть задана дифференцируемая функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим некоторое направление, которое определяется единичным вектором с координатами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Проведем через точку M_0 ось, направление которой совпадает с направлением единичного вектора $\vec{a}$. Обозначим через e величину направленного отрезка M_0M . Тогда координаты точки M будут определяться равенствами: $x = x_0 + e\cos\alpha, y = y_0 + e\cos\beta, z = z_0 + e\cos\gamma$. На данной прямой функция $u = f(x, y, z)$ является сложной функцией одной переменной e

$$u = f(x_0 + e\cos\alpha, y_0 + e\cos\beta, z_0 + e\cos\gamma),$$

тогда

$$\frac{du}{de} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Мы получим формулу вычисления производной от функции трех переменных в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$, который имеет направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Пример 8.1. Вычислить производную функции $\sqrt[3]{x + y^2 + z^2}$ в направлении вектора $\vec{b}(2; \sqrt{3}; 3)$ в точке $M_0(3; 4; 2)$

$$\begin{aligned} \text{Вычисляем производные в точке } M_0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + y^2 + z^2)^2}} = \\ &= \frac{1}{27}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x + y^2 + z^2)^2}} = \frac{8}{27}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z^2}{3\sqrt[3]{(x + y^2 + z^2)^2}} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Определим направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}, \cos\gamma = \frac{3}{4}$, тогда значение производной по направлению вектора $\vec{b}$ в точке

$$M_0 \text{ будет равно } \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{19 + 4\sqrt{3}}{54}.$$

Определение 8.1. Градиентом функции $f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$ в точке $M(x_1, \dots, x_m)$ называется вектор ($gradu$), имеющий координаты, равные частным производным $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ в точке M .

Рассмотрим дифференцируемую функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$, тогда производную по направлению единичного вектора $\mathbf{a}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, можно записать в виде $\frac{du}{de} = \vec{a} \cdot gradu$, т.е. она равна скалярному произведению двух векторов $\vec{a}$ и $gradu$, а по определению скалярного произведения имеем

$$\frac{du}{de} = |\vec{a}| |gradu| \cos \varphi = |gradu| \cos \varphi,$$

так как $|\vec{a}| = 1$. Из последней формулы следует, что максимальное значение $\left(\frac{du}{de}\right)_{\max}$ будет тогда, когда угол между векторами $\vec{a}$ и $gradu$ равен 0 т.е. $\cos \varphi = 1$. Следовательно, градиент функции $f(M)$ в точке M характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке M .

Пример 8.2. Определить направление и величину максимального роста функции $u = \arctg \sqrt{\frac{xz}{y}}$ в точке $M(1, 1, 1)$.

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{xz}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{xz}{y}}} \cdot \frac{z}{y} = \frac{1}{2(y + xz)} \cdot \sqrt{\frac{yz}{x}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \frac{xz}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{xz}{y}}} \cdot \frac{xz}{y^2} = -\frac{1}{2(y + xz)} \cdot \sqrt{\frac{xz}{y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{1 + \frac{xz}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{xz}{y}}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{2(y + xz)} \cdot \sqrt{\frac{xy}{z}},$$

в точке $M(1, 1, 1)$ имеем $gradu = \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k$, $|gradu| = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Следовательно, величина максимального роста равна $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ в направлении вектора с координатами $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

8.2. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$ имеет дифференцируемые частные производные по аргументам x_i , $i = 1, \dots, m$ в точке M , то

их можно еще раз продифференцировать, т. е. вычислить частные производные от частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Если $i = j$, то эти производные называются частными производными второго порядка. Их условные обозначения $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ или $f''_{x_i x_i}$. В случае, когда $i \neq j$, производные называются смешанными. По аналогии можно ввести понятия частных производных более высокого порядка.

Пример 8.3. $u = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$. Требуется вычислить производные второго порядка и смешанные производные.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

В рассмотренном примере смешанные производные оказались равными. Такое равенство получается не для любой функции, а только для тех, которые удовлетворяют условиям следующего утверждения.

Теорема 8.1. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в области $G \subset \mathbb{E}^m$ частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, то в любой точке $M \in G$, в которой эти производные непрерывны, их значения совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M \in G$ является точкой, в которой обе функции $f''_{ij}(M)$ и $f''_{ji}(M)$ непрерывны. Принимая во внимание, что изменятся будут только x_i и x_j обозначим их x и y , и будем по существу рассматривать функцию двух переменных $f(x, y)$. Требуется доказать, что при выполнении условий теоремы, справедливо равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$, т.е. значения смешанной производной не зависят от порядка дифференцирования.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$F = f(x + h, y + h) - f(x + h, y) - (f(x, y + h) - f(x, y))$, где h малое приращение. В первой разности фиксируем $x + h$, а во второй x тогда имеем две функции одного аргумента y . В силу их дифференцируемости воспользуемся формулой Лагранжа, тогда получим

$$F = (f'_y(x + h, y + \theta h)h - f'_y(x, y + \theta h)h), \quad \text{где } \theta \in [0, 1]$$

Зафиксируем $y + \theta h$ и применим формулу Лагранжа к разности, стоящей в скобках

$$F = f''_{yx}(x + \xi h, y + \theta h)h^2, \quad \xi \in [0, 1]$$

С другой стороны функцию F можно записать в виде

$$F = f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - (f(x+h, y) - f(x, y))$$

По аналогии с предыдущим случаем последовательно применяем два раза формулу Лагранжа, в результате чего получаем

$$F = f''_{xy}(x + \mu h, y + \alpha h)h^2 \quad \mu, \alpha \in [0, 1]$$

Приравнивая правые части функции F и сокращая на h^2 получим $f''_{yx}(x + \xi h, y + \theta h) = f''_{xy}(x + \mu h, y + \alpha h)$. Принимая во внимание непрерывность смешанных производных в области G , устремим h к нулю, в результате чего получаем интересное нас равенство

$$f''_{xy}(xy) = f''_{yx}(xy). \square$$

Замечание. Условие непрерывности в теореме можно заменить требованием чтобы функция $u = f(M)$ была дважды дифференцируема в точке M .

8.2.1. Дифференциалы высших порядков. Пусть задана функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в области $G \subset R^m$. Тогда если функция $f(M)$ дифференцируема в точке $M \in G$, то полный дифференциал в точке M равен $du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Будем теперь рассматривать дифференциал как функцию m переменных $du(x_1, \dots, x_m)$. Если эта функция дифференцируема, то от нее снова берется дифференциал. Здесь следует выделить два случая: 1. Если $x_1, \dots, x_m$ являются независимыми, 2. $x_1, \dots, x_m$ являются дифференцируемыми функциями некоторых переменных $t_1, \dots, t_n$.

В первом случае вычислим дифференциал от функции $du(x_1, \dots, x_m)$

$$d(du(x_1, \dots, x_m)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_j$$

В этом случае можно считать, что dx_i ($i = 1, \dots, m$) не зависят от x_j ($j = 1, \dots, m$), тогда получим формулу для дифференциала второго порядка $d^2u(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j$.

По аналогии вводится понятие дифференциалов более высоких порядков

$$d^3u = d(d^2u) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j dx_k, \quad d^n u = d(d^{n-1}u)$$

Рассмотрим второй случай. Уже было показано, что первый дифференциал инвариантен по отношению к аргументам, т.е.

$$du = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial u}{\partial t_i} dt_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j.$$

Для дифференциала второго порядка в этом случае это свойство не сохраняется

$$\begin{aligned} d(du) &= d\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_j} d(dx_j)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_j. \end{aligned}$$

Для данного случая dx_j зависят от $x_i, i = 1, \dots, m$, поэтому появляется еще одно слагаемое, так как

$$dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \quad d^2 x_j = \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial t_r \partial t_i} dt_i dt_r$$

8.3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Теорема 8.2. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема $n+1$ раз в окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ $M_0 \in G \subset R^m$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) &= f(M_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} d^{(i)} f(M_0) + r_{n+1}(M_0, M), \end{aligned} \quad (8.1)$$

где точка $M(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x_1 + t\Delta x_1, \dots, x_m + t\Delta x_m)$, где $t \in [0, 1]$. Если зафиксировать $x_1, \dots, x_m$ и $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, то $\varphi(t)$ – функция одной переменной, для которой справедлива формула Тейлора для $t \in [0, 1]$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0) t^{i-1} + r_{n+1}(t).$$

Полагая $t = 1$, получим

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0) + r_{n+1}, \quad (8.2)$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial (x_i + t\Delta x_i)} \Delta x_i$, в точке $t = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= df(M_0), \quad \varphi''(0) = d^2f(M_0), \dots, \varphi^{(n)}(0) = d^n f(M_0), \\ \varphi(1) &= f(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_m + h).\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (8.2), получаем равенство (8.1), где $r_{n+1}(M_0, M)$ – остаточный член, который в форме Лагранжа имеет вид

$$r_{n+1}(M_0, M) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(x_1 + \theta\Delta x_1, \dots, x_m + \theta\Delta x_m), \quad \theta \in [0, 1]. \square$$

8.4. Экстремумы функций нескольких переменных

Определение 8.2. Функция $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$ имеет во внутренней точке $M_0 \in G$ локальный экстремум если существует окрестность точки M_0 такая, что $f(M_0) > f(M)$ или $f(M_0) < f(M)$, где M принадлежит окрестности точки M_0 .

Теорема 8.3. (о необходимых условиях экстремума). Если функция $u = f(M)$, $M \in G \subset \mathbb{E}^m$ имеет в окрестности точки $M_0 \in G$ частные производные по каждой переменной и имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ то в этой точке выполнены следующие условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m)$, которая имеет экстремум в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Зафиксируем переменные $x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$. Тогда функция будет функцией одной переменной x_1 . Производная этой функции в точке $x_1 = x_1^0$ совпадает с частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)$. Так как функция имеет экстремум в точке M_0 , то функция одной переменной будет иметь экстремум в точке $x_1 = x_1^0$. Тогда, в соответствии с теоремой 4.2 о необходимых условиях экстремума функции одной переменной имеем $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$. Далее, освобождаем переменную x_2 , а все остальные переменные фиксируем. Повторяя приведенные рассуждения, выполненные для x_1 , получим $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Выполнив аналогичные процедуры для $x_3 \dots x_m$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание. Необходимые условия экстремума можно записать еще так $df(M_0) = 0$, т.к. $f'_{x_i}(M_0) = 0$. Кроме того следует отметить, что точки, где функция определена, а ее частные производные неопределенны, тоже могут быть точками экстремума.

Для доказательства и выполнения достаточных условий экстремума функции нескольких переменных понадобятся некоторые сведения из теории квадратных форм.

Определение 8.3. Квадратная форма $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}x_i x_j$ называется положительно-определенной (отрицательно-определенной), если для любых значений $x_1, \dots, x_m$, одновременно не равных нулю $F > 0$ ($F < 0$).

Если квадратная форма F является положительно-определенной или отрицательно-определенной, то ее называют еще знакопостоянной.

Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы F .

Критерий Сильвестра. 1. Для того чтобы квадратичная форма F с симметрической матрицей A была положительно-определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы A были строго больше нуля.

2. Для того чтобы квадратичная форма F была отрицательно-определенной необходимо и достаточно, чтобы знаки главных диагональных миноров чередовались, причем первый минор должен быть отрицательным.

Пример 8.4. $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Диагональные миноры для матрицы A_1

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Все миноры положительные, следовательно, квадратичная форма с этой матрицей будет положительно-определенной.

Для матрицы A_2 $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3. \text{ Знаки диагональных миноров чередуются}$$

и $\Delta_1 < 0$, значит матрица A_2 и квадратичная форма с этой матрицей отрицательно-определенная.

Следует отметить, что критерий Сильвестра является критерием для определения положительной или отрицательной определенности симметрических матриц.

Обратимся теперь к рассмотрению достаточных условий экстремума функции многих переменных $u = f(M)$, $M(x_1, \dots, x_m) \in G \subset R^m$.

Пусть в точке $M_0 \in G$ выполнены необходимые условия экстремума, т.е. $df(M_0) = 0$, тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в

форме Пиано

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + o(\rho^2)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$.

Пусть в точке M_0 имеем минимум, тогда достаточно показать, что всех достаточно малых ρ $\Delta u > 0$. Для этого введем новые переменные $h_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}$, $i = 1, \dots, m$. Очевидно, что $|h_i| \leq 1$, т.к. $h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1$.

Тогда получим $\Delta u = \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right)$

Теперь при достаточно малых ρ величина $\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}$ есть бесконечно малая и поэтому знак Δu будет определяться квадратной формой

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Если она положительно-определенная, то $\Delta u > 0$, а значит в точке M_0 минимум, а если F отрицательно-определенная, то $\Delta u < 0$, а следовательно в точке M_0 максимум. Доказано.

Теорема 8.4. Если функция $u = f(M)$, $M(x_1, \dots, x_m) \in G \subset R^m$ дифференцируема в окрестности точки M_0 и дважды дифференцируема в самой точке M_0 в которой выполнены необходимые условия экстремума т.е. $df(M_0) = 0$. Тогда, если $d^2 f(M_0) > 0$ то в точке M_0 минимум, а если $d^2 f(M_0) < 0$, то максимум.

По существу при проверке достаточных условий требуется применить критерий Сильвестра к матрице

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

Очевидно, что если квадратная форма во втором дифференциале знакопеременная, то найдутся точки в окрестности точки M_0 , где $f(M_0) > f(M)$, а где $f(M_0) < f(M)$, но это значит, что в точке M_0 нет ни максимума, ни минимума.

Пример 8.5. Найти экстремумы функции $u = x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y$.

В соответствии с необходимыми условиями экстремума

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 4 = 0$$

Решая систему уравнений, находим три критические точки $A_1(-1, 2)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(1, 2)$. Вычислим второе производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

Матрица квадратичной формы во втором дифференциале имеет вид:

В точках A_1, A_3 $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, диагональные миноры $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 16$

В точке $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$.

Следовательно, в точках A_1 и A_3 имеем минимум.

В точке A_2 экстремума нет.

8.4.1. Контрольные вопросы. 1. Поясните смысл производной по направлению.

2. Дайте определение градиента функции.

3. Что показывает градиент функции?

4. Какая связь между градиентом функции и производной по направлению?

5. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.

6. Какие необходимые условия экстремума у функции нескольких переменных?

7. Сформулируйте достаточные условия экстремума.

8. Сформулируйте критерий Сильвестра. Для чего он используется?

8.5. Методические указания по решению задач

1. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3; 1)$ в направлении к точке $M_1(6; 5)$

Решение: Находим координаты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{MM}_1$, $\mathbf{a} = (3; 4)$. Определяем направляющие косинусы этого вектора по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{4}{5}$$

Вычисляем частные производные и их значения в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 27 - 18 + 3 = 12, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = -27 + 18 = -9.$$

Вычисляем производную по направлению вектора $\mathbf{a}$ по формуле

$$\frac{dz}{da} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = 12 \cdot \frac{3}{5} - 9 \cdot \frac{4}{5} = 0.$$

2. Найти проекции градиента функции $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$ в точке $(1; 2)$.

Решение: Определяем градиент функции по формуле

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются проекциями вектора $\text{grad } z$ на координатные оси

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y = 2 - 4 = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3 = -2 + 3 = 1.$$

3. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$ Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Решение: В задаче требуется, чтобы на примере проверили справедливость теоремы 8.1, а именно, что значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + y^2 - 5y^3) = 2y - 15y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy - 15xy^2 + 5y^4) = 2y - 15y^2$$

4. $u = xy^3 + zx^4 + yz^5 + zxy$ Требуется определить $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

Решение: Вычисляем первые частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 + 4zx^3 + zy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2 + z^5 + zx, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^4 + 5yz^4 + xy$$

Вычисляем $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2 + z^5 + zx) = 3y^2 + z$$

Вычисляем $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (x^4 + 5yz^4 + xy) = 20yz^3$$

Вычисляем $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (20yz^3) = 60yz^2$$

5. $z = x^2y^3 + x^4 + y^5$, $d^2z = ?$

Решение: Формула для вычисления второго дифференциала функции двух переменных имеет вид

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Вычисляем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 5y^4$$

Вычисляем вторые и смешанные частные производные, принимая во внимание равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3 + 4x^3) = 2y^3 + 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + 5y^4) = 6x^2y + 20y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 + 5y^4) = 6xy^2$$

Подставляем вычисленные производные в приведенную формулу для второго дифференциала

$$d^2z = (2y^3 + 12x^2) dx^2 + (12xy^2) dx dy + (6x^2y + 20y^3) dy^2$$

6. Разложить функцию $z = x^2y^3 + x^4 + y^5$ по степеням $x - 1$, $y - 1$

Найти члены первого и второго порядка. Остаточный член записать в форме Пиано.

Решение: Запишем формулы Тейлора в соответствии с требованиями задачи

$$f(x, y) = f(1, 1) + \frac{df(1, 1)}{1!} + \frac{d^2f(1, 1)}{2!} + o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

Второй дифференциал у нас получен в предыдущей задаче. Запишем первый дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2xy^3 + 4x^3) dx + (3x^2y^2 + 5y^4) dy$$

Вспоминаем, что мы условились под дифференциалом независимой переменной принимать его приращение.

Тогда для нашей задачи будем иметь

$$\begin{aligned} dz &= (2xy^3 + 4x^3)(x-1) + (3x^2y^2 + 5y^4)(y-1) \\ d^2z &= (2y^3 + 12x^2)(x-1)^2 + (12xy^2)(x-1)(y-1) + \\ &\quad + (6x^2y + 20y^3)(y-1)^2 \end{aligned}$$

Вычисляем значение функции и частных производных в точке $(1, 1)$

$$f(1, 1) = 3, \quad dz(1, 1) = 6(x-1) + 8(y-1) \\ d^2z = 14(x-1)^2 + 12(x-1)(y-1) + 26(y-1)^2$$

Подставляем полученные значения в приведенную формулу, и получаем искомое разложение

$$f(x, y) = 3 + 6(x-1) + 8(y-1) + 7(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + \\ + 13(y-1)^2 + o(\rho^2)$$

7. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. Если экстремум есть, то определить его тип.

Решение: Пользуемся необходимыми условиями экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y} - 2x + 6 = 0, \\ \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0. \end{cases}$$

$x = 4, y = 4$. Точка с этими координатами может быть точкой экстремума. Для применения достаточного условия экстремума требуется вычислить вторые и смешанные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{4\sqrt{y}^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

В соответствии с достаточным условием необходимо составить матрицу

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{y}} & -\frac{x}{4\sqrt{y}^3} \end{bmatrix}$$

Вычисляем значение этой матрицы в точке, которая претендует на точку экстремума

$$H(4, 4) = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \text{ Пользуемся критерием Сильвестра}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} > 0.$$

Матрица $H(4, 4)$ отрицательно-определенная. Следовательно, точка $(4, 4)$ является точкой максимума, $z_{\max}(4, 4) = 15$.

8.5.1. 8.6. Примеры для самостоятельного решения. 1. Найти производную функции $z = \arctg(xy)$ в точке $(1, 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

2. Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке $(2, 1)$ от этой точки к точке $(0, 0)$.

3. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в направлении, образующим с осями координат углы $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

4. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $(5, 1, 2)$ от этой точки к точке $(9, 4, 14)$.

5. Найти производную функции $u = x^2y^2z^2$ в точке $(1, 1, 3)$ от этой точки к точке $(, 1, 1)$.

6. Найти направление наибольшего изменения функции $u = xyz$ в точке $(1, 1, 1)$.

7. Найти направление наибольшего изменения функции $u = \arctg(xyz)$ в точке $(1, 1, 1)$.

8. Найти направление наибольшего изменения функции $u = tg(xyz)$ в точке $(1, \pi\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для следующих функций.

9. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$. **10.** $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. **11.** $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$.

12. $z = \sin^2(ax+by)$. **13.** $z = e^{xe^y}$. **14.** $z = \frac{x-y}{x+y}$. **15.** $z = y^{\ln x}$.

Найти дифференциал второго порядка для следующих функций.

16. $z = xy^2 - x^2y$. **17.** $z = \ln(x-y)$. **18.** $z = e^{xy}$. **19.** $u = xyz$.

20. Функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ разложить по

формуле Тейлора в окрестности точки $(1; 1; 1)$.

21. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = e^x \sin y$.

22. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1; 1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию $f(x, y) = x^y$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

23. $z = (x-1)^2 + 2y^2$. **24.** $z = (x-1)^2 - 2y^2$. **25.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

26. $z = x^3y^2(6-x-y); (x>0, y>0)$. **27.** $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

28. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. **29.** $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

30. $u = x + y^2/(4x) + z^2/y + 2/z; (x>0, y>0, z>0)$.

8.5.2. Ответы . 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $-\sqrt{5}$ **3.** 5. **4.** $\frac{98}{13}$ **5.** -22. **6.** $(1, 1, 1)$.

- 7.** $(1/2, 1/2, 1/2)$. **8.** $4\pi/3, 4\sqrt{3}/3, 4\pi\sqrt{3}/3$. **9.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$ **10.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$
 $= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$
11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$
12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax + by), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cdot \cos 2(ax + by), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$
 $= 2ab \cos 2(ax + by).$ **13.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y + 2y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1 + xe^y) \cdot e^{xe^y + y},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + xe^y)e^{xe^y + y}.$ **14.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x + y)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4x}{(x + y)^3},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x - y)}{(x + y)^3}.$ **15.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y (\ln y + 1)}{x^2} y^{\ln x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} y^{\ln x},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} y^{\ln x}.$ **16.** $-2ydx^2 + 4(y - x)dxdy + 2xdy^2.$ **17.**
 $-\frac{(dx - dy)^2}{(x - y)^2}.$ **18.** $e^{xy}((ydx + xdy)^2 + 2dxdy).$ **19.** $2(zdxdy + ydxdz +$
 $+ xdydz).$ **20.** $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) - (y -$
 $- 1)(z - 1).$ **21.** $f(x, y) = y + xy + \frac{3x^2 y - y^3}{3!}.$ **22.** $f(x, y) = 1 + (y - 1) + (x -$
 $- 1)(y - 1).$ **23.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1, y = 0.$ **24.** экстремумов нет. **25.** $z_{\min} = -1$
при $x = 1, y = 0.$ **26.** $z_{\max} = 108$ при $x = 3, y = 2.$ **27.** $z_{\min} = -8$ при
 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ и при $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}.$ **28.** $z_{\min} = 0$ при $x =$
 $= y = 0;$ нестрогий максимум $z = 1/e$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 1.$
29. $u_{\min} = -4/3$ при $x = -2/3, y = -1/3, z = 1.$ **30.** $u_{\min} = 4$ при $x = 1/2,$
 $y = 1, z = 1.$

Лекция 9

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

9.1. Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $u = f(M)$, $M(x_1, \dots, x_m) \in G \subset \mathbb{E}^m$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $Q \subset G$ и имеет в этой области конечные частные производные, за исключением может быть отдельных точек. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет $\sup_{M \in Q} f(M)$ и $\inf_{M \in Q} f(M)$. При этом наибольшее и наименьшее значения функция имеет либо в точках экстремума, либо на границе области Q .

Следовательно, для определения этих значений надо определить критические точки во внутренней части области Q , которые претендуют быть точками экстремума и вычислить в этих точках значение функции. Затем исследовать функцию на границе области Q и определить на ней наибольшее и наименьшее значение. Сравнив их с ранее вычисленными значениями функции в точках возможного экстремума, выбираем искомые величины.

Пример 9.1. Требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $u = x^3 - 3x + y^2 - 2y$ в области Q , которая является треугольником, ограниченным прямыми,

$$y = 0, x = 0, x + y = 4.$$

Имеем $u'_x = 3(x^2 - 1) = 0$, $u'_y = 2(y - 1) = 0$. Две точки $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, 1)$ являются точками возможного экстремума, но точка $M_2 \notin Q$. Вычисляем значение функции в точке M_1 , $u(M_1) = -3$. Исследуем функцию на границе области Q .

1) $x = 0, y \in [0, 4]$. В этом случае $u = y^2 - 2y$. Ищем наибольшее значение, как это делалось для функции одной переменной. $u'_y = 2(y - 1) = 0$. На этом участке точка $M_3(0, 1)$ является точкой возможного экстремума и две точки: $M_4(0, 0)$ и $M_5(0, 4)$ являются краевыми: $u(M_3) = -1$, $u(M_4) = 0$, $u(M_5) = 8$.

2) На прямой $y = 0, x \in [0, 4]$ точка с координатами $M_4(0, 0)$ уже исследована, поэтому ее исключаем. В этом случае $u = x^3 - 3x$, $u'_x = 3(x^2 - 1)$, $x = \pm 1$ точка $(-1, 0) \notin Q$, получаем две точки $M_6(1, 0)$ и $M_7(4, 0)$, $u(M_6) = -2$, $u(M_7) = 52$.

На участке прямой $x + y = 4$ от точки M_5 до M_7 , $y = 4 - x$, $u = x^3 - 3x + (4 - x)^2 - 2(4 - x) = x^3 - x^2 - 9x + 8$, $x \in [1, 4]$,

$u'_x = 3x^2 - 2x - 9 = 0$, $x_1 \approx 2,1$, $x_2 \approx -1,43$, $x_2 \notin [1, 4]$. Точка $M_8(2, 1; 1, 9)$ может быть точкой экстремум $u(M_8) \approx -6$. В данном случае краевые точки M_5 и M_7 не исследуем, т.к. значения функции в них уже вычислены. Анализируя значение функции в точках $M_1, M_3, \dots, M_8$ имеем $\sup_{M \in Q} u(M) = u(M_7) = 52$, $\inf_{M \in Q} u(M) = u(M_8) \approx -6$.

9.2. Неявные функции

Переменная u , которая является функцией аргументов $x_1, \dots, x_m$ может задаваться в неявном виде с помощью функционального уравнения

$$F(u_1, x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (9.1)$$

Например, функция $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, рассматриваемая в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ может быть задана посредством функционального уравнения

$$F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (9.2)$$

Возникает вопрос, при каких условиях функциональное уравнение (9.1) разрешимо относительно u в виде однозначной функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$, и какими свойствами она обладает, когда она является непрерывной и дифференцируемой. Так, функция (9.2) разрешима относительно u , но кроме приведенной функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ тоже является решением функционального уравнения (9.2).

Уравнение (9.2) определяет в R^3 сферу. Если взять точку $M_0(u_1, x_1, y_1)$, лежащую на сфере, координаты которой удовлетворяют условию $x_1^2 + y_1^2 < 1$, то часть сферы, лежащая в достаточно малой окрестности точки M_1 однозначно проектируется на плоскость xoy и частная производная $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u_1 \neq 0$. Это означает, что в окрестности этой точки уравнение (9.2) разрешимо и определяет явную функцию $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ или $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Если же на сфере взять точку $M_1(0, x, y)$, где $x^2 + y^2 = 1$, то окрестность этой точки не может однозначно быть спроецирована на плоскость xoy , так как часть окрестности находится в верхней полусфере, а другая часть в нижней. Следовательно, уравнение (9.2) не является однозначно разрешимым в этой окрестности. При этом частная производная $F'_u = 0$ в точке M_1 .

Теорема 9.1. Пусть функция $F(u, x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(u_0, x_0, y_0) \in R^3$ и частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ непрерывна в точке M_0 . Тогда, если $F(u_0, x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$,

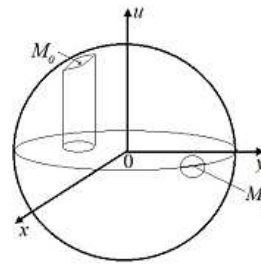


Рис. 9.1.

то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $N(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ такая, что в пределах этой окрестности существует единственная непрерывная и дифференцируемая функция $u = f(x, y)$, удовлетворяющая условиям: $|u - u_0| < \varepsilon$, $F(u, x, y) = 0$.

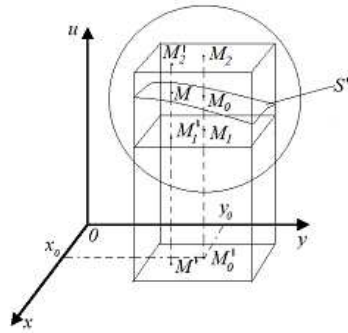


Рис. 9.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $F(u, x, y) = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяет некоторую поверхность S' . При этом $F(M_0) = 0$ по условию, т.е. точка M_0 лежит на поверхности S' .

Без потери общности будем считать, что $F'_u(M_0) > 0$. Тогда из непрерывности $F'_u(M_0)$ и теоремы об устойчивости знака непрерывной функции следует, что найдется окрестность точки M_0 , в которой $F'_u(M_0) > 0$. Возьмем в качестве такой окрестности шар достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 .

Впишем в шар правильный прямоугольный параллелепипед высотой 2ε с ребром основания равным 2δ с центром в точке M_0 , и рассмотрим функцию одной переменной $F(u, x_0, y_0)$ при фиксированных x_0, y_0 на сегменте $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$. Учитывая равенство $F(u_0, x_0, y_0) = 0$, $F'_u(M_0) > 0$, получим, что $F(M_2) > 0$, $F(M_1) < 0$, где точки $M_2(u_0 + \varepsilon, x_0, y_0)$, $M_1(u_0 - \varepsilon, x_0, y_0)$ лежат на верхней и нижней гранях параллелепипеда соответственно, но тогда на этих гранях функции $F(u_0 + \varepsilon, x_0, y_0) > 0$, $F(u_0 - \varepsilon, x_0, y_0) < 0$ при достаточно малых δ в силу непрерывности функции $F(u, x, y)$ и теоремы о сохранении знака, но тогда получаем неравенства

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |u - u_0| < \varepsilon. \quad (9.3)$$

Теперь возьмем в качестве окрестности точки $M(x_0, y_0)$ проекцию нижней грани параллелепипеда на плоскость xOy . Тогда будут выполнены условия

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta. \quad (9.4)$$

Зафиксируем произвольные точки x и y в этом квадрате и рассмотрим снова функцию одного аргумента $F(u, x, y)$ на сегменте $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$, но на верхней грани $F(u_0 + \varepsilon, x, y) > 0$, а на нижней грани $F(u_0 - \varepsilon, x, y) < 0$, а F'_u в шаре положительна, т.е. функция $F(u, x, y)$ в параллелепипеде возрастает, но тогда внутри сегмента $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ найдется единственная точка, где $F(u, x, y) = 0$, а такой точкой является M_0 . Из изложенного вытекает, что часть поверхности S' , вырезанная параллелепипедом однозначно проектируется на плоскость xOy в виде квадрата, определяемого неравенствами (9.4). Следовательно, существует единственная функция $u = f(x, y)$,

удовлетворяющая условию $|u - u_0| < \varepsilon$ при выполнении (9.4) и являющаяся решением уравнения $F(u, x, y) = 0$ и кроме того эта функция непрерывна, т.к. из (9.4) следует $|u - u_0| < \varepsilon$. Остается доказать дифференцируемость функции $f(x, y)$. Так как по условию $F(u, x, y)$ -дифференцируема, то выражение для полного дифференциала в точке M_0 будет иметь вид

$$dF = F'_u du + F'_x dx + F'_y dy = 0 \quad (9.5)$$

По условию теоремы $F'_u(u_0, x_0, y_0) \neq 0$, и функция $F(u, x, y)$ дифференцируема, тогда

$$du = -\frac{F'_x}{F'_u} dx - \frac{F'_y}{F'_u} dy \quad (9.6)$$

Следовательно, функция $u = f(x, y)$ дифференцируема, кроме того, из (9.6) следуют формулы для вычисления частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} \quad (9.7)$$

Следует отметить, что поверхность S или плоская кривая L , заданные уравнениями $F(u, x, y) = 0$ $F(x, y) = 0$ могут иметь особые точки, где теорема неприменима. К особым точкам относятся точки, где все частные производные равны нулю, а также точки, где $F'_u = 0$, что уже было продемонстрировано на примере со сферой, когда не существует окрестность точки, которую можно было бы однозначно спроектировать на плоскость xOy , а у плоской кривой на ось Ox или Oy . $\square$

Рассмотрим естественное обобщение приведенной теоремы на неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений. Предположим, что k функций

$$u_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad i = 1, \dots, k \quad (9.8)$$

ищутся как решение k функциональных уравнений

$$F_i(u_1, \dots, u_k, x_1, \dots, x_m) = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (9.9)$$

Составим определитель Якоби (Якобиан) для функций F_i

$$\Delta = \frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(u_1, \dots, u_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial u_k} \end{vmatrix} \quad (9.10)$$

Теорема 9.2. Пусть k функций (9.9) дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(u_{10}^0, \dots, u_{k0}^0, x_1^0, \dots, x_{m0}^0) \in \mathbb{R}^{m \times k}$, имеют частные производные по переменным $u_1, \dots, u_k$, непрерывны в точке M_0 и Якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(u_1, \dots, u_k)} \neq 0$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ найдется окрестность точки $N_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$

такая, что в пределах этой окрестности существуют единственные k функций (9.8), которые являются непрерывными, дифференцируемыми и выполнены неравенства $|u_i - u_i^0| < \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство можно осуществить методом математической индукции, используя предыдущую теорему.

Как следствие этой теоремы можно привести теорему о взаимно однозначном отображении двух множеств m -мерного пространства.

Рассмотрим в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^m$ m функций $u_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, m$, которые осуществляют отображение указанной окрестности на некоторое множество m -мерного пространства переменных u_i , $i = 1, \dots, m$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.3. (о взаимно однозначном отображении). Если функции $u_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, m$ дифференцируемы в окрестности точки M_0 и все частные производные непрерывны в самой точке M_0 , а Якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(u_1, \dots, u_k)}$ отличен от нуля, то функции осуществляют взаимно однозначные отображения некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ на некоторую окрестность точки $M_0(u_1^0, \dots, u_m^0)$.

Справедливость утверждения следует из предыдущей теоремы. Действительно, функции $u_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$ можно рассматривать как систему функциональных уравнений относительно x_i , $i = 1, \dots, m$, для которых выполнены условия предыдущей теоремы, а следовательно в некоторой окрестности точки N_0 имеется единственное решение $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_m)$, $i = 1, \dots, m$.

Следует отметить, что в условиях утверждения прямое отображение $u_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$ и обратное $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_m)$ являются непрерывными.

9.3. Условный экстремум

Мы уже познакомились с необходимыми и достаточными условиями наличия экстремумов в области определения функции нескольких переменных. Вместе с тем часто встречается задача об отыскании экстремумов функции при некоторых дополнительных условиях, ограничивающих область изменения аргументов. Например, требуется найти экстремум функции $u = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$, т.е. экстремум заданной функции ищется не на всей области определения функции, а лишь на прямой $x + y = 1$. Эти дополнительные условия часто называют уравнениями связи или ограничениями. Для решения сформулированной задачи выразим переменную из уравнения связи $y = 1 - x$ и подставим это значение в уравнение функции $u = (1 - x)^2 + x^2$. Таким образом, задача поиска условного экстремума сведена к задаче определения безусловного экстремума

$\frac{du}{dx} = 4(x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. В точке с координатами $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ функция имеет условный экстремум – минимум, хотя при отсутствии ограничений минимум функции находится в точке $(0;0)$.

Сформулируем задачу об отыскании условного экстремума. Пусть задана функция m переменных

$$u = f(x_1, \dots, x_m) \quad (9.11)$$

при наличии условий связи (ограничений типа равенств)

$$h_i(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad i = 1, \dots, k, \quad k < m. \quad (9.12)$$

Предположим, что функции h_i дифференцируемы в окрестности некоторой точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, а в самой точке по k переменным функции имеют непрерывные производные и ранг Якобиона $\frac{D(h_1 \dots h_k)}{D(x_1 \dots x_m)}$ равен k , тогда в силу теоремы о неявных функциях для достаточно малых $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_k > 0$, найдется такая окрестность точки M_0 , что в ней определены k функций

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \\ &\vdots \\ x_k &= \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (9.13)$$

удовлетворяющих условию $|x_i - x_i^0| < \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, k$ и являющихся единственными и дифференцируемыми (в данном случае без потери общности предполагается, что в (9.13) взяты первые $x_1, \dots, x_k$, т.к. их всегда можно перенумеровать). Подставив (9.13) в (9.11) получим функцию $m - k$ переменных

$$u = f(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) = \varphi(x_{k+1}, \dots, x_m) \quad (9.14)$$

Задача поиска условного экстремума сведена к задаче поиска безусловного экстремума для функции (9.14), и необходимым условием экстремума являются равенство нулю в этой точке полного дифференциала

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m = 0. \quad (9.15)$$

Используя свойство инвариантности полного дифференциала условия (9.15), принимая во внимание (9.13), можно записать в виде

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m = 0. \quad (9.16)$$

Здесь $dx_1, \dots, dx_k$ представляют собой дифференциалы функций (9.13), которые являются решением уравнений (9.12). Поэтому при подстанов-

ке их в (9.12), мы получим тождества. Если их продифференцировать, то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial x_m} dx_m &= 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h_k}{\partial x_m} dx_m &= 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Так как якобиан имеет ранг k , то эти уравнения можно разрешить относительно $dx_1 \dots dx_k$. Принимая во внимание то, что частные производные в (9.16) и в (9.17) вычислены в точке M_0 , т.е. в точке экстремума, то

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha_{11} dx_{k+1} + \dots + \alpha_{1m} dx_m, \\ \vdots \\ dx_k &= \alpha_{k1} dx_{k+1} + \dots + \alpha_{km} dx_m, \end{aligned}$$

где α_{ij} - константы $i = 1, \dots, k$ $j = k+1, \dots, m$.

Подставив эти значения в (9.16) и сгруппировав, получим

$$du = A_1 dx_{k+1} + \dots + A_{m-k} dx_m = 0 \quad (9.18)$$

Присоединив к (9.18) условия связи (9.12), получим необходимые условия экстремума

$$A_i = 0 \quad i = 1, \dots, m-k, \quad h_{ji}(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (9.19)$$

где A_i некоторые рациональные функции частных производных f и h_i в точке M_0 .

9.3.1. Контрольные вопросы. 1. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области?

2. Сформулируйте теорему для неявной функции.

3. Как определить частные производные функции, заданной в неявном виде?

4. Чем отличается условный экстремум от безусловного экстремума?

5. Как и когда поиск условного экстремума можно заменить поиском безусловного экстремума?

9.4. Методические указания по решению задач

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области, ограниченной линиями: $Q: x = 0, y = 0, x + y = -3$.

Решение: Заданная область определения является треугольником. Ищем критические точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0, \end{cases}$$

$x = -1, y = -1$. Получили точку $M_1(-1, -1)$, которая принадлежит заданной области, $z(M_1) = -1$. Исследуем функцию на границе, состоящей из трех прямых. 1. $x = 0, y \in [-3; 0]$. На этой прямой $z = y^2 + y$. Получили задачу поиска наибольшего и наименьшего значений для функции одной переменной, заданной на сегменте. Решаем уравнение $\frac{dz}{dy} = 2y + 1 = 0$. Получаем точку $M_2(0; -1/2)$, которая лежит на границе. Кроме того имеем точки на границе сегмента $M_3(0; -3), M_4(0; 0)$. Вычисляем значения функции в этих точках $z(M_1) = -1/4, z(M_3) = 6, z(M_4) = 0$. 2. $y = 0, x \in [-3; 0]$. На этой прямой $z = x^2 + x$. Решаем уравнение $\frac{dz}{dx} = 2x + 1 = 0$. Получаем точку $M_5(-1/2; 0)$, которая лежит на границе. Кроме того имеем точку на границе сегмента $M_6(-3; 0)$. Точка $(0; 0)$ уже исследована. $z(M_5) = -1/4, z(M_6) = 6$. 3. Исследуем функцию на прямой $x + y = -3$. Определив из этого уравнения

$y = -x - 3$, получим $z = 3x^2 + 9x + 6$. Решаем уравнение $\frac{dz}{dx} = 6x + 9 = 0$, в результате получаем точку $M_7(-3/2; -3/2)$, $z(M_7) = -3/4$. Сравнивая полученные значения функции, получаем $\sup_{M \in Q} z(M) = z(M_3) = z(M_6) = 6, \inf_{M \in Q} z(M) = z(M_1) = -1$.

2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функции, заданной в неявной форме

$$x^3y - y^3x = 16$$

Решение: Если функция задана в виде $F(x, y) = 0$, то производная $\frac{dy}{dx}$ определяется по формуле (9.5)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

В данном случае $F(x, y) = x^3y - y^3x - 16$. Тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x} = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3y^2x}$$

3. Найти условный экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при наличии ограничений $y - 2x = -6$

Решение: Решаем задачу путем преобразования, позволяющего получить задачу поиска безусловного экстремума. Из заданного условия имеем $y = 2x - 6$. В результате получаем функцию одной переменной

$z = -3x^2 + 24x - 36$. Решаем уравнение $z' = 0$, $-6x + 24 = 0$, откуда получаем $x = 4$, $y = 2$. В точке $M(4; 2)$ имеем $z'' = -6$. Следовательно это точка условного максимума.

9.5. Примеры для самостоятельного решения

Определите наименьшее и наибольшее значения функций в замкнутой области, ограниченной линиями.

1. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $Q : y = x + 2, y = 0, x = 2$.

2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $Q : y = 0, y = 2, x = 0, x = 1$.

3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $Q : y = -1, y = 2, x = 0, x = 2$.

4. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $Q : y = x^2, y = 4$.

Определить условные экстремумы функций.

5. $z = xy^2$, $x + y = 4$. **6.** $z = x^2 + y$, $x + y = 4$.

7. $z = x^2 + y^2 + x - y$, $x + y = 4$. **8.** $z = xy$, $x^2 + y = 12$.

9.5.1. Ответы. **1.** Наименьшее значение $z(1, 0) = -1$; наибольшее значение $z(2, 3) = 9$. **2.** Наименьшее значение $z = (1, 0) = -3$; наибольшее значение $z = (1, 2) = 17$. **3.** Наименьшее значение $z = (0; -1) = z(1; 1) = -1$; наибольшее значение $z(2; -1) = 13$. **4.** наименьшее значение $z = (0; 0) = 0$; наибольшее значение $z(-2; 4) = z(2; 4) = 32$. **5.** $z_{\min}(4; 0) = 0$, $z_{\max}(4/3; 8/3) = 256/27$. **6.** $z_{\min}(1/2; 7/2) = 29/4$. **7.** $z_{\min}(3/2; 5/2) = 15/2$. **8.** $z_{\min}(-2; 8) = -16$,

$$z_{\max}(2; 8) = 16.$$

Лекция 10

ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

10.1. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

При рассмотрении метода поиска условного экстремума у нас $m - k$ переменных были независимыми переменными, а k переменных (см. (9.13)) не являлись независимыми. Это иногда приводит к усложнению выкладок. Лагранжем был предложен способ поиска условного экстремума с ограничениями типа равенства (9.12), где $x_1, \dots, x_m$ – все независимые переменные.

Функцию

$$L = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(x_1, \dots, x_m) \quad (10.1)$$

называют функцией Лагранжа или Лагранжианом, где $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ – множители Лагранжа.

Теорема 10.1. (правило множителей Лагранжа) Пусть функции $f, h_i, i = 1, \dots, k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Если M_0 – точка локального экстремума (условного), то найдутся множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю и такие, что в точке M_0 выполнены условия

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k. \quad (10.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим каждое равенство (9.17) на постоянные множители $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ соответственно, а полученные равенства сложим почленно с равенством (9.16). Тогда получим

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m} dx_m = 0, \quad (10.3)$$

если выполнены условия, которые мы оговорили относительно уравнений связи (9.18).

Выберем множители $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0. \quad (10.4)$$

Это всегда можно сделать, т.к. равенства (10.4) приводят к линейной системе уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k,$$

определитель которой $\frac{D(h_1, \dots, h_k)}{D(x_1, \dots, x_k)} \neq 0$. Тогда равенство (10.3) примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_m} dx_m = 0, \quad (10.5)$$

а так как $x_{k+1}, \dots, x_m$ являются независимыми, то из (10.5) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x_{k+1}} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_m} = 0$$

Дополнив их уравнениями (10.4) получаем утверждение теоремы, т.е. $m + k$ уравнений (10.1) для определения неизвестных $x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. $\square$

Достаточные условия условного экстремума проверяются путем определения знака второго дифференциала d^2L , но при этом следует учесть, что k дифференциалов $dx_1 \dots dx_k$ не являются независимыми, а определяются из системы уравнений (9.17).

Пример 10.1. Требуется определить экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ при ограничениях, $x + y + z = 4$, $x - 2y - z = 1$.

Составим функцию Лагранжа

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 4) + \lambda_2(x - 2y - z - 1)$$

и вычислим частные производные

$$1. \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad 2. \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$3. \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad 4. \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x + y + z - 4 = 0,$$

$$5. \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x - 2y - z - 1 = 0.$$

Из первых трех уравнений находим

$x = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, $y = \frac{2\lambda_2 - \lambda_1}{2}$, $z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$. Подставив эти значения в последние два уравнения, получим $2\lambda_2 - 3\lambda_1 = 8$, $-6\lambda_2 + 2\lambda_1 = 2$. Решая эту систему уравнений, находим $\lambda_1 = -\frac{26}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{11}{7}$, тогда получаем координаты точки возможного экстремума M_0 $x = \frac{37}{14}$, $y = \frac{2}{7}$, $z = \frac{15}{14}$.

Подставим значения λ_1 и λ_2 в функцию Лагранжа и вычислим дифференциал второго порядка $d^2L = 2(d^2x + d^2y + d^2z)$. Легко видеть, что $d^2L > 0$. Следовательно, в точке $M_0(\frac{37}{14}; \frac{2}{7}; \frac{15}{14})$ имеем условный

минимум. Очевидно, что при отсутствии ограничений функция u имеет минимум в точке $(0; 0; 0)$.

10.2. Приложение дифференциального исчисления в геометрии

Поверхности и кривые в пространстве. Будем считать, что все рассматриваемые функции непрерывны и дифференцируемы по своим аргументам. Поверхность в пространстве R^3 может быть задана одним из уравнений $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$.

Простейшим способом задания кривой в пространстве состоит в том, что две любые текущие координаты задаются в виде функций от третьей

$$y = \varphi_1(x), \quad z = \varphi_2(x)$$

Более общий способ задания пространственной кривой состоит в том, чтобы ее рассматривать как пересечение двух поверхностей

$$F(x, y, z) = 0, \quad K(x, y, z) = 0$$

Если матрица $\begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ K'_x & K'_y & K'_z \end{vmatrix}$ имеет ранг равный двум, то эти уравнения можно разрешить и задать кривую в явной форме. При этом функции, в соответствии с теоремой 9.2, будут непрерывными вместе со своими производными.

Одним из самых распространенных способов задания поверхностей и кривых в пространстве является параметрический способ. Аналогично тому, как это делалось на плоскости, координаты переменной точки пространственной кривой можно задать в виде функций от некоторой вспомогательной переменной

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

Если хотя бы одна из производных x', y', z' , в этом случае отлична от нуля в выбранной точке, то легко можно перейти к другой форме задания кривой, как это делалось на плоскости. Исключение составляют особые точки, где все производные равны нулю. Но при этом надо иметь в виду, что к особым точкам не относятся те из них, когда параметр принимает крайние значения и две точки (крайние) совпадают.

Для задания поверхности в параметрической форме в пространстве R^3 требуются два параметра

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \quad (10.6)$$

где u, v - изменяются в замкнутой области. При этом, если ранг матрицы $D = \begin{bmatrix} f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \end{bmatrix}$ равен двум, то можно преобразовать уравнения в параметрической форме и перейти к обычному представлению

поверхности явным уравнением. Пусть $\begin{vmatrix} f'_u & \varphi'_u \\ f'_v & \varphi'_v \end{vmatrix} \neq 0$, тогда можно записать систему уравнений $f(u, v) - x = 0$, $\varphi(u, v) - y = 0$ с четырьмя переменными, а так как определитель не равен нулю, то в соответствии с теоремой, систему можно разрешить относительно u, v

$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y),$$

где функции g и h однозначные и непрерывные со своими производными. Подставив полученные функции в уравнения в параметрической форме для переменной z , получим

$$z = \Psi(g(x), h(x, y)) = \Phi(x, y), \quad (10.7)$$

где $\Phi(x, y)$ непрерывная функция вместе со своими производными.

Касательная и касательная плоскость. В случае пространственной кривой определение касательной остается тоже, что и для плоской кривой.

Пусть кривая задана параметрической формой $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$.

Возьмем точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и дадим параметру t приращение Δt , тогда значению параметра $t + \Delta t$ будет соответствовать точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$. Уравнения прямой, соединяющей эти две точки, будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}. \quad (10.8)$$

Геометрический смысл этих уравнений. Если разделим все знаменатели на Δt , то переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим предельное положение прямой, соединяющей точки M и M_1 , которая и будет касательной, а уравнения примут вид

$$\frac{x - x_0}{x'_t} = \frac{y - y_0}{y'_t} = \frac{z - z_0}{z'_t}.$$

Рассмотрим теперь поверхность, заданную уравнениями (10.6), которые можно привести к виду (10.7).

Определение 10.1. Поверхность, проходящая через точку M_0 поверхности (10.7) называется касательной плоскостью в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M_0 и любую точку M_1 поверхности (10.7) стремится к нулю, когда точка M_1 стремится к точке M_0 .

Существование касательной плоскости к поверхности (10.7) следует из дифференцируемости функции $\Phi(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Действительно, если эта функция дифференцируема, то приращение

$$\Delta z = z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad (10.9)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ - бесконечно малая от ρ . Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 имеет вид

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (10.10)$$

где $A, B, -1$ - координаты вектора нормали n . Принимая во внимание, что уравнение прямой, соединяющей точки M_0 и M имеет вид (10.8), вычислим косинус угла φ между вектором $\overrightarrow{M_0M}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ и вектором $n(A, B, -1)$.

$$\cos \varphi = \frac{A\Delta x + B\Delta y - \Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Из условия дифференцируемости (10.9) следует, что $\cos \varphi = \frac{o(\rho)}{\rho\sqrt{A^2 + B^2}}$ и $\lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \varphi = 0$, а значит $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. в пределе, когда секущая становится касательной, угол между ней и вектором нормали равен $\frac{\pi}{2}$, а т.к. точки M_0 и M произвольные, то этот факт справедлив для любой секущей, а значит в соответствии с определением уравнение (10.10) есть уравнение касательной плоскости. Из условия (10.9) имеем $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, т.е. уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = \Phi'_x(x - x_0) + \Phi'_y(y - y_0). \quad (10.11)$$

Если поверхность задана в неявной форме $F(x, y, z) = 0$, то используя теорему о неявных функциях, т.е. предполагая, что $F'_z \neq 0$, из (10.11) получим уравнение касательной плоскости

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0. \quad (10.12)$$

Теперь легко получить уравнение касательной к кривой

$$F(x, y, z) = 0, \quad K(x, y, z) = 0. \quad (10.13)$$

Очевидно, что уравнение касательной к кривой (10.13) есть не что иное, как пересечение двух касательных плоскостей к поверхностям (10.13)

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0,$$

$$K'_x(x - x_0) + K'_y(y - y_0) + K'_z(z - z_0) = 0.$$

Вновь рассмотрим уравнения поверхности, заданной в параметрической форме (10.6). Будем рассматривать случай, когда матрица D имеет ранг, равный 2. Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ запишем в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (10.14)$$

где A, B, C - пока неизвестные коэффициенты.

Если зафиксировать переменную $v = v_0$, то уравнение (10.6) задают кривую, проходящую через точку M_0 и уравнение касательной имеет вид $\frac{x-x_0}{x'_u} = \frac{y-y_0}{y'_u} = \frac{z-z_0}{z'_u}$. Аналогично фиксируя $u = u_0$, из (10.6) получим уравнение кривой при фиксированном u , уравнение касательной которой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{x'_v} = \frac{y-y_0}{y'_v} = \frac{z-z_0}{z'_v}.$$

Но обе касательные должны лежать в касательной плоскости (10.14), а значит должны выполняться условия

$$\begin{aligned} Ax'_u + By'_u + Cz'_u &= 0, \\ Ax'_v + By'_v + Cz'_v &= 0, \end{aligned} \quad (10.15)$$

которые получаются из (10.14) и уравнений касательных при фиксированных u_0 и v_0 . Решая уравнение (10.15) получим

$$A = \frac{C \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}, \quad B = \frac{C \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}},$$

где C - произвольная переменная, если взять

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}, \text{ то } A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}.$$

В этом случае уравнения (10.15) удобнее всего написать с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

Направляющие косинусы нормали при этом будут

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos(ny) = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos(nz) &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

Примеры 10.2. 1. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Воспользуемся формулой (10.12). В данном случае $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Тогда $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F'_z = \frac{2z}{c^2}$.

Подставляя эти значения в (10.12), и, учитывая, что частные производные вычисляются в точке касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$, получим

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Раскроем скобки и учтем уравнение эллипсоида

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0.$$

Окончательно получаем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

2. Составить уравнение касательной к кривой

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = Rx \text{ в точке } M_0(x_0, y_0, z_0).$$

По аналогии с предыдущим примером составим уравнения касательных плоскостей в точке M_0 , пересечение которых и даст касательную

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2, \quad (2x_0 - r)x + 2y_0 y = Rx_0$$

Эти уравнения не являются прямой в особой точке $(R; 0; 0)$. В этой точке оба уравнения описывают одну и ту же плоскость $x = R$.

10.2.1. Контрольные вопросы. 1. Сформулируйте правило множителей Лагранжа.

2. В чем отличие в достаточных условиях условного экстремума от безусловного?

3. Как задаются уравнения поверхностей и кривых в пространстве?

4. Как получить уравнения касательной плоскости и нормальной плоскости к пространственной кривой?

5. Как получить уравнения касательной плоскости и нормальной плоскости к поверхности?

10.3. Методические указания по решению задач

1. Найти условный экстремум функции $z = xy$, при наличии ограничений $x^2 + y^2 = 8$ используя правило множителей Лагранжа.

Решение: Составляем лагранжиан

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Воспользуемся теоремой 10.1, которая дает необходимые условия условного экстремума

$$L'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad L'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - 8 = 0.$$

Определим y из первого уравнения $y = -2\lambda x$ и подставим это значение во второе уравнение $x(1 - 4\lambda^2) = 0$, откуда имеем $x = 0$ или $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Решение $x = 0$ не подходит, так как в это случае $y = 0$, а точка $(0; 0)$ не удовлетворяет заданным ограничениям.

Возьмем $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -x$. Подставим это значение в уравнение ограничений $2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2, y = \mp 2$. Получили две точки $M_1(2; -2)$, и $M_2(-2; 2)$. Возьмем $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2, y = \pm 2$. Получили еще две точки $M_3(2; 2)$, $M_4(-2; -2)$. Для определения типа экстремумов надо воспользоваться достаточным условием.

Вычисляем вторые производные и смешанные для лагранжиана

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{yy} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 1.$$

Выписываем второй дифференциал для лагранжиана

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2dxdy.$$

Вспоминаем, что dx и dy зависимые величины, которые определяются из уравнений (9.17). Находим дифференциал от ограничений

$$d(x^2 + y^2 - 8) = 2xdx + 2ydy = 0,$$

Откуда получаем $dy = -xdx/y$. Подставляем в формулу второго дифференциала для лагранжиана

$$d^2L = 2\lambda\left(dx^2 + \frac{x^2}{y^2}dx^2\right) - 2\frac{x}{y}dx^2 = \left[2\lambda\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - 2\frac{x}{y}\right]dx^2.$$

Требуется определить знак выражения, которое стоит в квадратных скобках в точках, претендующих на экстремум.

Возьмем $\lambda = \frac{1}{2}$, и точки $M_1(2; -2)$, $M_2(-2; 2)$. В этих точках $d^2L = 6$. Следовательно в этих точках минимум. Возьмем $\lambda = -\frac{1}{2}$, и точки $M_3(2; 2)$, $M_4(-2; -2)$. В этих точках имеем $d^2L = -6$. Следовательно, в этих точках максимум. В результате имеем $z_{min} = z(M_1) = z(M_2) = -4$,

$$z_{max} = z(M_3) = z(M_4) = 4.$$

2. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости для данной линии $x^2 + y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 5$ в точке $M(1; -2; 3)$.

Решение: Уравнение пространственной кривой задано уравнениями двух поверхностей в виде (10.13). $F(x, y, z) = x^2 + y + z - 2$,

$K(x, y, z) = x^2 + y^2 - 5$. Касательной к пространственной кривой в данной точке является линия пересечения касательных плоскостей в указанной точке. Уравнения поверхностей заданы в неявном виде. Поэтому уравнения касательных плоскостей берем в виде

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0,$$

$$K'_x(x - x_0) + K'_y(y - y_0) + K'_z(z - z_0) = 0.$$

Вычисляем значения частных производных в заданной точке:

$$F'_x = 2x, F'_y = 1, F'_z = 1, K'_x = 2x, K'_y = 2y, K'_z = 0, F'_x(M) = 2, \\ K'_x(M) = 2, K'_y(M) = -4.$$

Подставив эти значения в уравнения, получим

$$\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0, \\ 2x - 4y - 10 = 0. \end{cases}$$

Это уравнение касательной, которая задана пересечением двух плоскостей. Перейдем к канонической форме записи. Векторы $\mathbf{n}_1(2; 1 \ 1)$,

$\mathbf{n}_2(2; -4, 0)$ являются нормальными к плоскостям. Тогда, их векторное произведение даст направляющий вектор для искомой касательной

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4i + 2j - 10k$$

Уравнение касательной будет иметь вид

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

Направляющий вектор касательной прямой является вектором нормали для нормальной плоскости. Тогда получим следующее уравнение

$$2(x-1) + y + 2 - 5(z-3) = 0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$2x + y - 5z + 15 = 0.$$

3. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 2x^2 + 3y^2$ в точке $M(1; -1; 5)$ и уравнение нормали.

Решение: Уравнение поверхности задано в явном виде. Поэтому воспользуемся уравнением

$$z - z_0 = f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0).$$

Вычисляем частные производные в точке M и подставляем их в уравнение

$$z - 5 = 4(x - 1) - 6(y + 1).$$

Раскрыв скобки, получим уравнение касательной плоскости

$$4x - 6y - z - 5 = 0.$$

Вектор нормали $(4; -6 \ -1)$ касательной плоскости является направляющим вектором для нормали. Тогда получим уравнение нормали в точке M

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-5}{-1}$$

4. Составить уравнение касательной к кривой $x = t^2$, $y = t^2 + t$, $z = t^3$, $t > 0$, и уравнение нормальной плоскости в точке $M(4; 6; 8)$

Решение: Вычисляем, чему равняется величина t в точке M
 $4 = t^2$, $6 = t^2 + t$, $8 = t^3 \implies t = 2$. Пользуемся формулой

$$\frac{x - x_0}{x'_t} = \frac{y - y_0}{y'_t} = \frac{z - z_0}{z'_t}.$$

Вычисляем производные в точке M $x'_t = 2t$, $y'_t = 2t + 1$, $z'_t = 3t^2$

$$x'_t(M) = 4, y'_t(M) = 5, z'_t(M) = 12.$$

Тогда получаем уравнение касательной $\frac{x-4}{4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-8}{12}$. Направляющий вектор касательной является нормалью к нормальной плоскости.

$$4(x-4) + 5(y-6) + 12(z-8) = 0.$$

Раскрыв скобки, получим уравнение нормальной плоскости

$$4x + 5y + 12z - 142 = 0.$$

10.4. Примеры для самостоятельного решения

Найти условные экстремумы с помощью правила Лагранжа и определить их тип.

1. $z = (x+2)^2 + (y-2)^2$, $x^2 + y^2 = 2$.

2. $z = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$, $x^2 + y^2 = 2$.

3. $z = xy - x - y + 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$

4. $z = xy - x + y - 1$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 18$.

5. $z = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$ 6. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$

Составить уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке.

7. $z^3 + x^3y + y^3x + x^2y^2 - 3 = 0$, $M(1; 1; 1)$.

8. $z^2x + x^2y + y^2x - 5 = 0$, $M(-1; -1; -1)$.

9. $zx^2 + 2xy + y^2z^2 + 7 = 0$, $M(2; -1; 1)$.

Составить уравнения касательной и нормальной плоскости в данной точке

10. $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos^3 t$, $y = \frac{1}{8}\sin^3 t$, $z = \frac{6}{\pi}t$, $M(3; 1; 1)$. 11. $x = 2\cos t$

$y = 3\sin t$, $z = \sin t + \cos t$, $M(2; 0; 1)$. 12. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^2$

$M(1; 0; 1)$. 13. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$, $M(1; 1; 1)$.

14. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$, $M(-2; 1; 6)$.

- 10.4.1. Ответы.** **1.** $z_{\min}(-1; 1) = 2$, $z_{\max}(1; -1) = 18$.
2. $z_{\min}(-1; 1) = \sqrt{2}$, $z_{\max}(1; -1) = 3\sqrt{2}$
3. $z_{\min} = z(3; 3) = z(-1; -1) = 4$, $z_{\max} = z(3; -1) =$
 $= z(-1; 3) = -4$. **4.** $z_{\min} = z(-4; 4) = z(2; -2) = -9$,
 $z_{\max} = z(2; 4) = z(-4; -2) = 9$. **5.** $z_{\min}(-1; -2) = -5$,
 $z_{\max}(1; 2) = 5$. **6.** $z_{\min}(-4; -4) = -1/2$,
 $z_{\max}(4; 4) = 1/2$. **7.** $2x + 2y + z - 5 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z - 1$.
8. $4x + 3y + 2z + 9 = 0$, $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$. **9.** $2x + 2y + 5z - 7 = 0$,
 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$.
10. $\frac{x-3}{6\sqrt{3}} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{6/\pi}$, $6\sqrt{3}x + 6y + \frac{6}{\pi}z - 18\sqrt{3} - 6 - \frac{6}{\pi} = 0$.
11. $\begin{cases} y = 3z - 3, \\ x = 2, \end{cases} \quad 3y + z - 1 = 0$.
12. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$, $2x - y + 3z - 5 = 0$.
13. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0}$, $x - y = 0$. **14.** $\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} =$
 $= \frac{z-6}{4}$, $27x + 28y + 4z + 2 = 0$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

На лекциях по дифференциальному исчислению рассматривалась задача отыскания производной для функции $y = f(x)$. Разберем обратную задачу, которая заключается в поиске такой функции $F(x)$, производная которой равна некоторой известной функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 11.1. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке интервала (a, b) функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Найдем первообразную для функции $f(x) = x^5$. Очевидно, что $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Однако, функция $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$, где C — любая произвольная постоянная, тоже является первообразной для функции $f(x) = x^5$, в соответствии с определением.

Теорема 11.1. Если $F_1(x), F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. В соответствии с определением имеем $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$. Обозначим $\psi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x), \forall x \in [a, b]$. Так как функции $F_1(x), F_2(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b) , то функция $\psi(x)$ дифференцируема и выполнено условие $\psi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. Тогда получаем, что $\psi(x) = C, \forall x \in [a, b]$. $\square$

Из теоремы следует, что каждая функция имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянной составляющей.

Определение 11.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$

Таким образом, по определению, с учетом теоремы 11.1, имеем

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (11.1)$$

где $F'(x) = f(x)$, а функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией.

Основные свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие свойства.

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

2. $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = f(x)dx$

3. $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

4. Постоянный множитель α можно выносить за знак интеграла.

Из первого свойства следует $(\int \alpha f(x)dx)' = \alpha f(x)$ и $(\alpha \int f(x)dx)' = \alpha f(x)$, откуда следует $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Справедливость этого свойства следует из следующих равенств:

$$\left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' = f(x) \pm g(x),$$

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx \right)' = f(x) \pm g(x).$$

Следовательно, выражения

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx, \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

представляют совокупность всех первообразных для одной и той же функции $f(x) \pm g(x)$. Значит они равны.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 dx = C$;

2. $\int 1 dx = x + C$;

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, (x \neq 0)$;

4. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$;

5. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$;

6. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$;

7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{a-x} \right| + C$;

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, \end{cases} \left(\left| \frac{x}{a} \right| < 1 \right),$;

10. $\int e^x dx = e^x + C$;

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$;

12. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$
13. $\int \cos x \, dx = \sin x + C;$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z});$
15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right);$
16. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C;$
17. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C;$
18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, (x \neq 0);$
19. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x + C;$

11.2. Основные методы интегрирования

При вычислении неопределенных интегралов требуется подынтегральную функцию преобразовать к табличной форме. Для этого существуют различные приемы, которые и будут рассмотрены в данном разделе.

11.2.1. Замена переменной в неопределенном интеграле.

Одним из основных способов вычисления неопределенных интегралов является метод замены переменной, который основывается на следующей теореме.

Теорема 11.2. *Предположим, что существует неопределенный интеграл*

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена дифференцируема и имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$ на некотором множестве $T \subset \mathbb{R}$, и пусть $X \subset \mathbb{R}$ - множество значений функции $\varphi(t)$. Тогда на множестве T для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ существует первообразная равная $F(\varphi(t)) + C$.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \quad (11.2)$$

и справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (11.3)$$

Доказательство. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и определением для первообразной

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t)) + C) = F'_{\varphi}(\varphi(t))\varphi'(t) = F'_x(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Равенство (??) доказано. С другой стороны $\varphi'(t) dt = d\varphi(t) = dx$, откуда следует

$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f(x)dx$ Следовательно, справедливо равенство (8.1). $\square$

Иногда удобно делать замену $t = \psi(x)$, а не $x = \varphi(t)$. Тогда $dt = \psi'_x(x)dx$, а

$$dx = \frac{dt}{\psi'_x(x)}.$$

Пример 11.1. Вычислить $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx &= \left| \begin{array}{l} z = \sin x, \quad dz = \cos x dx \\ dx = \frac{dz}{\cos x} \end{array} \right| = \int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - z^2}} \frac{dz}{\cos x} = \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{4 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{2} + C = \arcsin \frac{\sin x}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.2. Вычислить $\int \sqrt{9 - x^2} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 3 \sin z, \quad dx = 3 \cos z dz, \\ \sin z = \frac{x}{3}, \quad z = \arcsin \frac{x}{3} \end{array} \right| = \int 3 \sqrt{9 - 9 \sin^2 z} \cos z dz = \\ &= 9 \int \cos^2 z dz = 9 \left(\int \frac{dz}{2} + \int \frac{\cos 2z}{2} dz \right) = \frac{9}{2} z + \frac{9}{4} \int \cos 2z d(2z) = \\ &= \frac{9}{2} z + \frac{9}{4} \sin 2z + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} + C = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{3}{2} x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - x^2} + C. \end{aligned}$$

11.2.2. Подведение функции под дифференциал. Если в интеграле $\int f(x)dx$ функцию $f(x)$ можно преобразовать к виду $f(x) = \alpha \varphi(x) \varphi'(x)$, где α - константа, то интеграл примет вид

$$\int f(x)dx = \alpha \int \varphi(x) \varphi'(x) dx.$$

Принимая во внимание равенство $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$ получим

$$\alpha \int \varphi(x) \varphi'(x) dx = \alpha \int \varphi(x) d\varphi(x).$$

Если теперь сделать замену переменной $z = \varphi(x)$, то получим табличный интеграл

$$\int z dz = \frac{z^2}{2} + C.$$

Пример 11.3. Вычислить $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. В этом интеграле $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Поэтому получаем

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = |z = \ln x| = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Пример 11.4. Вычислить $\int \sin(4x + 3) dx$.

В данном случае нет явной производной. Поэтому формируем ее искусственно. Умножим и разделим на четыре.

$$\int \sin(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \int \sin(4x + 3) 4dx.$$

В полученном интеграле $4dx = d(4x + 3)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \sin(4x + 3) 4dx &= \frac{1}{4} \int \sin(4x + 3) d(4x + 3) = |z = 4x + 3| = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin z dz = -\frac{1}{4} \cos z = -\frac{1}{4} \cos(4x + 3) + C. \end{aligned}$$

11.2.3. Интегрирование по частям. Теорема 11.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и для функции $v(x)u'(x)$ существует ее первообразная на этом множестве. Тогда существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$ и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

Удобнее пользоваться следующей формулой

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (11.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим дифференциал, пользуясь известной формулой вычисления дифференциала от произведения двух функций

$$d(uv) = u dv + v du$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения, принимая во внимание равенство

$$\int d(uv) = uv + C$$

При этом константу C можно отнести к любому интегралу в полученной формуле

$$uv = \int u dv + \int v du$$

откуда получаем формулу (11.4). Учитывая равенства $dv(x) = v'(x)dx$

$du(x) = u'(x)dx$, получаем

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Из условия существования первообразной для функции $v(x)u'(x)$ следует, что существует первообразная функции $u(x)v'(x)$. $\square$

Пример 11.5. Вычислить $\int x \sin 2x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin 2x dx, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 11.6. Вычислить $\int e^x \sin x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} J = \int e^x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \end{aligned}$$

Еще раз интегрируем по частям

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx = \\ &= e^x (\sin x - \cos x). \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C. \end{aligned}$$

11.3. Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте и докажите теорему о разности двух первообразных одной и той же функции.
2. Сформулируйте и докажите теорему о замене переменных в неопределенном интеграле.
3. Объясните, в чем заключается суть процедуры “подведения под дифференциал”?
4. Выведите формулу для интегрирования по частям.
5. Перечислите и докажите основные свойства неопределенного интеграла

11.4. Методические указания по решению задач.

Подведение под дифференциал.

Пример 11.7. Вычислить $\int (x-3)^4 dx$.

Решение. Воспользуемся тем, что $dx = d(x-3)$.

$$\int (x-3)^4 dx = \int (x-3)^4 d(x-3) = \frac{(x-3)^5}{5} + C.$$

Пример 11.8. Вычислить $\int \frac{dx}{(2x-5)^3}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $dx = \frac{1}{2} d(2x-5)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x-5)^3} &= \int (2x-5)^{-3} \cdot \frac{1}{2} d(2x-5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-5)^{-2}}{-2} + C = \\ &= -\frac{1}{4(2x-5)^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.9. Вычислить $\int \frac{3x+1}{x+2} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x+2} &= \frac{3(x+2)-5}{x+2} = 3 - \frac{5}{x+2}. \\ \int \frac{3x+1}{x+2} dx &= \int \left(3 - \frac{5}{x+2}\right) dx = 3 \int dx - 5 \int \frac{dx}{x+2} = 3x - \\ &- 5 \int \frac{d(x+2)}{x+2} = 3x - 5 \ln |x+2| + C. \end{aligned}$$

Пример 11.10. Вычислить $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $x dx = \frac{1}{2} d(x^2+4)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \int (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+4) = \\ &= \frac{1 \cdot 2 (4+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + C = \sqrt{4+x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.11 Вычислить $\int \frac{\sqrt{\ln x} \cdot dx}{x}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

$$\int (\ln x)^{1/2} d(\ln x) = 2 \frac{(\ln x)^{3/2}}{3} + C = \frac{2 \sqrt{(\ln x)^3}}{3} + C.$$

Пример 11.12. Вычислить $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos x \, dx = d(\sin x)$.

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 11.13. Вычислить $\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4}$.

Решение. Воспользуемся тем, что $x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2)$.

$$\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Пример 11.14. Вычислить $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Решение. Используем тождество $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 11.15. Вычислить $\int \frac{x dx}{x^2+4}$.

Решение. Выражение $2x dx = d(x^2+4)$. Поэтому умножаем и делим на 2, и выносим постоянный множитель 1/2 за знак интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2+4} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \left| t = x^2+4 \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \ln \sqrt{x^2+4} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.16. Вычислить $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1}$.

Решение. Выражение $\frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x)$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2+1} &= \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \left| t = \operatorname{arctg} x \right| = \\ &= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.17. Вычислить $\int \frac{dx}{3x+2}$.

Решение. Выражение $3dx = d(3x+2)$. Поэтому умножаем и делим на 3, и выносим постоянный множитель 1/3 за знак интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x+2} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \left| t = 3x+2 \right| = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln t + C = \ln \sqrt[3]{3x+2} + C. \end{aligned}$$

Замена переменных.

Пример 11.18. Вычислить $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$.

Решение. Наименьшее общее кратное показателей 12. Сделаем подстановку $t = \sqrt[12]{x}$, тогда,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[12]{x}, x = t^{12} \\ dx = 12 t^{11} dt \end{array} \right| \int \frac{12 t^{13}}{t^{12}(t^4 + t^3)} dt = 12 \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \\ &= -12 \int \frac{(t^2-1)-t^2}{t^2(t+1)} dt = -12 \int \frac{t-1}{t^2} dt + \\ &+ 12 \int \frac{dt}{t+1} = -12 \int \frac{dt}{t} + 12 \int \frac{dt}{t^2} + 12 \ln |t+1| = -12 \ln |t| - \frac{12}{t} + \\ &+ 12 \ln |t+1| + C = 12 \ln \left(\frac{t+1}{t} \right) - \frac{12}{t} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной x , имеем

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} = \ln \frac{(\sqrt[12]{x} + 1)^{12}}{x} - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C.$$

Пример 11.19. Вычислить $\int (2x^2 - 7)^4 x dx$.

Решение. Если принять, что $t = 2x^2 - 7$, то $dt = 4x dx$, откуда $x dx = \frac{dt}{4}$. Произведем замену переменной в данном интеграле.

$$\int (2x^2 - 7)^4 x dx = \int t^4 \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int t^4 dt = \frac{1}{20} t^5 + C = \frac{1}{20} (2x^2 - 7)^5 + C.$$

Пример 11.20. Вычислить $\int \sqrt{x^3 + 8} \cdot x^2 dx$.

Решение. Положим, что $x^3 + 8 = t$, то $dt = 3x^2 dx$, $x^2 dx = \frac{dt}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3 + 8} \cdot x^2 dx &= \int \sqrt{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 8)^3} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.21. Вычислить $\int \frac{(\ln x + 3)^2}{x} dx$.

Решение. Положим, что $\ln x + 3 = t$, то $dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{(\ln x + 3)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (\ln x + 3)^3 + C.$$

Пример 11.22. Вычислить $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$.

Решение. Если $\sin x = t$, то $dt = \cos x dx$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{(\sin x)^4} + C.$$

Пример 11.23. Вычислить $\int \frac{e^x}{7-e^x} dx$.

Решение. Если $7 - e^x = t$, то $dt = -e^x dx$, $e^x dx = -dt$.

$$\int \frac{e^x}{7-e^x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |7 - e^x| + C.$$

Пример 11.24. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям.

Пример 11.25. Вычислить $\int (x+3) \cdot e^{6x} dx$.

Решение. $\int (x+3) \cdot e^{6x} dx = \left[\begin{array}{l} x+3 = u, \quad du = dx, \\ e^{6x} = d\nu, \quad \nu = \frac{1}{6}e^{6x} \end{array} \right] =$

$$= \frac{1}{6}(x+3)e^{6x} - \frac{1}{6} \int e^{6x} dx = \frac{1}{6}(x+3)e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C.$$

Пример 11.26. Вычислить $\int (x-2) \cdot \ln(x-4) dx$.

Решение. $\int (x-2) \cdot \ln(x-4) dx =$

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{array}{l} \ln(x-4) = u, \quad du = \frac{dx}{x-4} \\ (x-2)dx = d\nu, \quad \nu = \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{x(x-4)}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x(x-4)}{2} \cdot \ln(x-4) - \int \frac{x(x-4)}{2} \cdot \frac{dx}{x-4} = \frac{x(x-4) \cdot \ln(x-4)}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x(x-4) \ln(x-4)}{2} - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 11.27. Вычислить $\int x^2 \cos 2x dx$.

Решение. $\int x^2 \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = u, \quad du = 2x dx \\ \cos 2x dx = d\nu, \quad \nu = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = u, \quad du = dx, \quad -\frac{1}{2} \cos 2x \\ \sin 2x dx = d\nu, \quad \nu = -2x \quad \nu = -2x \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 11.28 Вычислить $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$.

Решение.
$$\int \sqrt{4-x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x^2} = u, \quad du = \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}}, \\ dx = d\nu, \quad \nu = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \frac{-x^2 \, dx}{\sqrt{4-x^2}} = x \sqrt{4-x^2} - \int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = x \cdot \sqrt{4-x^2} -$$

$$- \int \sqrt{4-x^2} \, dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} \, dx + 4 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Таким образом, получим уравнения относительно исходного интеграла

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} \, dx &= x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} \, dx + 4 \arcsin \frac{x}{a}, \\ 2 \int \sqrt{4-x^2} \, dx &= x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{a}, \\ \int \sqrt{4-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 11.29. Вычислить $\int \frac{x \, dx}{1+\cos x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{1+\cos x} &= \int \frac{x \, dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}, \quad v = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \\ &= x \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} \, dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \, dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \int \frac{d \left(\cos \frac{x}{2} \right)}{\cos \frac{x}{2}} = \\ &= x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

11.5. Примеры для самостоятельного решения

1. $\int (3x^2 - 4x^3 + 5) dx.$	2. $\int (3\sqrt{x} + 2x) dx.$
3. $\int (8\sqrt[3]{x} - 6x^5) dx.$	4. $\int \frac{6dx}{\sqrt{x}}.$
5. $\int \frac{3dx}{x^4}.$	6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$
7. $\int (3x - \sqrt{x})^2 dx.$	8. $\int 5x^2(x^2 - 3) dx.$
9. $\int \frac{7x^3 - 4x + 3}{\sqrt{x}} dx.$	10. $\int \frac{x^2}{x+2} dx.$
11. $\int \frac{x^3}{x-2} dx.$	12. $\int (x+8)^7 dx.$
13. $\int (4x-3)^5 dx.$	14. $\int \frac{dx}{(1-3x)^2}.$
15. $\int \sqrt{x-3} dx.$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}.$
17. $\int x\sqrt{x^2+1} dx.$	18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}.$
19. $\int \frac{dx}{5x+1}.$	20. $\int \frac{dx}{1-8x}.$
21. $\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}.$	22. $\int 3^x dx.$
23. $\int 3^x \cdot 5^x dx.$	24. $\int e^{3x} dx.$
25. $\int e^{-x} dx$	26. $\int e^{\cos x} \sin x dx.$
27. $\int \sin 5x dx.$	28. $\int \cos \frac{x}{2} dx.$
29. $\int \operatorname{tg} 4x dx.$	30. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx.$
31. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}.$	32. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}.$
33. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$	34. $\int \frac{dx}{4+x^2}.$
35. $\int \frac{dx}{16+9x^2}.$	36. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$
37. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}.$	38. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$
39. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$	40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}.$
41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$	42. $\int \frac{dx}{25-x^2}.$
43. $\int \frac{dx}{3-x^2}.$	44. $\int \frac{x^2-3}{x^2+1} dx.$
45. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$	
46. $\int (x+1)e^x dx.$	47. $\int \arcsin x dx.$
48. $\int \operatorname{arctg} x dx.$	49. $\int x \sin x dx.$
50. $\int x^3 \ln x dx.$	51. $\int x^2 e^x dx.$
52. $\int e^x \sin x dx.$	53. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$
54. $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$	55. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$
56. $\int x^2 \arcsin x dx$	57. $\int (x^2+2x+1) \sin 3x dx.$
58. $\int x^2 \ln x dx.$	59. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$
60. $\int x \cos 3x dx.$	61. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$
62. $\int \ln^2 x dx.$	63. $\int (\arcsin x)^2 dx.$
64. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$	65. $\int \sqrt{5+x^2} dx.$

Ответы

1. $x^3 - x^4 + 5x + C.$	2. $2\sqrt{x^3} + x^2 + C.$
3. $6\sqrt[3]{x^4} - x^6 + C.$	4. $12\sqrt{x} + C.$
5. $-x^{-3} + C.$	6. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$
7. $x^3 - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x + C.$	8. $x^5 - 5x^3 + C.$
9. $2\sqrt{x^7} - \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x} + C.$	10. $\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln x+2 + C.$
11. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln x-2 + C.$	12. $\frac{1}{8}(x+8)^8 + C.$
13. $\frac{1}{24}(4x-3)^6 + C.$	14. $\frac{1}{3(1-3x)} + C.$
15. $\frac{2\sqrt{(x-3)^3}}{3} + C.$	16. $\sqrt{2x+3} + C.$
17. $\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$	18. $\sqrt{x^2-5} + C.$
19. $\frac{1}{5}\ln 5x+1 + C.$	20. $-\frac{1}{8}\ln 1-8x + C.$
21. $\ln \sin x + C.$	22. $\frac{3^x}{\ln 3} + C.$
23. $\frac{15^x}{\ln 15} + C.$	24. $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$
25. $-e^{-x} + C.$	26. $-e^{\cos x} + C.$
27. $-\frac{1}{5}\cos 5x + C.$	28. $2\sin \frac{x}{2} + C.$
29. $-\frac{1}{4}\ln \sin 4x + C.$	30. $3\ln\left \sin \frac{x}{3}\right + C.$
31. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C.$	32. $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg} 6x + C.$
33. $-\operatorname{ctg} x - x + C$	34. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$
35. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg} \frac{3x}{4} + C.$	36. $\arcsin \frac{x}{2}.$
37. $\frac{1}{4}\operatorname{arsin} \frac{4x}{5}.$	38. $\frac{1}{2}\ln\left \frac{x-1}{x+1}\right + C.$
39. $\frac{1}{12}\ln\left \frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right + C.$	40. $\ln x+\sqrt{x^2+3} + C.$
41. $\ln x+\sqrt{x^2-4} + C$	42. $\frac{1}{10}\ln\left \frac{5+x}{5-x}\right + C.$
43. $\frac{1}{2}\ln\left \frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right + C.$	44. $x - 4\operatorname{arctg} x + C.$
45. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$	

46. $x e^x + C.$	47. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
48. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$	49. $x \cos x + \sin x + C.$
50. $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$	51. $(x^2 - 2x + 2) e^x + C.$
52. $(\sin x - \cos x) \cdot \frac{e^x}{2} + C.$	53. $x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C.$
54. $-\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C.$	55. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$
56. $\frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} -$ $-\frac{1}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + C.$	57. $-\frac{1}{3} (x+1)^2 \cos 3x + \frac{2}{9} (x+$ $+1) \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$
58. $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$	59. $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} +$ $+ \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$
60. $\frac{1}{9} (3x \sin 3x + \cos 3x) + C.$	61. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C.$
62. $x \ln^2 x - 2x (\ln x - 1) + C.$	63. $\frac{x}{2} (\arcsin x)^2 +$ $+ 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$
64. $-x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x + C.$	65. $\frac{5}{2} \ln x + \sqrt{5+x^2} +$ $+ \frac{x}{2} \sqrt{5+x^2} + C.$

Лекция 12

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

12.1. Алгебраические многочлены

Определение 12.1. Алгебраическим многочленом (полиномом) n -й степени называется выражение вида

$$A_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

где $z = x + iy$ – комплексное число, $a_i, i = \overline{0, n}$ – действительные или комплексные числа, n – порядок многочлена.

Если имеется два полинома $A_n(z), B_m(z), m < n$, то многочлен $A_n(z)$ можно поделить столбиком на многочлен $B_m(z)$. В этом случае справедливо равенство

$$A_n(z) = B_m(z)C_{n-m}(z) + M_k(z). \quad (12.1)$$

В (12.1) индексы обозначают порядки полиномов, $k < m$, $A_n(z)$ – делимое, $B_m(z)$ – делитель, $C_{n-m}(z)$ – частное, $M_k(z)$ – остаток.

Определение 12.2. Комплексное или действительное число α называется корнем многочлена $A_n(z)$, если $A_n(\alpha) = 0$

Теорема 12.1. Многочлен не нулевой степени $A_n(z)$ делится на двучлен $(z - \alpha)$ тогда и только тогда, когда число α является корнем многочлена $A_n(z)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (12.1) для данного случая будет иметь вид

$$A_n(z) = C_{n-1}(z)(z - \alpha) + M_0(z).$$

$M_0(z) = M_0 = \text{const}$ Если $z = \alpha$, то $A_n(\alpha) = M_0$. Но число α является корнем уравнения. Следовательно, $A_n(\alpha) = 0 \implies M_0 = 0$, т. е.

$$A_n(z) = C_{n-1}(z)(z - \alpha). \quad (12.2)$$

Теорема 12.2. Многочлен $A_n(z)$ n -й степени имеет ровно n корней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно основной теореме алгебры, многочлен $A_n(z)$ имеет хотя бы один корень α_1 . Тогда из (12.2) следует $A_n(z) = C_{n-1}(z)(z - \alpha_1)$. Многочлен $C_{n-1}(z)$ степени $n - 1$ тоже должен иметь хотя бы один корень α_2 . Тогда будет справедливо равенство

$C_{n-1}(z) = C_{n-2}(z)(z - \alpha_2)$. Продолжая подобные рассуждения, получим

$A_n(z) = b \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$, где $b = \text{const}$. Принимая во внимание, что многочлен $A_n(z)$ имеет коэффициент при старшей степени a_0 , а деление многочленов $A_n(z)$, $C_{n-i}(z)$, $i = 0, n$ производилось на двучлены $(z - \alpha_i)$, получаем, что $b = a_0$. $\square$

Таким образом получили формулу разложения многочлена на множители

$$A_n(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \quad (12.3)$$

Из этой теоремы следует следствие. Если число α является корнем кратности r , то справедлива формула

$$A_n(z) = (z - \alpha)^r D_{n-r}(z). \quad (12.4)$$

Формула (12.4) примет вид

$$A_n(z) = a_0 (z - \alpha)^r \prod_{i=1}^{n-r} (z - \alpha_i).$$

12.2. Многочлены с действительными коэффициентами.

Многочлены с действительными коэффициентами обладают рядом свойств, которые понадобятся при вычислении интегралов.

Теорема 12.3. Если в многочлене с действительными коэффициентами

$$A_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

комплексное число z заменить на сопряженное число $\bar{z}$, то значение многочлена тоже заменится на сопряженное.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное слагаемое многочлена $a_m z^{n-m}$. Заменим в нем z на $\bar{z}$ $a_m \bar{z}^{n-m}$. Воспользуемся следующими свойствами сопряженных комплексных чисел

$$1. \overline{z^r} = \bar{z}^r, \quad 2. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

Из первого свойства следует $a_m \bar{z}^{n-m} = \overline{a_m z^{n-m}}$. Применив эту процедуру к каждому слагаемому полинома $A_n(z)$ из второго условия получим $A_n(\bar{z}) = \overline{A_n(z)}$. $\square$

Теорема 12.4. Если многочлен с действительными коэффициентами

$$A_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

имеет комплексный корень z_0 то комплексно сопряженное число $\bar{z}_0$ также будет корнем этого многочлена.

Доказательство. В соответствии с теоремой 12.3 имеем $A_n(\bar{z}_0) = \overline{A_n(z_0)}$. По условию теоремы $A_n(z_0) = 0$, тогда $\overline{A_n(z_0)} = 0$ и $A_n(\bar{z}_0) = 0$. Следовательно, $\bar{z}_0$ является корнем многочлена. $\square$

Условия тождественности двух многочленов. Два многочлена $A_n(z)$ и $B_n(z)$ тождественно равны $A_n(z) = B_n(z)$, если у них коэффициенты при одинаковых степенях одинаковые.

Пример 12.1. При каких значениях A, B, C справедливо равенство

$$Az(z-1) + Bz(z-2) + C(z-1)(z-2) = z^2 + 2?$$

Преобразуем многочлен слева

$$(A+B+C)z^2 + (-A-2B-3C)z + 2C = z^2 + 2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений для определения искомых коэффициентов A, B, C

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B-3C=0 \\ 2C=2 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получаем : $A=3, B=-3, C=1$

12.3. Разложение рациональных дробей

Определение 12.3. Функция называется рациональной, если любое ее значение можно получить, выполняя конечное число арифметических операций (сложение, вычитание, умножение деление).

Многочлены являются рациональными функциями.

Определение 12.4. Дробно рациональная функция $\frac{B_m(x)}{A_n(x)}$ называется правильной, если $m < n$, т. е. порядок многочлена $A_n(x)$ больше порядка полинома $B_m(x)$

Лемма 12.1. (о разложении правильной дробно рациональной функции) Пусть $\frac{B_m(x)}{A_n(x)}$ правильная дробно рациональная функция и действительное число α является корнем уравнения $A_n(x) = 0$ кратности r .

$$A_n(x) = (x - \alpha)^r D_{n-r}(x). \quad (12.5)$$

Тогда существует число A и многочлен $\beta(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{\beta(x)}{(x - \alpha)^{r-1} D_{n-r}(x)} \quad (12.6)$$

где дробь $\frac{\beta(x)}{(x - \alpha)^{r-1} D_{n-r}(x)}$ является правильной

Доказательство. Принимая во внимание (12.5), можно записать

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \frac{B_m(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)}$$

Прибавим и вычтем выражение $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$ в правой части данного равенства

$$\begin{aligned} \frac{B_m(x)}{A_n(x)} &= \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \left(\frac{B_m(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^r} \right) = \\ &= \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B_m(x) - AD_{n-r}(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)} \end{aligned}$$

Учитывая то, что индексы соответствуют порядкам многочленов, делаем вывод о том, что дробь

$$\frac{B_m(x) - AD_{n-r}(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)}$$

является правильной.

Выберем A так, чтобы число α было корнем уравнения $B_m(x) - AD_{n-r}(x) = 0$. Тогда из равенства $B_m(\alpha) - AD_{n-r}(\alpha) = 0$ получаем $A = B_m(\alpha)/D_{n-r}(\alpha)$. Так как число α является корнем, то можно записать

$$\frac{B_m(x) - AD_{n-r}(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)} = \frac{(x-\alpha)\beta(x)}{(x-\alpha)^r D_{n-r}(x)} = \frac{\beta(x)}{(x-\alpha)^{r-1} D_{n-r}(x)}. \square$$

Лемма 12.2. Пусть $\frac{B_m(x)}{A_n(x)}$ правильная дробно рациональная функция и комплексное число $z = \alpha + i\beta$ является корнем уравнения $A_n(x) = 0$ кратности r , т.е. $A_n(x) = (x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)$, где $D_{n-2r}(z) \neq 0$, $x^2 + px + q = (x-z)(x-\bar{z})$. Тогда существуют числа N и M и многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \frac{Nx + N}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} D_{n-2r}(x)}$$

где дробь $\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} D_{n-2r}(x)}$ является правильной.

Доказательство. Принимая во внимание (12.5), можно записать

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \frac{B_m(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)}$$

Прибавим и вычтем выражение $\frac{Nx + N}{(x^2 + px + q)^r}$ в правой части данного равенства

$$\begin{aligned} \frac{B_m(x)}{A_n(x)} &= \frac{Nx + N}{(x^2 + px + q)^r} + \left(\frac{B_m(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)} - \frac{Nx + N}{(x^2 + px + q)^r} \right) = \\ &= \frac{Nx + N}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{B_m(x) - (Nx + N)D_{n-2r}(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)} \end{aligned}$$

Дробь

$$\frac{B_m(x) - (Nx + N)D_{n-2r}(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)}$$

является правильной. Выберем числа N и M так, чтобы число $z = \alpha + i\beta$, а следовательно, и число $\bar{z} = \alpha - i\beta$ были корнями уравнения $B_m(x) - (Nx + M)D_{n-2r}(x) = 0$. Тогда из уравнения $B_m(z) - (Nz + M)D_{n-2r}(z) = 0$ получаем $Nz + M = B_m(z)/D_{n-2r}(z)$. Выделим действительную и мнимую части комплексного числа $B_m(z)/D_{n-2r}(z) = C + iK$. Тогда получим $N(\alpha + i\beta) + M = C + iK$ откуда получаем систему уравнений для определения коэффициентов N и M

$$\begin{cases} N\alpha + M = C, \\ N\beta = K. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим $N = K/\beta$, $M = (C\beta - K\alpha)/\beta$. Тогда будет справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \frac{B_m(x) - (Nx + N)D_{n-2r}(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)} &= \frac{(x^2 + px + q)P(x)}{(x^2 + px + q)^r D_{n-2r}(x)} = \\ &= \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} D_{n-2r}(x)}. \square \end{aligned}$$

Докажем теорему с упрощенными условиями.

Теорема 12.5. Пусть $\frac{B_m(x)}{A_n(x)}$ правильная дробно рациональная функция с вещественными коэффициентами. $A_n(x) = (x - \alpha)^r (x^2 + px + q)^g$, $r + 2g = n$. Корни двучлена $x^2 + px + q$ — комплексные. Тогда справедливо следующее разложение

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{(x - \alpha)^i} + \sum_{j=1}^g \frac{N_j x + M_j}{(x^2 + px + q)^j}.$$

Доказательство. Применим лемму 12.1

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{\beta_r(x)}{(x-\alpha)^{r-1}(x^2+px+q)^g}.$$

Так как вторая дробь в правой части правильная, применяем к ней лемму 12.1

$$\frac{\beta_r(x)}{(x-\alpha)^{r-1}(x^2+px+q)^g} = \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{\beta_{r-1}(x)}{(x-\alpha)^{r-2}(x^2+px+q)^g}.$$

Продолжаем эту процедуру до тех пор пока не получим следующую формулу

$$\frac{B_m(x)}{A_n(x)} = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{(x-\alpha)^i} + \frac{\beta_1(x)}{(x^2+px+q)^g}.$$

Далее аналогичным образом применяя лемму 12.2 к правильной дроби $\frac{\beta_1(x)}{(x^2+px+q)^g}$ получим утверждение теоремы. $\square$

Пример 12.2. Разложить на простые слагаемые дробь

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)}$$

В данном случае имеем корни: $x=2$ имеет кратность равную двум и корень $x=1$. Потому разложение будет иметь вид

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1}.$$

Теперь необходимо определить неизвестные коэффициенты. Приводим правую часть к общему знаменателю

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{A_1(x-1) + A_2(x-2)(x-1) + A_3(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

Тогда получаем следующее полиномиальное равенство

$$A_1(x-1) + A_2(x-2)(x-1) + A_3(x-2)^2 = x+1.$$

Классический способ решения этого уравнения состоит в том, что необходимо раскрыть скобки и составить систему уравнений, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях.

$$(A_2 + A_3)x^2 + (A_1 - 3A_2 - 4A_3)x + (-A_1 + 2A_2 + 4A_3) = x + 1.$$

Есть другой способ, основанный на следующих рассуждениях. Так как полиномиальное равенство должно быть справедливо для любых значений аргумента x , то можно задать некоторые значения x , и составить уравнения для определения неизвестных коэффициентов. При этом

можно эти значения выбрать так, чтобы получалась простая система уравнений.

$x = 1 \implies A_3 (-1)^2 = 2 \implies A_3 = 2$; $x = 2 \implies A_1 = 3$: Приравниваем коэффициенты при x^2

$$A_2 + A_3 = 0 \implies A_2 = -A_3 = -2.$$

Таким образом получили следующее разложение дроби

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x-1)} = \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-1}.$$

Пример 12.3. Разложить на простые слагаемые дробь

$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)(x-1)}.$$

В данном случае имеем корни: $x = 1$, $x = -1 + i$, $x = -1 - i$. Потому разложение будет иметь вид

$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Nx+M}{x^2+2x+2}.$$

Приводим к общему знаменателю и выписываем числитель, приравняв его к исходному числителю заданной дроби

$$(x^2+2x+2)A + (x-1)(Nx+M) = x^2+1.$$

Один коэффициент находится легко. $x = 1 \implies 5A = 2 \implies A = 2/5$. Раскроем скобки

$$(A+N)x^2 + (2A+M-N)x + (2A-M) = x^2+1.$$

Получаем $A+N=1 \implies N=1-2/5=3/5$; $2A-M=1 \implies M=2A-1=4/5-1=-1/5$.

12.4. Интегрирование дробно рациональных функций

Простейшими дробно рациональными функциями называются правильные дроби вида:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \text{ II. } \frac{A}{(x-a)^m}, m \in \mathbb{Z}, m > 1, \text{ III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, n \in \mathbb{Z}, n > 1, p^2-4q < 0.$$

Первые три типа интегрируются достаточно легко

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln |x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{A}{(1-m) \cdot (x-a)^{m-1}} + C.$$

$$\begin{aligned}
\text{III. } \int \frac{(Mx + N)}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{(Mx + N)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} z = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}, \\ x = z - \frac{p}{2}, \quad dx = dz \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{M(z - \frac{p}{2}) + N}{z^2 + a^2} dz = M \int \frac{z dz}{z^2 + a^2} + \left(N - M\frac{p}{2}\right) \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \\
&= \frac{M}{2} \ln |z^2 + a^2| + \left(N - M\frac{p}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C, \text{ если } a^2 > 0, \\
&= \frac{M}{2} \ln |z^2 + a^2| + \left(N - M\frac{p}{2}\right) \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \text{ если } a^2 < 0.
\end{aligned}$$

Подставив $z = x + \frac{p}{2}$, получим ответ.

$$\begin{aligned}
\text{IV. } \int \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{\frac{M}{2}(2x + p) + N - \frac{MP}{2}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.
\end{aligned}$$

Видно, что первый интеграл табличный, а для второго, когда $q - \frac{p^2}{4} > 0$ выведем рекуррентную формулу, введя обозначения $z = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Обозначим $J_n = \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^n}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^n} &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(z^2 + a^2)^n}, \quad dv = dz, \\ du = -\frac{2nz}{(z^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = z \end{array} \right| = \\
&= \frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + \int \frac{2nz^2 dz}{(z^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(z^2 + a^2) - a^2}{(z^2 + a^2)^{n+1}} dz = \\
&= \frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание обозначения

$$J_n = \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^n}, \quad J_{n+1} = \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{n+1}}, \text{ получим}$$

$J_n = \frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$, откуда получаем рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n.$$

Пример 12.4. Вычислить $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$. В данном случае $a = 2$, $n + 1 = 3$. Пользуемся рекуррентной формулой

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} = \frac{1}{16} \frac{x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{16} \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

К интегралу в правой части снова применяем рекуррентную формулу, где $n + 1 = 2$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{8} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{8} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

Подставив это значение в первую формулу, получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} = \frac{1}{16} \frac{x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{124} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{3}{256} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Более сложные функции интегрируются путем разложения подынтегральных функций на простые слагаемые. Следует особо отметить, что дробно рациональные функции должны быть правильными.

12.5. Методические указания по решению задач

Пример 12.5 Вычислить $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx$.

Решение. Подынтегральная дробь неправильная, поэтому разделим числитель $x^3 + x + 2$ на знаменатель $x^3 - 7x^2 + 12x$:

$$= \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} - \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^3 - 7x^2 + 12x} = \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} - 1.$$

Таким образом, $\frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} = 1 + \frac{7x^2 - 11x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x}$.

Разложим знаменатель на множители

$$x^3 - 7x^2 + 12x = x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4) \cdot (x - 3).$$

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx = \int \left(1 + \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x - 4)(x - 3)} \right) dx = \int dx +$$

$$+ \int \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x-4)(x-3)} dx = \left[\text{Дробь} \quad \frac{7x^2 - 11x + 2}{x(x-4)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-3} \right].$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем числители или умножая обе части равенства на $x(x-4)(x-3)$, получим

$$7x^2 - 11x + 2 = A(x-4)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-4).$$

Найдем коэффициент A , B и C используя частные значения $x = 0$, $x = 4$, $x = 3$ — корни знаменателя.

$$\text{При } x = 0, 2 = -12A, \text{ т.е. } A = -\frac{1}{6}. \text{ При } x = 4, 70 = 4B, \text{ т.е. } B = \frac{35}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{При } x = 3, 32 = -3C, \text{ т.е. } C = -\frac{32}{3} \Big] = \\ = x + \int \left(-\frac{1}{6x} + \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{x-4} - \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{x-3} \right) dx = \\ = x - \frac{1}{6} \ln |x| + \frac{35}{2} \ln |x-4| - \frac{32}{3} \ln |x-3| + C. \end{aligned}$$

Пример 12.6. Вычислить $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция — правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x-1)(x+1).$$

Знаменатель имеет два действительных корня $x = 0$, один действительный корень $x = 1$ и один $x = -1$. Поэтому

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Умножим обе части равенства на $x^2(x-1)(x+1)$, получим

$$1 = Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1).$$

Найдем коэффициенты комбинированным методом.

$$\text{При } x = 0, 1 = -B, \text{ т.е. } B = -1. \text{ При } x = 1, 1 = 2C, \text{ т.е. } C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{При } x = -1, 1 = -2D, \text{ т.е. } D = -\frac{1}{2}.$$

Осталось найти коэффициент A . Для этого сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Коэффициент при x^3 в левой части равен нулю (x^3 в левой части равенства отсутствует), а в правой — $A + C + D$. Получим

$$A + C + D = 0, \quad A = -(C + D) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x+1)} &= \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 12.7 Вычислить $\int \frac{x-7}{x^3-x^2+5x-5} dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на множители:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 5x - 5 &= (x^3 - x^2) + (5x - 5) = \\ &= x^2(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x^2+5). \end{aligned}$$

Знаменатель имеет действительный корень $x=1$ и комплексно-сопряженные $x=\pm\sqrt{5}i$. Поэтому разложение на элементарные дроби имеет вид $\frac{x-7}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$. Умножим обе части равенства на $(x-1)(x^2+5)$ получим

$$x-7 = A(x^2+5) + Bx(x-1) + C(x-1).$$

Найдем коэффициенты A, B, C комбинированным методом. При $x=1$, $-6=6A$, т.е. $A=-1$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства.

При x^2 имеет $0=A+B$, при x^1 имеет $1=-B+C$. $A+B=0$, $B=-A$, т.е. $B=1$. $C-B=1$, $C=B+1$, т.е. $C=2$.

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-7}{(x-1)(x^2+5)} dx &= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+5} \right) dx = - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x+2}{x^2+5} dx = \\ &= -\ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+5} + 2 \int \frac{dx}{x^2+5} = -\ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+5| + \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

12.6. Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+6x+8}$.	2. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$.
3. $\int \frac{(x^2+x-1)dx}{x^3+x^2-6x}$.	4. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+3}$.
5. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$.	6. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$.
7. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^3-4x^2+x+6}$.	8. $\int \frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8} dx$.
9. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.	10. $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$.

11. $\int \frac{dx}{(x+5)(x-3)^2}.$	12. $\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}.$
13. $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}.$	14. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$
15. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$	16. $\int \frac{y^2dy}{y^3+5y^2+8y+4}.$
17. $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}.$	18. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}.$
19. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}.$	20. $\int \frac{(7x^3-9)dx}{x^4-5x^3+6x^2}.$
21. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$	22. $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx.$
23. $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx.$	24. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx.$
25. $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}.$	26. $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}.$
27. $\int \frac{z^2dz}{z^4+z^2-2}.$	28. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}.$
29. $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$	30. $\int \frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx.$
31. $\int \frac{x-3}{x(x^2-6x+13)}dx.$	32. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

- 12.6.1. Ответы.** **1.** $\ln \left| \frac{(x+4)^{5/2}}{(x+2)^{3/2}} \right| + C$. **2.** $\ln \left| \frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}} \right| + C$.
3. $\ln \sqrt[6]{x(x-2)^3(x+3)^2} + C$. **4.** $x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-3)^9}{x-1} \right| + C$.
5. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{(x+1)^3} \right| + \frac{16}{3} \ln |x+2| + C$.
6. $5x + \ln |x^2(x-2)^3(x+2)^4| + C$. **7.** $\ln \left| \frac{(x-3)}{(x+1)^{1/3}(x-2)^{5/3}} \right| + C$.
8. $\ln \left| \frac{(x-1^3)(x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C$.
9. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C$.
10. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C$.
11. $\frac{1}{64} \ln \left| \frac{x+5}{x-3} \right| - \frac{1}{8(x-3)} + C$. **12.** $\frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^2} + C$.
13. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \frac{x^2}{(x+1)^2} + C$. **14.** $C - \frac{x}{(x-1)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|}$.

- 15.** $C - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2$. **16.** $\frac{4}{y+2} + \ln|y+1| + C$.
17. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x(x-2)} + C$. **18.** $C - \frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}$ **19.**
 $\ln \frac{x^4}{|(x-1)^3|} - \frac{9}{x-1} + C$.
20. $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + 20 \ln|x-3| - \frac{47}{4} \ln|x-2| + C$.
21. $x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C$.
22. $\frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32} \ln|x+2| + C$.
23. $2 \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.
24. $\frac{31}{108} \ln|x-3| + \frac{29}{108} \ln|x+3| + \frac{2}{9} \ln(x^2+9) - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$.
25. $\frac{1}{8} \ln \frac{x^2+1}{x^2+5} + C$. **26.** $\ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.
27. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C$. **28.** $\frac{1}{9} \ln \left| \frac{x^2+2}{(x-1)^2} \right| -$
 $-\frac{1}{9\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3(x-1)} + C$.
29. $C - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \operatorname{arctg} x$. **30.** $C - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+$
 $+13| + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3}$.
31. $\frac{3}{26} \ln(x^2-6x+13) - \frac{3}{13} \ln|x| + \frac{2}{13} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C$.
32. $\frac{1}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$.

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

13.1. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\cos x, \sin x) dx$. Для вычисления таких интегралов используется подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В результате такой подстановки, получим

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Получили интеграл от рациональной функции.

Пример 13.1. Вычислить $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C.$$

Интегралы вида $\int \cos^m x \sin^n x dx$. Рассмотрим два случая. 1. Числа m и n являются четными. В этом случае пользуемся формулами понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 13.2. Вычислить $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

2. Хотя бы одно из чисел m и n является нечетным. Пусть n — нечетное число. Тогда

$$\begin{aligned} \int \cos^m x \sin^n x dx &= \int \cos^m x \sin^{n-1} x \sin x dx = \\ &= |\cos x = t| = - \int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Получился интеграл от степенной функции.

Пример 13.3. Вычислить $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \\ &= |\sin x = t| = \int (1 - t^2) t^2 dt = \int (t^2 - t^4) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int \sin n x \cos m x dx$, $\int \sin n x \sin m x dx$, $\int \cos n x \cos m x dx$.

Данные интегралы преобразуются в интегралы, доступные непосредственному интегрированию с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \sin n x \cos m x &= \frac{1}{2} (\sin(n + m)x + \sin(n - m)x), \\ \sin n x \sin m x &= \frac{1}{2} (\cos(n - m)x - \cos(n + m)x), \\ \cos n x \cos m x &= \frac{1}{2} (\cos(n - m)x + \cos(n + m)x). \end{aligned}$$

Пример 13.4. Вычислить $\int \sin x \cos 3x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \\ &= -\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

13.2. Интегралы от иррациональных функций

Интегралы вида $\int R(\sqrt[r]{x}, \dots, \sqrt[r]{x}) dx$. Для вычисления используется замена переменных

$x = t^r$, где r — наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_k}$.

Пример 13.5. Вычислить $\int \frac{\sqrt[4]{x} dx}{\sqrt{x} + 1}$.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \\ t = \sqrt[4]{x} \end{array} \right| = 4 \int \frac{t^4 dt}{t^2 + 1} =$$

выделяем целую часть, поделив t^4 на $t^2 + 1$

$$\begin{aligned} &= 4 \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 4 \left(\frac{t^3}{3} + t + \operatorname{arctgt} \right) + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 4 \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int R \left(\sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+k}}, \dots, \sqrt[r_k]{\frac{ax+b}{cx+k}} \right) dx$. Для вычисления используется замен переменных $\frac{ax+b}{cx+k} = t^r$, где r — наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_k}$.

Пример 13.6. Вычислить $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x} = t^2 \quad x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} = 2 \int \left(\frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1} \right) dt. \end{aligned}$$

Необходимо найти неизвестные коэффициенты

$$A(t-1)^2 + C(t+1)^2 + B(t-1)(t+1) + D(t+1)^2(t-1) = t^2$$

При $x = -1$ имеем $4A = 1! \Rightarrow A = 1/4$, при $x = 1$ имеем $4C = 1 \Rightarrow C = 1/4$.

Если раскрыть скобки то коэффициент при t^3 , $B + D$, а свободный член $A + C + B - D$. Составляем систему

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ \frac{1}{2} + B - D = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4}, \\ D = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Подставив значения коэффициентов, получим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right| - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \right) + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{Nx + M}{\sqrt{x^2 + bx + c}} dx$. В подкоренном выражении требуется выделить полный квадрат

$$\begin{aligned} \int \frac{Nx + M}{\sqrt{x^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{Nx + M}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x + \frac{b}{2} = t, \quad dx = dt \\ x = t - \frac{b}{2}, \quad -\frac{b^2}{4} + c = a \end{array} \right| = N \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + a}} + \left(M - N\frac{b}{2}\right) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a}} = \\ &= N\sqrt{t^2 + a} + \left(M - N\frac{b}{2}\right) \ln \left| t + \sqrt{t^2 + a} \right| + C = \\ &= N\sqrt{x^2 + bx + c} + \left(M - N\frac{b}{2}\right) \ln \left| x + \frac{b}{2} + \sqrt{x^2 + bx + c} \right| + C. \end{aligned}$$

13.3. Подстановки Эйлера

Эти подстановки применяются в тех случаях, когда в подынтегральной функции есть выражение $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Изучим две подстановки:

1. Пусть $a > 0$. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$. Возведем обе части данного уравнения в квадрат

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2tx\sqrt{a} + ax^2.$$

Разрешим полученное уравнение относительно x

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} \implies dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt.$$

2. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения. Тогда

$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$. Возведем обе части данного уравнения в квадрат

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= t^2(x - x_1)^2 \implies a(x - x_2) = t^2(x - x_1) \implies \\ \implies x &= \frac{x_1 t^2 - ax_2}{t^2 - a} \implies dx = \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2 - a)^2} dt. \end{aligned}$$

Смотреть пример 13.16.

13.4. Тригонометрические подстановки

Рассмотрим три типа подстановок

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = |x = asint, dx = acostdt| = a^2 \int \cos^2 t dt.$
2. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = |x = atgt, dx = \frac{adt}{\cos^2 t}| = a^2 \int \frac{dt}{\cos^3 t}.$
3. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = |x = \frac{a}{cost}, dx = \frac{asint}{\cos^2 t} dt| = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt.$

В результате приведенных подстановок получаются достаточно легко интегрируемые интегралы. Смотреть пример 13.17

13.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Рассмотрим следующий тип интегралов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

подынтегральное выражение которых носит название биномиальных дифференциалов.

Теорема Чебышева П. Л. *Интегралы от биномиальных дифференциалов выражаются через элементарные функции в трех случаях* 1. p - целое; 2. $p = \frac{e}{s}$, а $\frac{m+1}{n}$ - целое; 3. $p = \frac{e}{s}$ а $\frac{m+1}{n} + p$ - целое.

1. Если p - целое, то получаем степенную функцию при целых m и n , или иррациональную функцию при дробных m и n . Способы интегрирования таких интегралов уже рассмотрены.

2. Если $p = \frac{e}{s}$, а $\frac{m+1}{n}$ - целое, то делается замена $a + bx^n = t^s \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{t^s - a}{b}} \Rightarrow$

$$dx = \frac{st^{s-1} dt}{\sqrt[n]{b} n \sqrt[n]{(t^s - a)^{n-1}}}.$$

Подставив полученные выражения в интеграл, получим

$$\int \frac{(t^s - a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} t^e \frac{st^{s-1}}{nb^{\frac{1}{n}} (t^s - a)^{\frac{n-1}{n}}} dt = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int (t^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{s+e-1} dt.$$

Так как s , e и $\frac{m+1}{n}$ являются целыми величинами, то в результате, в зависимости от их значений, получим степенную или дробно рациональную функцию. Смотреть пример 13.18.

3. Если $p = \frac{e}{s}$, а $\frac{m+1}{n} + p$ - целое, то делается замена $\frac{a}{x^n} + b = t^s \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{a}{t^s - b}},$

$$dx = \frac{1}{n \sqrt[n]{\left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{n-1}}} \left(-\frac{ast^{s-1}}{(t^s - b)^2} \right) dt.$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(t^s - b)^{\frac{m}{n}}} \left(a + b \frac{a}{t^s - b} \right)^{\frac{e}{s}} \frac{(t^s - b)^{\frac{n-1}{n}}}{na^{\frac{n-1}{n}}} \left(-\frac{ast^{s-1}}{(t^s - b)^2} \right) dt = \\ = -\frac{sa^{\frac{m+1}{n}}}{n} \int \frac{(t^s - b)^{1 - (\frac{m+1}{n} + p)}}{(t^s - b)^2} t^{e+s-1} dt. \end{aligned}$$

Так как s , e и $\frac{m+1}{n} + p$ являются целыми величинами, то в результате, в зависимости от их значений, получим степенную или дробно рациональную функцию. Смотреть пример 13.19.

Замечания. Следует отметить, что не всякая элементарная функция имеет элементарную первообразную функцию. В качестве примера можно привести интегралы от дифференциальных биномов, для которых не выполнена теорема Чебышева. Следующие интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx,$$

где n — натуральное число, тоже не выражаются через элементарные функции. При этом некоторые интегралы не имеющие первообразные в элементарных функциях, играют существенную роль в математике и в ее приложениях. К ним следует отнести интеграл

$\int e^{-x^2} dx$, который широко используется в теории вероятности, а также эллиптические интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \quad 0 < k < 1.$$

13.6. Контрольные вопросы

1. Какие типы интегралов от тригонометрических функций вам известны, и как они интегрируются?
2. Какие типы интегралов от иррациональных функций вам известны, и как они интегрируются?
3. Для чего используются постановки Эйлера?
4. Какие тригонометрические подстановки вам известны, и для каких интегралов они применяются?
5. Сформулируйте теорему Чебышева.

13.7. Методические указания по решению примеров

Пример 13.7. Вычислить $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int (tg^2 x + 1) \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = tg x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \\ &= \int (t^2 + 1) dt = \frac{t^3}{3} + t + C = \frac{tg^3 x}{3} + tg x + C.\end{aligned}$$

Пример 13.8. Вычислить $\int \frac{dx}{\cos x}$.**Решение.**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d(\sin x)}{\cos^2 x} = |\sin x = t| = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.\end{aligned}$$

Пример 13.9. Вычислить $\int tg^2 x dx$.**Решение.**

$$\int tg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = tg x - x + C.$$

Пример 13.10. Вычислить $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx$.**Решение.** Преобразуем произведение функций в сумму

$$\begin{aligned}\sin 5x \cdot \cos 8x &= \frac{1}{2} (\sin (5-8)x + \sin (5+8)x) = \frac{1}{2} (\sin (-3x) + \sin 13x) = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 13x - \sin 3x).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 13x - \sin 3x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{13} \cos 13x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) + C.\end{aligned}$$

Пример 13.11. Вычислить $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cdot \cos^3 x dx &= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) d(\sin x) . \\ \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = [\sin x = t] = \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

Пример 13.12. Вычислить $\int \sin^4 2x dx$.**Решение.** Преобразуем подынтегральную функцию

$$\sin^4 2x = (\sin^2 2x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) = \frac{1}{8} (2 - 4 \cos 4x + 1 + \cos 8x) = \\
&= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 4x + \cos 8x).
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 4x + \cos 8x) \, dx = \\
&= \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C.
\end{aligned}$$

Пример 13.13. Вычислить $\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x}$.

Решение. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через новую переменную $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$,

$$dx = \frac{2 dt}{1 + t^2} \cdot 2t \cdot \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

$$\frac{dt}{5 + 3 \sin t} = \frac{2 dt}{\left(5 + \frac{6t}{1 + t^2}\right) \cdot (1 + t^2)} = \frac{2 dt}{5t^2 + 6t + 5}.$$

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x} = 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 6t + 5} =$$

Выделим полный квадрат

$$\begin{aligned}
5t^2 + 6t + 5 &= 5 \left(t^2 + \frac{6}{5}t + 1 \right) = 5 \left(t^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}t + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} + 1 \right) = \\
&= 5 \left(\left(t + \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{16}{25} \right).
\end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x} &= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} \operatorname{arctg} \frac{\left(t + \frac{3}{5} \right) \cdot 5}{4} + C = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{4} + C.
\end{aligned}$$

Пример 13.14. Вычислить $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \, dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \, dx &= \int \frac{x^2}{(x-1)^{1/2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} x-1 = t^2, \quad x = t^2 + 1, \\ dx = 2t \, dt, \quad t = \sqrt{x-1} \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{(t^2 + 1)^2}{t} \cdot 2t \, dt = 2 \int (t^4 + 2t^2 + 1) \, dt = \frac{2}{5} t^5 + \frac{4}{3} t^3 + 2t + C =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C.$$

Пример 13.15. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Выполним подстановку $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3 \cos t dt}{9 \sin t \cdot \sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{3 \sin t \cdot 3 \cos t} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin t} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \left| t = \arcsin \frac{x}{3} \right| = \frac{1}{9} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\left(\arcsin \frac{x}{3}\right)}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Известно, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\arcsin \frac{x}{3}}{2} &= \frac{\sin \left(\arcsin \frac{x}{3}\right)}{1 + \cos \left(\arcsin \frac{x}{3}\right)} = \frac{\frac{x}{3}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{3}\right)}} = \\ &= \frac{x}{3 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\right)} = \frac{x \cdot 3}{3 \left(3 + \sqrt{9 - x^2}\right)} = \frac{x}{3 + \sqrt{9 - x^2}}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательный ответ $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{3 + \sqrt{9-x^2}} \right| + C$.

Пример 13.16. Найти $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \\ x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2} dt \end{array} \right| = \\ &= 2 \int \left(t - \frac{t^2 - 1}{2t + 1} \right) \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2} dt = 2 \int \frac{(t^2 + t + 1)^2}{(2t + 1)^3} dt \end{aligned}$$

Под интегралом неправильная дробь. Поэтому выполним деление

$$\begin{aligned}
 & t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 8t^3 + 12t^2 + 6t + 1 \\ \frac{t}{8} + \frac{1}{16} \end{array} \right. \\
 & - \left(t^4 + \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{8}t \right) \\
 & \quad \frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{4}t^2 + \frac{15}{8}t + 1 \\
 & - \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{8}t + \frac{1}{16} \right) \\
 & \quad \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 2 \int \frac{(t^2 + t + 1)^2}{(2t + 1)^3} dt &= \int \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right) dt + \int \frac{3t^2 + 3t + \frac{15}{8}}{(2t + 1)^3} dt = \\
 &= \frac{1}{8} (t^2 + t) + \int \left(\frac{A}{(2t + 1)^3} + \frac{B}{(2t + 1)^2} + \frac{C}{2t + 1} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Определяем неизвестные коэффициенты

$$A + B(2t + 1) + C(2t + 1)^2 = 3t^2 + 3t + \frac{15}{8}.$$

При $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{9}{8}$. Если раскрыть скобки, то получим

$$4Ct^2 + (2B + 4C)t + (A + B + C) = 3t^2 + 3t + \frac{15}{8}.$$

Получаем систему уравнений для определений искомых коэффициентов

$$\begin{cases} 4C = 3, \\ 2B + 4C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{3}{4}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{8} (t^2 + t) + \int \left(\frac{9}{8(2t + 1)^3} + \frac{3}{4(2t + 1)} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{8} (t^2 + t) - \frac{9}{32(2t + 1)^2} + \frac{3}{8} \ln |2t + 1| + C = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right)^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) - \\
 &- \frac{9}{32 \left(2 \left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + 1 \right)^2} + \frac{3}{8} \ln \left| 2 \left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + 1 \right| + C.
 \end{aligned}$$

Пример 13.17. Вычислить $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$. Выделим полный квадрат

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3-2x-x^2} dx &= \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+1 = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ t = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{array} \right| = 4 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt = \\ &= 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = \\ &= 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Пример 13.18. Вычислить $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Это интеграл от биномиального дифференциала.

В данном случае $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-(1/2)+1}{1/4} = 2$.
Имеем второй случай.

$$1+x^{\frac{1}{4}} = t^3, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 4(t^3-1)^3 3t^2 dt.$$

В результате подстановки в исходный интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx &= 12 \int (t^3-1)^{-2} t (t^3-1)^3 t^2 dt = \\ &= 12 \int (t^3-1) t^3 dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C. \end{aligned}$$

Пример 13.19. Вычислить $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx$.

Решение. Это интеграл от биномиального дифференциала.

Перепишем интеграл в виде $\int x^{-\frac{7}{5}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} dx$ и сравним его с $\int x^m (a+bx^n)^p dx$. $m = -\frac{7}{5}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{5}$. Вычислим $\frac{m+1}{n} = -\frac{6}{5}$ — не целое число, далее $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{6}{5} + \frac{1}{5} = -1$ — целое число.

Получился третий случай. Выполним подстановку $x^{-\frac{1}{3}} + 1 = t^5$,

$$x = (t^5-1)^{-3}, \quad dx = -3(t^5-1)^{-4} \cdot 5t^4 dt = -15t^4(t^5-1)^{-4} dt.$$

$$\int x^{-\frac{7}{5}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{-\frac{7}{5}} \left(x^{\frac{1}{3}} (x^{-\frac{1}{3}} + 1) \right)^{\frac{1}{5}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int x^{-\frac{7}{5}} \cdot x^{\frac{1}{15}} \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{-\frac{4}{3}} \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{1}{5}} dx = \\
&= \int \left((t^5 - 1)^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot t \cdot (-15) t^4 \cdot (t^5 - 1)^{-4} dt = \\
&= -15 \int (t^5 - 1)^4 \cdot t^5 (t^5 - 1)^{-4} dt = -15 \int t^5 dt = -\frac{15 t^6}{6} + C = -\frac{5}{2} t^3 = \\
&= \left| t = \sqrt[5]{x^{-\frac{1}{3}} + 1} \right| = -\frac{5}{2} \sqrt[5]{\left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^3} + C.
\end{aligned}$$

13.8. Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \sin 6x \cdot \cos 7x dx.$	2. $\int \cos 3x \cdot \cos 9x dx.$
3. $\int \sin 2x \cdot \sin 5x dx.$	4. $\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx.$
5. $\int \cos 6x \cdot \cos 8x dx.$	6. $\int \sin 3x \cdot \sin 7x dx.$
7. $\int \sin^3 x dx.$	8. $\int \cos^5 x dx.$
9. $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx.$	10. $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$
11. .	12. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}.$
13. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$	14. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$
15. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 2 \sin x - 1}.$	16. $\int \cos^4 x dx.$
17. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$	18. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$
19. $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$	20. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$
21. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$	

22. $\int \frac{dx}{\sin x}.$	23. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
24. $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx.$	25. $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}.$
26. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin 2x}.$	27. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$
28. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$	29. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x + 3 \cos x}.$
30. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx.$	31. $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx.$
32. $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}.$	33. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$
34. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x} dx.$	35. $\int \cos^2 \left(\frac{7}{2}x\right) dx.$

36. $\int \sin^4 3x dx$.	37. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$.
38. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx$.	39. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$.
40. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.	41. $\int \frac{dx}{\cos^3 2x}$.
42. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.	43. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.
44. $\int \sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{4} dx$.	45. $\int \sin 4x \cdot \sin 6x dx$.
46. $\int \frac{1}{\operatorname{ctg}^4 x} dx$.	47. $\int \operatorname{ctg}^5 4x dx$.
48. $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$.	49. $\int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$.
50. $\int x \sqrt{1 + x^4} dx$.	51. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$.
52. $\int x^5 (1 + x^2)^{\frac{2}{3}} dx$.	53. $\int \frac{\sqrt{4 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.
54. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}} dx$.	55. $\int \sqrt[4]{(1 + \sqrt{x})^3} dx$.
56. $\int \frac{\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx$.	57. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}}$.
58. $\int \frac{2 - x}{4x^2 + 16x - 12} dx$.	59. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.
60. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$.	61. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - 3x^2}}$.
62. $\int \frac{(3x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 7x + 8}}$.	63. $\int \frac{(5x + 11)dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}$.

Ответы

1. $\frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C$.	2. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{12} \sin 12x \right) + C$.
3. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{7} \sin 7x \right) + C$.	4. $\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$.
5. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{14} \sin 44x \right) + C$.	6. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{10} \sin 10x \right) + C$.
7. $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.	8. $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$.
9. $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.	10. $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C$.
11. $2\sqrt{\sin x} \left(1 - \frac{1}{5} \sin^2 x \right) + C$.	12. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C$.

22. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

13. $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$	14. $\operatorname{arctg} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
15. $\frac{1}{2} \ln \left 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right + C.$	16. $\frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C.$
17. $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$	
18. $\frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x \right) + C$	
19. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$	20. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x + C.$
21. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x + C.$	

23. $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$ **24.** $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
25. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C.$ **26.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3} + C.$ **27.** $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$
28. $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$ **29.** $C - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}$ **30.** $\ln(2 + \cos x) +$
 $+ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
31. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2} \right| + C.$ **32.** $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$
33. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C.$ **34.** $\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - x + C.$ **35.** $\frac{1}{2} x +$
 $+ \frac{1}{14} \sin 7x + C.$
36. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.$ **37.** $\frac{1}{16} x + \frac{1}{64 \sin 2x} - \frac{1}{64} \sin 4x -$
 $- \frac{1}{192} \sin 6x + C.$
38. $C - \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x.$ **39.** $\frac{1}{2} \cos^2 x + 3 \cos x + 8 \ln |\cos x - 3| +$
 $+ C.$
40. $C - \frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}.$ **41.** $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + \frac{1}{4} \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} + C.$
42. $\ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C.$
43. $\cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x) + C.$ **44.** $C - 6 \cos \frac{x}{12} - \frac{6}{7} \cos \frac{7x}{12}.$
45. $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$ **46.** $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$
47. $C - \frac{1}{16 \sin^4 4x} + \frac{1}{4 \sin^2 4x} + \frac{1}{4} \ln |\sin 4x|.$ **48.** $\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{24}{11} x^{11/6} +$
 $+ \frac{36}{13} x^{13/6} + \frac{8}{5} x^{5/2} + \frac{6}{17} x^{17/6} + C.$
49. $\frac{2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$ **50.** $\frac{1}{4} x^2 \cdot \sqrt{1 + x^4} + \frac{1}{4} \ln |x^2 + \sqrt{1 + x^4}| + C.$

- 51.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$
52. $\frac{3}{22}(1+x^2)^{11/3} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3} + \frac{3}{10}(1+x^2)^{5/3} + C.$
53. $2(4+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C.$
54. $\frac{1}{14}\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^{7/3} - \frac{1}{8}\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^{4/3} + C.$
55. $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4} + C.$ **56.** $C - \frac{2}{5}(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{3/2}.$
57. $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + C.$ **58.** $-\frac{1}{8}\ln|x^2+4x-3| + \ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right| + C.$
59. $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C.$
60. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x^2-x+3}\right| + C.$ **61.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4} +$
 $+ C.$
62. $3\sqrt{x^2-7x+8} + \frac{17}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}+\sqrt{x^2-7x+8}\right| + C.$
63. $C - 5\sqrt{6x-x^2-5} + 26\arcsin\frac{x-3}{2}.$

Лекция 14

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. Понятие определенного интеграла

Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ не совпадающими друг с другом точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Обозначим это разбиение символом T_n .

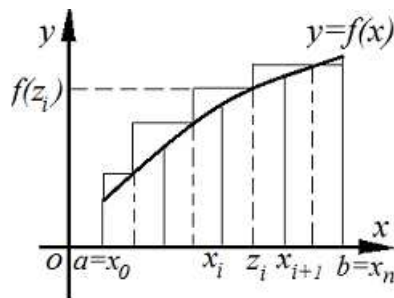


Рис. 14.1.

Возьмем на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку z_i , и обозначим символом $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Определение 14.1. Число

$$J_T(f) = \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i$$

называется *интегральной суммой, соответствующей данному разбиению T_n и данному выбору точек z_i*

Обозначим через Δ максимальную длину имеющихся отрезков $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$$

Очевидно, что интегральная сумма численно равна площади ступенчатой фигуры на рис. 14.1. Ясно, что эта площадь зависит от способа разбиения и выбора точек $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Если увеличивать количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, то величина площади ступенчатой фигуры будет приближаться к площади криволинейной трапеции, заключенной между осью абсцисс и графиком функции $y = f(x)$.

Определение 14.2 Функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$* , если существует такое число I , что

для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ выполняется равенство

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i = I \quad (14.1)$$

Этот предел называется определенным интегралом и обозначается

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.2)$$

Следует отметить, что $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \Delta \rightarrow 0$. Поэтому можно записать

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} J_T(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Часто удобнее пользоваться эквивалентным определением.

Определение 14.3. Число I называется определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого разбиения T_n и выбора точек $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|\Delta| < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\left| \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

Теорема 14.1. Неограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $y = f(x)$ не интегрируема.

Доказательство. Так как функция неограниченна, то при любом способе разбиения отрезка $[a, b]$ найдется отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором она будет неограниченна. Тогда слагаемое $f(z_k) \Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим путем выбора значения z_k . Следовательно, интегральная сумма при таком выборе z_k не ограничена, а значит она будет иметь конечного предела. $\square$

14.2. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу.

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Осуществим разбиение этого отрезка на n сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ не совпадающими друг с другом точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Обозначим это разбиение символом T_n . Обозначим символами M_i и m_i точные верхние и нижние грани этой функции на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$

Суммы

$$S_T = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s_T = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

называются верхней и нижней суммами Дарбу. Эти суммы численно равны площадям ступенчатых фигур. Из рис.14.2 следует $S_T \geq s_T$. Знак равенства имеет место если функция является горизонтальной прямой.

14.2.1. Основные свойства верхних и нижних сумм.. Будем рассматривать только те свойства, которые нам понадобятся при изучении данного курса.

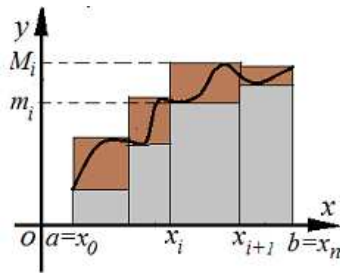


Рис. 14.2.

1. Для любого фиксированного разбиения T и $\forall \varepsilon > 0$ промежуточные точки $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что будет справедливо одно из неравенств

$$0 \leq S_T - J_T(f) < \varepsilon$$

$$0 \leq J_T(f) - s_T < \varepsilon$$

Кроме того, $s_T \leq J_T(f) \leq S_T$

Доказательство. Докажем справедливость первого неравенства. По определению точной верхней грани, для $\forall \varepsilon > 0 \exists z_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$M_i - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Умножая обе части неравенства на Δx_i и складывая все неравенства при $i = \overline{1, n}$, получим

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i < \varepsilon$$

Справедливость неравенства $s_T \leq J_T(f) \leq S_T$ следует из неравенств

$$0 \leq S_T - J_T(f), \quad 0 \leq J_T(f) - s_T?$$

Справедливость второго неравенства доказывается аналогично.

2. Если разбиение $T_1 > T$ т. е. количество частичных сегментов при разбиении T_1 больше, чем при T , то $s_{T_1} \geq s_T$, $S_{T_1} \leq S_T$.

Доказательство. Достаточно доказать это свойство, когда к разбиению T добавляется одна точка, в результате чего получается разбиение T_1 . Разделим сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ на два отрезка

$[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$. Введем обозначения: $\Delta x'_i = x' - x_{i-1}$, $\Delta x''_i = x_i - x'$, $\Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$. Символами M'_i, M''_i обозначим точные верхние грани функции на отрезках $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$ соответственно. Принимая во внимание неравенства $M_i \geq M'_i$, $M_i \geq M''_i$, получим

$$\begin{aligned} S_T - S_{T_1} &= M_i (\Delta x'_i + \Delta x''_i) - M'_i \Delta x'_i - M''_i \Delta x''_i = \\ &= (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M''_i) \Delta x''_i \geq 0 \square \end{aligned}$$

Доказательство для нижних сумм аналогично.

Следствие. Для любых двух разбиений T_1, T_2 сегмента $[a, b]$ справедливы неравенства

$$s_{T_1} \leq S_{T_2}, s_{T_2} \leq S_{T_1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть разбиение $T > T_1, T > T_2$. Тогда по свойству 2 имеем

$$s_{T_1} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T_1}, s_{T_2} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T_2}$$

Поменяв местами s_{T_1} и s_{T_2} , получим $s_{T_1} \leq S_{T_2}, s_{T_2} \leq S_{T_1}$.?

3 Если $J_T(f)$ интегральная сумма разбиения T отрезка $[a, b]$, то

$$s_T = \inf_{z_i} J_T(f) \leq J_T(f) \leq \sup_{z_i} J_T(f) = S_T, i = \overline{1, n}/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула $\inf_{z_i} J_T(f)$ означает, что нужно выбрать такие точки $z_1, i = \overline{1, n}$, чтобы функция $J_T(f)$ приняла наименьшее значение при данном разбиении. Это условие будет выполнено, если $f(z_i) = m_i, i = \overline{1, n}$, а это значит, что $s_T = \inf_{z_i} J_T(f)$. Аналогично $\sup_{z_i} J_T(f)$ — это максимально возможное число при всевозможных выборах $z_1, i = \overline{1, n}$. Оно будет наибольшим, если $f(z_i) = M_i$. Тогда $\sup_{z_i} J_T(f) = S_T$. Из условия $s_T \leq J_T(f) \leq S_T$ следует справедливость утверждения. $\square$

4. Множество верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу, а множество нижних сумм ограничено сверху. Кроме того если $\bar{I} = \inf_T S_T, \underline{I} = \sup_T s_T$ (Числа $\bar{I}$ и $\underline{I}$ называются соответственно верхним и нижним интегралами Дарбу), то справедливо неравенство $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия к свойству 2, следует ограниченность множеств верхних и нижних сумм соответственно снизу и сверху и справедливость неравенства $\underline{I} \leq \bar{I}$. $\square$

14.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

Теорема 14.2. Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0. \quad (14.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (14.3) имеем $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что, если $\Delta < \delta(\varepsilon)$, то

$$|S_T - s_T| < \varepsilon. \quad (14.4)$$

Так как $S_T \geq s_T$, то неравенство (14.4) равносильно условию $S_T - s_T < \varepsilon$.

Необходимость. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема, тогда

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} J_T(f) = I.$$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что, если $\Delta < \delta(\varepsilon)$, то

$$|J_T(f) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < J_T(f) < I + \varepsilon.$$

Следовательно, при $\Delta < \delta$, в соответствии со свойством 3 интегральных сумм, получим $I - \varepsilon \leq s_T \leq S_T \leq I + \varepsilon$. Из правого неравенства имеем $S_T - I \leq \varepsilon$, а из левого $I - s_T \leq \varepsilon$.

Складывая эти неравенства, получаем

$$0 < S_T - s_T \leq 2\varepsilon,$$

что означает справедливость (14.3).

Достаточность. Пусть функция ограничена и выполнено условие (14.3). Так как $\bar{I} = S_T$, $\underline{I} = s_T$. Тогда, принимая во внимание четвертое свойство интегральных сумм, имеем $s_T \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T$, откуда следует $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_T - s_T$. Так как выполнено условие (14.3), то $\bar{I} - \underline{I} = 0$. Обозначим $\bar{I} = \underline{I} = J$. Из неравенств $s_T \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T$ имеем $s_T \leq J \leq S_T$. Поэтому $0 \leq J - s_T \leq S_T - s_T$, $0 \leq S_T - J \leq S_T - s_T$. Принимая во внимание (14.3), получаем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (J - s_T) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (S_T - J) = 0,$$

а это значит, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} s_T = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_T = J.$$

Тогда, учитывая неравенства $s_T \leq J_T(f) \leq S_T$, имеем $\lim_{\Delta \rightarrow 0} J_T(f) = J = I$, что означает интегрируемость функции. $\square$

В дальнейшем нам понадобится иная форма записи условия (14.3). Обозначим символом $\omega_i = M_i - m_i$. Неотрицательное число ω_i называется колебанием функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда условие (14.3) запишется в виде

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0. \quad (14.5)$$

14.4. Классы интегрируемых функций

Теорема 14.3. *Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.*

Доказательство. Так как функция непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она, в соответствии с теоремой 2.8 равномерно непрерывна.

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon/(b-a)$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при разбиении T_n частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых будет выполнено неравенства $\omega_i < \varepsilon/(b-a)$. Тогда будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon. \square$$

Теорема 14.4. Если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ определена и ограничена, а для $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, общая длина которых меньше ε , и эти интервалы покрывают все точки разрыва первого рода, то функция интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что функция имеет k точек разрыва первого рода. Покроим точки разрыва функции конечным числом интервалов сумма длин которых не превосходит числа $\varepsilon/2(M-m)$, где

$$M - m = \sup_x f(x) - \inf_x f(x), \quad x \in [a, b].$$

На оставшихся сегментах функция непрерывна и поэтому равномерно непрерывна. Разобьем их на сегменты так, чтобы выполнялись неравенства $\Delta x_i < \varepsilon/2(b-a)$. Тогда, взяв все n сегментов, получим

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i + \sum_{j=k+1}^n \omega_j \Delta x_j$$

Для первой суммы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^k (M - m) \Delta x_i < \\ &< (M - m) \sum_{i=1}^k \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равномерную непрерывность функции на $n-k$ отрезках, получим

$$\sum_{j=k+1}^n \omega_j \Delta x_j \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=k+1}^n \Delta x_j = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате имеем

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \square$$

14.5. Основные свойства определенного интеграла

1. Будем считать, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

В этом случае сегмент имеет нулевую длину и все $\Delta x_i = 0$. Поэтому интегральная сумма равна нулю.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Пусть функция $f(x)$ является интегрируемой. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Рассмотрим функцию $cf(x)$. Тогда, получим следующие соотношения для ее интегральной суммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n cf(z_i) \Delta x_i = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i = c \int_a^b f(x)dx$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то функция $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(z_i) \pm g(z_i)) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(z_i) \Delta x_i.$$

По условию, слева существуют пределы. Тогда и справа существуют пределы. Следовательно, функция $f(x) \pm g(x)$ является интегрируемой.

4. Если $a < b$, то будем считать, что на сегменте $[a, b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на сегменте

$$[c, d] \subset [a, b].$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то существует разбиение T , такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Представим левую часть неравенства в виде суммы

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i + \sum_{j=k+1}^n \omega_j \Delta x_j < \varepsilon,$$

где первая сумма относится к частичным сегментам отрезка $[c, d]$, а вторая к оставшейся части отрезка $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

при данном разбиении T . Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[c, d]$.

$$\text{6. } \int_a^b dx = b - a.$$

В этом случае имеем интегральную сумму при любом разбиении T

$$J_T(f) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a.$$

14.6. Контрольные вопросы

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Что такое верхняя и нижняя интегральные суммы?
3. Перечислите и докажите свойства верхних и нижних интегральных сумм.
4. Можно ли интегрировать неограниченную функцию? Ответ обоснуйте.
5. Сформулируйте необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.
6. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы она была интегрируемой?
7. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

15.1. Оценки интегралов

1. Если функция $f(x)$ интегрируема и $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

В данном случае интегральная сумма

$$J_T(f) = \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i$$

является суммой положительных составляющих. Поэтому предел этой суммы тоже будет неотрицательным.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и $f(x) \geq g(x)$ на сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (15.1)$$

Имеем $f(x) - g(x) \geq 0$. Тогда $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$. С другой стороны

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0,$$

откуда следует справедливость оценки (15.1)

3 Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема и справедлива оценка

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (15.2)$$

Обозначим через M_i, m_i точные грани функции $f(x)$, а символами M'_i, m'_i точные грани функции $|f(x)|$ на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$

при некотором разбиении T . В этом случае выполняется неравенство для колебания функций $\omega'_i \leq \omega_i$, $\omega'_i = M'_i - m'_i$, $\omega_i = M_i - m_i$. Тогда

$$S'_T - s'_T \leq S_T - s_T.$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема, то

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0 \implies \lim_{\Delta \rightarrow 0} (S'_T - s'_T) = 0.$$

Следовательно, функция $|f(x)|$ интегрируема. Тогда справедливы неравенства:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} |J_T(f)| = \lim_{\Delta \rightarrow 0} |J_T(f)| = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} J_T(|f|) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Из неравенства $|J_T(f)| \leq J_T(|f|)$ следует справедливость оценки (15.2).

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$, а M и m являются точными гранями функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда справедливы неравенства

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (15.3)$$

Из условий имеем $m \leq f(x) \leq M$. Умножаем на $g(x) \geq 0$, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Интегрируя неравенства, получим оценку (9.14).

5. Формула среднего значения. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а M и m являются точными гранями функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда найдется такое число μ , $m \leq \mu \leq M$ и точка $c \in [a, b]$ удовлетворяющая равенству

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (15.4)$$

Если в оценке (15.3) взять $g(x) = 1$, то получим неравенства

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx,$$

откуда следует $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Если взять $\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$, то получим

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (15.5)$$

и неравенство $m \leq \mu \leq M$. Тогда, в соответствии со второй теоремой Больцано-Коши, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Подставив это значение в (15.5), получим равенство (15.4).

15.2. Существование первообразной для непрерывной функции

Рассмотрим понятие интеграла с переменным верхним пределом. Пусть задана интегрируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда, в соответствии со свойством 5, функция интегрируема на любом отрезке $[a, x] \subset [a, b]$. Поэтому будет определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Эту функцию называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 15.1 . *Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) первообразную функцию. Одной из первообразных является функция $F(x)$*

Доказательство. В соответствии с определением первообразной, требуется доказать справедливость следующего равенства

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x), x \in (a, b).$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Воспользуемся формулой (15.4).

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x, c \in (x, x + \Delta x).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$

так как $c \in (x, x + \Delta x)$. $\square$

Таким образом, доказано, что функция $F(x)$ является первообразной, дифференцируемой, а следовательно, непрерывной.

15.2.1. Основная формула интегрального исчисления. Мы доказали (теорема 11.1), что две первообразные отличаются на друг от друга постоянной величиной. Тогда, согласно теореме 15.5 и теореме 11.1, любая первообразная непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

где C — константа. Пусть $x = a$ тогда $\Phi(a) = C$. Если $x = b$, то

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C,$$

откуда получаем основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

которая была получена Ньютоном и Лейбницем. Поэтому она и называется формула Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим примеры.

Пример 15.1. $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$

Пример 15.2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$

15.3. Замена переменных в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, который является множеством значений дифференцируемой функции $x = g(t)$, которая определена на отрезке $[\alpha, \beta]$. При этом $g(\alpha) = a$
 $g(\beta) = b$ Тогда справедлива следующая формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \quad (15.6)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \Phi(x) = \Phi(g(t)).$$

Вычислим производную от сложной функции $\Phi(g(t))$.

$$\frac{d\Phi(g(t))}{dt} = \frac{d\Phi(g(t))}{dg(t)} \frac{dg(t)}{dt} = f(g(t))g'(t).$$

Следовательно, функция $\Phi(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)dt$. Тогда имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)).$$

Пример 15.3.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^2, dx = 2tdt \\ x = \frac{\pi^2}{4}, t = \frac{\pi}{2}, \\ x = \pi^2, t = \pi \end{array} \right| = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t dt = \\ &= -2\cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}) = 2. \end{aligned}$$

15.4. Формула интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = v(x)u(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (15.7)$$

В другой форме записи она имеет вид

$$\int_a^b u(x)dv(x) = v(x)u(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \quad (15.8)$$

Справедливость формул следует из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} d(v(x)u(x)) &= u(x)dv(x) + v(x)du(x), \\ \int_a^b d(v(x)u(x)) &= v(x)u(x) \Big|_a^b = \int_a^b u(x)dv(x) + \int_a^b v(x)du(x) \end{aligned}$$

откуда получаем формулу (15.8). Формула (15.7) получается из (15.8) путем замены

$$dv(x) = v'(x)dx, du(x) = u'(x)dx$$

Пример 15.3. Вычислить $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= \pi \sin \pi - \sin 0 + \cos \pi - \cos 0 = -2. \end{aligned}$$

15.5. Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей. Требуется вычислить площадь, ограниченную графиками функций; $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, рис. 15.1.

Когда рассматривали понятие определенного интеграла п.14.1, мы выяснили, что значение интеграла численно равно площади, заключенной между графиком функции и осью абсцисс. Для определения искомой площади необходимо из интеграла от функции $y = f_1(x)$ вычитать интеграл от функции $y = f_2(x)$. Учитывая свойства интеграла, получим следующую формулу для вычисления площади

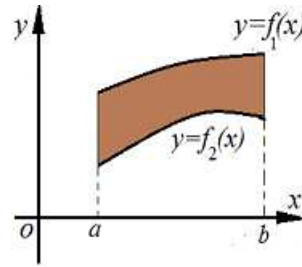


Рис. 15.1.

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (15.9)$$

Следует отметить, что иногда удобнее функцией считать $x = \psi(y)$. Это связано с тем, что каждая из функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ должны быть заданы в виде одной функции. В этом случае область, площадь которой необходимо вычислить называют правильной. Если, например, график кривой, лежащий снизу на рис.15.1 будет задан в виде двух функций

$$y = f_2(x), x \in [a, c], y = f_3(x), x \in [c, b],$$

то область придется разбить на две части: 1. $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = c$, 2. $y = f_1(x)$, $y = f_3(x)$, $x = c$, $x = b$.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Вычисляем границы для переменной t . Из уравнений $a = \varphi(t)$, $b = \varphi(t)$, находим $t = \alpha$, $t = \beta$. Тогда получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

15.5.1. Полярная система координат.. В декартовой системе координат положение точки на плоскости определяется координатами проекции этой точки на оси координат. Однако положение точки можно задать другим способом.

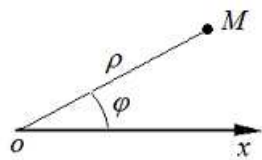


Рис. 15.2.

Возьмем на плоскости (рис.15.2) точку O , которую назовем полюсом, и проведем из нее направленную полупрямую Ox , которую назовем полярной осью. Тогда положение точки M может быть задано с помощью двух переменных угла φ и длины отрезка ρ . Координаты (φ, ρ) называются полярными координатами. Тогда функция в полярных координатах задается в виде $\rho = f(\varphi)$. Если совместить полярную систему координат, изображенную на рис.15.2 с декартовой системой координат, то получим следующие формулы,

связывающие их координаты

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (15.10)$$

Площадь криволинейного сектора. Требуется вывести формулу вычисления площади криволинейного сектора, который заключен между прямыми с углами наклона φ_a, φ_b и кривой, заданной в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$.

Разобьем данный сектор произвольным образом на n частных секторов. В каждом из них возьмем на кривой произвольную точку с радиусом вектором длиной $\rho(\psi_i)$, $i = \overline{1, n}$. Будем считать, что $\rho(\psi_i)$, является радиусом окружности. Тогда площадь сектора окружности с радиусом $\rho(\psi_i)$ равна

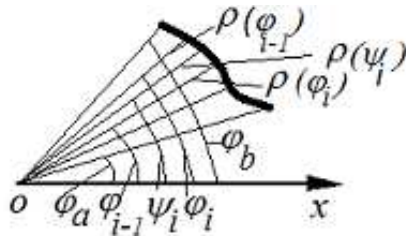


Рис. 15.3.

$S_i = \frac{1}{2} \rho^2(\psi_i) \Delta \varphi_i$, $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$
Обозначим через $\Delta = \max \Delta \varphi_1, \dots, \Delta \varphi_n$, и составим интегральную сумму

$$J(\rho) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\psi_i) \Delta \varphi_i.$$

Тогда в соответствии с определением определенного интеграла, если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\psi_i) \Delta \varphi_i,$$

то этот предел является интегралом. Принимая во внимание то, что интегральная сумма равна сумме S_i , получаем формулу для вычисления площади криволинейного сектора

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \rho^2 d\varphi. \quad (15.11)$$

15.6. Вычисление длины кривой

Введем понятие дифференциала дуги. На рис.15.4 рассмотрим треугольник ABC . Имеем $AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Умножим и разделим левую часть на Δl^2 , где Δl – дуга, заключенная между точками A и B , в результате получим

$$\left(\frac{AB}{\Delta l} \right)^2 \Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right)$$

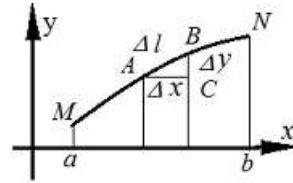


Рис. 15.4.

Разделим левую и правую части на Δx^2 и вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{AB}{\Delta l} \right)^2 \frac{\Delta l^2}{\Delta x^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{AB}{\Delta l} \right)^2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l^2}{\Delta x^2} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l^2}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}, \\ \frac{dl}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}, \Rightarrow dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \end{aligned}$$

Если теперь кривую MN на рис.15.4 разбить на n частей и составить интегральную сумму $J(f) = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$, то вычислив предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i$, где $\Delta = \max\{\Delta l_1, \dots, \Delta l_n\}$, получим формулу для вычисления длины дуги

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \quad (15.12)$$

Если кривая задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$. Тогда, вычислив новые границы $t = \alpha$, $t = \beta$, получим

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)^2} \varphi'_t dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2} dt. \quad (15.13)$$

В полярной системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Поэтому имеем

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi$$

Подставив эти значения в (15.12), получим

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} d\varphi. \quad (15.14)$$

15.7. Вычисление объемов тел.

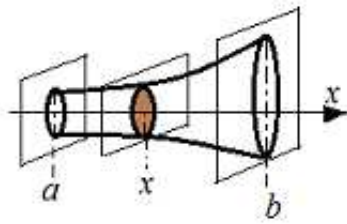


Рис. 15.5.

Предположим, что известна площадь любого поперечного сечения тела, перпендикулярного оси Ox изображенного на рис. 15.5. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков, в каждом из которых произвольно выберем точки z_i , и составим интегральную сумму

$$J(S) = \sum_{i=1}^n S(z_i) \Delta x_i.$$

Тогда переходя к пределу, получим формулу для вычисления объема тела

$$V = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(z_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx. \quad (15.15)$$

Вычисление объемов тел вращения. Пусть кривая, заданная уравнением

$y = f(x)$, $x \in [a, b]$ вращается вокруг оси Ox . Тогда любое сечение перпендикулярное этой оси выражается формулой $S(x) = \pi f^2(x)$. Подставив это значение в (15.15), получим

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (15.16)$$

Замечание. Можно доказать, что объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной функциями $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $y=0$ вокруг оси Oy , можно вычислить по формуле

$$V = \pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (15.17)$$

В противном случае необходимо найти обратную функцию $x = \psi(y)$, $y \in [c, d]$

$$V = \pi \int_c^d \psi^2(y) dy.$$

Вычисление поверхности тел вращения. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков. Тогда боковая поверхность частного цилиндра будет равна $\Delta S_i = 2\pi \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \Delta l_i$, где Δl_i дуга, заключенная между точками $(x_i; y_i)$, $(x_{i-1}; y_{i-1})$. Составим интегральную сумму

$$J(S) = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \pi \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1}) \Delta l_i$$

Переходя к пределу, получим

$$S = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

В параметрической форме

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2} dt.$$

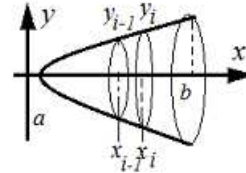


Рис. 15.6.

В полярных координатах

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin \varphi \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} d\varphi.$$

15.8. Методические указания по решению задач.

Пример 15.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4 - (y - 1)^2, \quad x = y^2 - 4y + 3.$$

Решение. Графиком функции $x = 4 - (y - 1)^2$ является парабола с вершиной в точке $x = 4, y = 1$. Найдем точки пересечения параболы с осью OY :

$$4 - (y - 1)^2 = 0, \quad (y - 1)^2 = 4, \quad y - 1 = \pm 2, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -1.$$

Графиком функции $x = y^2 - 4y + 3$ является парабола с вершиной в точке $x = -1, y = 2$. Найдем точки пересечения параболы с осью OY :

$$y^2 - 4y + 3 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 1, \quad x_1 = 4 - (y - 1)^2.$$

Найдем точки пересечения данных парабол: $4 - (y - 1)^2 = y^2 - 4y + 3$,

$$-2y^2 + 6y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3.$$

Таким образом, точки пересечения парабол $x = 3, y = 0$ и $x = 0, y = 3$.

Построим фигуру, ограниченную данными параболой. Закрашенная область D является правильной в направлении оси OX , поэтому площадь фигуры

найдем по формуле $S = \int_a^b (x_1(y) - x_2(y)) dy$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (4 - (y - 1)^2) - (y^2 - 4y + 3) dy = \int_0^3 (-2y^2 + 6y) dy = \\ &= \left(-\frac{2y^3}{3} + 3y^2 \right) \Big|_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ (ед.пл.)}. \end{aligned}$$

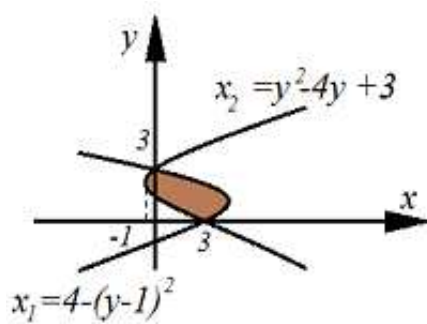


Рис. 15.7.

Пример 15.5. Вычислить площадь ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

В параметрической форме уравнения эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint. \end{cases}$$

Вычислим площадь закрашенной части, а полученный результат умножим на 4.

Вычисляем границы для переменной t . $0 = acost$

$t = \pi/2$, $a = acost$, $t = 0$. Тогда получим

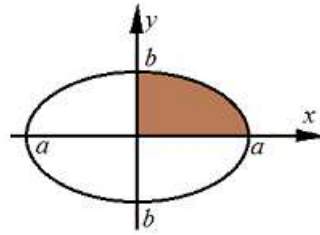


Рис. 15.8.

$$S_1 = - \int_{\pi/2}^0 ab \sin^2 t dt = - \frac{ab}{2} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= - \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{ab}{4}, S = 4 S_1 = ab (\text{ед. пл.}).$$

Пример 15.6. Вычислит площадь фигуры ограниченной кривыми $\rho = 4 \cos \varphi$, $\rho = 2 \cos \varphi$. Графики этих функций изображены на рис. 15.9.

Решение.

В соответствии с формулой 15.11 имеем

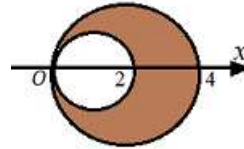


Рис. 15.9.

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((4 \cos \varphi)^2 - (2 \cos \varphi)^2 \right) d\varphi =$$

$$= 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 3 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 3 \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) = 3\pi.$$

Пример 15.7. Вычислить длину кривой $y = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3}$ между точками с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$.

Решение. Согласно формуле $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, имеем

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2x - 1)^{1/2} \cdot 2 = \sqrt{2x - 1},$$

$$(y')^2 = (\sqrt{2x - 1})^2 = 2x - 1,$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + 2x - 1} = \sqrt{2x}.$$

$$l = \int_2^8 \sqrt{2x} dx = \sqrt{2} \int_2^8 \sqrt{x} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_2^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3} (8^{3/2} - 2^{3/2}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{3/2} (4^{3/2} - 1) = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3} (8 - 1) = \frac{56}{3} \text{ (ед.дл.)}.$$

Пример 15.8. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Решение. Длину дуги находим по формуле $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$.

Сначала найдем x'_t и y'_t .

$$x'_t = 2t \sin t + (t^2 - 2) \cos t + 2 \cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'_t = -2t \cos t - (2 - t^2) \sin t + 2 \sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t,$$

$$\text{Тогда } l = \int_0^\pi \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} dt = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \text{ (ед.дл.)}.$$

Пример 15.9. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Решение. Длину дуги находим по формуле $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$.

$$\text{Найдем } r' = 6 \cos \varphi, (r')^2 = 36 \cos^2 \varphi.$$

$$\text{Итак, } l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{36 \sin^2 \varphi + 36 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/3} 6 d\varphi = 6\varphi \Big|_0^{\pi/3} = 2\pi \text{ (ед.дл.)}.$$

Пример 15.10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z = 7, \quad z = 0.$$

Решение: Объем тела находим по формуле $V = \int_{z_1}^{z_2} s(z) dz$, $s(z)$ – площадь сечения эллипсоида плоскостью перпендикулярной оси oz при $z = \text{const}$.

В сечении получится эллипс, который определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{z^2}{196}, \\ z = \text{const.} \end{cases}$$

Площадь эллипса равна $S = \pi a \cdot b$. Перепишем первое уравнение так, чтобы определить полуоси эллипса. Разделим обе части уравнения на выражение $1 - \frac{z^2}{196}$, получим $\frac{196x^2}{16(196 - z^2)} + \frac{196y^2}{9(196 - z^2)} = 1$.

Следовательно, $a = \frac{4\sqrt{196 - z^2}}{14}$, $b = \frac{3\sqrt{196 - z^2}}{14}$.

$$S = \pi ab = \frac{3\pi}{49}(196 - z^2).$$

$$V = \frac{3\pi}{49} \int_0^7 (196 - z^2) dz = \frac{3\pi}{49} \left(196z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^7 = \frac{3\pi}{49} \left(196 \cdot 7 - \frac{7^3}{3} \right) =$$

$= 77\pi$ (ед. объема)

Пример 15.11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Решение: Объем тела находим по формуле

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

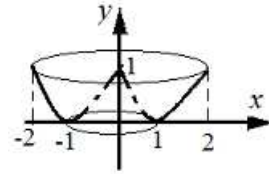


Рис. 15.10.

Из уравнения $y = (x-1)^2$ выразим x .

$$x - 1 = \pm\sqrt{y}, \quad x_1 = 1 + \sqrt{y}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{y}.$$

$$V = \pi \int_0^1 (x_1^2(y) - x_2^2(y)) dy = \pi \int_0^1 ((1 + \sqrt{y})^2 - (1 - \sqrt{y})^2) dy =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{8\pi}{3} \sqrt{y^3} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} \text{ (ед. объема)}$$

15.9. Примеры для самостоятельного решения.

Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница

1. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx.$	2. $\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$	3. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}.$
4. $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}.$	5. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3}.$	6. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx.$
7. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2}.$	8. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$	9. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$

10. $\int_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}.$	11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$	12. $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$
13. $\int_1^2 x \ln x dx.$	14. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx.$	15. $\int_0^1 x e^{-x} dx..$
16. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$	17. $\int_1^e \ln x dx.$	18. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + 1}.$
19. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx.$	20. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$	21. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$

Найти площади фигур, ограниченных графиками функций.

22. $y = 4x - x^2, y = 0.$	23. $y = \ln x, y = 0, x = e.$
24. $y^3 = x, y = 1, x = 8.$	25. $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = \pi/3.$
26. $y = x^3, y = 8, x = 0.$	27. $y = 2x - x^2, y = -x.$
28. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}.$	29. Первой аркой циклоиды $y = 0, \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$
30. $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$	31. $\rho = a \sin 2\varphi.$
32. $\rho = a \cos 5\varphi.$	33. $\rho = 2a(2 + \cos \varphi).$
34. $\rho = 3 + \cos 4\varphi, \rho = 2 - \cos 4\varphi.$	35. $\rho = a \sin 3\varphi.$

Найти длины дуг кривых, заданными уравнениями:

36. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$	37. $y^2 = x^3, 0 \leq x \leq 4.$
38. $y = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1.$	39. $y = e^x, 0 \leq x \leq 1.$
40. $y = \arcsin e^{-x}, 0 \leq x \leq 1.$	41. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e.$

42. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$	43. $\begin{cases} x = a \cos^5 t \\ y = a \sin^5 t. \end{cases}$
44. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^4 t. \end{cases}$	45. $\begin{cases} x = 7(t - \sin t) \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases} 2\pi \leq t \leq 4\pi.$
46. $\rho = a(1 + \cos \varphi).$	47. $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$
48. $\rho = ae^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$	49. $\rho = 6 \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$
50. $\rho = 2 \cos^3 \frac{\varphi}{3}.$	51. $\rho = 2(1 - \cos \varphi).$

Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных линиями вокруг оси Ox :

52. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$	53. $y = \sin^2 x, 0 \leq x \leq \pi.$
54. $y^2 = x^2, y = 0, x = 1.$	55. $y = e^x, x = 0, y = 0.$
56. $\begin{cases} y = a(1 - \cos t) \\ x = a(t - \sin t) \end{cases}$	57. $y = \arcsin x, 0 \leq x \leq 1, y = 0.$

Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных линиями вокруг оси Oy :

58. $y^2 = x^3, y = 0, x = 1.$	59. $y = e^x, x = 0, y = 0.$
60. $y = 2x - x^2, y = 0.$	61. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$
62. $y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2.$	

Найти площади поверхностей, образованных вращением линий вокруг оси Ox :

63. $y = \frac{1}{3}x^3, 0 \leq x \leq a.$	64. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), 0 \leq x \leq a.$
65. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$	66. $y = \frac{x^3}{3}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$

15.8.1 Ответы.

- 1.** 1. **2.** 6. **3.** $(-1/12)\ln 5$. **4.** $(\pi/4) - \arctg(\pi/4)$ **5.** $7/72$. **6.** $0,2(e-1)^5$. **7.**
 $1/4$. **8.** $\pi/2$. **9.** 2. **10.** $e - \sqrt{e}$.
11. $\arctg(1/7)$. **12.** $29/3$. **13.** $\ln 4 - 3/4$. **14.** 2π . **15.** $1 - 2/e$. **16.** 1. **17.**
1. **18.** $\ln 4 - 1$. **19.** $7 + \ln 4$. **20.** $\arctg e - \pi/4$. **21.** $1/3$. **22.** $32/3$. **23.** 1. **24.**
 $17/4$. **25.** $\ln 2$. **26.** 12. **27.** $9/2$. **28.** $(3/8)\pi ab$ **29.** $3\pi a^2$. **30.** πab . **31.**
 $(\pi a^2)/4$.
32. $(\pi a^2)/4$. **33.** $18\pi a^2$. **34.** $37\pi/6 - 5\sqrt{3}$. **35.** $(\pi a^2)/4$. **36.** $1 +$
 $+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **37.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. **38.** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.
39. $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{1+e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{e}$. **40.** $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$.
41. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. **42.** $6a$. **43.** $5a \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3})\right)$.
44. 24. **45.** 56. **46.** $8a$. **47.** $(3/2)\pi a$. **48.** $a\sqrt{2}(e^{\varphi_0} - 1)$. **49.** 8,6. **50.**
9,42. **51.** 16. **52.** $\pi^2/2$. **53.** $3/8\pi^2$. **54.** $\pi/4$.
55. $\pi/2$. **56.** $5\pi^2 a^2$. **57.** $\pi(\pi^2/4 - 2)$. **58.** $(4/7)\pi$. **59.** 2π . **60.** $8/3\pi$. **61.**
25,12. **62.** 4,17. **63.** $\pi/9(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1)$.
64. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$. **65.** $(12/5)\pi a^2$. **66.** 4,25.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Определение 16.1. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, \infty)$ и интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то он называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом и обозначается

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (16.1)$$

Если предел конечный, то говорят, что интеграл сходится, а если он бесконечный или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогичным образом определяется интеграл с нижним бесконечным пределом или с обоими бесконечными пределами

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx,$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

В этом случае в определении 16.1 полуинтервал $[a, \infty)$ заменяется на полуинтервал $(-\infty, b]$ и интервал $(-\infty, \infty)$ соответственно. Интегралы с бесконечными пределами, часто называют несобственными интегралами первого рода.

Пример 16.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$, если он сходится.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} (e^{-b^2} - 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (16.1), можно сделать вывод о том, что несобственные интегралы первого рода обладают такими же свойствами, какими обладает обычный определенный интеграл. Следовательно, можно использовать все методы интегрирования, рассмотренные для определенного интеграла.

16.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Без потери общности, будем рассматривать интегралы с одним бесконечным пределом

Рассмотрим два интеграла

$$1. \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad 2. \int_a^{\infty} g(x) dx$$

Теорема 16.1. (Первая теорема сравнения) Пусть функции $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ — непрерывны на полуинтервале $[a, \infty)$, и выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости второго интеграла следует сходимость первого, а из расходимости первого интеграла следует расходимость второго.

Доказательство. Введем функции верхнего предела

$$F_1(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad F_2(b) = \int_a^b g(x) dx.$$

Эти функции непрерывны и дифференцируемы (теорема 15.1). Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$. $b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из условия $f(x) \leq g(x)$ следует неравенство $F_1(b_n) \leq F_2(b_n)$. Тогда в соответствии со следствием к теореме 1.11, следует справедливость неравенства $F_1(b_n) \leq F_2(b_n)$, откуда имеем утверждение теоремы. $\square$

Пример 16.2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x + 1}.$$

Подынтегральная функция положительна. Однако интегрировать этот интеграл достаточно трудно. Поэтому рассмотрим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\frac{1}{x^4 + x + 1} < \frac{1}{x^4}$$

на основании теоремы 16.1. делаем заключение о сходимости заданного интеграла.

Теорема 16.2. (Вторая теорема сравнения) Пусть функции $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ — непрерывны на полуинтервале $[a, \infty)$ и выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \quad A \in (0, \infty).$$

Тогда оба несобственных интеграла

$$1. \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad 2. \int_a^{\infty} g(x) dx$$

одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1 > 0$ такое, что при $x \geq x_1$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Возьмем $\varepsilon = A/2$, и раскроем модуль в неравенстве

$$\frac{1}{2}A < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}A \implies \frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}Ag(x).$$

Применяя теорему 16.1 к системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{A}{2}g(x) < f(x), \\ f(x) < \frac{3}{2}Ag(x). \end{cases}$$

Если первый интеграл сходится, то из первого неравенства следует сходимость второго. Если второй интеграл сходится, то из второго неравенства следует сходимость первого. Так как мы имеем систему неравенств, то либо оба интеграла сходятся, либо расходятся. $\square$

Пример 16.3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^3} dx$$

Возьмем для сравнения расходящийся интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$. Убедимся, что он действительно расходится

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Найдем предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x^3} \right) / \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^3} \right) / \left(\frac{1}{x} \right) = 1.$$

В соответствии с теоремой 16.2, исходный интеграл расходится.

16.3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов

Определение 16.2. Несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

называется а) абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx,$$

б) условно сходящимся если интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ расходится.

Теорема 16.3. Из абсолютной сходимости несобственного интеграла от непрерывной функции следует его сходимость.

Доказательство. Из определения модуля функции следует, что

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. На основании второго свойства определенных интегралов имеем

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Введем функции верхнего предела

$$F_1(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad F_2(b) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Эти функции непрерывны и дифференцируемы (теорема 15.1). Рассмотрим последовательность b_n . $b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из условия $f(x) \leq g(x)$ следует неравенство

$F_1(b_n) \leq F_2(b_n)$. Тогда, в соответствии со следствием к теореме 1.11, следует справедливость неравенств

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -F_2(b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_2(b_n).$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} F_2(b_n)$ конечный, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} -F_2(b_n)$ тоже конечная отрицательная величина. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_1(b_n)$ тоже конечная величина. $\square$

Теорема 16.4 Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a > 0$ и существует конечные числа $B > 0$, $\beta > 1$ такие, что $|f(x)| \leq B/x^\beta$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty |f(x)| dx$ абсолютно сходится.

Доказательство. Так как несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{B}{x^\beta} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} B \int_a^b \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{b \rightarrow \infty} B \left(-\frac{1}{(\beta-1)b^{\beta-1}} + \frac{1}{(\beta-1)a^{\beta-1}} \right) = \\ &= \frac{B}{(\beta-1)a^{\beta-1}} \end{aligned}$$

является сходящимся, то из неравенства $|f(x)| \leq B/x^\beta$, в соответствии с теоремой 16.1, следует справедливость утверждения теоремы. $\square$

Пример 16.4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ для всех $x \geq 1$. Поэтому в соответствии с теоремой 16.4, несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ абсолютно сходится.}$$

16.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 16.3. Пусть функция $f(x)$ определена на неограниченном полуинтервале $[a, b)$, но она ограничена и интегрируема на

отрезке $[a, b - \varepsilon]$ при любых значений $\varepsilon > 0$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (16.2)$$

то он называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Если предел конечный, то говорят, что интеграл сходится, а если он бесконечный или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогичным образом определяются интегралы от функции неограниченной на левом конце отрезка или внутри интервала $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right) &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Интегралы от неограниченных функций, часто называют несобственными интегралами второго рода.

Принимая во внимание формулу (16.2), можно сделать вывод о том, что несобственные интегралы второго рода обладают такими же свойствами, какими обладает обычный определенный интеграл, так как вычисление сводится к вычислению предела от определенного интеграла. Следовательно, можно использовать все методы интегрирования, рассмотренные для определенного интеграла.

Пример 16.5. Исследовать интеграл $\int_0^1 \ln x dx$.

Подынтегральная функция имеет особую точку $x = 0$, так как при $x \rightarrow 0$, $\ln x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = dx/x \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} \right) = 0.$$

Таким образом имеем $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

Для интегралов

$$1. \int_a^b f(x) dx, \quad 2. \int_a^b g(x) dx$$

с неотрицательными, неограниченными функциями $f(x)$ и $g(x)$ справедливы теоремы сравнения, аналогичные теоремам 16.1 и 16.2. Отличие состоит в том, что полуинтервал $[a, \infty)$ заменяется на полуинтервал $[a, b)$, в случае, если особые точки функций находятся в точке $x = b$. Соответственно изменяются эти полуинтервалы и в случаях, когда особые точки находятся слева или в самом интервале (a, b)

Пример 16.6. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{2 + \sin x}{(\pi - x)^2} dx.$$

Подынтегральная функция имеет особую точку $x = \pi$. На отрезке $[0, \pi]$ функция $\sin x \geq 0$. Возьмем для сравнения интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(\pi - x)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi - \varepsilon} \frac{1}{(\pi - x)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi} \right) = \infty.$$

Так как

$$\frac{2 + \sin x}{(\pi - x)^2} > \frac{1}{(\pi - x)^2},$$

то исследуемый интеграл расходится.

16.5. Контрольные вопросы

1. Как определяется несобственный интеграл с бесконечными пределами?
2. Сформулируйте правило вычисления несобственных интегралов первого рода.
3. Сформулируйте первую и вторую теорему сравнения для несобственных интегралов первого рода.
4. Какой несобственный интеграл второго рода называется абсолютнo сходящимся, и какой условно сходящимся?
5. Сформулируйте определение несобственного интеграла от неограниченных функций.

6. Сформулируйте первую и вторую теорему сравнения для несобственных интегралов второго рода.

7. Сформулируйте правило вычисления несобственных интегралов второго рода.

16.6. Методические указания по решению задач

Пример 16.7. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 16.8. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin x) \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 16.9. Исследовать $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x) \Big|_{0+\varepsilon}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\operatorname{ctg} 1 + \operatorname{ctg}(0+\varepsilon)) = -\frac{\pi}{4} + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Пример 16.10. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{\sin 2x}{2x^2} dx \right) = -\frac{\sin 2}{2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin 2x}{2x^2} dx. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2} dx$ сходится абсолютно, так как $\frac{|\sin 2x|}{2x^2} \leq \frac{1}{2x^2}$. Следовательно, интеграл

$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ является сходящимся.

Пример 16.11. Рассмотрим пример условно сходящегося интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение. Исследуем абсолютную сходимость этого интеграла, т. е. будем исследовать интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Возьмем для сравнения интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x} - \int_1^2 \frac{\cos 2x}{2x} dx.$$

Первый интеграл расходящийся, а второй сходящийся. Следовательно исследуемый интеграл расходится. Из соотношения $|\sin x| \geq \sin^2 x$ следует, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. С другой стороны

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ сходится. Таким образом получили, что исходный интеграл абсолютно не сходится, хотя сам является сходящим. Иными словами имеем условную сходимость.

16.7. Примеры для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы
(или установить их расходимость)

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$	2. $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2 + 1}$	3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$
4. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$	5. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$	6. $\int_0^{\infty} x \sin x dx$
7. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$	8. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$	9. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$
10. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$	11. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$	12. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$
13. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$	14. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$	15. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$
16. $\int_{0,5}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	17. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$	18. $\int_0^1 \ln x dx$
19. $\int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	20. $\int_{-2}^2 \frac{4x^3 dx}{x^4 - 1}$	21. $\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
22. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$		

16.7.1. Ответы. 1. $\pi/\sqrt{5}$. 2. $\pi^2/8$. 3. Расходится. 4. Расходится.
5. $1/2$. 6. Расходится. 7. 2. 8. $1/2$. 9. $1 - \ln 2$. 10. $1/2$.
11. Расходится. 12. Расходится. 13. $8/3$. 14. 2. 15. Расходится. 16.
 $\sqrt{3}/2$. 17. Расходится. 18. -1 .
19. $\pi^2/8$. 20. Расходится. 21. $15/2$. 22. $14\frac{4}{7}$.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

17.1. Определение и существование двойного интеграла

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D на n частных участков. Обозначим данное разбиение символом T_n . Обозначим символом Δs_i площадь i -й частной подобласти, и выберем произвольно точки с координатами (x_i, y_i) , и составим интегральную сумму

$$J_T(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i.$$

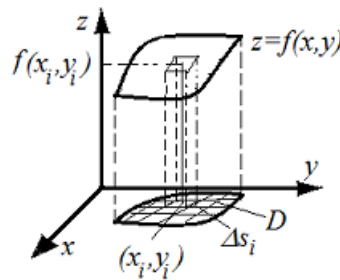


Рис. 17.1.

Определение 17.1. Число $J_T(f)$ называется интегральной суммой, соответствующей данному разбиению T_n и данному выбору точек (x_i, y_i)

Обозначим через Δ максимальную площадь имеющихся подобластей Δs_i

$$\Delta = \max\{\Delta s_1, \dots, \Delta s_n\}$$

Очевидно, что каждое слагаемое $f(x_i, y_i) \Delta s_i$ в интегральной сумме численно равняется объему криволинейного параллелепипеда с площадью основания Δs_i и высотой $f(x_i, y_i)$

Определение 17.2. Функция $z = f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману в области D , если существует такое число I , такое что для любого разбиения T_n и любого выбора точек $(x_i, y_i) \in \Delta s_i$ выполняется равенство

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = I. \quad (17.1)$$

Этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области S и обозначается

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y) ds. \quad (17.2)$$

Двойной интеграл в прямоугольной области

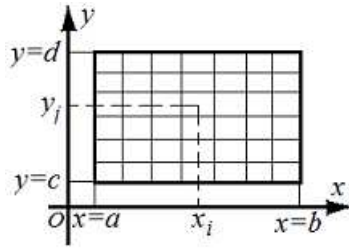


Рис. 17.2.

Пусть область D имеет прямоугольную форму рис.17.2. Для этой области можно осуществить такое же, как это было выполнено в определении 17.1. Однако, иногда удобнее пользоваться другим способом.

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на n и m частных отрезков. Выберем произвольно в каждом частном прямоугольнике точки с координатами $(x_i, y_j) \in \Delta s_{ij}$, где

$\Delta s_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ – площадь частного прямоугольника. Рис. 17.2.

Тогда интегральная сумма будет иметь вид

$$J_T(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

17.1.1. Существование двойного интеграла. Теория Дарбу, частичные сведения которой для определенных интегралов, приведены в лекции 14, полностью переносится на двойные интегралы. Поэтому мы будем ею пользоваться и для двойных интегралов.

Составим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу

$$S_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

где

$$M_{ij} = \sup_{x, y \in \Delta s_{ij}} f(x, y), \quad m_{ij} = \inf_{x, y \in \Delta s_{ij}} f(x, y)$$

Тогда справедливы теоремы, которые являются аналогом теорем 14.2, 14.3. Поэтому ограничимся только их формулировками.

Теорема 17.1. Для того чтобы ограниченная в области D функция $f(x, y)$ была интегрируема необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0. \quad (17.3)$$

Теорема 17.2. Непрерывная в области D функция $f(x, y)$ интегрируема на этой области.

17.2. Основные свойства двойного интеграла

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам обычного определенного интеграла. Поэтому приведем их без доказательства.

1. Линейное свойство. Если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы в области D , то функция $\alpha f(x, y) \pm \beta g(x, y)$, где α, β - некоторые вещественные числа. При этом справедливо равенство

$$\iint_D (\alpha f(x, y) \pm \beta g(x, y)) ds = \alpha \iint_D f(x, y) ds \pm \beta \iint_D g(x, y) ds.$$

2. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D , а область D разбита непрерывной кривой на две D_1 и D_2 , то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей и справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds.$$

3. Если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы в области D , то их произведение тоже интегрируемо в области D .

4. Если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы в области D , и выполнено неравенство

$f(x, y) \leq g(x, y)$, то справедлива оценка

$$\iint_D f(x, y) ds \leq \iint_D g(x, y) ds.$$

5. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D , то функция $|f(x, y)|$ тоже интегрируема в области D и справедлива оценка

$$\left| \iint_D f(x, y) ds \right| \leq \iint_D |f(x, y)| ds.$$

6. Теорема о среднем. Если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы в области D и $g(x, y) \geq 0$, то существует число μ , удовлетворяющее неравенству $m \leq \mu \leq M$, где

$$M = \sup_{x, y \in D} f(x, y), \quad m = \inf_{x, y \in D} f(x, y)$$

такое, что справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) ds = \mu \iint_D g(x, y) ds.$$

При этом найдется точка $(\xi, \theta) \in D$ такая, что будет иметь место равенство

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)ds = f(\xi, \theta) \iint_D g(x, y)ds.$$

Если $g(x, y) = 1$, то получим частный случай

$$\iint_D f(x, y)ds = \mu S_D \iint_D f(x, y)ds = f(\xi, \theta)S_D,$$

где S_D — площадь области D .

17.3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному

Теорема 17.3. *Предположим, что для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике (рис.17.2) существует двойной интеграл. Пусть для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$I = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем прямоугольник точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. В каждом частном прямоугольнике справедливы неравенства

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}, \quad (17.4)$$

где

$$M_{ij} = \sup_{x, y \in \Delta s_{ij}} f(x, y), \quad m_{ij} = \inf_{x, y \in \Delta s_{ij}} f(x, y).$$

Пусть в приведенных неравенствах $x = \xi_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Принимая во внимание (17.4), получим

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j.$$

Суммируя по всем j , будем иметь

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j \leq I(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j.$$

Умножив на Δx_i , и просуммировав по i , получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j \Delta x_i.$$

В левой части и в правой части этих неравенств получились нижняя и верхняя интегральные суммы для двойного интеграла. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \Delta x_i = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j \Delta x_i = \iint_D f(x, y) ds.$$

Следовательно

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \square$$

Переход от двойного интеграла к повторному, по существу, является способом его вычисления.

Пример 17.1. Вычислить $\iint_D x^2 y^3 dx dy$. D ; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^3 dx dy &= \int_1^2 dx \int_1^3 x^2 y^3 dy = \int_1^2 x^2 dx \left(\frac{y^4}{4} \right) \Big|_1^3 = \\ &= 20 \int_1^2 x^2 dx = 20 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{560}{3}. \end{aligned}$$

Произвольная форма области интегрирования. Рассмотрим случай, когда область интегрирования имеет произвольную форму.

Пусть $\iint_D f(x, y) ds$ имеется интеграл

$$\iint_D f(x, y) ds.$$

Область интегрирования D изображена на рис.17.3. Введем новую функцию на прямоугольнике G

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } x, y \in D, \\ 0, & \text{если } x, y \notin D. \end{cases}$$

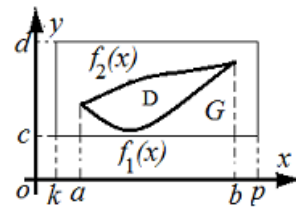


Рис. 17.3.

Тогда в прямоугольнике G она интегрируема, и можно записать

$$\iint_G F(x, y) ds = \int_k^p dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

На полуинтервалах $[k, a)$, $(b, p]$ $F(x, y) = 0$. Поэтому получаем

$$\iint_G F(x, y) ds = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Но в областях $G_1 : x_1 = a, x_2 = b, y \in [c, f_1(x))$ и $G_2 : x_1 = a, x_2 = b, y \in (f_2(x), d]$, функция $F(x, y) = 0$. Иными словами, переменная y принимает значения из отрезков $[f_1(x), f_2(x)]$, когда $x \in [a, b]$. В результате имеем

$$\iint_G f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy.$$

Так как

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_G F(x, y) ds,$$

получаем

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy.$$

Следует отметить, что область, по которой можно перейти от двойного интеграла к повторному, должна быть “правильной”. По одной переменной границы изменения должны быть фиксированными, а область изменения второй переменной должна ограничиваться двумя функциями, как это изображено на рис. 17.3.

В качестве примера можно рассмотреть область изображенную на рис. 17.4. В этом случае область придется разделить на две. Тогда интеграл

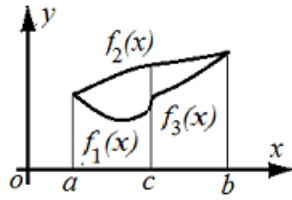


Рис. 17.4.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) ds &= \int_a^c dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy + \\ &+ \int_c^b dx \int_{f_3(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

17.4. Замена переменных в

двойном интеграле

Пусть имеется двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D

Требуется произвести замену переменных $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Приведем без доказательства теорему, позволяющую осуществить требуемую замену.

Теорема 17.4. Если преобразование $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ переводит область $D \in G$ является взаимно однозначным и функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ в области D имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

то при условии существования интеграла $\iint_D f(x, y) ds$, справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

17.4.1. Цилиндрические координаты. Для перехода от декартовой системы координат (x, y, z) к цилиндрическим (φ, ρ, z) , используются следующие формулы перехода $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$

Если имеем интеграл в декартовой системе координат, а необходимо осуществить замену переменных с использованием цилиндрических координат, то вычисляем якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \rho)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho, \quad \left| \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \rho)} \right| = \rho$$

Следовательно, будем иметь

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Пример 17.2. Вычислить

$$\iint_D (x + xy) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = 4.$$

Переходим к цилиндрическим координатам $x + xy = \rho \cos \varphi + \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi$. Область

$D : x^2 + y^2 = 4$ остается кругом $\rho = 2$. После замены переменных, получим

$$\begin{aligned} \iint_D (x + xy) dx dy &= \iint_{D_1} (\rho \cos \varphi + \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho^2 \cos \varphi + \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \cos \varphi + \frac{\rho^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = \left(\frac{8}{3} \sin \varphi - \cos 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \left(\frac{8}{3} \sin 2\pi - \cos 4\pi \right) - \left(\frac{8}{3} \sin 0 - \cos 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

17.5. Приложения двойного интеграла

17.5.1. Вычисление объемов. Когда вводилось понятие двойного интеграла, было выяснено, что численно его значение равняется объему фигуры, заключенной между поверхностью $z = f(x, y)$ и плоскостью xOy . Рассмотрим пример по вычисления объема.

Пример 17.3. Вычислить объем фигуры, ограниченной поверхностями

$$z^2 = x^2 + y^2, z^2 + x^2 + y^2 = 8, z = 0$$

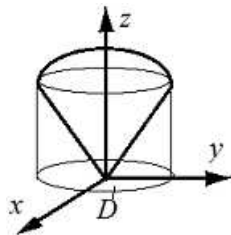


Рис. 17.5.

2.

Имеем перевернутый конус, вырезающий шаровой сегмент и из шара. Преобразуем заданные уравнения в цилиндрические координаты $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$

$z = \rho, z = \sqrt{8 - \rho^2}, z = 0$. Определим область интегрирования, которой является проекция линии пересечения на плоскость xOy . $\rho = \sqrt{8 - \rho^2} \Rightarrow \rho = 2$. Получили, что областью интегрирования D является окружность радиуса

В декартовых координатах объем данной фигуры выражается формулой.

$$V = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\sqrt{8-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\sqrt{8-\rho^2} - \rho \right) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\sqrt{(8-\rho^2)^3} - \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\
&= (16\sqrt{2} - 10) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2(16\sqrt{2} - 10) \pi \text{ (куб.ед.)}.
\end{aligned}$$

17.5.2. Механические приложения. Пусть $\mu(x, y)$ - плотность распределения массы некоторой плоской фигуры D . Тогда масса плоской фигуры определяется по формуле

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy.$$

Статические и кинетический моменты плоской фигуры D относительно осей Ox, Oy с помощью формул

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D \mu(x, y) y dx dy, \quad J_x = \iint_D \mu(x, y) y^2 dx dy, \\
M_y &= \iint_D \mu(x, y) x dx dy, \quad J_u = \iint_D \mu(x, y) x^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры, справедливы формулы:

$$x^* = \frac{M_y}{m}, \quad y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Пример 17.4. Вычислить координаты центра тяжести плоской однородной фигуры с плотностью распределения массы $\mu(x, y) = 1$, которая ограничена функциями $y = 1 + x^2, y = 0, x = 0, x = 3$. Определяем массу

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{1+x^2} dy = \int_0^3 (1+x^2) dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 12 \text{ (ед.массы)}$$

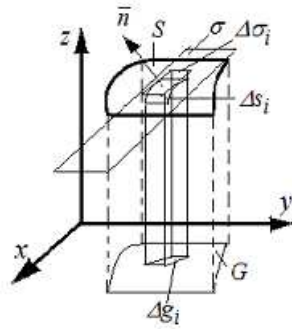
Определим статические моменты:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^3 dx \int_0^{1+x^2} y dy = \int_0^3 \frac{(1+x^2)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \\
&= \frac{1}{2} \left(3 + 18 + \frac{243}{5} \right) = 34,8,
\end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^3 dx \int_0^{1+x^2} x dy = \int_0^3 (x + x^3) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{9}{2} + \frac{81}{4} \right) = 29,25$$

Тогда

$$x^* = \frac{29,25}{12} = 2,4375, \quad y^* = \frac{34,8}{12} = 2,9.$$



17.5.3. Вычисление площади

поверхности. Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$, площадь которой обозначим символом S , рис.17.6. Проекцию этой поверхности на координатную плоскость xOy обозначим символом G . Разобьем область G произвольным образом на n частей. В каждой из них, площадь которых Δg_i выберем произвольно точки с координатами (x_i, y_i) . На поверхности этой точке и участку Δg_i будет соответствовать точка z_i и часть поверхности Δs_i . Проведем в

точке (x_i, y_i, z_i) касательную плоскость σ

Рис. 17.6.

$$f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i, y_i)(y - y_i) - (z - z_i) = 0.$$

На этой плоскости выделим участок $\Delta \sigma_i$, проекцией которого на плоскость G является участок Δg_i . В точке (x_i, y_i, z_i) проведем вектор нормали $\bar{n}$, который имеет координаты $\{f'_x(x_i, y_i), f'_y(x_i, y_i), -1\}$.

Составим интегральную сумму

$$J(f) = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

Тогда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = S$. С другой стороны $\Delta g_i = \Delta \sigma_i \cos \gamma_i$, где γ_i угол между вектором нормали $\bar{n}$ и осью oz .

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(x_i, y_i))^2 + (f'_y(x_i, y_i))^2}}.$$

Принимая во внимание то, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \sigma_i = \Delta s_i$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta g_i}{\cos \gamma_i} &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(x_i, y_i))^2 + (f'_y(x_i, y_i))^2} \Delta g_i = \\ &= \iint_G \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dg = \end{aligned}$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

17.6. Контрольные вопросы

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
3. Сформулируйте условия интегрируемости функций.
4. Как осуществляется замена переменных в двойном интеграле?
5. Как осуществляется вычисление двойного интеграла?
6. Обоснуйте преобразование двойного интеграла в повторные.
7. Как вычислить объем пространственной фигуры с помощью двойного интеграла?
8. Как вычислить координаты центра тяжести плоской фигуры?

17.7. Методические указания по решению задач

Пример 17.5. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

Решение:

Построим область S_1 , ограниченную линиями $x = -2$, $x = -\sqrt{3}$, $y = 0$, $y = \sqrt{4-x^2}$.

Область S_2 ограничена линиями $x = -\sqrt{3}$; $x = 0$, $y = 0$ и $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$. Последняя представляет собой нижнюю часть окружности с центром в точке $D(0, 2)$ и радиусом 2. Покажем эти области на рис. 17.7.

Полученная область $S = S_1 \cup S_2$ ограничена кривыми $x = \varphi_1(y) = -\sqrt{4-y^2}$, $x = \varphi_2(y) = -\sqrt{4y-y^2}$, $y = 0$, $y = 1$, причем всюду на отрезке $[0; 1]$ функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны и $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$. Поэтому для нового порядка интегрирования обойдемся одним интегралом. Имеем

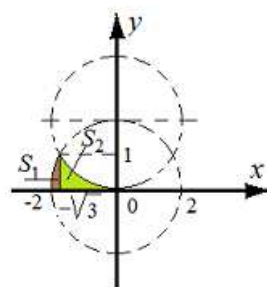


Рис. 17.7.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx.$$

Пример 17.6. . Вычислить $\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

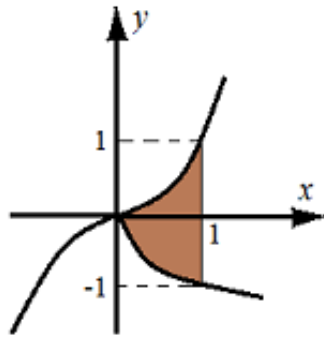


Рис. 17.8.

Решение. Изобразим область интегрирования на рис.17.8. При $x \in [0; 1]$ функции $y_1 = -\sqrt{x}$ и $y_2 = x^3$ непрерывны и $y_1 \leq y_2$. Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4) dy = \\ &= \int_0^1 (18x^2y^3 + 30x^4y^5) \Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} dx = \\ &= \int_0^1 (18x^{11} + 30x^{19} + 18x^{\frac{7}{2}} + 30x^{\frac{13}{2}}) dx = \\ &= \left(\frac{3}{2}x^{12} + \frac{3}{2}x^{20} + 4x^{\frac{9}{2}} + 4x^{\frac{15}{2}} \right) \Big|_0^1 = 11. \end{aligned}$$

Пример 17.7. Вычислить

$$\iint_D 12ye^{6xy} dx dy \quad ; \quad D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}.$$

Решение:

Область интегрирования представляет собой прямоугольник.

Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

$$\begin{aligned} & \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy} dx = 2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int_{1/6}^{1/3} e^{6xy} d(6xy) = 2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{6xy} \Big|_{\ln 3}^{\ln 4} dy = \\ &= -2 \int_{\ln 3}^{\ln 4} (e^{2y} - e^y) dy = (e^{2y} - 2e^y) \Big|_{\ln 3}^{\ln 4} = \\ &= e^{2\ln 4} - 2e^{\ln 4} - e^{2\ln 3} + 2e^{\ln 3} = 16 - 8 - 9 + 6 = 5. \end{aligned}$$

Пример 17.8. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$$x^2 + y^2 = 12, \quad x\sqrt{6} = y^2, \quad (x \geq 0).$$

Решение: Данная фигура получается при пересечении окружности радиуса $R = 2\sqrt{2}$ и параболы с осью симметрии Ox . Из уравнения параболы, возводя в квадрат обе части, имеем $6x^2 = y^4$. Точки пересечения линий, ограничивающих область, определяются из уравнения $\frac{1}{6}y^4 + y^2 = 12$. Получим $y = \pm\sqrt{6}$. В силу симметрии области интегрирования имеем

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{6}} dy \int_{\frac{1}{\sqrt{6}}y^2}^{\sqrt{12-y^2}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy = \\ &= 2 \left(y\sqrt{12-y^2} \Big|_0^{\sqrt{6}} + \int_0^{\sqrt{6}} \frac{y^2}{\sqrt{12-y^2}} dy - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^3}{3\sqrt{6}} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) = 2 \left(6 - \int_0^{\sqrt{6}} \frac{12-y^2-12}{\sqrt{12-y^2}} dy - 2 \right) = \\ &= 2 \left(4 - \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2} dy + 12 \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{12-y^2}} dy \right) = \\ &= 2 \left(1 + 12 \arcsin \frac{y}{2\sqrt{3}} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) = 2 + 3\pi \text{ кв.ед.} \end{aligned}$$

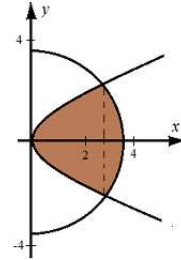


Рис. 17.9.

Пример 17.9. Пластика D задана неравенствами, μ — поверхностная плотность. Найти массу пластинки, рис. 17.10.D: $1 \leq \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq \frac{x}{4}$, $\mu = \frac{x}{y^5}$, рис. 17.9.

Решение:

Воспользуемся обобщенными полярными координатами вида $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$ $|J| = ab\rho$, тогда массу пластинки можно вычислить с помощью двойного интеграла

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} ab\rho d\rho,$$

$$x = 4\rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad \text{и} \quad \mu = \frac{4 \cos \varphi}{\rho^4 \sin^5 \varphi}.$$

Из рис. 17.10 видно, что φ и r изменяются в пределах: $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$. Нижнюю границу φ получим из уравнения прямой $y = \frac{x}{4}$, переходя в ней к новым координатам: $\rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi$, откуда $\tan \varphi = 1$, а $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

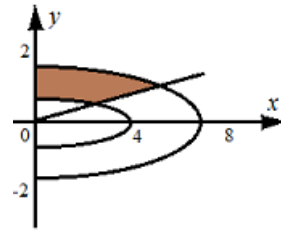


Рис. 17.10.

Тогда получим для нахождения массы двойной интеграл

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4\cos\varphi}{\rho^4 \sin^5\varphi} 4\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{8\cos\varphi}{\sin^5\varphi} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right) \bigg|_1^{\sqrt{3}} d\varphi = \\
 &= -8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) d\varphi = \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-5}\varphi d(\sin\varphi) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sin^4\varphi} \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} \right) = -\frac{4}{3}(1 - 4) = 4 \quad (\text{ед. массы}).
 \end{aligned}$$

Пример 17.10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$x = 17\sqrt{2y}, \quad x = 2\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = \frac{1}{2}.$$

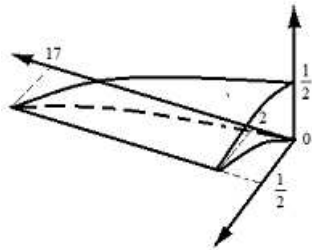


Рис. 17.11.

Решение: Данное тело является цилиндридом, ограниченным сверху плоскостью $z + y = \frac{1}{2}$, снизу плоскостью $z = 0$, а с боков прямыми цилиндрами $x = 17\sqrt{2y}$, $x = 2\sqrt{2y}$, как показано на рис.17.11.

Тогда искомый объем находим по формуле:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_G z(x; y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} \left(\frac{1}{2} - y \right) dx = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - y \right) (17\sqrt{2y} - 2\sqrt{2y}) dy = \\
 &= 15\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \quad \text{куб.ед.}
 \end{aligned}$$

Пример 17.11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = \frac{25}{4} - y^2, \quad z = 0.$$

Решение: В цилиндрических координатах $x + 1 = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, $z = z$ искомый объем находится как

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz.$$

Тело ограничено сверху параболическим цилиндром $z = \frac{25}{4} - \rho^2 \sin^2 \varphi$, снизу плоскостью $z = 0$, а с боков прямым цилиндром $r = 1$, как показано на рис.17.12. Расставив границы интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{25}{4} - \rho^2 \sin^2 \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \left(\frac{25}{4} - \rho^2 \sin^2 \varphi \right) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{8} \rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \sin^2 \varphi \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{8} - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{25}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} (24\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{24}{8} \cdot 2\pi = 6\pi \quad \text{куб.ед.} \end{aligned}$$

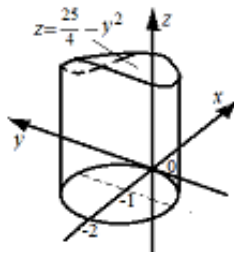


Рис. 17.12.

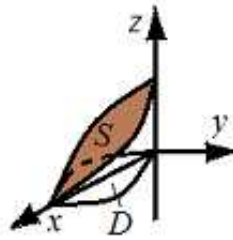


Рис. 17.13.

Пример 17.12. Найти объем площадь поверхности, которую вырезает цилиндр $x^2 + y^2 = 4x$ из полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z > 0$. На рис. 17.13 приведен схематичный рисунок. Областью интегрирования D является окружность $x^2 + y^2 = 4x$. Задана функция

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Определим частные производные:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Тогда площадь поверхности равна

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \right)^2} dx dy = \\ &= \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dy. \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл, осуществив переход к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда получим

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \frac{4\rho d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(-4\sqrt{16-\rho^2} \right) \Big|_0^{4\cos\varphi} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-16\sin\varphi + 16) d\varphi = (16\varphi + 16\cos\varphi) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 16\pi \text{ (кв.ед).}$$

17.8. Примеры для самостоятельного решения

1. $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx.$
2. $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy.$
3. $\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy.$
4. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$
5. $\int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy.$

Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

6. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy.$	7. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx.$
8. $\int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx.$	9. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx dy.$

10. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2-9} dx dy$, где область G — кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

11. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx.$

12. $\iint_G \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$, где область G — часть круга радиуса a с центром в точке $O(0, 0)$, лежащая в первой четверти.

13. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx$.
14. $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ ($y > 0$).
15. $\iint_G dx dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 + y^2 = 2a^2$, $y = 0$ ($x > 0$, $a > 0$).
16. $\iint_G x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где область G ограничена лепестком лем-
 нискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$).
- Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:
17. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
18. $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
19. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$).
20. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
21. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.
22. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$.
23. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (внутри цилиндра; $a > 0$).
24. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $xy = z$, $z = 0$.
25. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ ($a > 0$).
26. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$.
27. Найти полную поверхность тела, ограниченного цилиндрами $x^2 = ay$, $z^2 = ay$, и плоскостью $y = 2a$ ($a > 0$).
28. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$, вырезаемой плоскостями $x = 0$, $x - y = 2a$, $y = 0$.
29. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, вырезаемой цилиндром $z^2 = 2a(2a - x)$.
30. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.
31. Найти площадь части поверхности параболоида $z = x^2 - y^2$, заключенной между параболоидами $z = 3x^2 + y^2 - 2$ и $z = 3x^2 + y^2 - 4$.
32. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси OZ , направляющий которого служит трехлепестковая роза $r = a \sin 3\varphi$.
33. Найти площадь части винтовой поверхности $z = a \arctg(x/y)$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

17.8.1. Ответы. 1. $\int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy$. 2. $\int_0^{8/3} dy \int_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y) dx$.

3. $\int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx$.

- 4.** $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y) dy +$
 $+ \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy.$ **5.** $\int_1^3 dy \int_{9/y}^{10-y} f(x, y) dx.$
- 6.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1).$ **7.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6}a^3.$ **8.** $(2/9)a^3.$
- 9.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.$ **10.** $\frac{128}{3}\pi.$ **11.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}.$
- 12.** $\frac{\pi a^3}{6}.$ **13.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$ **14.** $\frac{45}{64}\pi a^4.$ **15.** $\frac{a^2}{12}(3\pi - 2).$
- 16.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4.$ **17.** $42\frac{2}{3}.$ **18.** $8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}.$ **19.** $\frac{16}{3}ab^2.$ **20.** $\frac{abc}{6}.$ **21.** $16/15.$
- 22.** $3\pi.$ **23.** $a^3/2.$ **24.** $\pi.$ **25.** $\frac{2}{3}\pi a^3(3 - \sqrt{2}).$ **26.** $\frac{32}{9}a^3.$ **27.** $\frac{76}{3}a^2.$
- 28.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}a^2.$ **29.** $16a^2.$ **30.** $4\pi a^2(2 - \sqrt{2}).$ **31.** $\frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5}).$
- 32.** $2a^2(\pi - 2).$ **33.** $\pi a^2(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$

ТРОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

18.1. Тройные интегралы

Пусть в трехмерной области V рис.18.1 задана функция трех переменных $u = f(x, y, z)$. Разобьем эту область произвольным образом T_n на n непересекающихся областей с объемами $\Delta v_i, i = \overline{1, n}$. В каждой из полученных областей возьмем произвольные точки с координатами (x_i, y_i, z_i) , и составим интегральную сумму

$$J(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i.$$

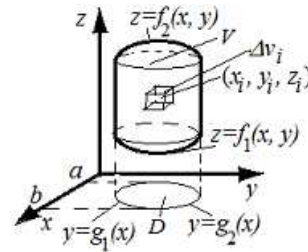


Рис. 18.1.

Определение 18.1. Функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой по Риману в области V , если существует такое число I , такое что для любого разбиения T_n и любого выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta v_i$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = I.$$

Этот предел называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

Из этого определения ясно, что тройной интеграл является аналогом двойного интеграла в трехмерной области определения функции трех переменных. Поэтому все свойства тройного интеграла, условия его существования полностью соответствуют уже рассмотренным свойствам двойного интеграла с заменой двумерных областей на трехмерные области.

18.1.1. Вычисление тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла осуществляется путем преобразования его к повторным интегралам.

Рассмотрим на рис.18.1 область V , которая ограничена сверху и снизу поверхностями

$z = f_2(x, y), z = f_1(x, y)$. Сбоку область ограничена цилиндрической поверхностью. Проекцией области V на координатную плоскость xOy является область D , ограниченная функциями $y = g_1(x), y = g_2(x)$. Если любая прямая параллельная оси z пересекает границу области V только в двух точках, то справедлива формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Далее преобразуем двойной интеграл по области D в повторные интегралы, в результате чего, получаем

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Следует отметить, что мы получили формулу для вычисления тройного интеграла по аналогии с двойным интегралом без доказательства ее справедливости. Доказательство аналогично доказательству теоремы 17.3. (доказать самостоятельно).

Очевидно, что если $f(x, y, z) = 1$, то тройной интеграл позволяет вычислить объем тела, изображенного на рис. 18.1.

Пример 18.1. Вычислить

$$\iiint_V x dx dy dz, V : z = 2 - x - y, x = 0, y = 0, z = 0.$$

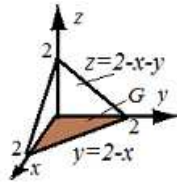


Рис. 18.2.

На рис.18.2 изображена область интегрирования.

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} x dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy (x(2-x-y)) = \\ &= \int_0^2 dx \left((2x-x^2)y - x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (\text{куб.ед}). \end{aligned}$$

18.1.2. Замена переменных в тройном интеграле. Замена переменных в тройном интеграле осуществляется точно так же, как в двойном интеграле. Приведем без доказательства теорему о замене переменных

Теорема 18.1. Если преобразование $x = \varphi(u, v, t)$, $y = \psi(u, v, t)$, $z = \gamma(u, v, t)$ преобразует область V в G , является взаимно однозначным и функции $\varphi(u, v, t)$, $\psi(u, v, t)$, $\gamma(u, v, t)$ в области D имеют непрерывные частные производные и отличный от нуля якобиан

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial t} \end{vmatrix},$$

то при условии существования интеграла $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, справедлива формула

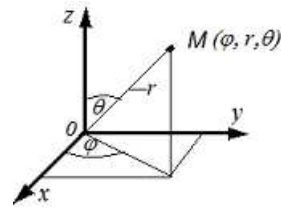
$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_G f(\varphi(u, v, t), \psi(u, v, t), \gamma(u, v, t)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} \right| du dv dt. \end{aligned}$$

Для цилиндрических координат имеем $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. В этом случае

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \rho, z)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Тогда $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \rho, z)} \right| = \rho$.

Сферические координаты Сферические координаты точки M – это три числа (φ, r, θ) (см. рис. 18.3). Связь с декартовой системой координат осуществляется по формулам:



$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, \theta)} = \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} \stackrel{18.3}{=} =$$

$$= -r^2 \sin \theta \implies \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, \theta)} \right| = r^2 \sin \theta.$$

Пример 18.2. Вычислить

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Область интегрирования шар радиуса равным R . Поэтому перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Тогда получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi dr \int_0^\pi r^4 \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^4 dr (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2}{5} R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{5} R^5. \end{aligned}$$

18.1.3. Механические приложения тройного интеграла. Обозначим символом $\mu(x, y, z)$ плотность распределения массы в произвольной точке тела V . Тогда масса тела определяется по формуле

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Для определения статических моментов относительно координатных плоскостей используются формулы:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{zx} = \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ M_{xy} &= \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Формулы для вычисления центра тяжести имеют вид

$$x^* = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y^* = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z^* = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Кинетические моменты инерции относительно осей координат можно вычислить, используя следующие формулы:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad J_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ J_z &= \iiint_V (y^2 + x^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

18.2. Криволинейные интегралы

Пусть на плоскости задана кривая L , не имеющая точек пересечения и самоналегания, рис. 18.4, кривая AB

Предположим, что кривая определяется в параметрической форме с помощью уравнений: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,

$t \in [a, b]$. Будем считать, что вдоль этой кривой определены и непрерывны функции: $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$. Разобьем кривую произвольным образом на n участков точками M_i , $i = 0, n$. Это разбиение обозначим символом T_n . На каждом участке возьмем произвольные точки с координатами (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$ каждой из которых соответствует параметр t_i . Составим интегральные суммы:

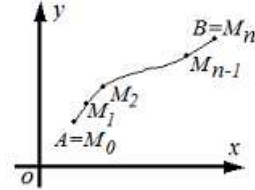


Рис. 18.4.

$$J_1(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i, \quad J_2(P) = \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i, \quad (18.1)$$

$$J_2(Q) = \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i) \Delta y.$$

Определение 18.2. Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_1(f), \quad \lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_2(P), \quad \lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_2(Q). \quad (18.2)$$

где $\Delta l = \max\{\Delta l_1, \dots, \Delta l_n\}$, независящие от способа разбиения T_n и выбора точек с координатами (x_i, y_i) , то эти пределы называются криволинейными интегралами и обозначаются

$$1. \lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_1(f) = \int_L f(x, y) dl$$

$$2. \lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_2(P) = \int_L P(x, y) dx, \quad 3. \lim_{\Delta l \rightarrow 0} J_2(Q) = \int_L Q(x, y) dy.$$

Первый интеграл называют криволинейным интегралом первого рода. Второй и третий называют криволинейными интегралами второго рода. Сумму

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

называют общим криволинейным интегралом второго рода.

Анализируя интегральные суммы, можно сделать вывод о том, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления интегрирования. Интегралы второго рода при изменении направления

интегрирования меняют знак на противоположный. Это связано с тем что переменные $\Delta x_i, \Delta y_i$ изменяют знак при изменении направления интегрирования.

Особо следует оговорить случай, когда кривая L является замкнутой. Из двух возможных направлений обхода будем считать положительным то направление, когда при обходе контура область ограниченная этим контуром остается слева по отношению к точке обхода. Другими словами, обход против часовой стрелки будем считать обходом в положительном направлении. Интеграл по замкнутому контуру, часто обозначают следующим символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

18.2.1. Способы вычисления криволинейных интегралов.

Пусть уравнение кривой L , $y = \eta(x)$ является дифференцируемым. Тогда вычисление криволинейных интегралов осуществляется путем преобразования их в обычные определенные интегралы. Подставим значение $y = \eta(x)$ в криволинейный интеграл первого рода, принимая во внимание равенство $dl = \sqrt{1 + (\eta'(x))^2} dx$. В результате подынтегральная функция будет зависеть только от переменной x . Если эта переменная при обходе кривой L изменяется в пределах сегмента $[a, b]$, то в результате получим

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(x, \eta(x))\sqrt{1 + (\eta'(x))^2} dx. \quad (18.3)$$

Выполним подстановку $y = \eta(x)$ в криволинейный интеграл второго рода, принимая во внимание равенство $dy = \eta'(x)dx$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, \eta(x)) + Q(x, \eta(x))\eta'(x))dx. \quad (18.4)$$

Если уравнение кривой задано в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то осуществив замену переменных получим

$$\int_L f(x, y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$

Таким образом, получены формулы преобразования криволинейных интегралов в определенные интегралы. При этом интегрирование ведется по переменной x если пользоваться формулами (18.3) и (18.4). Следует отметить, что интегрирование можно осуществлять и по переменной y . Выбор остается за пользователем.

Следует отметить, что криволинейные интегралы обладают теми же свойствами, что и обычные определенные. Их не трудно доказать, используя методику доказательств свойств определенного интеграла. Поэтому перечислим основные из них без обоснования их справедливости.

1. Если существуют интегралы от функций $f(xy)$, $g(x, y)$, то

$$\int_L (\alpha f(x, y) \pm \beta g(x, y)) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl \pm \beta \int_L g(x, y) dl.$$

где α и β — любые постоянные.

2. Если существуют интеграл от функции $f(xy)$, а кривая L состоит из двух кусочно-гладких кривых L_1 , L_2 то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3. Если существуют интеграл от функции $f(xy)$ по кривой L , то существует интеграл от функции $|f(x, y)|$, и справедлива оценка

$$\left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl.$$

4. Формула среднего значения. Если функция $f(xy)$ непрерывна вдоль кривой L , то на этой кривой существует точка $M(x_*, y_*)$ такая, что справедливо равенство

$$\int_L |f(x, y)| dl = l f(x_*, y_*),$$

где l — длина кривой.

В случае, когда рассматривается трехмерное пространство и кривая L является пространственной кривой, то криволинейный интеграл второго рода имеют вид

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

18.2.2. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Обозначим через α и β углы, которые составляет касательная с осями координат в точке A на рис. 18.5. Тогда получим

$$dx = \cos\alpha dl, \quad dy = \cos\beta dl$$

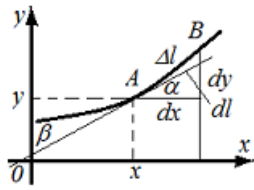


Рис. 18.5.

Подставим эти значения в криволинейный интеграл второго рода, принимая за положительное направление касательной, то, которое соответствует направлению движения по кривой L

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \\ &= \int_L (P(x, y) \cos\alpha + Q(x, y) \cos\beta) dl. \end{aligned}$$

В результате получили криволинейный интеграл первого рода.

18.2.3. Формула Грина. Данная формула устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами.

Теорема 18.2. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в области G и имеют непрерывные частные производные в этой области. Если существуют интегралы

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy, \quad \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy,$$

то справедливо формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (18.5)$$

где L — граница области $D \subset G$.

Доказательство. Пусть контур L может быть задан уравнениями

$y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ участки ACB и AKB ,
 $x = \eta(y)$, $x = \theta(y)$ участки CBK и CAK соответственно (рис. 18.6)

Возьмем составляющую

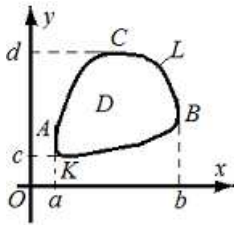


Рис. 18.6.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b (P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx.$$

Каждый из этих интегралов является криволинейным интегралом

$$\begin{aligned} & \int_{ACB} P(x, \varphi(x)) dx - \int_{AKB} P(x, \psi(x)) dx = \\ &= - \int_{BCA} P(x, \varphi(x)) dx - \int_{AKB} P(x, \psi(x)) dx = - \oint_L P(x, y) dx \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\theta(y)}^{\eta(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx = \\ &= \int_{KBC} Q(\eta(y), y) dy - \int_{KAC} Q(\theta(y), y) dy = \\ &= \int_{KBC} Q(\eta(y), y) dy + \int_{CAK} Q(\theta(y), y) dy = \oint_L Q(x, y) dy. \square \end{aligned}$$

18.3. Методические указания по решению задач

Пример 18.3. Вычислить

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz; \quad V: y = 3x, y = 0, x = 2, z = xy, z = 0.$$

Решение:

Область интегрирования ограничена сверху гиперболическим параболоидом $z = xy$, снизу плоскостью $z = 0$. Боковая поверхность ограничена плоскостями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$ как показано на рис. 18.7.

Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле и вычислим его:

$$\int_0^2 x^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} z dz = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{3x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) dy =$$

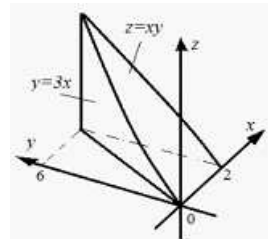


Рис. 18.7.

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{3x} \frac{x^2 y^2}{2} dy = \int_0^2 \frac{x^4}{2} \left(\frac{y^3}{3} \Big|_0^{3x} \right) dx = \int_0^2 \frac{9}{2} x^7 dx = \frac{9}{16} x^8 \Big|_0^2 = 144.$$

Пример 18.4. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

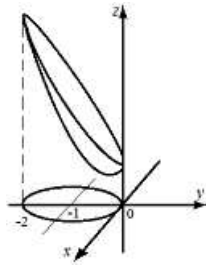


Рис. 18.8.

$$z = 10(x^2 + y^2) + 1, \quad z = 1 - 20y.$$

Решение:

В цилиндрических координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, наше тело снизу ограничивает параболоид $z = 10r^2 - 20r \sin \varphi + 1$, а плоскость $z = 1 - 20r \sin \varphi$ сверху, как это видно из рис.18.8

Проекция линии пересечения этих поверхностей на плоскость xOy будет в цилиндрических координатах: $10r^2 - 20r \sin \varphi + 1 = 1 - 20r \sin \varphi$ или $r = 1$.

Тогда искомый объем находим тройным интегралом

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{10r^2 - 20r \sin \varphi + 1}^{1 - 20r \sin \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (z \Big|_{10r^2 - 20r \sin \varphi + 1}^{1 - 20r \sin \varphi}) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (1 - 20r \sin \varphi - 10r^2 + 20r \sin \varphi - 1) dr = \\ &= 10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (1 - r^2) dr = 10 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 5\pi \quad (\text{куб.ед.}) \end{aligned}$$

Пример 18.4. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела. $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $(y \geq 0, z \geq 0)$, $\mu = 10(x^2 + y^2)$.

Решение. В цилиндрических координатах $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ мы получим, как видно на рис.18.9, что тело ограничено снизу плоскостью $z = 0$ сверху конической поверхностью $z = 2r$, а с боков прямым цилиндром $r = 1$.

$\mu = 10\rho^2$ - в цилиндрической системе координат.

Искомую массу находим по формуле

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\rho} \mu dz = 10 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\rho} dz = \\
 &= 10 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 2\rho d\rho = 20 \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 \right) = 4\pi \quad (\text{ед. массы}).
 \end{aligned}$$

Пример 18.5. Вычислить $\int_L \frac{dl}{x-y}$, если L –

отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

Решение. Находим производную $y' = \frac{1}{2}$. Подставим вместо переменной y функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$.

$$\int_L \frac{dl}{x-y} = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5} \ln|x+4| \Big|_0^4 = \sqrt{5} \ln 2.$$

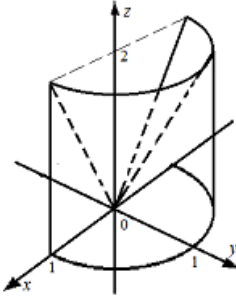


Рис. 18.9.

Пример 18.6. Вычислить интеграл $\int_L x^2 dx + xy dy$, где L дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

$$\begin{aligned}
 \int_L x^2 dx + xy dy &= \int_1^2 (x^2 + 2x^4) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_1^2 = \\
 &= \left(\frac{8}{3} + \frac{64}{5} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) = 14 \frac{11}{15}.
 \end{aligned}$$

18.4. Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить $\iiint \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, если область интегрирования ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

2. Вычислить $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz$

3. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и поверхностью параболоида $x^2 + y^2 = 3z$.

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

5. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$, цилиндрической поверхностью $x = \frac{x^2 + y^2}{2}$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (внутри цилиндра).

6. Определить объем тел, ограниченных поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

7. Определить объем тел, ограниченных поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

8. Определить объем тел, ограниченных поверхностями: $az = x^2 + y^2$; $z^2 = x^2 + y^2$.

9. Определить объем тел, ограниченных поверхностями: $3z = x^2 + y^2$; $z = 3$.

10. Определить объем тел, ограниченных поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

11. Вычислить $\oint_L xy dl$, если L — контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$.

12. Вычислить $\int_L \sqrt{2y} dl$, если L — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$).

13. Вычислить $\int_L xyz dl$, если L — отрезок прямой между $A(1,0,1)$ и $B(2,2,3)$.

14. Вычислить: $\int_L x dl$, если L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(1,2)$.

18.4.1. Ответы. 1. $\frac{32}{3}$. 2. $\frac{125}{6}$. 3. $\frac{9}{2}$. 4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 5.. 6. $\frac{64}{3}a^2$. 7. $\frac{2}{3}$. 8. $\frac{1}{2}(15 - 16 \ln 2)$. 9. $10a^2/3$. 10. $a^2(\pi - 1)$. 11. 24. 12. $4\pi a\sqrt{a}$. 13. 12. 14. $\sqrt{5}/2$.

Лекция 19

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

19.1. Интегралы не зависящие от пути интегрирования

Выясним условия, когда значение криволинейного интеграла второго рода не зависит от пути интегрирования.

Терема 19.1. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны в односвязной области G и имеют непрерывные частные производные. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , лежащей в области G , выполнено условие

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (19.1)$$

2. Для любых двух точек A и B из области G значение интеграла

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (19.2)$$

не зависит от кусочно-гладкой кривой AB , соединяющей точки A и B

3. Существует функция $u(x, y)$ такая, что

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (19.3)$$

и для любых точек A и B из области G , и любой кривой, соединяющей эти точки в области G выполнено условие

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A). \quad (19.4)$$

4. Выполнено условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (19.5)$$

Таким образом, выполнение одного из условий является необходимым и достаточным условием выполнения остальных условий. Поэтому доказательство будем осуществлять по кругу.

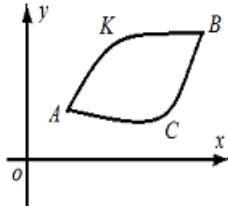


Рис. 19.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1 → 2) Пусть выполнено условие (19.1). Соединим точки A и B двумя произвольными кривыми ACB и AKB рис.19.1. Тогда, в соответствии с (19.1), имеем

$$\begin{aligned} \oint_{ACBKA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{ACB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \\ &+ \int_{BKA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \end{aligned}$$

Изменив направление интегрирования во втором интеграле получим

$$\int_{ACB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AKB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

(2 → 3) Так как выполнено условие 2, то имеем, что значение интеграла

$\oint_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(A, B)$ не зависит от пути интегрирования. Иными словами значение $u(A, B)$ зависит только от координат точек A и B . Пусть точка A фиксированная, а точка B произвольная. Дадим приращение в точке B , так чтобы новая точка $D(x + \Delta x, y)$ не выходила за пределы области G . Тогда приращение функции Δu будет равно

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{AD} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{ACB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{BD} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \end{aligned}$$

Так как отрезок BD параллелен оси Ox , то $dy = 0$. Поэтому, получаем

$\Delta u = \int_{BD} P(x, y)dx = \int_x^{x+\Delta x} P(s, y)ds$. Воспользуемся теоремой о среднем

$$\Delta u = \int_x^{x+\Delta x} P(s, y)ds = P(x + \theta \Delta x) \Delta x \theta \in (0, 1).$$

Разделим на Δx , и найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x) = P(x, y) \implies \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогично доказывается равенство $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(xy)$. Следовательно, существует функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условию (19.3). Докажем справедливость формулы (19.4). Пусть кривая L задана в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. В точках A и B , $t = t_a$, $t = t_b$. Тогда, получим

$$\begin{aligned} \oint_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{t_a}^{t_b} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} du(\varphi(t), \psi(t)) = u(\varphi(t_b), \psi(t_b)) - u(\varphi(t_a), \psi(t_a)) = u(B) - u(A). \end{aligned}$$

(3 $\rightarrow$ 4) Из формулы (19.3) и свойств смешанных производных второго порядка следует справедливость условия (19.5).

(4 $\rightarrow$ 1) Так как выполнено условие (19.5), то воспользовавшись формулой Грина, получим

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = 0. \square$$

Формула (19.4) позволяет вычислять криволинейные интегралы через первообразную.

19.2. Приложение криволинейных интегралов

19.2.1. Вычисление площади фигуры.. Пусть требуется вычислить площадь фигуры, изображенной на рис. 18.6. $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ участки ACB и AKB , $x = \eta(y)$, $x = \theta(y)$ участки CBK и CAK соответственно

$$S = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx = \int_{ACB} ydx - \int_{AKB} ydx.$$

Получили два криволинейных интеграла. Изменив направление интегрирования в первом интеграле, получим

$$S = - \int_{BCA} ydx - \int_{BKA} ydx = - \oint_L ydx. \quad (19.6)$$

С другой стороны

$$S = \int_c^d (\eta(x) - \theta(x)) dy = \int_{KBC} x dy - \int_{KAC} x dy = \oint_L x dy. \quad (19.7)$$

Можно объединить эти две формулы

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (19.8)$$

19.2.2. Вычисление массы кривой. Предположим, что вдоль кривой L распределена масса с плотностью $\mu(x, y)$. Для вычисления массы всей кривой разобьем кривую произвольным образом на n участков точками $M_i, i = \overline{0, n}$. Это разбиение обозначим символом T_n . На каждом участке возьмем произвольные точки с координатами $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$. Составим интегральную сумму

$$J_1(\mu) = \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i) \Delta l_i.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим криволинейный интеграл первого рода

$$m = \int_L \mu(x, y) dl \quad (19.9)$$

19.2.3. Вычисление работы силы. Если материальная точка движется вдоль кривой L под действием силы $F(x, y)$, проекции которой на оси координат равны $P(x, y), Q(x, y)$, то разобьем кривую произвольным образом на n участков точками $M_i, i = \overline{0, n}$. На каждом участке возьмем произвольные точки с координатами $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$. Составим интегральную сумму

$$J_1(F) = \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

Предполагая, что на каждом участке сила меняется мало, можно считать, что каждое слагаемое приблизительно равно работе, совершаемой силой на этом участке. Тогда переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим

$$A = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (19.10)$$

Если рассмотреть эту задачу в пространстве, когда составляющими силы являются компоненты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, то работа вычисляется по формуле

$$A = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (19.11)$$

19.3. Поверхностные интегралы

Предварительно исследуем вопрос о понятии поверхности и площади поверхности.

19.3.1. Понятие поверхности.. Пусть в области G на плоскости задана векторная функция $z = f(x, y)$, которая отображает область $G \subset R^2$ в область $D \subset R^3$. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ является взаимно однозначной, т. е. существует обратная непрерывная функция $f^{-1}(z)$, которая однозначно отображает область D в G .

Определение 19.1. Множество точек D трехмерного пространства R^3 называется элементарной поверхностью, если это множество является областью значений некоторой взаимно-однозначной непрерывной функции, которая отображает открытый круг G в эту область D .

Определение 19.2. Множество $D \subset R^3$ называется простой поверхностью, если это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, которая является элементарной поверхностью.

Определение 19.3. Поверхность D , точки которой имеют координаты x, y, z называется регулярной (k раз дифференцируемой), если при некотором $k \geq 1$ у каждой точки $M(x, y, z) \in D$ есть окрестность, в которой возможна k раз дифференцируемая параметризация

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \theta(u, v), \quad (19.12)$$

где функции k раз дифференцируемы. Если $k = 1$, то поверхность называют гладкой.

Поверхность в трехмерном пространстве можно задать в декартовой системе координат в явном $z = f(x, y)$, или в неявном виде $F(x, y, z) = 0$ а также в параметрической форме (19.12) или с помощью векторных функций. В этом случае берется произвольная точка $M(x, y, z) \in D$. Обозначим через $r(M)$ вектор, идущий из начала координат в точку M , который будем называть радиусом вектором поверхности. В этом случае функции в (19.12) являются координатами радиуса вектора $r(M)$. При фиксированных значениях одной из координат u или v и изменении другой, радиус вектор будет описывать на поверхности линии, которые называются координатными. Эту систему координатных линий принято называть системой кри-

волинейных координат. В этом случае производные $r'_u(uv), r'_v(u, v)$ являются векторами, касательными к координатным линиям. Следовательно они располагаются в касательной плоскости в соответствующей точке. Тогда вектор, являющийся результатом векторного произведения $N = (r'_u(u, v) \times r'_v(u, v))$, будет вектором нормали в соответствующей точке, а вектор

$$\mathbf{n} = \frac{r'_u(u, v) \times r'_v(u, v)}{|r'_u(u, v) \times r'_v(u, v)|}$$

является единичным вектором нормали к поверхности. Если поверхность гладкая, то векторные функции $N(u, v)$ и $\mathbf{n}(u, v)$ будут непрерывными. Поэтому в окрестности каждой точки поверхности будет существовать векторное поле нормалей.

Определение 19.4. Поверхности, на которых в целом существует непрерывное поле нормалей, называются двусторонними. Если такого поля не существует, то поверхности называются односторонними.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то вектор нормали в точке $M(x, y, z)$ имеет вид $N = (f'_x(x, y), f'_y(x, y), -1)$.

19.3.2. Понятия поверхностных интегралов и способы их вычисления. Пусть D гладкая ограниченная двусторонняя поверхность, на которой задана функция $f(M)$. Обозначим символом $\mathbf{n}(M)$ непрерывное векторное поле единичных нормалей. Разобьем поверхность кусочно-гладкими кривыми на n непересекающихся частей, площади которых равны $\Delta\sigma_i$. Выберем на этих частях произвольно точки M_i . Составим четыре суммы

$$\begin{aligned} J_0(f) &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i, \quad J_1(f) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i \cos Z_i, \\ J_2(f) &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i \cos Y_i, \quad J_3(f) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i \cos X_i, \end{aligned} \quad (19.13)$$

где X_i, Y_i, Z_i углы между вектором нормали $\mathbf{n}(M)$ и соответствующими осями координат.

Определение 19.5. Если для любого разбиения поверхности D и произвольного выбора точек M_i существуют конечные пределы $J_j(f)$, то эти пределы называются поверхностными интегралами и обозначаются. При этом предел

$$J_0(f) = \iint_D f(M) d\sigma$$

называют *поверхностным интегралом первого рода*, а следующие пределы

$$J_1(f) = \iint_D f(M) \cos Z d\sigma, \quad J_2(f) = \iint_D f(M) \cos Y d\sigma,$$

$$J_3(f) = \iint_D f(M) \cos X d\sigma,$$

поверхностными интегралами второго рода. Сумму этих интегралов

$$\iint_D f(M) \cos Z d\sigma + \iint_D f(M) \cos Y d\sigma + \iint_D f(M) \cos X d\sigma,$$

называют *поверхностным интегралом второго рода общего вида*.

Следует отметить, что интегралы первого рода не зависят от ориентации вектора нормалей $\mathbf{n}(M)$, а интегралы второго рода зависят, так как с изменением ориентации изменяются знаки косинусов на противоположные.

Принимая во внимание равенства $\cos Z d\sigma = \pm dx dy$, $\cos Y d\sigma = \pm dx dz$,

$\pm \cos X d\sigma = dy dz$ (плюс, если углы острые, минус, если углы тупые)

$$\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy = d\sigma,$$

получим способ вычисления поверхностных интегралов (рис.19.2)

$$\iint_D f(M) d\sigma = \iint_D f(M) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy,$$

$$\iint_D f(M) \cos Z d\sigma + \iint_D f(M) \cos Y d\sigma + \iint_D f(M) \cos X d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(M) dx dy + \iint_{D_{xz}} f(M) dx dz + \iint_{D_{yz}} f(M) dy dz.$$

Таким образом определение поверхностных интегралов и способ их вычисления аналогичны определению двойных интегралов. Поэтому свойства двойных интегралов и условия их существования легко переносятся на поверхностные интегралы.

Следует отметить, что формула для вычисления интеграла первого рода справедлива, если уравнение поверхности задано в виде $y = f(x, y)$.

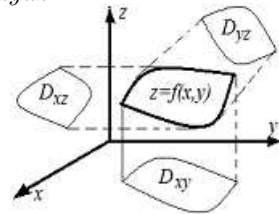


Рис. 19.2.

19.3.3. Формула Остроградского.

Формула Остроградского связывает поверхностный интеграл по за-

мкнутой внешней поверхности с тройным интегралом по объему, ограниченной этой поверхностью.

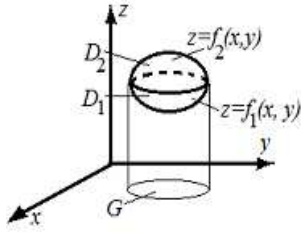


Рис. 19.3.

Предполагается, что любая прямая параллельная оси Oz пересекает поверхность в двух точках. Пусть задана замкнутая поверхность S , состоящая из внешних частей D_1, D_2 , которые описываются функциями $y = f_1(x, y), y = f_2(x, y)$ (рис.194). Эта поверхность ограничивает некоторое тело объемом V .

Терема 19.2. Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{V}$, дифференцируемы в V и существуют тройные

интегралы от частных производных этих функций в области V , то справедлива формула

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства для одной составляющей.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dR = \\ &= \iint_G (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))) dx dy = \\ &= \iint_{D_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{D_1} R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

Во втором интеграле знак минус изменен на плюс, так как вектор нормали на поверхности D_1 составляет тупой угол с осью Oz . Аналогично доказывается справедливость формулы для других составляющих?

19.3.4. Формула Стокса. Эта формула позволяет связать криволинейный интеграл по пространственной кривой L , которая является границей гладкой поверхности S с поверхностным интегралом по этой поверхности. Приведем без доказательства теорему Стокса.

Терема 19.3. Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными на поверхности S то справедлива формула

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Эту формулу можно записать в другом виде, если использовать равенства:

$$\begin{aligned} \cos Z d\sigma &= dx dy, \cos Y d\sigma = dx dz, \cos X d\sigma = dy dz, \\ \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right) d\sigma. \end{aligned}$$

19.4. Контрольные вопросы

1. Докажите теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
2. Как вычисляется площадь фигуры с помощью криволинейного интеграла?
3. Приведите формулы, используемые в приложениях криволинейных интегралов.
4. Дайте определение поверхностных интегралов.
5. Как вычисляются поверхностные интегралы?
6. Докажите формулу Остроградского для любой составляющей.
7. Приведите формулу Стокса.

19.5. Методические указания по решению примеров

Пример 19.1. Вычислить интеграл $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ от точки с координатами (1, -1) до точки (4, 2).

Решение.

В данном случае вид кривой не имеет значения, так как выполнено условие (19.5) $2x = 2x$. Следовательно, существует функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям: $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2$. Из первого условия имеем

$$u(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + C(y).$$

Принимая во внимание второе равенство, дифференцируем полученное равенство по y .

$$x^2 + C'_y(y) = x^2 \implies C'_y(y) = 0 \implies C(y) = A, A = \text{const}$$

Получили $u(x, y) = x^2y + A$ Подставляем это значение в формулу (19.4)

$$\int_L 2xydx + x^2dy = 2 \cdot 16 \cdot 2 + A - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - A = 66.$$

Пример 19.2. Вычислить площадь астроида $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, a > 0$.

Решение.

Воспользуемся формулой (19.8)

$$\begin{aligned} S &= \frac{3a^2}{2} \oint_0^{2\pi} (\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8} (\text{кв.ед}). \end{aligned}$$

Пример 19.3. Найти работу силы $\vec{F} = (x - y)i + j$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ от точки $M(2; 0)$ к точке $N(-2; 0)$.

Решение.

Переменная сила $\vec{F} = (P(x; y); Q(x; y))$ на криволинейном участке MN производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int_{MN} P(x; y) dx + Q(x; y) dy.$$

Криволинейный участок у нас является полуокружностью, которая в параметрическом виде $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ при обходе ее в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до π .

$$\begin{aligned} A &= \int_{MN} (x - y) dx + dy = \int_0^{\pi} ((2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-4\sin t \cdot \cos t + 4\sin^2 t + 2\cos t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-2\sin 2t + 2 - 2\cos 2t + 2\cos t) dt = \end{aligned}$$

$$= (\cos 2t + 2t - \sin 2t + 2 \sin t) \Big|_0^{\pi} = 2\pi.$$

Пример 19.4. Вычислить интеграл

$$\iint_D xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

D — верхняя часть плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченная плоскостями $y = 0$, $y = 2$ в первом октанте. Рис.19.3.

$$\iint_D xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{D_{yz}} xdydz + \iint_D ydzdx + \iint_{D_{xy}} zdxdy.$$

Интеграл $\iint_D ydzdx = 0$, так как поверхность параллельна оси Oy . Из уравнения поверхности имеем $z = 1 - x$, $x = 1 - z$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_{yz}} xdydz + \iint_{D_{xy}} zdxdy &= \iint_{D_{xy}} (1-x) dx dy + \\ &+ \iint_{D_{yz}} (1-z) dy dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 (1-x) dy + \int_0^1 dz \int_0^2 (1-z) dy = \\ &= 2 \int_0^1 (1-x) dx + 2 \int_0^1 (1-z) dz = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + 2 \left(z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

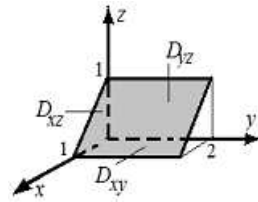


Рис. 19.4.

19.6. Примеры для самостоятельного решения

1. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь области D , ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;
2. Найти функцию $u(x,y)$, если $du(x,y) = (2xy + x^2 - 5)dx + (x^2 - y^3 + 5)dy$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, расположенной в первом квадранте.
4. Вычислить работу силы $F(x,y) = 2xyi + x^2j$, совершаемую на пути, соединяющем точки $A(0,0)$ и $B(2,1)$.
5. Найти функцию $u(x,y)$, если

$$du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1 \right) dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, если S – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3$.

7. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_S xyz ds$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте

8. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy$, если S – верхняя часть поверхности $x+2y+z-6=0$, расположенная в первом октанте.

9. Вычислить $\iint_S (x+y)dydz + (y-x)dxdz + (z-2)dx dy$, если S – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz .

10. Вычислить $\iint_S xdydz + z^3 dxdy$, если S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

11. Вычислить $\iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy$, если S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

12. Вычислить $\iint_S yz dxdy + xz dydz + xy dxdz$, если S – внешняя сторона пирамиды, гранями которой являются плоскости $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

19.6.1. Ответы. **1.** $1/3$; **2.** $u = x^2 \cdot y + \frac{x^3}{3} - 5x + 5y - \frac{y^4}{4} + c$. **3.** $\pi ab/4$. **4.** 4 ; **5.** $u = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + y + c$. **6.** $160\pi/3$. **7.** $\sqrt{3}/120$. **8.** 54 . **9.** $8\pi/3$. **10.** $32\pi/15$. **11.** $3\pi R^2 H$. **12.** $1/8$.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

20.1. Основные понятия и определения.

Пусть G некоторая область.

Определение 20.1 Говорят, что в области G задано скалярное поле $u(M)$, если каждой точке $M \in G$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u(M)$.

Определение 20.2. Если в каждой точке $M \in G$ ставится в соответствие по известному закону некоторый вектор $\mathbf{p}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле $\mathbf{p}(M)$.

Из этих определений видно, что скалярное и векторные поля задаются с помощью задания скалярной или векторной функции многих переменных. Поэтому ранее введенные понятия для функций многих переменных переносятся в теорию полей, такие как, приращение $\Delta u(M)$ расстояние между точками поля $\rho(M, M_1)$ дифференцируемость, гладкость и т. д. Будем обозначать символом $\Delta \mathbf{r} = \overline{M, M_1}$ вектор, соединяющий две точки.

При изучении функции многих переменных, мы уже ввели понятия градиента. В данном случае вводится понятие градиента скалярного поля $u(M)$. В результате получаем вектор, компонентами которого являются частные производные. $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot k$. Следовательно, градиент порождает векторное поле.

Для скалярного поля вводится понятие поверхности уровня – это множества точек, в которых значения поля $u(M)$ одинаковы. Градиент поля в точке M ортогонален поверхности уровня в этой точке. Еще одно известное понятие – это производная по направлению некоторого вектора $\mathbf{l}$.

$$\frac{du}{dl} = \text{grad } u \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (20.1)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы единичного вектора, который имеет такое же направление, как вектор $\mathbf{l}$. Градиент скалярного поля указывает в каждой точке поля направление и величину наиболее быстрого роста значения поля.

В трехмерном пространстве задание векторной величины $\mathbf{F}$ может быть осуществлено путем определения ее проекций на оси координат

$P_x(x, y, z)$, $Q_y(x, y, z)$, $R_z(x, y, z)$, как функций от координат точки M , с которой связана величина

$$\mathbf{F} = P_x(x, y, z)\mathbf{i} + Q_y(x, y, z)\mathbf{j} + R_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (20.2)$$

При изучении векторного поля важную роль играют векторные линии.

Определение 20.3. Векторной линией называется кривая, направление которой в каждой ее точке совпадает с направлением вектора $\mathbf{F}$, в этой точке.

Векторные линии для вектора $\mathbf{F}$, характеризуются равенствами:

$$\frac{dx}{P_x(x, y, z)} = \frac{dy}{Q_y(x, y, z)} = \frac{dz}{R_z(x, y, z)} \quad (20.3)$$

Определение 20.4. Векторное поле $\mathbf{p}(M)$ является дифференцируемым в точке M , если приращение поля $\Delta\mathbf{p}$ в точке M может быть представлено в виде

$$\Delta\mathbf{p} = A\Delta\mathbf{r} + o(|\Delta\mathbf{r}|), \quad (20.4)$$

где A – матрица, которая в случае $\mathbf{p}(M) = P_x(x, y, z)\mathbf{i} + Q_y(x, y, z)\mathbf{j} + R_z(x, y, z)\mathbf{k}$, имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial x} & \frac{\partial P_x}{\partial y} & \frac{\partial P_x}{\partial z} \\ \frac{\partial Q_y}{\partial x} & \frac{\partial Q_y}{\partial y} & \frac{\partial Q_y}{\partial z} \\ \frac{\partial R_z}{\partial x} & \frac{\partial R_z}{\partial y} & \frac{\partial R_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Понятие производной векторного поля $\mathbf{p}(M)$ по направлению вектора $\mathbf{l}$ такое же, как для скалярного поля

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{l}} = A\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$$

Определение 20.5 Ротором векторного поля

$\mathbf{p} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ называется вектор $\text{rot}\mathbf{p}$, который определяется по формуле

$$\text{rot}\mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (20.5)$$

Таким образом, ротор порождает новое векторное поле. Ротор поля дает мгновенную угловую скорость вокруг текущей точки и ее направлений. Поэтому ротор, часто, называют вихрем поля.

Определение 20.6 Дивергенцией векторного поля называют скалярную величину

$$\text{div}\mathbf{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (20.6)$$

Дивергенция характеризует плотность источников, если источники поля распределены непрерывно в заданной области.

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{p}(M)$ и имеется замкнутая кривая L

Определение 20.7 Скалярную величину $C(\mathbf{p})$, равную интегралу по замкнутому контуру

$$C(\mathbf{p}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \quad (20.7)$$

называют циркуляцией вектора $\mathbf{p}(M)$ вдоль кривой L

Циркуляция выражает работу векторного поля по перемещению точки вдоль кривой.

Пусть задано векторное поле $\mathbf{p}(M)$. Возьмем поверхность S , и выбрав определенную ее сторону обозначим через $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к выбранной стороне поверхности. Тогда поверхностный интеграл

$$\Pi(\mathbf{p}) = \iint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) ds \quad (20.8)$$

называют потоком векторного поля $\mathbf{p}(M)$ через поверхность S . Формулу (20.8) можно записать в виде

$$\Pi(\mathbf{p}) = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy.$$

Для упрощения записи приведенных формул, часто используют, предложенный Гамильтоном символический векторный дифференциальный оператор набла

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда, используя оператор набла как вектор, получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \nabla u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{p} &= \nabla \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \\ \operatorname{div} \mathbf{p} &= \nabla \cdot \mathbf{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

20.1.1. Основные формулы теории поля. Основными формулами теории поля являются формулы, полученные при изучении криволинейных и поверхностных интегралов, и их преобразованные варианты,

полученные с помощью алгебраических операций над векторными и скалярными полями.

Пусть в области $V \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей D задано векторное поле $\mathbf{p}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$, точка $M \in V$. Тогда формула Остроградского запишется в виде

$$\Pi = \iint_D \mathbf{p}(M) \cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{p}(M) dv, \quad (20.9)$$

где $\mathbf{p}(M) \cdot d\sigma$ – скалярное произведение, $d\sigma$ – векторный элемент площади на поверхности D . Формулу (20.9) можно прокомментировать следующим образом. Поток векторного поля $\mathbf{p}(M)$ через границу области D равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по самой области V .

Если воспользоваться оператором набла, то формулу (20.9) можно записать в виде

$$\Pi = \iint_D \mathbf{p}(M) \cdot d\sigma = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{p}(M)) dv. \quad (20.10)$$

Если на поверхности D задано векторное поле $\mathbf{p}(M)$, а кривая L является границей этой поверхности, то формулу Стокса можно записать в виде

$$\iint_D \operatorname{rot} \mathbf{p}(M) \cdot d\sigma = \oint_L \mathbf{p}(M) \cdot dl, \quad (20.11)$$

где dl – векторный элемент длины $dl = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$. Другая форма записи имеет вид

$$\Pi_D(\operatorname{rot} \mathbf{p}) = \operatorname{tir}_L \mathbf{p}. \quad (20.12)$$

Поток ротора векторного поля через поверхность D равен циркуляции этого потока вдоль границы поверхности L .

20.1.2. Специальные поля. В этом разделе рассмотрим два специальных поля, которые имеют широкое применение в прикладных задачах.

Определение 20.8 Векторное поле $\mathbf{p}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ называется *потенциальным*, если существует функция $u(M)$, такая, что

$$\mathbf{p}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Это условие равносильно следующим равенствам:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

откуда следует, что выражение $P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz$ является полным дифференциалом функции $u(M)$. Функцию $u(M)$, в этом случае, называется *потенциальной функцией* или *скалярным потенциалом* векторного поля $\mathbf{p}(M)$.

Иногда дают другое определение потенциальному полю

Определение 20.9 Векторное поле $\mathbf{p}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ называется потенциальным в области $G \subset R^3$, если циркуляция этого поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в области G равна нулю.

Принимая во внимание формулу (20.11), можно доказать, что в условиях данного определения $\text{rot}\mathbf{p}(M) = 0$. Поэтому потенциальное поле еще называют безвихревым.

Определение 20.10 Векторное поле $\mathbf{p}(M)$ называется солиноидальным, или трубчатым, если существует векторное поле $\mathbf{g}(M)$ такое, что

$$\mathbf{p}(M) = \text{rot}\mathbf{g}(M).$$

Векторное поле $\mathbf{g}(M)$ называют векторным потенциалом поля $\mathbf{p}(M)$.

Можно доказать, используя равенство $\text{div}\mathbf{p}(M) = \text{div}(\text{rot}\mathbf{g}(M))$ что необходимым и достаточным условием того, что поле $\mathbf{p}(M)$ будет солиноидальным, является условие $\text{div}\mathbf{p}(M) = 0$.

20.2. Контрольные вопросы

1. Дайте определения скалярного и векторного полей.
2. Что такое градиент скалярного поля, и что он характеризует?
3. Что такое дивергенция векторного поля, как она вычисляется и что характеризует?
4. Что такое ротор векторного поля, как он вычисляется и что характеризует?
5. Какие основные формулы теории полей вы знаете?
6. Дайте определение потенциального поля и солиноидального поля.
7. Какими свойствами обладают потенциальные и солиноидальные поля?

20.3. Методические указания по решению задач

Пример 20.1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - \arctg(y + z)$ в точке $M(2; 1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

Решение: Находим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{0+9+16}} = 0, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{5}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{(y+z)^2+1}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{(y+z)^2+1}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M &= 2 \cdot 2 = 4, & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M &= \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -\frac{1}{(1+1)^2+1} = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле $\frac{\partial u}{\partial I} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ имеем:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial I} \right|_M = 4 \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25} = 0,25.$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial I} > 0$, то заданная функция в данном направлении возрастает.

Пример 20.2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{x}{yz^2}$ и $v = x^2 - y^2 - 3z^2$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение: Находим частные производные функций u и v и вычисляем их значения в точке M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{yz^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2x}{yz^3},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 3\sqrt{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -3\sqrt{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -6\sqrt{3}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -6z,$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_M = \sqrt{2}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_M = -\sqrt{2}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_M = -2\sqrt{3}.$$

Найдем градиенты и их длины:

$$\text{grad } u \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 3\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}j - 6\sqrt{2}k,$$

$$\text{grad } v \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{2}i - \sqrt{2}j - 2\sqrt{3}k.$$

$$\left| \text{grad } u \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right| = \sqrt{18 + 18 + 108} = 12,$$

$$\left| \text{grad } v \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right| = \sqrt{2 + 2 + 12} = 4.$$

Итак, угол между градиентами

$$\alpha = \arccos \frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } u| \cdot |\text{grad } v|},$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{12 \cdot 4} = \arccos 1 = 0.$$

Такой вывод можно было получить и раньше, заметив пропорциональность координат полученных векторов.

Пример 20.3. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a} = 9zj - 4yk$.

Решение: Векторные линии для вектора $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

$$\frac{a_x}{0} = \frac{a_y}{9z} = \frac{a_z}{-4y},$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{9z} = \frac{dz}{-4y}.$$

Отсюда имеем $\begin{cases} dx = 0, \\ 4ydy = -9zdz. \end{cases}$ Дифференцируя, получаем

$$\begin{cases} 4y^2 + 9z^2 = C_1, \\ x = C_2. \end{cases}$$

Векторными линиями заданного поля являются эллипсы, получающиеся пересечением эллиптических цилиндров плоскостями, перпендикулярными оси Ох.

Пример 20.4. Найти поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$ через часть поверхности $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезаемую плоскостью $P: z = 0$ ($z \geq 0$) (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение: Поток векторного поля через часть поверхности S можно рассматривать как разность потоков через полную замкнутую поверхность (Π_1) и через плоскость $z = 0$ (Π_2).

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса, чтобы найти Π_1 . Найдем дивергенцию поля $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, $\text{div } \vec{a} = 1 + 1 + 1 = 3$,

Поэтому $\Pi_1 = \iiint_V 3dV$, где V - объем полусферы радиуса 3. А значит $\Pi_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 54\pi$.

Поток Π_2 найдем как интеграл по поверхности $z = 0$ от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности.

$\vec{n} = (0; 0; -1)$ так как нормаль должна быть внешней.

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = y - z, \quad \Pi_2 = \iint_{(S)} (y - z) ds.$$

Так как $z = 0, dS = dxdy$, то $\Pi_2 = \iint_{(G)} y dxdy$, где G - проекция поверхности в плоскость xOy , то есть круг $x^2 + y^2 = 9$, а поэтому вычис-

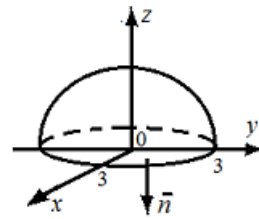


Рис. 20.1.

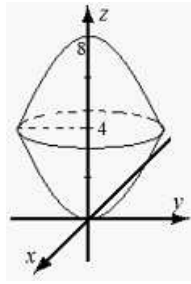
лим этот двойной интеграл в полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$, $(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 3)$.

$$\Pi_2 = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^3 r^2 dr = (-\cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 0.$$

Имеем: $\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 = 54\pi$.

Пример 20.5. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + y\vec{k}$ через замкнутую поверхность S : $\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2, \end{cases}$ нормаль внешняя.

Решение:



Поверхность образована двумя параболоидами вращения. В цилиндрических координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $|J| = r$, переменные изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r^2 \leq z \leq 8 - r^2.$$

Найдем линию пересечения параболоидов: $r^2 = 8 - r^2$ или $r = 2$. Тогда $0 \leq r \leq 2$. Искомый поток считаем по формуле Остроградского-Гаусса. $\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 0 + 0 = 1$. Тогда

Рис. 20.2.

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(8 - r^2 - r^2) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4r^2 - \frac{1}{2}r^4 \right) \Big|_0^2 d\varphi = 2\pi(16 - 8) = 16\pi. \end{aligned}$$

Пример 20.6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \frac{y}{3}\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль контура Γ : $\begin{cases} x = 2\cos t, y = 2\sin t \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение.

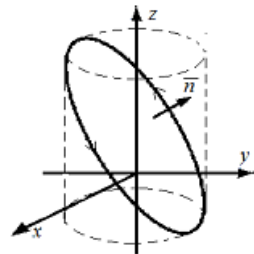


Рис. 20.3.

Так как контур замкнутый, можно использовать формулу Стокса для нахождения циркуляции

$$C = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$$

S — часть плоскости, $z = 1 - x - y$ вырезанной прямым круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

Поэтому $n_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1)$ — единичный вектор нормали к нашей поверхности.

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) k,$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = 0 \cdot i - 1 \cdot j + \left(-3 - \frac{1}{3} \right) k. \text{ Тогда } \operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-1 - \frac{10}{3} \right) = -\frac{13}{3\sqrt{3}},$$

отсюда

$$C = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint_S dS = -\frac{13}{3\sqrt{3}} \iint_S \sqrt{3} \, dx \, dy = -\frac{13}{3} \iint_{D_{xy}} dx \, dy = -\frac{13}{3} \cdot 4\pi = -\frac{52}{3}\pi,$$

так как двойной интеграл является площадью круга радиуса 2.

20.4. Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить дивергенцию векторного поля $a(M) = (xy + z^2)i + (yz + x^2)j + (zx + y^2)k$ в точке $M(1, 3, -5)$.
2. Вычислить поток векторного поля $a(M) = (x - 3z)i + (x + 2y + z)j + (4x + y)k$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 2$, лежащую в первом октанте.
3. Вычислить поток векторного поля $a(M) = 2xi + yj + 3zk$ через часть поверхности эллипсоида, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.
4. Вычислить поток векторного поля $a(M) = (x - y)i + (x + y)j + z^2k$ через поверхность цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и $z = 2$, в направлении внешней нормали.
5. Вычислить дивергенцию вектора напряженности магнитного поля $H = (21/r)(-yi + xj)$, создаваемого током I , проходящим по бесконечно длинному проводу.
6. Найти поток П векторного поля $a(M) = x^3i + y^3j + z^3k$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.
7. Вычислить поток П векторного поля $a(M) = 8xi + 11yj + 17zk$ через часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, расположенной в первом октанте. Нормаль составляет острый угол с осью Oz .
8. Найти поток П вектора $a = xi - 2yj - zk$ через замкнутую поверхность S , ограниченную поверхностями $1 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$ в направлении внешней нормали.
9. Найти поток П вектора $a = x^2i + z^2j$ через часть поверхности $z^2 = 4 - x - y$, лежащую в первом октанте, и части координатных плоскостей, отсекаемых этой поверхностью, в направлении внешней нормали.
10. 1. Найти дивергенцию поля $\operatorname{grad} u$, если $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

2. Вычислить поток Π векторного поля $a(M) = xi + 3yj + 2zk$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенную в первом октанте.

11. 1. Найти дивергенцию векторного поля $a(M) = xy^2i + x^2yj + z^3k$ в точке $M(1, -1, 3)$;

2. Вычислить поток векторного поля $a(M) = 3xi - yj - zk$ через поверхности $9 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ограничивающее некоторое тело, в направлении внешней нормали.

12. Найти циркуляцию векторного поля $a(M) = z^2i + x^2j + y^2k$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении обхода относительно вектора $n = (1, 1, 1)$.

13. Найти циркуляцию векторного поля $a(M) = y^2i + xyj + (x^2 + y^2)k$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в положительном направлении обхода относительно внешней нормали поверхности параболоида.

14. Вычислить циркуляцию векторного поля $a(M) = zy^2i + xz^2j + yx^2k$ по контуру пересечения параболоида $x = y^2 + z^2$ с плоскостью $x = 9$ в положительном направлении обхода относительно орта $n^0 = i$.

20.4.1. Ответы. 1. -1 . 2. $26/3$. 3. 24π . 4. -4π . 5. $\operatorname{div} H = 0$. 6. $12\pi R^2/5$. 7. 1. 8. $-\pi$. 9. $19\frac{53}{105}$. 10. $\Pi = 1$. 11. $\Pi = 81\pi/8$. 12. $3\pi R^4/2$. 13. $R^3/3$. 14. 729π .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. – М: Наука. 1998.
2. Петрушко И. М. (ред) Курс высшей математики. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление. – СПб. Лань. 2008.
3. Петрушко И. М. (ред) Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. – СПб. Лань. 2008.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – СПб. Лань. 2009.
5. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. – М: Высшая школа. 1998.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука. 1985.
7. Цыкунов А. М. (ред.) Сборник задач по высшей математике. Астрахань. Изд. АГТУ. 2008.

Лекция 21

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

21.1. 21.1. Основные понятия и теоремы

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Составленный из этих чисел символ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется числовым рядом. Пользуясь знаком суммы, числовой ряд обозначается следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (21.1)$$

Определение 21.1. Сумму конечного числа членов ряда называют частичной суммой ряда

$$S_m = \sum_{n=1}^m a_n. \quad (21.2)$$

Определение 21.2. Если существует конечный предел $S_m = S$, то ряд называется сходящимся, а предел S является суммой ряда. В случае если этот предел равен $\pm\infty$, или не существует, то ряд является расходящимся.

Пусть задано два ряда (21.1) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда суммой рядов называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Если у ряда (21.1) отбросить первые m членов, то оставшуюся часть

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (21.3)$$

называют остатком ряда.

21.1.1. Критерий Коши сходимости ряда. Для сходимости ряда (21.1) требуется, чтобы последовательность S_m была сходящей. Из теории последовательностей известно, что для ее сходимости необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (теорема 1.17). Следовательно, можно сформулировать следующее утверждение

Теорема 21.1. (критерий Коши) Для сходимости ряда (21.1) необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при выполнении неравенства $n \geq N$ для $\forall p > 0$ выполнено неравенство $|S_{m+p} - S_m| < \varepsilon$.

Из этого критерия можно получить другую формулировку.

Теорема 21.2. Для сходимости ряда (21.1) необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд (21.3). При этом $R_m = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ряд сходится, то выполнено условие $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$. $R_m = S - S_m \implies \lim_{m \rightarrow \infty} R_m = S - \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 0$. С другой стороны, если сходилась ряд (21.3), то из равенства $S = S_m + R_m$ имеем S_m и R_m - конечные числа. Тогда и сумма ряда S является конечным числом. $\square$

Отметим следующие свойства рядов: 1. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, что следует из теоремы 21.2.

2. Умножение каждого члена ряда на постоянное число тоже не влияет на его сходимость. Это следует из следующего равенства.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходящиеся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ тоже сходящийся. Пусть S и S_1 суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + S_1$$

21.1.2. Необходимое условие сходимости рядов. Теорема

21.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то справедливо условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0. \quad (21.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сходимости ряда следует $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, и величина S конечная при любом количестве членов в частичной сумме S_m . Принимая во внимание равенство $a_m = S_m - S_{m-1}$, получим $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = S - S = 0$. $\square$

21.2. Ряды с положительными членами

Будем исследовать ряды, элементы которых являются положительными числами. Для этих рядов справедливы все утверждения, рассмотренные в предыдущих пунктах.

21.2.1. Признаки сравнения. Теорема 21.4. (Первый признак сравнения) Пусть заданы два ряда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, 2. \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

и начиная с некоторого числа N , выполнено условие $a_n \leq b_n$, $n \geq N$. Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание свойство 1, т. е. отбрасывание конечного числа членов не влияют на сходимость ряда, будем считать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполнено для всех членов рядов. Обозначим частичные суммы рядов символами S_{m1} , S_{m2} соответственно. Тогда из неравенства $a_n \leq b_n$ следует условие $S_{m1} \leq S_{m2}$. Рассмотрим две последовательности S_{m1} , $\{S_{m2}\}$. Тогда из условия $S_{m1} \leq S_{m2}$ следует неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m1} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m2} \implies S_1 \leq S_2,$$

где S_1 , S_2 - суммы рядов. Из условия $S_1 \leq S_2$ следует справедливость теоремы. $\square$

Теорема 21.5. (Второй признак сравнения) Пусть заданы два ряда. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad (0 \leq K < +\infty)$$

то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда. Если $0 < K < +\infty$, то оба ряда сходятся или расходятся.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$ имеем, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ выполнено условие

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon \implies \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad b_n \neq 0 \implies a_n < (K + \varepsilon) b_n$$

Из сходимости второго ряда следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon) b_n$, а из сходимости этого ряда, в соответствии с теоремой 21.4 следует сходимость первого ряда а из сходимости первого ряда следует сходимость второго ряда. $\square$

21.2.2. Признак Даламбера. Теорема 21.6. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнено условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k,$$

то при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ ряд расходится. В случае, когда $k = 1$ имеем неопределенность.

Если $k = 1$, то следует исследовать сходимость ряда с помощью других признаков сходимости.

Доказательство. Из условия $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ имеем, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ выполнено условие

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - k \right| < \varepsilon \implies k - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \varepsilon$$

Пусть $k < 1$. Выберем число ε так чтобы выполнялось условие $k + \varepsilon = l < 1$. Тогда получим

$$a_{N+1} < l a_N, a_{N+2} < l^2 a_N \cdots a_{N+p} < l^p a_N. \quad (21.5)$$

Принимая во внимание то, что отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда, рассмотрим ряды $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} l^n a_N = a_N \sum_{n=0}^{\infty} l^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ является геометрической прогрессией со знаменателем меньше единицы, а следовательно ряд является сходящимся. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ и исходный ряд являются сходящимися.

Пусть $k > 1$. Выберем число ε так чтобы выполнялось условие $k - \varepsilon = l > 1$. Тогда получим цепочку неравенств

$$a_{N+1} > l a_N, a_{N+2} > l^2 a_N \cdots a_{N+p} > l^p a_N$$

Снова, рассмотрим ряды $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} l^n a_N = a_N \sum_{n=0}^{\infty} l^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ является геометрической прогрессией со знаменателем больше единицы, а, следовательно, ряд является расходящимся. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ и исходный ряд являются расходящимися. $\square$

Пример 21.1. Исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд является сходящимся.

21.2.3. Радикальный признак Коши. Теорема 21.7. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнено условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k,$$

то при $k < 1$ ряд сходится, а при $k > 1$ ряд расходится. В случае, когда $k = 1$ имеем неопределенность.

Доказательство. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ имеем, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ выполнено условие

$$|\sqrt[n]{a_n} - k| < \varepsilon \implies k - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon$$

Пусть $k < 1$. Выберем число ε так чтобы выполнялось условие $k + \varepsilon = l < 1$. Тогда получим

$$\sqrt[n]{a_n} < l \implies a_n < l^n$$

Элемент l^n можно рассматривать, как член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} l^n$, который является геометрической прогрессией со знаменателем меньше единицы, а следовательно ряд является сходящимся. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ - сходится

Пусть $k > 1$. Выберем число ε так чтобы выполнялось условие $k - \varepsilon = l > 1$. Тогда получим

$$\sqrt[n]{a_n} > l \implies a_n > l^n$$

В данном случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} l^n$, который является геометрической прогрессией со знаменателем больше единицы, а следовательно ряд является расходящимся. Тогда по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ - расходится. $\square$

Пример 21.2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Вычислим предел $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e > 1$, ряд расходится.

21.2.4. Интегральный признак Коши. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Возьмем функцию $f(x)$ такую, что при $x = n$ выполнено равенство $f(n) = a_n$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 21.8. Если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд тоже сходится, а если интеграл расходится, то ряд расходится

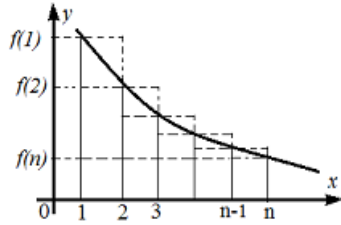


Рис. 21.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим частичную сумму для функции, изображенной на рис.21.2 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ и возьмем интеграл $\int_1^n f(x)dx$, численное значение которого равно площади фигуры, ограниченной графиком функции и осью абсцисс. Площади ступенчатых фигур под функцией и над функцией равны $S_n - f(1)$, $S_n - f(n)$ соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n - f(n). \quad (21.6)$$

Рассмотрим три последовательности $\{S_n\}$, $\left\{\int_1^n f(x)dx + f(1)\right\}$, $\left\{\int_1^n f(x)dx + f(n)\right\}$. Тогда из (21.6) и свойств последовательностей имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < \int_1^{\infty} f(x)dx + f(1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > \int_1^{\infty} f(x)dx + f(n).$$

Принимая во внимание равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и неравенство $f(n) \geq 0$, можно сделать следующий вывод. Если интеграл сходится, то из первого неравенства следует сходимость ряда, а в случае, когда интеграл расходится, из второго неравенства следует расходимость ряда $\square$

Пример 21.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 0$.

Вычислим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{b^{a-1}} - 1 \right)$$

Если $a > 1$, то интеграл сходится, а значит, сходится ряд. Если $a \leq 1$, то интеграл расходится. Следовательно, ряд тоже расходится.

21.3. Знакопеременные ряды

21.3.1. Абсолютная сходимость рядов. Будем рассматривать ряды, у которых знаки их элементов чередуются.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, a_n > 0.$$

Введем понятие абсолютной сходимости ряда. Пусть имеется знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (21.7)$$

т. е. элементы ряда имеют разные знаки, расположенные в произвольном порядке.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (21.8)$$

сходится, то говорят, что исходный ряд (21.7) абсолютно сходится.

Теорема 21.9. Если ряд (21.8) сходится, то сходится ряд (21.7).

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (21.7) и (21.8) символами S_m, G_m соответственно. Если ряд (21.8) сходится, то $G_m = G$ и $G_m \leq G$ так как $|a_n| > 0$. Последовательность $\{G_m\}$ — возрастающая и ограниченная сверху. Обозначим символами

S'_m, S''_m Суммы положительных элементов и сумму модулей отрицательных элементов, входящих в частичную сумму S_m . Тогда имеем $S_m = S'_m - S''_m$, а $G_m = S'_m + S''_m$. Последовательности S'_m, S''_m монотонно возрастают, а из неравенства $S'_m + S''_m \leq G$ следует их ограниченность $S'_m \leq G, S''_m \leq G$. Отсюда следует, что существуют конечные пределы

$S'_m = S', S''_m = S''$ Тогда получает цепочку равенств $S_m = (S'_m - S''_m) = S'_m - S''_m = S' - S''$. Из ограниченности величины $S' - S''$ следует сходимость ряда (21.7) □

Таким образом при исследовании знакопеременных рядов, в первую очередь, исследуется их абсолютная сходимость. Однако, если ряд не сходится абсолютно — это не значит, что он расходится. Ряд может сходиться, но абсолютно не сходиться.

21.3.2. Условная сходимость рядов. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, a_n > 0$, который абсолютно не сходится.

Теорема 21.10. (Признак Лейбница) Если выполнены условия: $a_{n+1} < a_n$ для $\forall n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то знакопеременный ряд сходится. Говорят, что ряд сходится условно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим частичную сумму четного числа элементов

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + \dots - a_{2m-1} + a_m = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Из этого равенства следует, что последовательность $\{S_{2n}\}$ - возрастающая. С другой стороны из равенства

$$S_{2m} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}))$$

следует, что $S_{2m} < a_1$, следовательно, последовательность $\{S_{2m}\}$ - ограничена. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, и S - конечная величина.

Возьмем нечетное количество элементов в частичной сумме S_{2m+1} . Имеем

$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Вычислим предел, принимая во внимание равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + a_{2m+1} = S. \square$$

Их доказательства видно, что в знакочередующихся сходящихся рядах погрешность вычисления суммы ряда не превышает величины первого отброшенного члена.

Пример 21.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+2}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего рассматриваем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Воспользуемся вторым признаком сравнения. Возьмем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, и вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Исходный ряд абсолютно не сходится. С другой стороны, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ для любых n . Следовательно, в соответствии с признаком Лейбница ряд сходится условно.

21.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия сходимости Коши для рядов.
2. Какие условия являются необходимыми для сходимости рядов?

3. Сформулируйте признаки сравнения для сходимости рядов.
4. Докажите признак Даламбера.
5. Докажите радикальный признак Каши.
6. Докажите интегральный признак Каши.
7. Докажите теорему о абсолютной сходимости знакопеременных рядов.
8. Докажите признак Лейбница для условной сходимости знакопеременных рядов.

21.5. Методические указания по решению примеров

Пример 21.3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$;

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$a_n = \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \Rightarrow$$

$$3n+8 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1);$$

$$n=0: \quad 8 = 2A; \quad A = 4$$

$$n=-1: \quad 5 = -B; \quad B = -5$$

$$n=-2: \quad 2 = 2C; \quad C = 1$$

$$a_n = \frac{4}{n} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$a_1 = \frac{4}{1} - \frac{5}{2} + \frac{1}{3};$$

$$a_2 = \frac{4}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4};$$

$$a_3 = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5};$$

$$a_4 = \frac{4}{4} - \frac{5}{5} + \frac{1}{6};$$

.....

$$a_{n-3} = \frac{4}{n-3} - \frac{5}{n-2} + \frac{1}{n-1};$$

$$a_{n-2} = \frac{4}{n-2} - \frac{5}{n-1} + \frac{1}{n};$$

$$a_{n-1} = \frac{4}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{1}{n+1};$$

$$a_n = \frac{4}{n} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+2};$$

$$S_n = 4 - \frac{5}{2} + 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+1};$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6 - 2,5 = 3,5.$$

Пример 21.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+5)^{3/2}}$

Решение. Воспользуемся вторым признаком сравнения. В качестве эталонного ряда возьмем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{n^2}{(n^2+5)^3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \sqrt{\frac{n^2}{(n^2+5)^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^6}{(n^2+5)^3}} = 1. \end{aligned}$$

Ряд сходится.

Пример 21.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера и вычислим $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$; $a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} \cdot (n+1)!}$, по-

этому
 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot n!}{2^{n+2} \cdot (n+1)! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1) \cdot n!}{2 \cdot n! \cdot (n+1)} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1$, следовательно, ряд расходится.

Пример 21.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$

Решение. Применим радикальный признак Коши и вычислим $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^4 \cdot \operatorname{arctg}^2 \frac{\pi}{4n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{\pi}{4n} = 0 < 1, \end{aligned}$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 21.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2) \cdot \ln 2n}$

Решение. $a_n = \frac{3n}{(n^2-2) \ln 2n} \geq \frac{3n}{n^2 \cdot \ln 2n} = \frac{3}{n \cdot \ln 2n}$. Исследуем схо-

димость вспомогательного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n \ln 2n}$ по интегральному призна-

ку Коши. интеграл $3 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln 2x} = 3 \int_1^{\infty} \frac{d(\ln 2x)}{\ln 2x} = \lim_{b \rightarrow \infty} 3 \ln |\ln 2x| \Big|_1^b = \infty$.

Интеграл расходится, следовательно, по первому признаку сравнения, исходный ряд расходится.

Пример 21.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$

Решение. Исследуем знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем сходимость ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$. По признаку Даламбера $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 (n+1)!}{(n+2)! \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n+2} = 1 \cdot 0 < 1$. Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

21.6. Примеры для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью одного из признаков сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+5}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{3n^2+n}$	4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$	6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$	8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{4^n}$	10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{(n^2+2) \cdot 2^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^2}$	12. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n}$	14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^{2n-1}}{3n^2(1-2n)}$	15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n-1)}{n^n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{2n!}$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!}$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Исследовать сходимость ряда с помощью радикального признака Коши.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n^2+1} \right)^n$.	20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3+n^2}{\sqrt{7n^5+n-2}} \right)^{2n}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.	22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln^n n}}$.
23. $3 + 2, 1^2 + 2, 01^3 + 2, 001^4 + \dots$	24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{\frac{n^2}{3}}$.

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.	26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+1}$.	27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$.
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.	29. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.	30. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, если $p > 1$.
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$.	32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$.	33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n (\ln^4 n + 1)}$.

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3n-1}$.	35. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
36. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ln n}{n}$.	37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin 2n}{n^2}$.
38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}$.	39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{\prod_{k=1}^{2n-1} k}$.
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(n^2+n+1)}{n}$.	41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$.
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{3n+5} \right)^n$.	43. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right)^n$.

21.6.1. Ответы. 1. расходится. 2. Сходится. 3. расходится. 4. сходится. 5. сходится. 6. расходится. 7. сходится. 8. сходится. 9. сходится. 10. сходится. 11. сходится. 12. расходится. 13. сходится. 14. расходится. 15. сходится. 16. расходится. 17. сходится. 18. сходится. 19. сходится. 20. расходится. 21. сходится. 22. сходится. 23. расходится. 24. расходится. 25. расходится. 26. расходится. 27. сходится. 28. сходится. 29. сходится. 30. расходится при $p=1$ и сходится при $p>1$. 31. сходится. 32. расходится. 33. сходится. 34. сходится условно. 35. сходится абсолютно. 36. сходится условно. 37. сходится абсолютно. 38. сходится абсолютно. 39. сходится абсолютно. 40. сходится условно. 41. расходится. 42. сходится абсолютно. 43. сходится абсолютно.

Лекция 22

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Ряд, членами которого являются функции от аргумента x , определенные на некотором множестве D , называется **функциональным**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) + \dots \quad (22.1)$$

Множество всех значений x , при которых функциональный ряд становится сходящимся числовым рядом, называется **областью сходимости функционального ряда**.

Может случиться, что для некоторых $x \in D$ ряд сходится абсолютно, а для некоторых условно.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Суммой функционального ряда называется функция $S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x)$, где $S_m(x) = \sum_{n=1}^m a_n(x)$ — частичная сумма.

Определение 22.1. Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве $\{x\}$ к своей сумме $S(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ независящее от x такое, что при $n \geq N$ выполнено неравенство $|S_m(x) - S(x)| < \varepsilon$

Сформулируем без доказательства критерий Коши для сходимости функциональных рядов.

Теорема 22.1. Для того, чтобы функциональный ряд (9.5) равномерно сходилсся на множестве $\{x\}$ к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ независящее от x такое, что при $n \geq N$ выполнено неравенство $|S_{m+p}(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ для $\forall p > 0$

Теорема 22.2. (признак Вейерштрасса) Функциональный ряд (22.1) равномерно сходилсся на множестве $\{x\}$ к некоторой сумме, если существует числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, такой, что для $\forall x$ из множества $\{x\}$ и для $\forall n$ выполнено неравенство $|a_n(x)| \leq c_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $|a_n(x)| \leq c_n$ следует $\left| \sum_{n=1}^m a_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_n(x)| \leq \sum_{n=1}^m c_n$. Введем две частичные суммы $S_{m1} = \left| \sum_{n=1}^m a_n(x) \right|$, $S_{m2} = \sum_{n=1}^m c_n$, и будем рассматривать их, как по-

следовательности при различных значениях m . Тогда, их неравенств, с учетом свойств последовательностей получаем $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. $\square$

22.1. Основные свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотрим некоторые свойства равномерно сходящихся рядов, имеющие важное прикладное значение.

22.1.1. Почленный переход к пределу. Известно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \beta} \sum_{n=1}^m a_n(x) = \sum_{n=1}^m \lim_{n \rightarrow \beta} a_n(x).$$

Однако, когда сумма имеет бесконечное число элементов это равенство не всегда справедливо

Теорема 22.3. Пусть функциональный ряд (22.1) равномерно сходилась на множестве $\{x\}$ к некоторой сумме $S(x)$, и для всех членов ряда существует в точке β предельное значение

$$\lim_{n \rightarrow \beta} a_n(x) = b_n.$$

Тогда функция $S(x)$ имеет предельное значение

$$\lim_{n \rightarrow \beta} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \beta} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является сходящимся.

Эта теорема позволяет символы предела и бесконечной суммы переставлять местами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равномерной сходимости ряда имеем для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$, независимое от x такое, что при $n \geq N$ выполнено неравенство $|S_{m+p}(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ для $\forall p > 0$

Тогда $|S_{m+p}(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$. В сумме $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)$ конечное число элементов. Поэтому символы предела и суммы переставлять местами. Переходя к пределу, получим $\lim_{n \rightarrow \beta} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| = |S_{bm+p} - S_{bm}| \leq \varepsilon$, где $S_{bm} = \sum_{n=1}^m b_n$. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполнен признак Коши. Следовательно он сходится.

Из сходимости рядов следует

$$\begin{aligned} \left| S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| &= |S_m(x) - S_{bm} + R_m(x) - R_{bm}| \leq \\ &\leq |S_m(x) - S_{bm}| + |R_m(x)| + |R_{bm}|, \end{aligned}$$

где $R(x)$, R_m –остатки рядов (22.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда из равномерной сходимости функционального ряда и сходимости числового ряда, с учетом того, что суммы $S_m(x) - S_{bm}$ имеет конечное число членов, следует. Для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ будут справедливы неравенства

$$|S_m(x) - S_{bm}| < \frac{\varepsilon}{3}, |R_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} |R_m| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда следует

$$\left| S(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| < \varepsilon. \square$$

Из теории непрерывных функций, известно, что конечная сумма непрерывных функций является непрерывной, что не всегда справедливо для бесконечной суммы.

Теорема 22.4. Пусть функциональный ряд (22.1) равномерно сходился на множестве x к некоторой сумме $S(x)$, и элементы этого ряда являются непрерывными функциями в любой точке $\beta \in x$. Тогда сумма ряда $S(x)$ тоже будет непрерывной функцией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия непрерывности элементов ряда следует

$$\lim_{x \rightarrow \beta} a_n(x) = a_n(\beta).$$

Из условий теорема следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\beta)$ сходится. Тогда заменив в доказательстве теоремы 22.3 b_n на $a_n(\beta)$, получим справедливость утверждения данной теоремы. $\square$

22.1.2. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов. Известно, что конечные суммы функций можно почленно интегрировать и дифференцировать, что не всегда возможно для бесконечных сумм. Поэтому рассмотрим условия, позволяющие почленно интегрировать и дифференцировать бесконечные суммы функций

Теорема 22.5. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ имеет своим членами непрерывные на промежутке $[a, b]$ функции и сходится равномерно на этом отрезке к функции $S(x)$, то эта сумма $S(x)$ является интегрируемой, а ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Следует отметить, что существуют ряды, не удовлетворяющие условию теоремы, однако они допускают почленное интегрирование.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $S(x)$ является непрерывной на отрезке $[ab]$. Следовательно, она будет интегрируемой.

Из условий равномерной сходимости ряда следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ будут справедливы неравенства

$$|S(x + \Delta x) - S_m(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |S(x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из условия непрерывности функций $a_n(x)$ следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что при выполнении условия $|\Delta x| < \delta$ будет справедливо неравенство $|S_m(x + \Delta x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & |S(x + \Delta x) - S(x)| = \\ & = |S(x + \Delta x) - S(x) + S_m(x + \Delta x) - S_m(x + \Delta x) + S_m(x) - S_m(x)| \leq \\ & \leq |S(x + \Delta x) - S_m(x + \Delta x)| + |S(x) - S_m(x)| + \\ & + |S_m(x + \Delta x) - S_m(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом, имеем, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что при выполнении условия $|\Delta x| < \delta$ будет справедливо неравенство $|S(x + \Delta x) - S(x)| < \varepsilon$ что означает непрерывность функции $S(x)$, а следовательно, ее интегрируемость на отрезке $[a, b]$.

Из равномерной сходимости ряда следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$ будет справедливо неравенство

$$|R_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \sum_{n=1}^m \int_a^b a_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b R_m(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_m(x)| dx < \varepsilon.$$

Это означает, что ряд можно почленно интегрировать. $\square$

Теорема 22.6. Если в некотором отрезке $[a, b]$

1. функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$;
2. члены $a_n(x)$ данного ряда имеют непрерывные производные;
3. ряд этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно;

то данный функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ можно почленно дифференцировать в каждой точке отрезка $[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) = S'(x). \quad (22.2)$$

Доказательство. Обозначим сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) = G(x)$. Так как данный ряд сходится равномерно и производные $a'_n(x)$ являются непрерывными, то этот ряд можно почленно интегрировать

$$\begin{aligned} \int_a^x G(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x a'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(a)) = \\ &= S(x) - S(a) \end{aligned}$$

Продифференцируем дано неравенство, учитывая свойства определенного интеграла, в результате чего получим $G(x) = S'(x)$, откуда следует равенство (22.2). $\square$

22.1.3. Способы определения области сходимости. Для определения интервала сходимости функционального ряда необходимо решить одно из следующих неравенств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} < 1. \quad (22.3)$$

Затем следует проверить сходимость ряда на границах полученного интервала.

Пример 22.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} tg^n(2x).$$

Первое неравенство (22.3) для данного примера имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{\frac{n+1}{2}} tg^{n+1}(2x) \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \bullet 3^n tg^n(2x)} \right| < 1.$$

Преобразуем левую часть неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{\frac{1}{2}} tg(2x) \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = \sqrt{3} |tg(2x)| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{3} |tg(2x)| < 1.$$

Решая это неравенство, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{3}} < tg 2x < \frac{1}{\sqrt{3}} &\implies \pi k - \frac{\pi}{6} < 2x < \pi k + \frac{\pi}{6} \implies \\ &\implies \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{12}, \quad k \in Z \end{aligned}$$

Проверяем сходимость ряда на границах полученного интервала

1. $tg 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд расходится, как было доказано в примере 21.2.

2. $\operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд абсолютно не сходится.

Однако, выполнены условия $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Следовательно, ряд сходится условно. Тогда область сходимости исходного ряда будут полусегменты:

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

22.2. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (22.4)$$

Выведем формулы для определения области сходимости для степенного ряда, используя формулы (22.4).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|}{|a_n|} < 1.$$

Решив это неравенство, получим

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

откуда следует формула для определения радиуса сходимости R

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \quad (22.5)$$

Из второй формулы (22.3) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| < 1,$$

откуда получает

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (22.6)$$

Степенной ряд в области сходимости удовлетворяет условиям всех теорем 22.1-22.6, которые были рассмотрены в предыдущих пунктах.

Пример 22.2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n}.$$

Воспользуемся формулой (22.5).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3.$$

На границах интервала $(-3, 3)$ получаем два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n.$$

Оба ряда расходящиеся, так как не выполнены необходимые условия сходимости

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$ — не существует, а $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Следовательно, областью сходимости исследуемого ряда, является интервал $(-3, 3)$

22.2.1. Разложение функции в степенные ряды. Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда, с областью сходимости $(-R, R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \alpha)^n$$

Степенной ряд удовлетворяет условию теоремы 22.6. Ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, является степенным рядом с радиусом сходимости равным радиусу сходимости исходного ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n |a_n|}{(n+1) |a_{n+1}|} = \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Поэтому ряд можно почленно дифференцировать.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - \alpha)^{n-1}, \quad f''(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x - \alpha)^{n-2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n, \quad \dots \end{aligned}$$

Полагая во всех равенствах $x = \alpha$, получим

$$f(\alpha) = a_0, \quad f'(\alpha) = a_1, \quad f''(\alpha) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(\alpha) = n! a_n, \quad \dots,$$

откуда следует общая формула для вычисления коэффициентов ряда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22.7)$$

Таким образом, получаем ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n. \quad (22.8)$$

Определим область сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|f^{(n+1)}(\alpha)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{|f^{(n+1)}(\alpha)|} (n+1) = \infty.$$

Если все производные функции ограничены в точке $x = \alpha$, то вся числовая ось является областью сходимости.

Ряд (22.8) называется рядом Тейлора, а при $\alpha = 0$, он называется рядом Маклорена.

Если выполнить все вычисления при $\alpha = 0$ для функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, то получим следующие разложения

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Определим радиус сходимости для последнего ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

На границах интервала $(-1, 1)$ имеем следующие ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Оба ряда являются знакочередующимися, и как уже было исследовано, они сходятся условно. Однако, при $x \rightarrow -1$, функция $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$. Поэтому областью сходимости является полусегмент $(-1, 1]$.

22.3. Ряды Фурье

Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

называется тригонометрическим рядом Фурье. Числа a_0 , a_n , b_n - называются коэффициентами тригонометрического ряда.

22.3.1. Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (22.9)$$

Требуется определить формулы для вычисления коэффициентов a_0 , a_n , b_n .

Принимая во внимание равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

проинтегрировав разложение (22.9) почленно, получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (22.10)$$

Умножим равенство (22.9) на $\sin kx$ и полученное выражение проинтегрируем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx. \end{aligned}$$

Если $n \neq k$, то правая часть равна нулю, так как

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k-n) + \sin(k+n)) dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k) - \cos(n+k)) dx = 0. \end{aligned}$$

Если $n = k$, то получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \\ &= \frac{b_n}{2} \left(x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = b_n \pi \end{aligned}$$

откуда получаем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (22.11)$$

Умножив (22.9) на $\cos kx$ и выполнив преобразования, аналогичные тем, которые были использованы при выводе формулы (22.11), получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (22.12)$$

Из приведенных формул следует, что при четной функции коэффициенты $b_n = 0$, а для нечетных функций коэффициенты a_0, a_n будут нулевыми. Кроме того следует отметить еще одну особенность интегралов от периодических функций. Если интервал интегрирования равен периоду, то значение интеграла не зависит от того, где на числовой оси взят этот интервал.

Приведем без доказательства теорему, которая дает условия сходимости ряда Фурье.

Теорема 22.6. (теорема Дирихле). Пусть функция $f(x)$ и ее производные на сегменте $[-\pi, \pi]$ являются непрерывными за исключением конечного числа точек разрыва 1 рода. Тогда ряд Фурье этой функции сходится, а в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ сумма $S(x)$ этого ряда равна:

1. $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;
2. $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$, где x_0 — точка разрыва 1 рода функции $f(x)$;
3. $S(x) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

22.3.2. Разложение функции с произвольным периодом.

Пусть функция $f(x)$ имеет период равный $2l$. Сделаем замену переменной $x = lz/\pi$. Тогда функция $\varphi(z) = f(lz/\pi) = f(x)$ по переменной z будет иметь период равный 2π . Поэтому можно пользоваться результатами, полученными для таких функций. Разложение в ряд будет иметь вид

$$\varphi(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + b_n \sin nz.$$

Из (22.10)-(22.12) получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) dz = \left| \begin{array}{l} z = \frac{\pi x}{l}, dz = \frac{\pi}{l} dx \\ z = \pm\pi, x = \pm l \end{array} \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin nz dz = \left| \begin{array}{l} z = \frac{\pi x}{l}, dz = \frac{\pi}{l} dx \\ z = \pm\pi, x = \pm l \end{array} \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos nz dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi x}{l} dx.$$

Ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

22.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие равномерной сходимости функционального ряда.
2. При каких условиях сумма функционального ряда является непрерывной функцией?
3. При каких условиях функциональный ряд можно почленно интегрировать?
4. При каких условиях функциональный ряд можно почленно дифференцировать?
5. Как определяется область сходимости степенного ряда?
6. Выведите формулы для определения коэффициентов ряда Фурье.

22.5. Методические указания по решению примеров

Пример 22.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n!} \cdot x^n.$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{n! \cdot 5^{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{5} \right| = \infty.$$

Интервалом сходимости ряда является вся числовая ось.

Пример 22.4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}.$$

Решение. Находим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^n} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 3.$$

Интервал сходимости: $x \in (-3; 3)$.

Исследуем ряд на концах интервала. При $x = 3$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. При $x = -3$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. На основании признака Лейбница имеем:

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Оба условия выполняются, следовательно, ряд сходится. Таким образом, область сходимости ряда является полусегмент $[-3; 3)$.

Пример 22.5. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}{2n+1}.$$

Решение. Исследуем сходимость получившегося числового ряда по признаку Даламбера.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)^5 \cdot x^{2n+2} \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot (n+1)^5 \cdot x^{2n}} \right| = |x|^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^5 \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = |x|^2.$$

Ряд сходится, если $|x|^2 < 1$, откуда $-1 < x < 1$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = \pm 1$ функциональный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (\pm 1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}.$$

Этот числовой ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} = \infty \neq 0$. Поэтому область сходимости данного ряда $x \in (-1; 1)$.

Пример 22.6. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x$ на интервале $(-1, 1)$

Заданная функция не является периодической. Поэтому формируем новую функцию, которая на интервале $(-1, 1)$ должна совпадать с исходной функцией (рис.22.1)

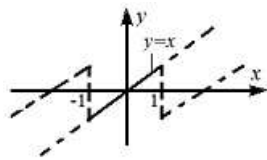


Рис. 22.1.

Введенная функция является нечетной, поэтому в разложении коэффициенты a_0, a_n будут нулевыми. Определим коэффициенты b_n

$$b_n = \int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin n\pi x dx, \\ v = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x \cos n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^1 \cos n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Разложение функции $y = x$ на интервале $(-1, 1)$ будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin n\pi x.$$

22.6. Примеры для самостоятельного решения

Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}.$	2. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^{-n}.$	3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n (1+x^2).$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n.$	5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x.$	6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^n}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}.$	8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}.$	9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n \sin x}}.$	11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}.$	12. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} x \frac{n(n+1)^{1/2}}{n!}.$	14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}.$	
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$	16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}.$	
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}.$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}.$	

Разложить функцию на заданном интервале в ряд Фурье:

22.6.1. . Ответы. 1. $x > 0,5$; для $x > 1$ ряд сходится абсолютно, а для $0,5 < x \leq 1$ условно. 2. ряд сходится в единственной точке $x=0$. 3. сходится абсолютно для $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$. 4. сходится абсолютно для $-2 < x < -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} < x < 2$. 5. сходится абсолютно для $x < -1$. 6. сходится абсолютно для $-4 < x < 0$ и условно в точке $x = -4$. 7. сходится абсолютно для $|x| > 1$. 8. $x > 1$ и $x \leq 1$; для $|x| > 1$ сходится абсолютно, а при $x = -1$ — условно. 9. абсолютно сходится для $|x| > 1$. 10. сходится абсолютно $2\pi k < x < (2k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. 11. $-\infty < x < -1$ и $1 \leq x < \infty$; в точке $x = 1$ сходимость условная. 12. сходится абсолютно при всех $x \neq \pi(2k+1)3^n/2$, где $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. 13. $[-1; 1]$. 14. $(-1; 1)$. 15.

19. $y(x) = \operatorname{sign} x, \quad (-\pi < x < \pi).$	24. $y(x) = \sin ax, \quad -\pi < x < \pi,$ a — не целое число.
20. $y(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 2l, \end{cases}$ $A > 0$ — постоянная.	25. $y(x) = e^{\alpha x}, \quad -h < x < h$
21. $y(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$	26. $y(x) = x \sin x, \quad -\pi < x < \pi$
22. $y(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$	27. $y(x) = x \cos x, \quad -\pi < x < \pi$
23. $y(x) = x , \quad -\pi < x < \pi$	28. $y(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$

$$\begin{aligned}
 x = 0. \quad & \mathbf{16.} \left[-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right). \quad \mathbf{17.} [3; 5). \quad \mathbf{18.} (-\infty; +\infty). \quad \mathbf{19.} \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \\
 \mathbf{20.} \quad & \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l}. \quad \mathbf{21.} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad \mathbf{22.} \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad \mathbf{23.} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \quad \mathbf{24.} \quad \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2} \right\}. \\
 \mathbf{25.} \quad & 2sh(ah) \left\{ \frac{1}{2a} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (\pi n)^2} \right\}. \\
 \mathbf{26.} \quad & 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx. \quad \mathbf{27.} \quad \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}. \quad \mathbf{28.} \\
 & \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k+1)x}{(2k+1)}.
 \end{aligned}$$