

АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. А. Хохлова, Е. В. Пономарёва

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СТАТИКА**

Учебное пособие

АСТРАХАНЬ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АГТУ
2010

УДК 531.2
ББК 22.21
Х 86

*Допущено редакционно-издательским советом
Астраханского государственного технического университета
в качестве учебного пособия для студентов технических вузов*

Р е ц е н з е н т ы : кафедра «Теоретическая и прикладная механика» Астраханского государственного технического университета;
кандидат физико-математических наук А. У. Джалмухамбетов (Астраханский государственный университет)

Хохлова О. А.

Х 86 Теоретическая механика. Статика : учеб. пособие / О. А. Хохлова, Е. В. Пономарёва ; Астрахан. гос. техн. ун-т. – Астрахань : Изд-во АГТУ, 2010. – 100 с.

ISBN 978-5-89154-387-4

Приведены основы теории по разделу «Статика» в объёме требований программ по курсу «Теоретическая механика» для технических специальностей высшего профессионального образования, а также схемы и подробные примеры решения типовых задач.

Для студентов технических вузов.

УДК 531.1
ББК 22.253

ISBN 978-5-89154-387-4

© Хохлова О. А., Пономарёва Е. В., 2010
© Астраханский государственный
технический университет, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	6
1. Основные понятия и аксиомы статики	7
1.1. Основные понятия статики	7
1.2. Аксиомы статики	8
1.3. Виды связей и их реакции	10
1.4. Система сходящихся сил	13
1.4.1. Геометрический способ сложения сходящихся сил	13
1.4.2. Разложение сил	14
1.4.3. Проекция силы на ось и на плоскость	15
1.4.4. Аналитический способ задания и сложения сил	16
1.4.5. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил	17
1.4.6. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы сходящихся сил	19
2. Система сил, расположенных в одной плоскости	21
2.1. Система параллельных сил. Сложение двух параллельных сил	21
2.2. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны ...	22
2.3. Момент силы	23
2.3.1. Момент силы относительно центра	23
2.3.2. Пара сил. Момент пары	24
2.3.3. Теорема об алгебраической сумме момента сил пары относительно любой точки, лежащей в плоскости действия пары	25
2.3.4. Теорема об эквивалентности пар	26
2.3.5. Сложение пар, расположенных в одной плоскости	27
2.3.6. Теорема о моменте равнодействующей плоской системы сходящихся сил (теорема Вариньона)	28
2.4. Теорема о параллельном переносе силы (метод Пуансо)	29
2.5. Приведение произвольной плоской системы сил к данному центру	30
2.6. Приведение плоской системы сил к простейшему виду	31
2.7. Формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил	32
2.8. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к твёрдому телу	33
2.9. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор твёрдого тела»	37
3. Равновесие плоской системы тел	40
3.1. Общие сведения о системе тел	40
3.2. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил ...	42
3.3. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор твёрдого тела (система двух тел)»	47
4. Расчёт плоской фермы	51
4.1. Общие сведения о фермах	51
4.2. Расчёт плоской фермы методом вырезания узлов	55
4.3. Проверка результатов расчёта фермы методом сечений	60
4.4. Построение диаграммы Максвелла–Кремоны	61
4.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы»	63
5. Пространственная система сил	67

5.1. Момент силы относительно оси.....	67
5.2. Теорема Вариньона для моментов силы относительно оси. Аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей.....	68
5.3. Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру.....	69
5.4. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.....	70
5.5. Равновесие произвольной пространственной системы сил.....	70
5.6. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил.....	71
5.7. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме: «Определение реакций опор пространственной конструкции».....	74
6. Центр тяжести тел.....	77
6.1. Общие сведения.....	77
6.2. Центр тяжести твёрдого тела.....	79
6.3. Способы определения координат центров тяжести тел.....	80
6.4. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур.....	84
6.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Центр тяжести».....	86
7. Трение скольжения.....	90
7.1. Законы трения скольжения.....	90
7.2. Реакция шероховатой поверхности. Угол трения.....	91
7.3. Методические указания по исследованию условий равновесия тел при наличии трения.....	92
7.4. Равновесие твёрдого тела при наличии трения качения.....	94
Заключение.....	98
Библиографический список.....	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая работа является первым опытом преподавателей кафедры «Теоретическая и прикладная механика» в создании пособия, содержащего как теоретические материалы, так и методические указания в конце каждой главы к решению задач определенного раздела пособия, а также контрольные задания по основным темам статики. Относительная краткость разделов курса потребовала тщательного отбора теоретических материалов и примеров, поясняющих основные темы «Статики», и наиболее рациональные способы их изложения. Пособие состоит из 7 глав, включающих все базовые темы раздела «Статика» курса теоретической механики. Теоретические и практические материалы проиллюстрированы 82 рисунками и содержат 11 таблиц, что, несомненно, поможет освоению излагаемого раздела механики.

При отборе материала были использованы труды отечественных учёных (в библиографический список включены 12 трудов по теоретической механике, составленных более чем 18 учеными России), а также многолетний опыт сотрудников кафедры «Теоретическая и прикладная механика» АГТУ, которым авторы предлагаемого пособия выражают глубокую признательность.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, а также может быть использовано для организации самостоятельной работы при заочной и дистанционной формах обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Теоретическая механика является одним из важнейших курсов, изучаемых в технических вузах. Её законы и выводы широко применяются в целом ряде других предметов, при решении самых разнообразных и сложных технических задач. Существует ряд областей, тесно связанных с изучением механики: теория упругости, пластичности, гидромеханика, аэромеханика, ряд разделов прикладной механики. Все технические расчёты при строительстве различных сооружений, проектировании машин, при изучении полёта различных летательных аппаратов и т. п. основаны на законах теоретической механики.

Теоретическая механика является естественной наукой, опирающейся на результаты опыта и наблюдений и использующей математический аппарат при анализе этих результатов.

Теоретическая механика включает три отдельные части: статику, кинематику и динамику.

Статикой в механике обычно называют ту её часть, которая занимается изучением законов равновесия материальных тел.

Кинематика изучает чисто геометрические формы механических движений материи без выяснения условий и причин, вызывающих эти движения.

Динамика является наиболее широкой ветвью механики, изучающей движение в зависимости от физических факторов, обуславливающих его.

В предлагаемом пособии рассматривается первый раздел теоретической механики – «Статика».

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

1.1. Основные понятия статики

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия тел, находящихся под действием сил.

Силой называется физическая величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел. Сила – величина векторная. Она характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения. Основной единицей измерения силы является Ньютон [Н].

В статике все тела считаются *абсолютно твёрдыми*, т. е. под действием сил их форма и размеры остаются неизменными.

Совокупность сил, приложенных к телу, называется *системой сил*. Если все силы лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*. Если силы не лежат в одной плоскости, то они образуют *пространственную систему сил*.

Тело, которое из данного положения может переместиться в любое положение в пространстве, называется *свободным телом*.

Две системы сил называют *эквивалентными* одна другой, если каждая из них, действуя по отдельности, может сообщить покоящемуся телу одно и то же движение $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \in (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$.

Система сил, под действием которой покоящееся тело не изменяет своего состояния покоя, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю* – $(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n) \in 0$.

Сила, которая одна заменяет действие системы сил на твёрдое тело, называется *равнодействующей* – $(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n) \in \vec{R}$.

Силы могут быть *сосредоточенные* (рис. 1.1а) и *распределённые* (рис. 1.1б). Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется *сосредоточенной*.

Система *распределённых сил* характеризуется *интенсивностью* q , т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в Ньютонах, деленных на метры (Н/м).

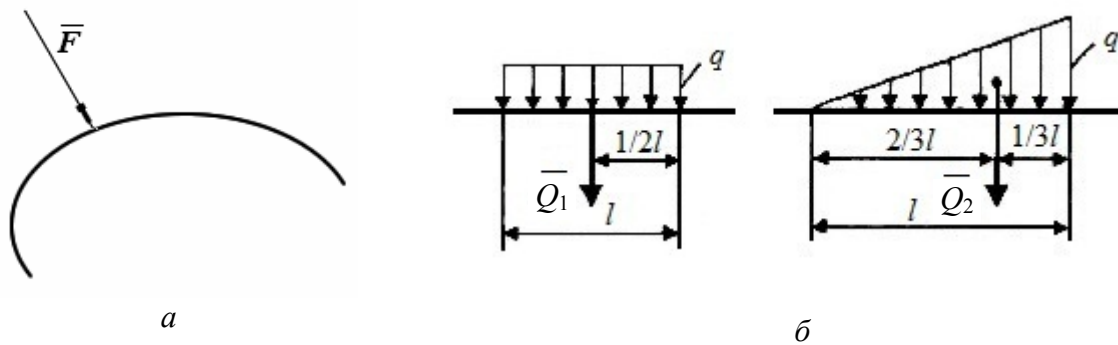


Рис. 1.1

Распределённую нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределённая нагрузка) или треугольника заменяют одной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рис. 1.1б). Величина равнодействующей численно равна площади фигуры, образованной распределённой нагрузкой: $Q_1 = ql$, $Q_2 = \frac{1}{2}ql$.

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат некоторые основные положения (*аксиомы*), которые являются обобщением многовекового производственного опыта человечества и теоретических исследований.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твёрдое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \text{ и } (\bar{F}_1, \bar{F}_2) \in 0.$$

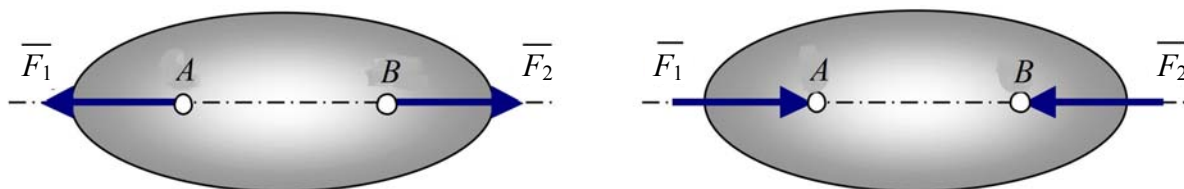


Рис. 1.2

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменится, если к ней прибавить или от неё отнять уравновешенную систему сил. Если $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \infty 0$, то $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3) \infty (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$.

Следствие: действие силы на абсолютно твёрдое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль её линии действия в любую другую точку тела.

Пусть на тело действует приложенная в точке A сила $\bar{F}$. Выберем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим к ней уравновешенные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, причём $\bar{F}_1 = \bar{F}$, $\bar{F}_2 = -\bar{F}$. Так как силы $\bar{F}_2$ и $\bar{F}$ образуют уравновешенную систему сил, то согласно второй аксиоме статики их можно отбросить. В результате на тело будет действовать только одна сила $\bar{F}_1$, равная $\bar{F}$, но приложенная в точке B (рис. 1.3).

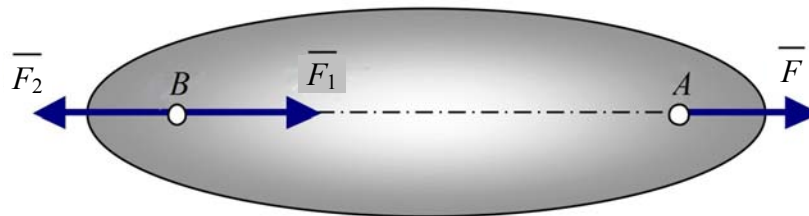


Рис. 1.3

Аксиома 3. Две силы, приложенные к твёрдому телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.

Вектор $\bar{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, называется геометрической суммой векторов $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ (рис. 1.4).

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R}.$$

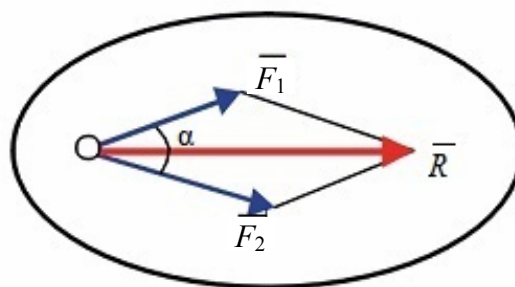


Рис. 1.4

Аксиома 4. Закон равенства действия и противодействия.

При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис. 1.5).

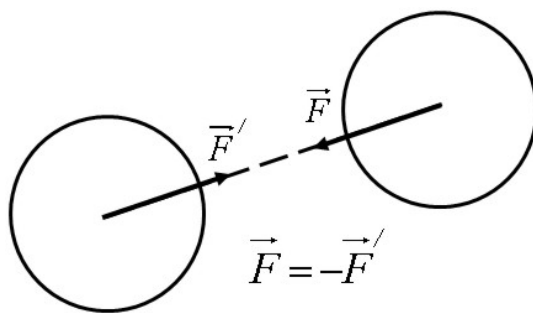


Рис. 1.5

Аксиома 5. Принцип отвердевания.

Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим, т. е. абсолютно твёрдым.

1.3. Виды связей и их реакции

Связями называются любые ограничения, препятствующие перемещению тела в пространстве.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на неё с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. По закону о равенстве действия и противодействия, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным перемещениям, называется *силой реакции (реакцией) связи*.

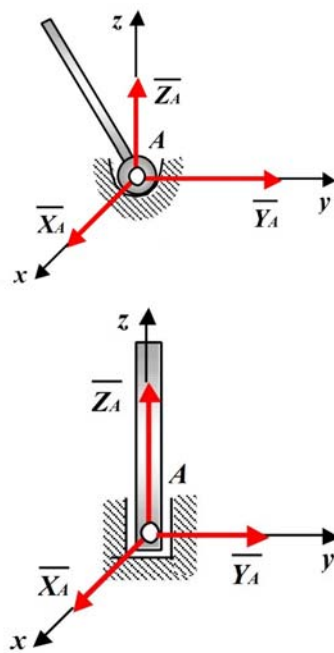
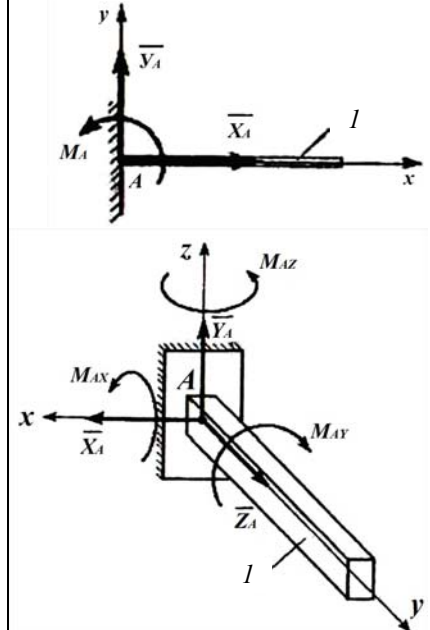
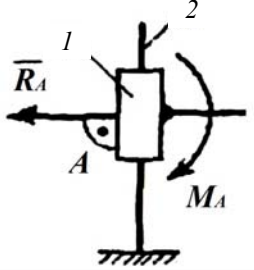
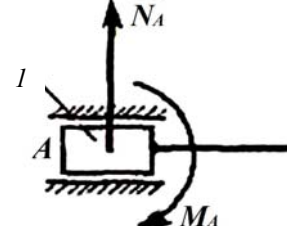
Одним из основных положений механики является *принцип освобождения от связей*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не даёт перемещаться телу. Основные виды связей и их реакции приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Виды связей и их реакции

№	Наименование связи	Условное обозначение
1	Гладкая поверхность (опора) – поверхность (опора), трением о которую данного тела можно пренебречь. При свободном опирании реакция $\vec{N}_A$ направляется перпендикулярно касательной, проведенной через точку A контакта тела 1 с опорной поверхностью 2.	

№	Наименование связи	Условное обозначение
2	Нить (гибкая, нерастяжимая). Связь, осуществлённая в виде нерастяжимой нити, не позволяет телу удаляться от точки подвеса. Поэтому реакция нити направлена вдоль нити к точке её подвеса.	
3	Невесомый стержень – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакция невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.	
4	Подвижный шарнир, шарнирно-подвижная опора. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности.	
5	Цилиндрический шарнир (подшипник, шарнирно-неподвижная опора). При осуществлении связи в виде цилиндрического шарнира одно тело может поворачиваться относительно другого вокруг общей оси, называемой <i>осью шарнира</i> . Реакция $\bar{R}$ цилиндрического шарнира заранее не известна ни по величине, ни по направлению; может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Модуль и направление полной реакции определяют две составляющие реакции в этой плоскости.	

№	Наименование связи	Условное обозначение
6	Сферический (шаровый) шарнир, подпятник. Тела, соединённые с помощью сферического шарнира, могут как угодно поворачиваться относительно центра шарнира. Реакция сферического шарнира $\bar{R}$ может иметь любое направление в пространстве. Реакция сферического шарнира и подпятника (подшипника с упором) может иметь любое направление в пространстве. Три составляющие ($\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$) реакции определяют модуль и направление полной реакции.	
7	Жёсткая заделка. В плоскости жёсткой заделки будут две составляющие реакции $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и момент пары сил M_A, который препятствует повороту балки l относительно точки A. Жёсткая заделка в пространстве отнимает у тела l все шесть степеней свободы – три перемещения вдоль осей координат и три поворота относительно этих осей. В пространственной жёсткой заделке будут три составляющие – $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ и три момента пар сил M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}.	
8	Ползун 1 на стержне 2. Реакция $\bar{R}_A$ направлена перпендикулярно стержню 2, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна 1 относительно точки A.	
9	Ползун 1 в направляющих. Реакция $\bar{N}_A$ направлена перпендикулярно направляющим, момент пары сил M_A препятствует повороту ползуна 1 относительно точки A.	

1.4. Система сходящихся сил

1.4.1. Геометрический способ сложения сходящихся сил

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Две силы, сходящиеся в одной точке, согласно третьей аксиоме статики, можно заменить одной силой – *равнодействующей*.

Решение многих задач статики связано с операцией сложения векторов, в частности сил.

Главный вектор системы сил – величина, равная геометрической сумме сил системы. Главный вектор системы сил не следует путать с равнодействующей. Равнодействующая – всегда главный вектор, а главный вектор равен равнодействующей, если система сил является сходящейся.

Равнодействующую плоской системы сходящихся сил можно определить *графически* и *графоаналитически*.

При *графическом* определении равнодействующей на чертеже в выбранном масштабе изображаются силы, затем они складываются по правилу параллелограмма. По длине диагонали параллелограмма, учитывая выбранный масштаб, определяется равнодействующая, равная сумме слагаемых сил. Точность определения равнодействующей зависит в этом случае от точности построения силового треугольника.

Графоаналитический способ сложения сил позволяет более точно определить равнодействующую, используя тригонометрические зависимости:

– теорему косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)}$$

или $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$ (рис. 1.6);

– теорему синусов:

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_1}{\sin \gamma}.$$

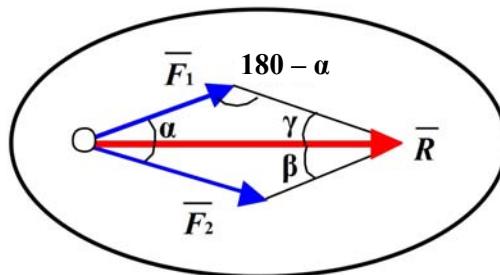


Рис. 1.6. Сложение двух сил

Сложение трёх сил, не лежащих в одной плоскости: геометрическую сумму $\vec{R}$ трёх сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, не лежащих в одной плоскости, изображают диагональю параллелепипеда (рис. 1.7), построенного на этих силах (*правило параллелепипеда*).

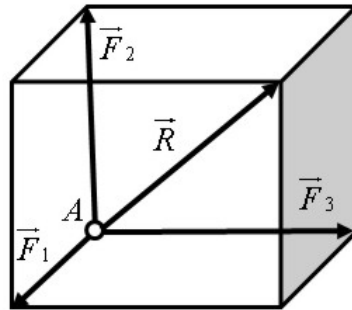


Рис. 1.7

Сложение системы сил. Сложение плоской системы сходящихся сил осуществляется либо путём последовательного сложения сил с построением промежуточной равнодействующей (рис. 1.8), либо путём построения силового многоугольника (рис. 1.9).

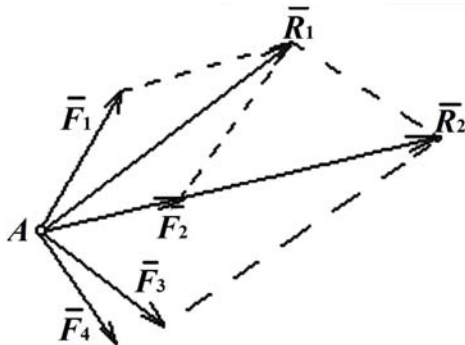


Рис. 1.8

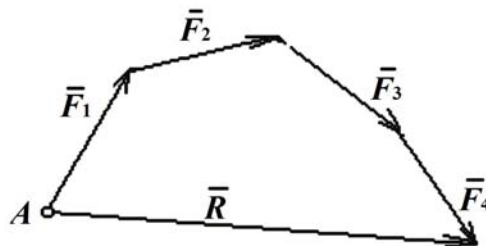


Рис. 1.9

1.4.2. Разложение сил

Разложить данную силу на составляющие – означает найти такую систему сил, для которой данная сила является равнодействующей. Подобная задача имеет однозначное решение, если необходимо разложить силу по двум направлениям, лежащим в одной плоскости. На рис. 1.10 показано разложение силы F по двум направлениям ab и cd .

$$\vec{F} = \vec{Q} + \vec{P}.$$

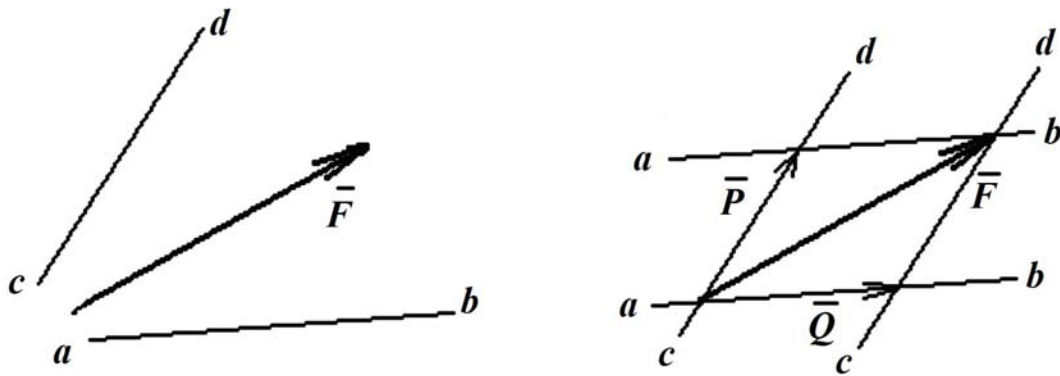


Рис. 1.10

1.4.3. Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Проекция F_x (рис. 1.11) силы $\vec{F}$ на ось x положительна, если угол α острый, отрицательна – если угол α тупой. Если сила $\vec{F}$ перпендикулярна оси, то её проекция на ось равна нулю.

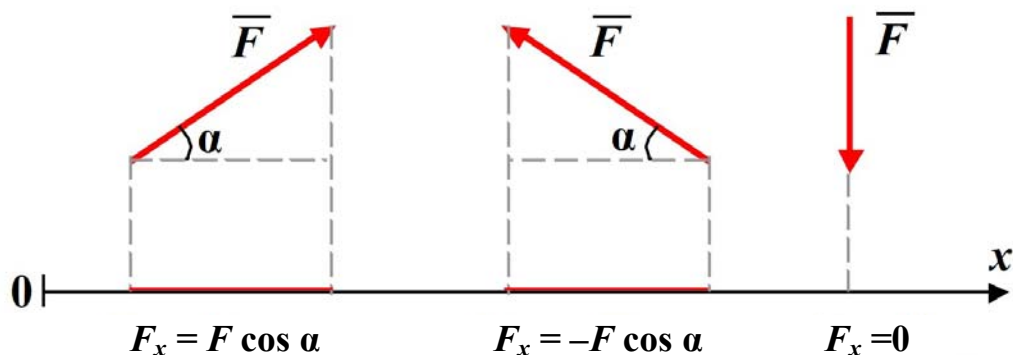


Рис. 1.11

Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy – вектор $\vec{F}_{xy}$, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{F}$ на эту плоскость. То есть проекция силы на плоскость – величина векторная, характеризуется не только числовым значением, но и направлением в плоскости Oxy (рис. 1.12).

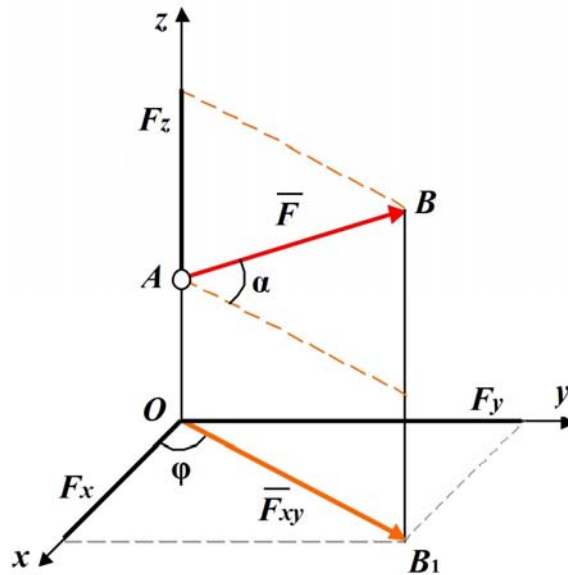


Рис. 1.12

Тогда модуль проекции $\vec{F}$ на плоскость Oxy будет равен

$$F_{xy} = F \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы $\vec{F}$ и её проекцией $\vec{F}_{xy}$.

Если сила и ось координат не лежат в одной плоскости, то проекция силы на ось проводится методом двойного проецирования.

Например, чтобы определить проекцию силы $\vec{F}$ на ось x , надо спроецировать её на плоскость Oxy , а затем разложить проекцию силы $\vec{F}_{xy}$ на составляющие по осям координат F_x и F_y (рис. 1.12).

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \alpha \cos \varphi;$$

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \alpha \sin \varphi;$$

$$F_z = F \sin \alpha.$$

1.4.4. Аналитический способ задания и сложения сил

Аналитический способ задания сил. Для аналитического способа задания силы $\vec{F}$ необходимо выбрать систему координатных осей $Oxyz$, по отношению к которой будет определяться направление силы в пространстве.

Вектор, изображающий силу $\vec{F}$, можно построить, если известны модуль этой силы и углы α , β , γ , которые сила образует с координатными осями. Точка A приложения силы $\vec{F}$ задаётся отдельно своими координатами x , y , z .

Можно задавать силу её проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси. Модуль силы в этом случае определится по формуле $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а направляющие косинусы по формулам: $\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$, $\cos \beta = \frac{F_y}{F}$, $\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$.

Аналитический способ сложения сил: проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось, т. е. если $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k$, то $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.

Зная R_x, R_y, R_z , можем определить модуль $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ и направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{R_x}{R}$, $\cos \beta = \frac{R_y}{R}$, $\cos \gamma = \frac{R_z}{R}$.

1.4.5. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю.

1. *Геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил:* для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут (конец вектора последней слагаемой силы должен совместиться с началом вектора первой слагаемой силы). Тогда главный вектор системы сил будет равен нулю ($\vec{R} = 0$).

2. *Аналитические условия равновесия.* Модуль главного вектора системы сил определяется по формуле $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$. Поскольку $\vec{R} = 0$, то подкоренное выражение может быть равно нулю только в том случае, если каждое слагаемое одновременно обращается в нуль, т. е.

$$R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0.$$

Следовательно, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трёх координат осей были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из двух координатных осей были равны нулю:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; R_y = \sum F_{ky} = 0.$$

Теорема о трёх силах: если твёрдое тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости (рис. 1.13), то линии их действия пересекаются в одной точке (необходимое условие равновесия твёрдого тела).

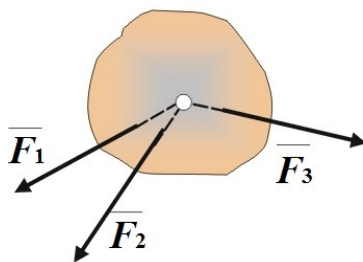


Рис. 1.13

Это условие равновесия не является достаточным, т. к. равнодействующая этих сил может оказаться не равной нулю.

Достаточным условием является наличие замкнутого силового треугольника при одновременном пересечении линий действия трёх сил в одной точке.

Рассмотрим тело, на которое действуют три непараллельные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ (рис. 1.14).

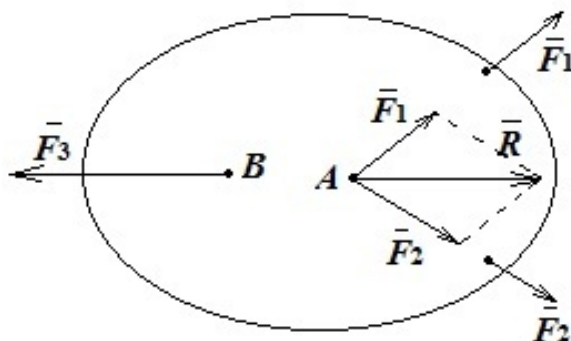


Рис. 1.14

Так как эти силы непараллельны, то две любые силы, например, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, должны пересечься в некоторой точке A . Перенесём силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ вдоль линии их действия и приложим их к точке A . Заменим сходящиеся силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ их равнодействующей $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$.

Следовательно, теперь на тело действуют только две силы $\vec{R}$ и $\vec{F}_3$. Поскольку тело находится в равновесии под действием двух сил, то согласно первой аксиоме статики эти силы должны действовать вдоль одной прямой AB . Таким образом, линия действия силы $\vec{F}_3$ должна проходить через точку A .

1.4.6. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы сходящихся сил

1. Выделить точку, равновесие которой надо рассмотреть.
2. Изобразить активные (заданные) силы.
3. Освободить точку от связей, приложив соответствующие реакции.

При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой – число неизвестных величин должно быть не более двух или трёх (в случаях плоской и пространственной систем сходящихся сил соответственно).

4. Направить оси координат.
5. Составить уравнения равновесия системы сходящихся сил, из которых можно найти неизвестные величины.

Пример. Однородный брус AB длиной 2 м и весом 4 Н опирается концом A на гладкую вертикальную стену. К нижнему концу бруса прикреплён трос. Найти, на каком расстоянии AC необходимо прикрепить трос к стене, чтобы брус находился в равновесии, образуя угол 30° со стеной (рис. 1.15). Найти натяжение троса и реакцию стены.

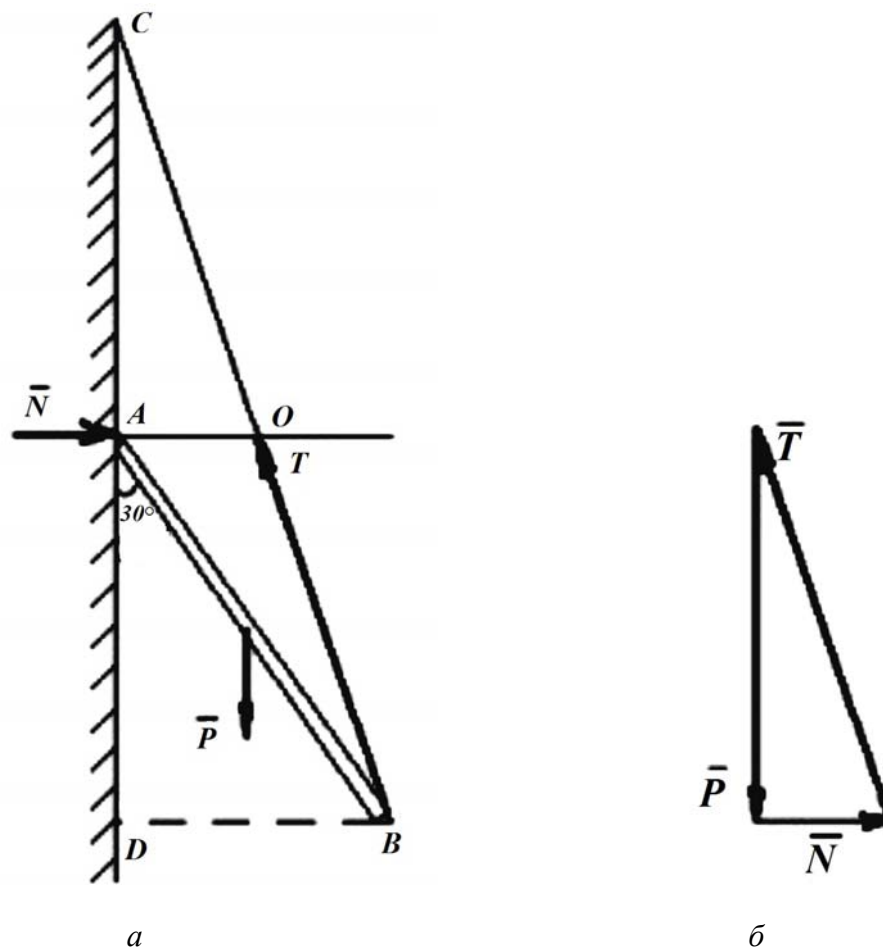


Рис. 1.15

Решение. Изобразим действующие на трос силы: активную силу (вес бруса) $P = 4 \text{ Н}$ и реакции связи (натяжение троса $\overline{T}$ и реакцию гладкой поверхности $\overline{N}$). Силы, действующие на брус, непараллельны и лежат в одной плоскости. Следовательно, для решения задачи можно использовать теорему о трёх силах. Строим силовой треугольник (рис. 1.15б).

Треугольники AOC и DBC подобны. $AO/DB = AC/DC$.

Поскольку центр тяжести бруса находится в его середине, то $BD = 2AO$, $DC = 2AC$ и $DA = AC$; $DB = AB \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м}$; $DA = AB \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ м}$; $DC = 2DA = 2 \cdot 1,732 = 3,464 \text{ м}$.

Из подобия силового и геометрического треугольников находим:

$$\frac{P}{DC} = \frac{N}{DB} = \frac{T}{BC}; \quad BC = \sqrt{DC^2 + DB^2} = \sqrt{3,464^2 + 1^2} \approx 3,60 \text{ м};$$

$$N = \frac{P \cdot DB}{DC} = \frac{4 \cdot 1}{3,464} = 1,155 \text{ Н}; \quad T = \frac{P \cdot BC}{DC} = \frac{4 \cdot 3,60}{6,464} = 4,157 \text{ Н}.$$

Ответ: трос следует закрепить в точке C на расстоянии $AC = 1,732 \text{ м}$. Натяжение троса $T = 4,157 \text{ Н}$, реакция стены $N = 1,155 \text{ Н}$.

2. СИСТЕМА СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

2.1. Система параллельных сил.

Сложение двух параллельных сил

Сложение параллельных сил геометрическим способом по правилу параллелограмма сил не представляется возможным. Для решения поставленной задачи используем метод приведения параллельных сил к сходящимся силам.

Пусть на тело действуют две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 2.1).

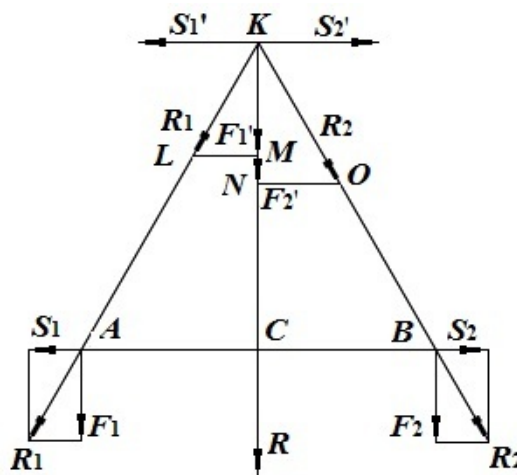


Рис. 2.1

Приложим к телу в точках A и B две равные по величине, но противоположные по направлению силы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ и сложим их с заданными силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, получим равнодействующие этих сил $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$. Эти силы непараллельны и лежат в одной плоскости. Следовательно, они пересекаются в одной точке. Перенесём эти силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ вдоль линии их действия и приложим их к точке K .

Далее, разложим эти силы на составляющие $\vec{F}'_1$, $\vec{S}'_1$ и $\vec{F}'_2$, $\vec{S}'_2$. Силы $\vec{S}'_1$ и $\vec{S}'_2$ можно отбросить как уравновешенные силы. Следовательно, на тело к точке K будут действовать только две силы $\vec{F}'_1$ и $\vec{F}'_2$, которые по величине равны силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сумма сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (равнодействующая $\vec{R}$) направлена вдоль одной прямой: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Из подобия треугольников KCA и KML и треугольников KCB и KON находим: $\frac{S_1}{AC} = \frac{F_1}{CK}$; $\frac{S_2}{BC} = \frac{F_2}{CK}$;

$S_1 \cdot CK = F_1 \cdot AC$; $S_2 \cdot CK = F_2 \cdot BC$, отсюда $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$, окончательно:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC}; \frac{F_1 + F_2}{BC + AC} = \frac{R}{AB}; \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

Таким образом, две параллельные силы, направленные в одну сторону, имеют равнодействующую, параллельную им, равную по величине их сумме и направленную в ту же сторону. Линия действия равнодействующей силы расположена между линиями действия заданных сил и делит отрезок прямой между линиями действия этих сил на части, обратно пропорциональные силам.

2.2. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны

Пусть к телу в точках A и B приложены две параллельные неравные по величине и противоположно направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, причём $F_1 > F_2$ (рис. 2.2). Разложим силу $\vec{F}_1$ на две составляющие силы, одна из которых равна $\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2$, а вторая $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

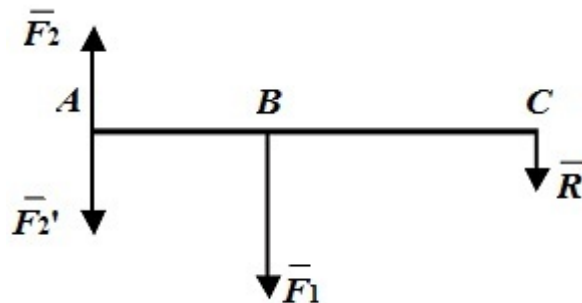


Рис. 2.2

Точку приложения силы $\vec{R}$ определим, решая задачу о сложении двух параллельных сил $\vec{R}$ и $\vec{F}'_2$, где их равнодействующая – сила $\vec{F}_1$.

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_1} = \frac{BC}{F'_2}.$$

Поскольку $|\vec{F}'_2| = |\vec{F}_2|$, имеем:

$$AC = \frac{AB \cdot F_1}{F_1 - F_2}; \quad BC = \frac{AB \cdot F'_2}{F_1 - F_2}.$$

Две неравные параллельные силы, направленные в противоположные стороны, приводятся к равнодействующей силе, параллельной им, равной по величине их разности и направленной в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей расположена за линией действия большей силы и делит отрезок прямой между линиями действия заданных сил на части, обратно пропорциональные силам.

2.3. Момент силы

Моментом силы называется физическая величина, характеризующая вращательный эффект действия силы.

2.3.1. Момент силы относительно центра

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O есть вектор $\vec{m}_0(\vec{F})$, приложенный в этом центре, который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу $\vec{F}$, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (рис. 2.3а).

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра O в точку A , где приложена сила, на саму силу:

$$m_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O характеризуется:

- 1) положением в пространстве плоскости OAB (плоскости поворота), проходящей через центр O и силу $\vec{F}$;
- 2) направлением поворота;
- 3) модулем момента силы.

Модуль момента силы определяется по правилу умножения векторов: модуль векторного произведения двух векторов равен произведению модулей этих векторов на синус угла между ними:

$$m_0(\vec{F}) = |\vec{F} \times \vec{r}| = F \cdot r \cdot \sin(\vec{F}, \vec{r}) = F \cdot h,$$

т. к. $r \sin \alpha = h$, где h – кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы $\vec{F}$ – называется *плечом силы*.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо силы относительно этой точки.

Плечом силы $\vec{F}$ относительно точки называется кратчайшее расстояние h от этой точки до линии действия силы.

Если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, то величина момента силы берётся со знаком «плюс», если по ходу часовой стрелки – со знаком «минус».

Свойства момента силы:

- а) момент силы равен нулю, если сила равна нулю или когда плечо равно нулю, т. е. линия действия силы проходит через моментную точку;
- б) величина момента силы относительно точки не изменяется при переносе силы вдоль линии её действия;
- в) момент силы численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе F и полюсе O (рис. 2.3б).

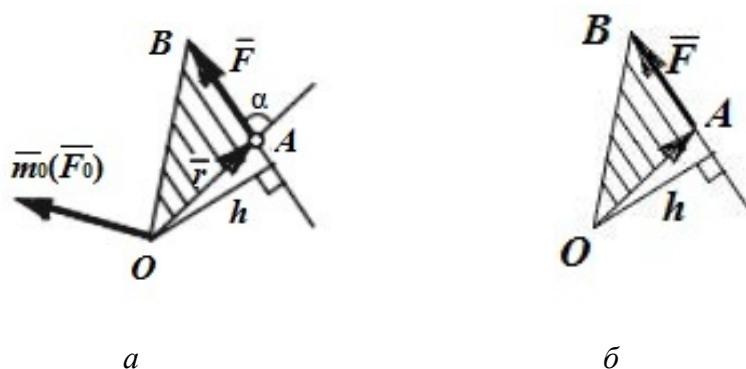


Рис. 2.3

Пл. $\triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} F \cdot h$; $m_o(F) = F \cdot h = 2 \cdot \text{пл. } \triangle OAB$.

Таким образом, алгебраический моменты силы $\vec{F}$ относительно точки O равен $|m_o(\vec{F})| = F \cdot h$ (Н·м).

2.3.2. Пара сил. Момент пары

Система двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, приложенных к твердому телу, называется *парой сил* (рис. 2.4). Так как $\vec{F} = -\vec{F}'$, то $\vec{R} = 0$. Следовательно, пара сил не имеет равнодействующей. В то же время эта система сил не является уравновешенной, поскольку силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ не направлены вдоль одной прямой. Рас-

стояние между линиями действия сил называется *плечом пары* d . Момент пары сил равен произведению одной из сил пары на плечо. Знак момента пары определяется так же, как и момент силы относительно центра.

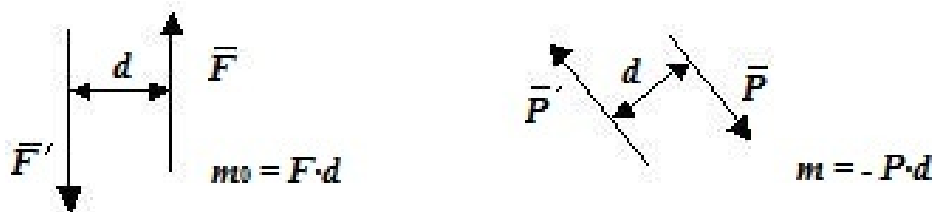


Рис. 2.4

2.3.3. Теорема об алгебраической сумме момента сил пары относительно любой точки, лежащей в плоскости действия пары

Пусть на тело действует пара сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$. Выберем произвольную точку O и определим момент сил пары относительно этой точки (рис. 4.3).

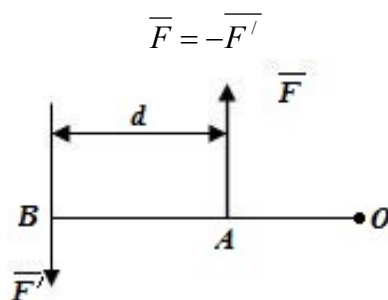


Рис. 2.5

$$m_0(F) = -F \cdot AO;$$

$$m_0(F') = F' \cdot BO = F' \cdot (d + AO) = F \cdot d + F \cdot AO;$$

$$m_0(F) + m_0(F') = -F \cdot AO + F \cdot d + F \cdot AO = F \cdot d = m.$$

Алгебраическая сумма моментов сил пары, взятых относительно некоторой неподвижной точки, лежащей в плоскости действия пары, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

2.3.4. Теорема об эквивалентности пар

Рассмотрим пару сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, действующую на твёрдое тело (рис. 2.6).

Проведём в плоскости действия пары через произвольные точки K и L две параллельные прямые до их пересечения с линиями действия сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$. Перенесём силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ в точки пересечения прямых A и B . Разложим силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ на составляющие по направлению AB и KB . $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$, $\vec{F}' = \vec{P}' + \vec{Q}'$. Очевидно, что $\vec{Q}$ и $\vec{Q}'$ можно отбросить как уравновешенную систему сил. В результате пара $(\vec{F}, \vec{F}')$ заменяется парой $(\vec{P}, \vec{P}')$ с плечом d_2 .

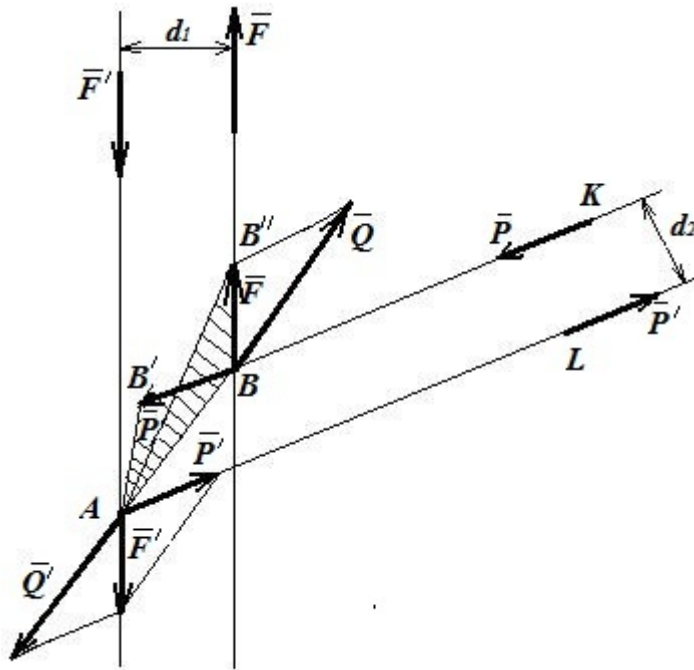


Рис. 2.6

Покажем, что пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ и $(\vec{P}, \vec{P}')$ имеют одинаковые моменты:

$$m_1 = F \cdot d_1; \quad m_2 = P \cdot d_2;$$

$$m_1 = 2 \cdot \text{пл. } \triangle ABB'';$$

$$m_2 = 2 \cdot \text{пл. } \triangle ABB'.$$

Площади треугольников ABB'' и ABB' равны, т. к. у них общее основание AB и одинаковая высота, т. к. $AB \parallel B'B''$.

Следовательно, $m_1 = F \cdot d_1 = m_2 = P \cdot d_2$.

Силы $\overline{P}$ и $\overline{P}'$ можно перенести вдоль линии их действия и приложить к точкам K и L . По *теореме об эквивалентности пар* пару сил, действующую на твёрдое тело, можно заменить другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

Из доказанной теоремы следует, что *пару сил можно переносить в плоскости действия пары и у данной пары можно произвольно менять модуль силы и длину плеча, сохраняя неизменным её момент*.

На чертежах пару сил принято изображать изогнутым вектором с указанием величины момента.

2.3.5. Сложение пар, расположенных в одной плоскости

Система пар, расположенных в одной плоскости, может быть заменена одной парой, расположенной в той же плоскости с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар.

Пусть на тело действует система пар m_1 , m_2 , m_3 , расположенных в одной плоскости (рис. 2.7).

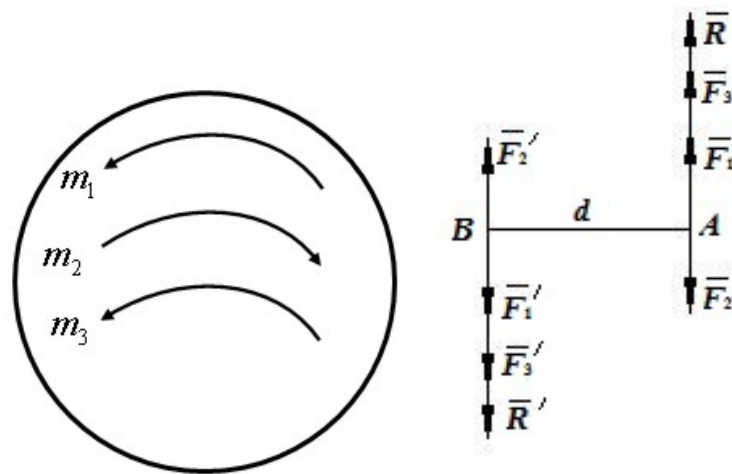


Рис. 2.7

Согласно *теореме об эквивалентности пар* у любой пары можно произвольно менять силу и плечо пары, сохраняя неизменным его момент. Примем для всех пар одно и то же плечо $d = AB$ (рис. 2.7). Следовательно, силы пар должны быть соответственно равны:

$$F_1 = \frac{m_1}{d}; \quad F_2 = -\frac{m_2}{d}; \quad F_3 = \frac{m_3}{d}.$$

Приложим силы к точкам A и B . Сложив силы, получим их равнодействующие:

$$R = F_1 - F_2 + F_3; \quad R' = F'_1 - F'_2 + F'_3.$$

Силы $\overline{R}$ и $\overline{R}'$ образуют новую пару, поскольку $\overline{R} \parallel \overline{R}'$ и $\overline{R} = -\overline{R}'$, с общим плечом d :

$$M = R \cdot d = (F_1 - F_2 + F_3) \cdot d = F_1 \cdot d - F_2 \cdot d + F_3 \cdot d = m_1 - m_2 + m_3.$$

Если на тело действует n пар, лежащих в одной плоскости, то результирующая пара равна их алгебраической сумме:

$$M = \sum m_k.$$

Из полученного результата вытекает **условие равновесия пар**: для равновесия пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар была равна нулю: $\sum m_k = 0$.

2.3.6. Теорема о моменте равнодействующей плоской системы сходящихся сил (теорема Вариньона)

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно этой точки (рис. 2.8).

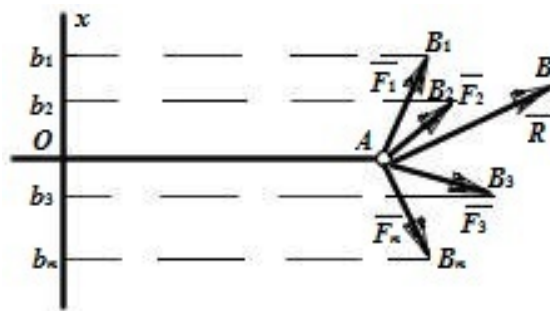


Рис. 2.8

Рассмотрим систему сил, сходящихся в точке A .

Выберем произвольную точку O и соединим её с точкой A . Через точку O проведём ось Ox перпендикулярно OA . Ось Ox направим так, чтобы проекция

силы на эту ось и величина момента силы относительно точки O были одинакового знака. Спроецируем все силы на ось Ox : $Ob_1 = F_{1x}$; $Ob_2 = F_{2x}$... $Ob_n = F_{nx}$.

Момент силы $\overline{F}_1$ относительно точки O : $m_0(\overline{F}_1) = 2 \cdot \text{пл.} \Delta OAb_1$ и т. д. $m_0(\overline{F}_n) = 2 \cdot \text{пл.} \Delta OAb_n$. Сложим сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил равна $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k$. Спроецируем векторное равенство на ось Ox : $R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{kx}$. Умножим левую и правую части полученного выражения на OA , получим: $OA \cdot R_x = OA \cdot \sum F_{kx}$; $OA \cdot R_x = m_0(\overline{R})$; $OA \cdot \sum F_{kx} = \sum m_0(\overline{F}_k)$. Следовательно, $m_0(\overline{R}) = \sum m_0(\overline{F}_k)$. Теорема доказана.

2.4. Теорема о параллельном переносе силы (метод Пуансо)

Пусть на тело действует сила $\overline{F}$, приложенная в точке A (рис. 2.9).

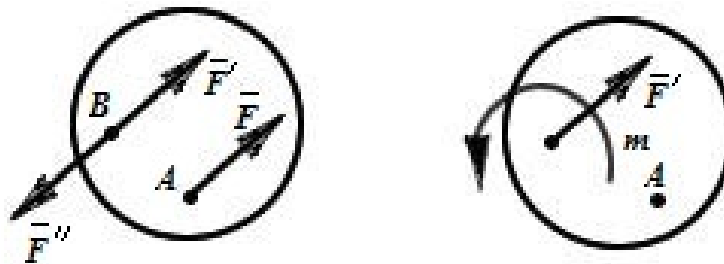


Рис. 2.9

Действие этой силы не изменится (согласно второй аксиоме статики), если в произвольной точке B тела приложить две уравновешенные силы $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, такие, что $|\overline{F}'| = |\overline{F}|$, $\overline{F}'' = -\overline{F}$. Полученная система трёх сил и представляет собой силу $\overline{F}'$, равную $\overline{F}$, но приложенную в точке B , и пару $(\overline{F}, \overline{F}'')$, момент которой равен $m = m_B(\overline{F})$.

Следовательно, силу, приложенную к абсолютно твёрдому телу, можно не изменяя оказываемого ею действия, переносить параллельно ей самой из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится. Тогда $\overline{F} \propto [\overline{F}', m]$, где $\overline{F}' = \overline{F}$, $m = m_B(\overline{F})$.

Пример. Чтобы удержать в равновесии однородный брус AB длиной $2a$ и весом $\bar{P}$, надо приложить в его середине C направленную вверх силу $\bar{Q}$, по модулю равную $\bar{P}$ (рис. 2.10).

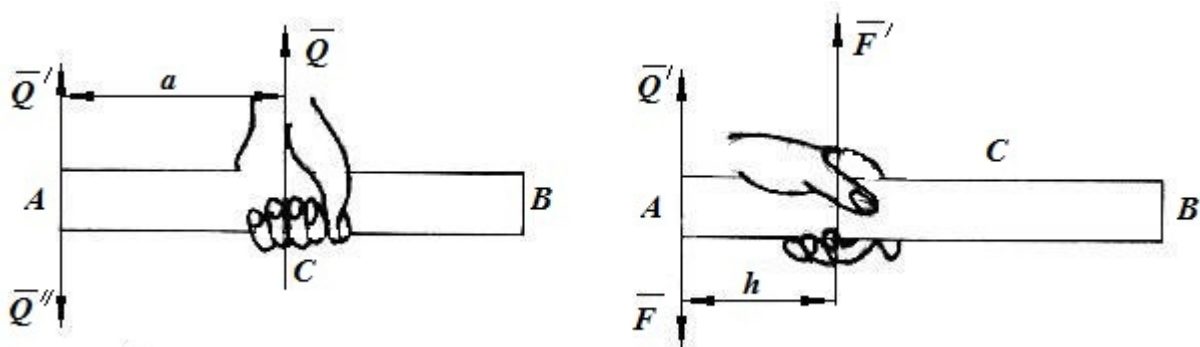


Рис. 2.10

Согласно доказанной теореме силу $\bar{Q}$ можно заменить силой $\bar{Q}'$, приложенной к концу A бруса, и парой с моментом, модуль которого $m = Q \cdot a$. Если плечо этой пары уменьшить до величины h , то образующие её силы $\bar{F}$ и $\bar{F}'$ надо увеличить так, чтобы $F \cdot h = Q \cdot a$. Следовательно, чтобы удержать брус за конец A , надо, кроме силы $\bar{Q}'$, приложить ещё пару $\bar{F}$, $\bar{F}'$. Этот результат, вытекающий из теоремы «ощущает» рука человека, удерживающего брус за середину или за конец.

2.5. Приведение произвольной плоской системы сил к данному центру

Если на тело действует система сил, то, пользуясь *методом Пуансо*, все силы можно параллельно перевести в некоторый центр O и сложить их (рис. 2.11). Геометрическая сумма действующих на тело сил называется *главным вектором* $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$. Присоединённые пары сил также можно сложить.

Алгебраическая сумма сил пары называется *главным моментом системы относительно центра приведения* $M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k)$.

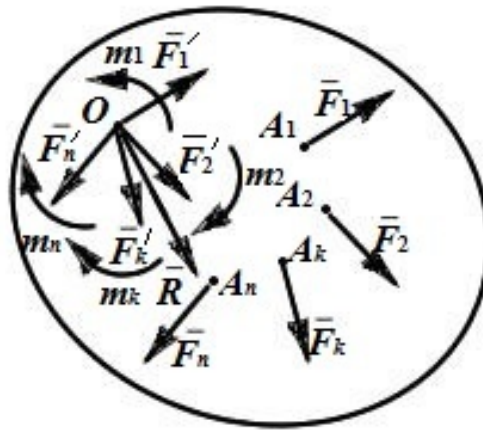


Рис. 2.11

Следовательно, плоская система сил, действующих на абсолютно твёрдое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом $\vec{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O , но сила и пара лежат в данном случае в одной плоскости – в плоскости действия сил.

2.6. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Частные случаи приведения плоской системы к простейшему виду даны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Частные случаи приведения плоской системы сил к простейшему виду

№	Значения главного вектора и главного момента	Результат приведения
1	$\vec{R} = 0, M_O \neq 0$	Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту M_O (главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения O).
2	$\vec{R} \neq 0, M_O = 0$	Система сил приводится к равнодействующей, равной $\vec{R}$, проходящей через центр O .

№	Значения главного вектора и главного момента	Результат приведения
3	$\vec{R} \neq 0, M_O \neq 0$	Система сил приводится к равнодействующей, равной $\vec{R}$, линия действия которой отстоит от линии действия силы $\vec{R}$ на расстояние $h = M_O /R$. Положение линии действия равнодействующей должно быть таким, чтобы знак момента равнодействующей относительно центра приведения O совпадал со знаком главного момента системы сил M_O относительно центра O . Сила $\vec{R}$ и равнодействующая равны по модулю и параллельны.
4	$\vec{R} = 0, M_O = 0$	Система сил, приложенных к твердому телу, является уравновешивающейся.

2.7. Формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий равновесия (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил

№	Условие	Комментарии
1	$\sum F_{kx} = 0,$ $\sum F_{ky} = 0,$ $\sum m_O(\vec{F}_k) = 0$ – основная форма условий равновесия.	Сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x и y и сумма моментов этих сил относительно любого центра O , лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.
2	$\sum F_{kx} = 0,$ $\sum m_A(\vec{F}_k) = 0,$ $\sum m_B(\vec{F}_k) = 0$ – уравнения проекций и двух уравнений моментов относительно двух точек. $AB \nparallel Ox.$	Суммы моментов всех сил относительно двух центров A и B и сумма проекций всех сил на ось Ox , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю.

№	Условие	Комментарии
3	$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0,$ $\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,$ $\sum m_B(\bar{F}_k) = 0$ — уравнения моментов относительно трёх выбранных точек.	Суммы моментов всех сил относительно любых трёх центров A, B, C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

Равновесие плоской системы параллельных сил. В том случае, когда все силы параллельны друг другу, одну из координатных осей следует направить параллельно силам.

Для параллельных сил (параллельны оси Oy) останется два условия равновесия (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Условия равновесия плоской системы параллельных сил

№	Условие	Комментарии
1	$\sum F_{ky} = 0, \sum m_o(\bar{F}_k) = 0$ (ось Oy параллельна силам).	Сумма проекций всех сил на ось декартовых координат y и сумма моментов этих сил относительно любого центра O , лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.
2	$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \sum m_B(\bar{F}_k) = 0$ (AB не должна быть параллельна силам ($AB \nparallel F_k$)).	Суммы моментов всех сил относительно двух центров A и B были равны нулю.

2.8. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к твёрдому телу

При практическом решении задач можно пользоваться любой формой уравнений равновесия, т. к. все они совершенно равноправны. Изложим некоторые общие правила составления уравнения равновесия.

Оси координат и моментные точки можно выбирать произвольно. Наиболее просто и безошибочно решаются уравнения равновесия, в которые входит одно неизвестное. Следовательно, координатные оси надо направлять перпендикулярно к направлению неизвестных сил. Тогда при составлении

уравнений проекций неизвестные, перпендикулярные к осям, в эти уравнения не войдут. За моментные целесообразно брать такие точки, в которых пересекаются линии действия двух неизвестных сил. Тогда в уравнение моментов войдёт только одна искомая сила.

Для плоской системы можно выбирать любое число координатных осей и моментных точек и составлять соответствующее число уравнений равновесия, но только три из них будут независимыми. Остальные уравнения получаются как следствия из этих трёх, и их можно использовать лишь для проверки.

Для плоской системы параллельных сил эти общие правила можно конкретизировать. Оси координат следует направлять так, чтобы одна из них оказалась параллельной силам, приложенным к твёрдому телу. Уравнение моментов нужно составлять относительно точки, лежащей на линии действия неизвестной силы. Это даёт возможность определить одну из неизвестных сил непосредственно из одного уравнения моментов. Для решения задач при помощи двух уравнений моментов следует учитывать, что моментные точки не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Задачи на равновесие твёрдого тела для плоской системы сил рекомендуется решать в следующем порядке.

1. Выделить тело, равновесие которого надо рассмотреть.
 2. Изобразить активные (заданные) силы.
 3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции.
- При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой – число неизвестных величин должно быть не более трёх (для системы параллельных сил – не более двух).
4. Направить оси координат и выбрать моментные точки.
 5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил (или плоской системы параллельных сил).
 6. Решить систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остаётся прежним).

После того как задача решена, необходимо произвести проверку. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций, при этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы проекций или моментов подтвердит правильность решения задачи.

Пример. Горизонтальная балка длиной 5 м заделана в стену (рис. 2.12). На балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 1,5 \text{ Н/м}$ на участке длиной 3 м, а также пара сил с моментом 2 Н·м и сила $F = 4 \text{ Н}$.

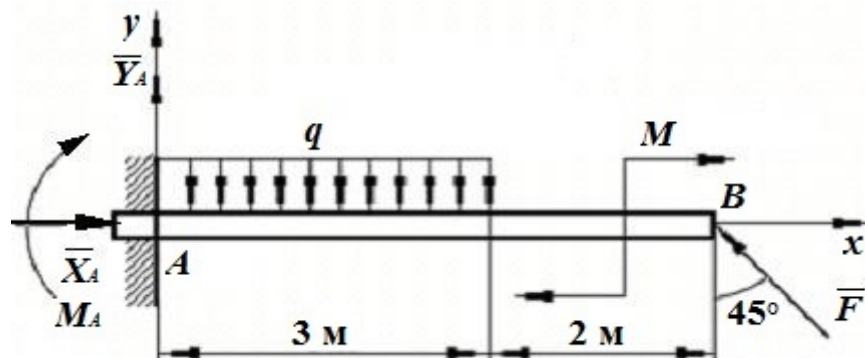


Рис. 2.12

Определить реакции заделки (X_A , Y_A , M_A).

Решение. Задача сводится к определению реакции опоры жёсткой заделки, при действии на балку равномерно распределённой нагрузки, момента пары сил и силы, приложенной к концу балки под углом 45° .

1. Рассматриваем равновесие плоской системы сил, действующей на балку.
2. Показываем все действующие на балку силы и момент пары сил.
3. Мысленно отбрасываем связи и заменяем их реакциями X_A , Y_A , M_A . Направления X_A , Y_A принимаем совпадающими с направлением осей координат.
4. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum m_A(\bar{F}_k) = 0.$$

Из трёх уравнений можно определить три неизвестные величины.

Составим уравнение равновесия сил:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A - F \cos 45^\circ = 0; X_A = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ Н};$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - q \cdot 3 + F \sin 45^\circ = 0; Y_A = 1,5 \cdot 3 - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,67 \text{ Н};$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; -q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - M + F \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - M_A = 0;$$

$$M_A = -1,5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 + 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,39 \text{ Н·м}.$$

Проверка. Сумма моментов относительно точки B :

$$\begin{aligned}\sum m_B(\bar{F}_k) &= 0; -M + q \cdot 3 \cdot 3,5 - M_A - Y_A \cdot 5 = 0; \\ -2 + 1,5 \cdot 3 \cdot 3,5 - 5,39 - 1,67 \cdot 5 &= 0; 0 \equiv 0.\end{aligned}$$

Проверка сошлась.

Пример. Однородная горизонтальная балка AD весом $P = 8$ Н в точке A закреплена шарнирно, в точке B опирается при помощи катков на гладкую горизонтальную поверхность (рис. 2.13). Балка AD находится под действием перпендикулярной к ней равномерно распределенной нагрузки, интенсивностью $q = 3$ Н/м на участке BD , а также силы $F = 6$ Н, расположенной под углом 45° в точке K . Определить реакции в точках A и B .

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на балку.

2. Покажем все действующие на балку силы, причём равномерно распределенную нагрузку, заменим равнодействующей $\bar{Q}$, прикладываемой к середине участка BD : $Q = q \cdot BD = 3 \cdot 2 = 6$ Н.

3. Мысленно отбросим связи в точках A и B и заменим их реакциями $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{N}_B$, направление которых примем совпадающим с направлением выбранных осей координат Ay и Ax .

4. Составим три уравнения равновесия, из которых найдём три неизвестных реакции.

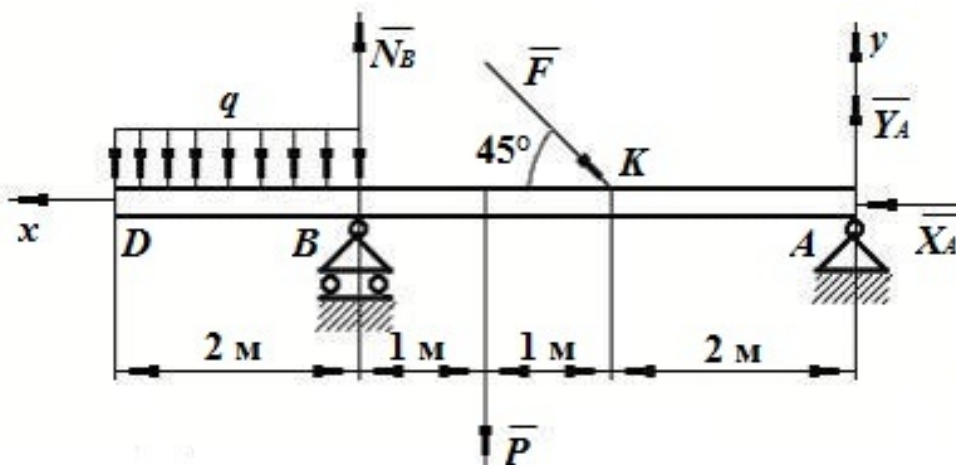


Рис. 2.13

- 1) $\sum F_{kx} = 0$; $X_A - F \cos 45^\circ = 0$; $X_A = 6 \cos 45^\circ = 4,2$ Н;
- 2) $\sum F_{ky} = 0$; $Y_A + N_B - Q - P - F \sin 45^\circ = 0$;
- 3) $\sum m_A(\bar{F}_k) = 0$; $F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ + P \cdot 3 - N_B \cdot 4 + Q \cdot 5 = 0$;
 $N_B = 15,6$ Н.

Подставим Y_B в (2): $Y_A = F \sin 45^\circ + P + Q - N_B = 2,6 \text{ Н}$.

Проверка. Сумма моментов относительно точки B :

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0; Q \cdot 1 - F \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ - P \cdot 1 + Y_A \cdot 4 = 0;$$

$$6 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 \cdot 1 + 2,6 \cdot 4 = 0; 0 \equiv 0.$$

Проверка сошлась.

2.9. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор твёрдого тела»

Задание С.1. На схемах (рис. 2.14 – 2.15) показаны конструкции рам и балок. Задаваемая нагрузка дана в табл. 2.4, при этом во всех вариантах $a = 1 \text{ м}$. В вариантах 5 и 10 в точке B – свободное опирание.

Определить реакции в опорах конструкций, если $\alpha = 30^\circ$.

Таблица 2.4

Определение реакции опор твёрдого тела

Номер варианта (рис. 2.14–2.15)	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$q, \text{кН/м}$
1	8	4	20	1
2	4	8	10	4
3	8	4	16	3
4	10	6	10	4
5	6	8	20	2
6	4	10	10	5
7	10	4	20	4
8	4	6	10	5
9	8	4	20	5
10	4	10	20	2
11	1	2	10	2
12	2	4	20	4
13	2	10	10	2
14	4	6	6	2
15	4	10	4	1
16	8	6	10	2
17	2	4	20	1
18	2	6	10	4
19	4	6	8	2
20	6	2	4	2

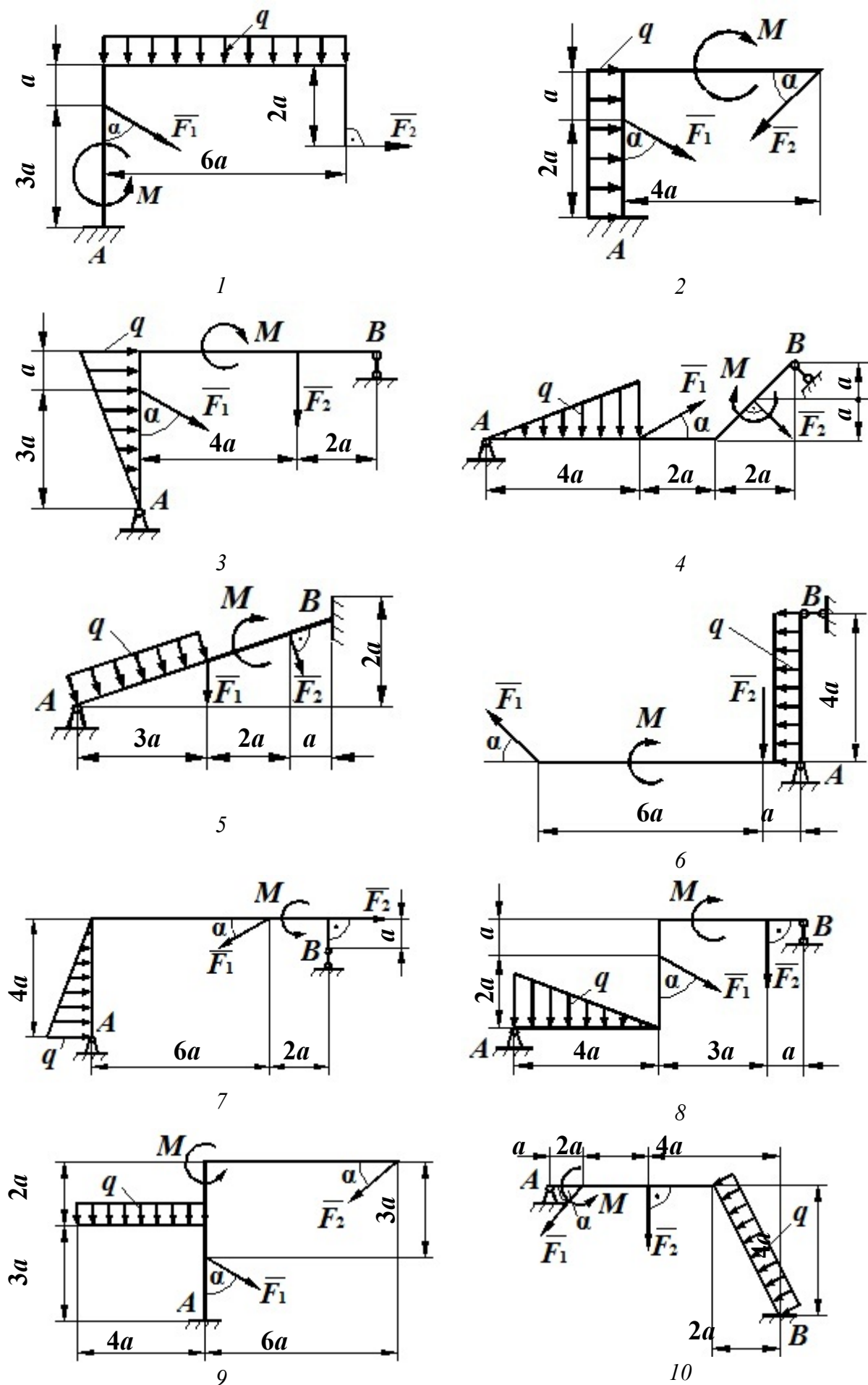


Рис. 2.14

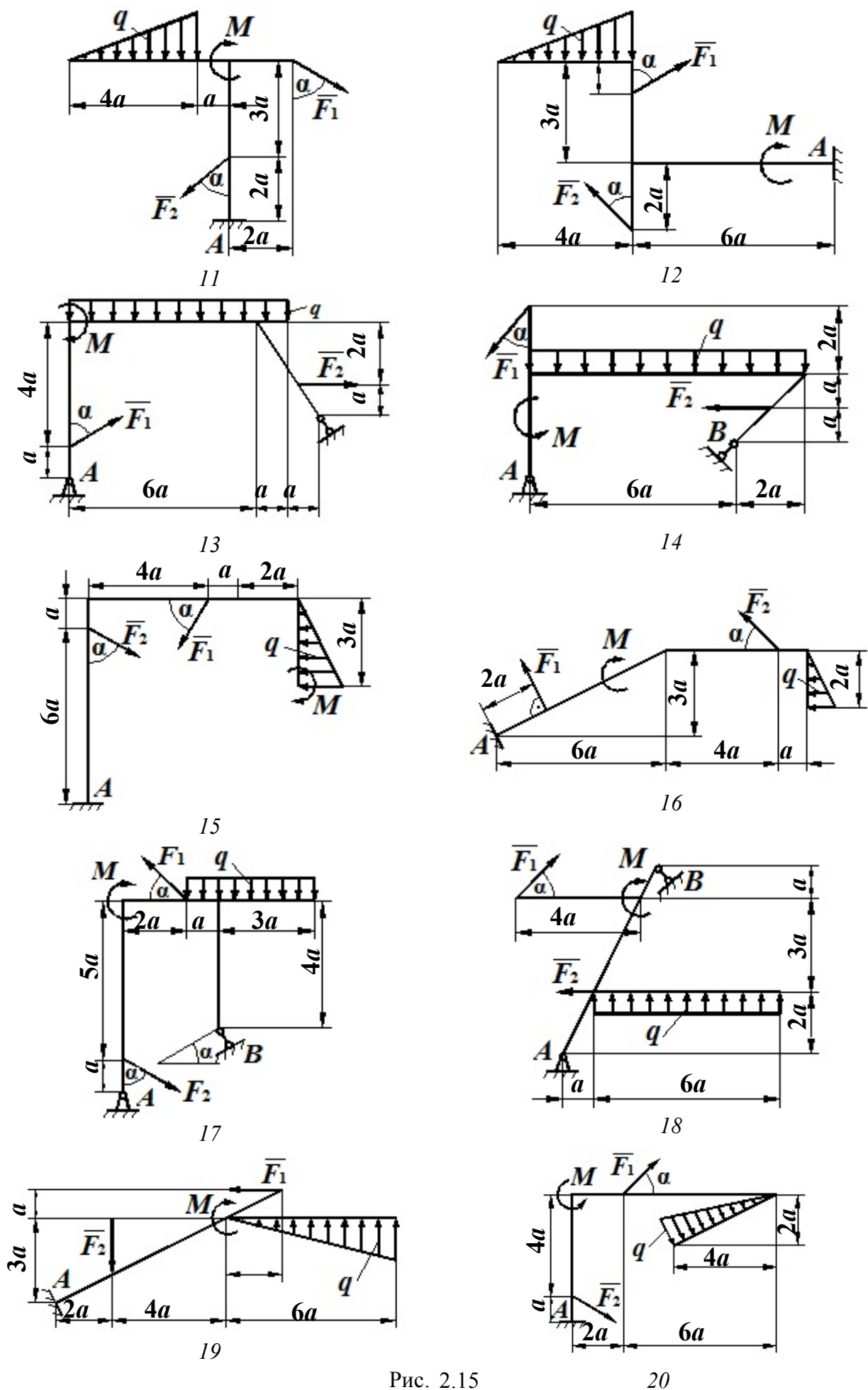


Рис. 2.15

3. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

3.1. Общие сведения о системе тел

Строительные конструкции состоят, как правило, из нескольких тел, соединённых между собой связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются *внутренними связями*, а связи, соединяющие данную конструкцию с телами, не входящими в эту систему, – *внешними связями*. Реакции внутренних связей попарно равны, направлены по одной прямой в противоположные стороны, поэтому алгебраическая сумма проекций внутренних сил на любую ось равна нулю так же, как равна нулю сумма моментов этих сил относительно любого центра.

Важной задачей статики системы твердых тел является определение реакций связей.

Если после отбрасывания внешних связей конструкция остаётся жёсткой (неизменяемой), то для неё задачи статики решаются так же, как и для абсолютно твёрдого тела. К таким конструкциям, в частности, относятся ферма (рис. 3.1а), двухшарнирная арка (3.1б) и др.

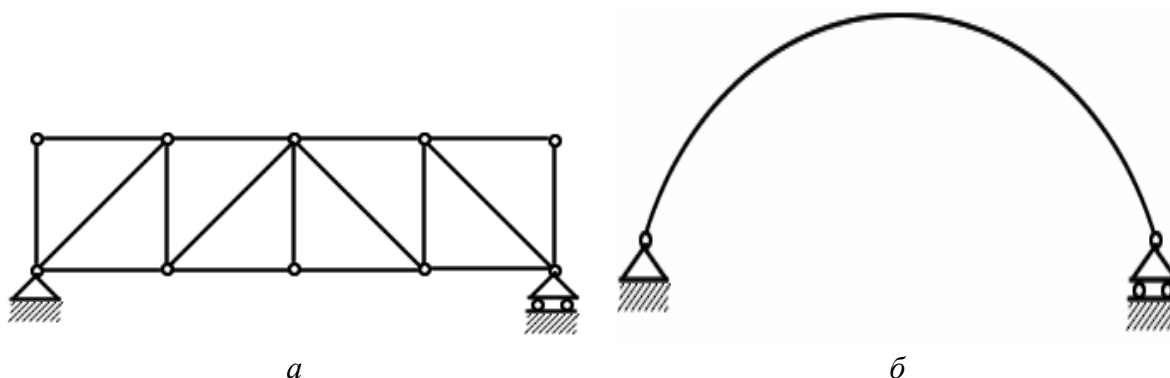


Рис. 3.1

Вместе с тем, в инженерной практике встречаются такие конструкции, которые после отбрасывания связей не остаются жёсткими. Примером таких конструкций являются трёхшарнирные арки (рис. 3.2а), шарнирные рамные системы (рис. 3.2б), составные балки (рис. 3.2в) и др.

Если у трёхшарнирной арки отбросить опоры A и B , то арка станет нежёсткой, т. к. её части смогут поворачиваться вокруг шарнира C .

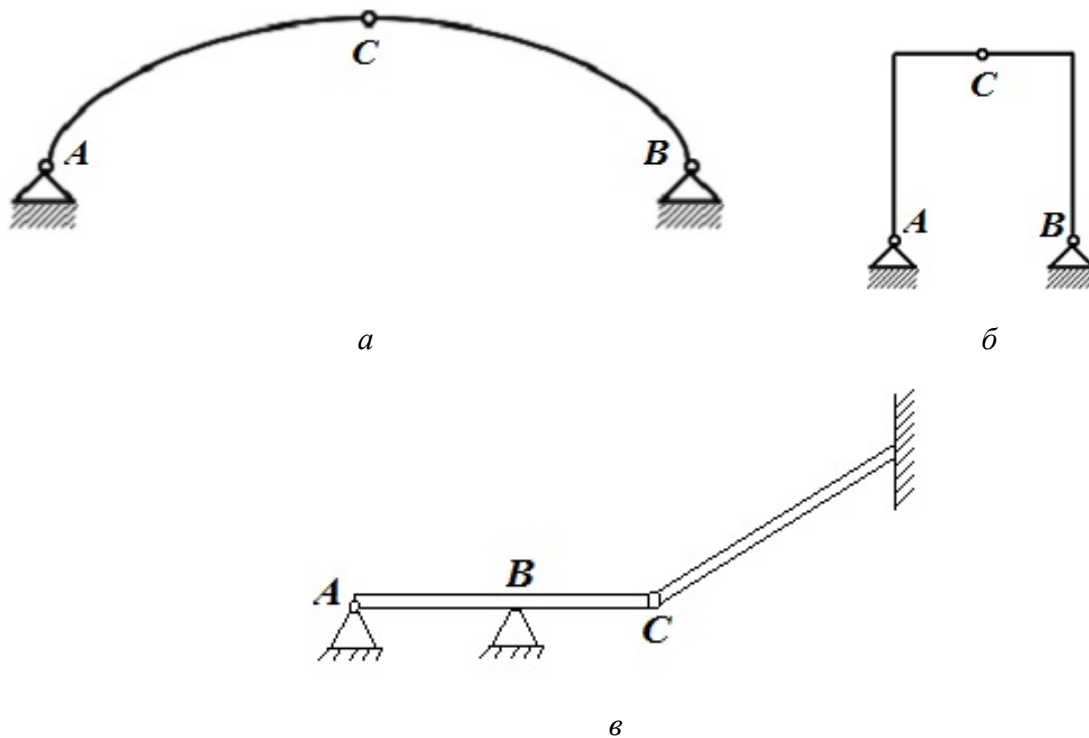


Рис. 3.2

Согласно *аксиоме отвердевания*, равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием приложенных к нему сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим, т. е. абсолютно твёрдым, и к нему можно применять уравнения равновесия абсолютно твёрдого тела.

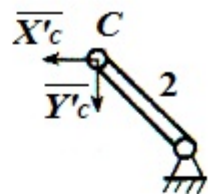
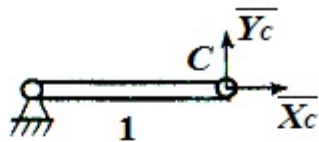
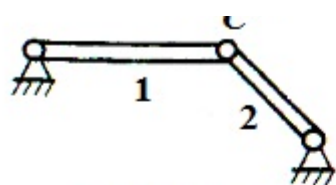
Однако эти уравнения при определении внешних реакций изменяемой системы тел, будучи необходимыми, не являются достаточными. Как известно, для абсолютно твёрдого тела можно составить только три независимых уравнения равновесия, а для изменяемой системы тел необходимо дополнительно составить столько уравнений, сколько в системе содержится тел. Например, для трёхшарнирной рамы (рис. 3.2б) можно составить три уравнения равновесия, а число неизвестных связей – четыре. Для нахождения внешних опорных реакций связи необходимо составить три уравнения для всей рамы, а затем расчленив раму в шарнире C и составить ещё три уравнения равновесия для правой (или левой) части рамы. Эти уравнения будут содержать неизвестные внутренние реакции связи x_C , y_C . Решив полученную систему из шести уравнений с шестью неизвестными, получим все шесть неизвестных реакций.

3.2. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия системы тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил

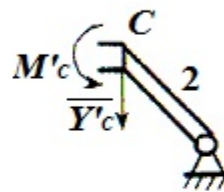
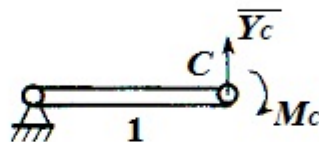
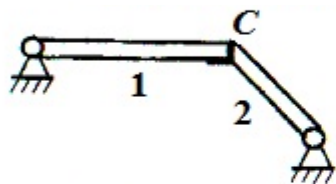
При решении таких задач чаще всего сразу расчленяют систему и рассматривают равновесие каждого из тел в отдельности. При этом надо учитывать аксиому о равенстве действия и противодействия, согласно которой силы взаимодействия двух тел равны между собой по абсолютной величине, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

При расчленении систем следует руководствоваться правилом, чтобы в месте расчленения появлялось не более двух неизвестных реакций связей.

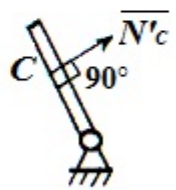
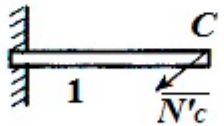
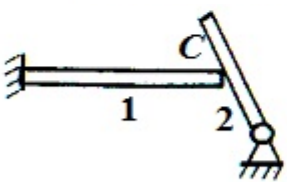
Расчленяют систему в следующих соединениях (рис. 3.3).



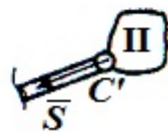
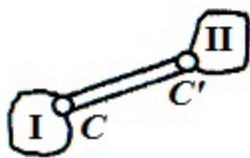
1. В цилиндрическом шарнире



2. В скользящей заделке



3. В точке свободной опоры тел



4. Соединения невесомым стержнем

Рис. 3.3

Порядок решения задач

1. Выделить одно тело системы, равновесие которого следует рассмотреть.
2. Приложить к выделенному телу все активные (заданные) силы. Если к телу приложена распределённая нагрузка, то её необходимо заменить равнодействующей.
3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции. При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой.
4. Направить оси координат и выбрать моментные точки. Для каждого тела системы могут быть выбраны различные системы координат.
5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил для выделенного тела.

Составляем уравнения равновесия по вышеизложенной схеме для каждого тела рассматриваемой системы. Все полученные уравнения равновесия решаем совместно, определяя неизвестные реакции связей.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что её направление выбрано верно, если отрицательной, то истинное направление реакции противоположно выбранному (модуль же реакции определён верно).

После того как задача решена, необходимо произвести проверку правильности решения. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов. При этом необходимо учитывать истинные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы моментов подтверждает правильность решения задачи.

При решении подобных задач можно применять и другой приём. Можно рассмотреть условия равновесия для всей конструкции в целом (как для одного абсолютно твёрдого тела), а затем к этим трём уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного из двух тел данной системы. Этот приём нередко предпочтительнее, т. к. в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят только внешние силы, и поэтому эти уравнения оказываются, обычно, проще.

Пример. Определить внешние (опорные) и внутренние связи рамы, изображенной на рис. 3.4, при следующих исходных данных: $q = 2 \text{ кН/м}$, $P = 4 \text{ кН}$.

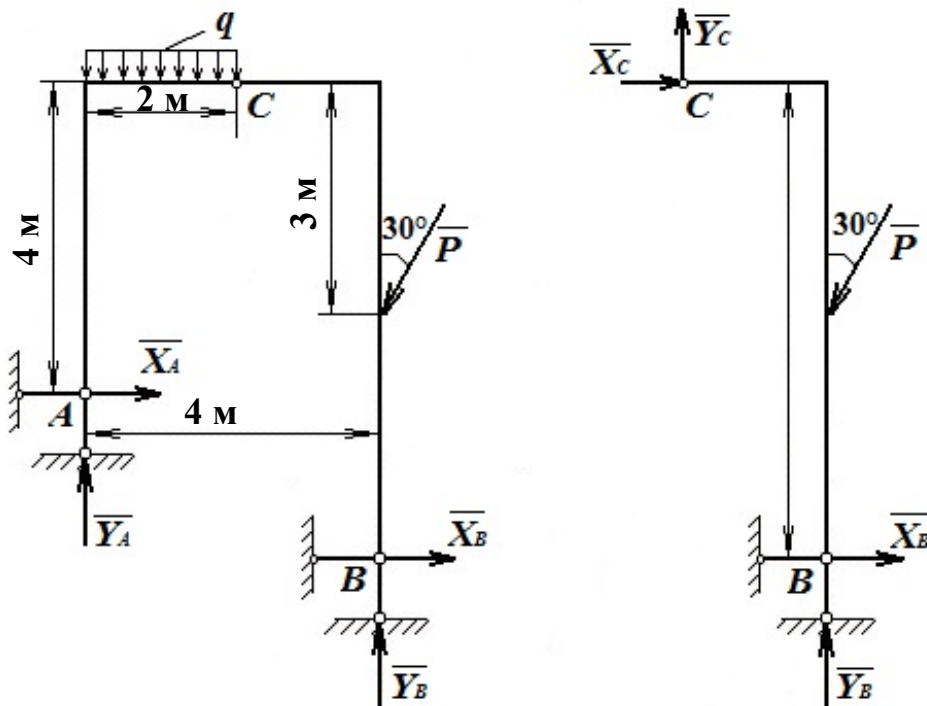


Рис. 3.4

Решение.

Составим уравнение равновесия для всей конструкции:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - P \cdot \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2 \cdot q - P \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad 2 \cdot X_B + 4 \cdot Y_B - 4 \cdot P \cdot \cos 30^\circ + 1 \cdot P \cdot \sin 30^\circ - q \cdot 2 \cdot 1 = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия для правой части рамы:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_C - P \cdot \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_C - P \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_C(F_k) = 0; \quad 6 \cdot X_B + 2 \cdot Y_B - 2 \cdot P \cdot \cos 30^\circ - 3 \cdot P \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Решив совместно уравнения (3) и (6), получим:

$$X_B = 1 \text{ кН}; \quad Y_B = 3,464 \text{ кН}.$$

Подставив найденные значения X_B и Y_B в уравнения (1) и (2), определим реакции опоры А:

$$X_A = 1 \text{ кН}; \quad Y_A = 4 \text{ кН}.$$

Из уравнений (4) и (5) определим реакции внутренних связей:

$$X_C = 1 \text{ кН}; \quad Y_C = 0 \text{ кН}.$$

Сделаем проверку, составив уравнение моментов для всей конструкции относительно точки В:

$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad 3 \cdot P \cdot \sin 30^\circ + q \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot X_A - 4 \cdot Y_A = 0.$$

Подставив численные значения, получим:

$$4 \cdot 0,5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0; 6 + 12 - 2 - 16 = 0; 18 - 18 = 0.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} X_C &= \pm 1 \text{ кН}; & X_A &= 1 \text{ кН}; & X_B &= 1 \text{ кН}; \\ Y_C &= 0 \text{ кН}; & Y_A &= 4 \text{ кН}; & Y_B &= 3,464 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Поскольку силы X_C и Y_C – внутренние, то знак силы определяется в зависимости от того, для какой части конструкции рассматривается равновесие.

В том случае, когда части конструкции опираются друг на друга или когда одна из опор является гладкой поверхностью, целесообразно сразу расчленять систему на отдельные тела и составлять уравнения равновесия для каждого тела в отдельности (см. рис. 3.5). При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Для расчёта составной конструкции (рис. 3.5) следует сразу расчленить конструкцию и рассмотреть равновесие балки DE . Уравнение равновесия балки DE будет содержать только три неизвестные реакции X_D , Y_D , N_E . Определив внутреннюю реакцию связи N_E , нетрудно найти внешние реакции связи балки AB : X_A , Y_A , N_B .

Пример. Однородная балка AB весом $P_2 = 2 \text{ кН}$ и длиной 6 м удерживается в горизонтальной плоскости с помощью неподвижной шарнирной опоры и гладкой опоры.

На балку AB свободно опирается однородная балка DE весом $P_1 = 1,5 \text{ кН}$ и длиной 6 м. К балке DE приложена сила $F = 1 \text{ кН}$.

Определить опорные реакции и силу взаимодействия балок AB и DE (рис. 3.5).

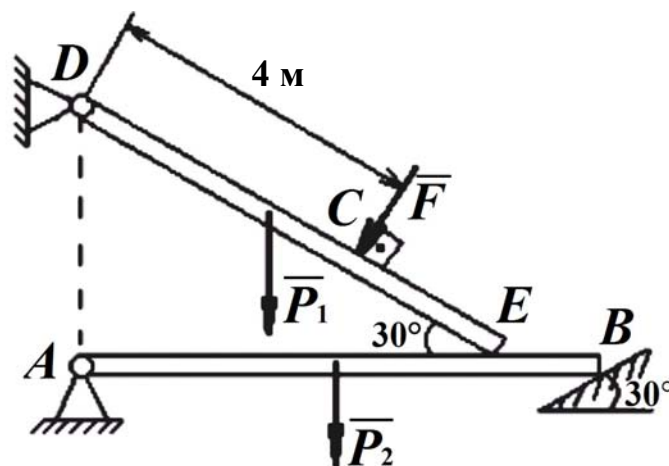


Рис. 3.5

Решение. Заданную конструкцию расчленим на систему тел (рис. 3.6) и рассмотрим равновесие сначала балки DE , а затем балки AB .

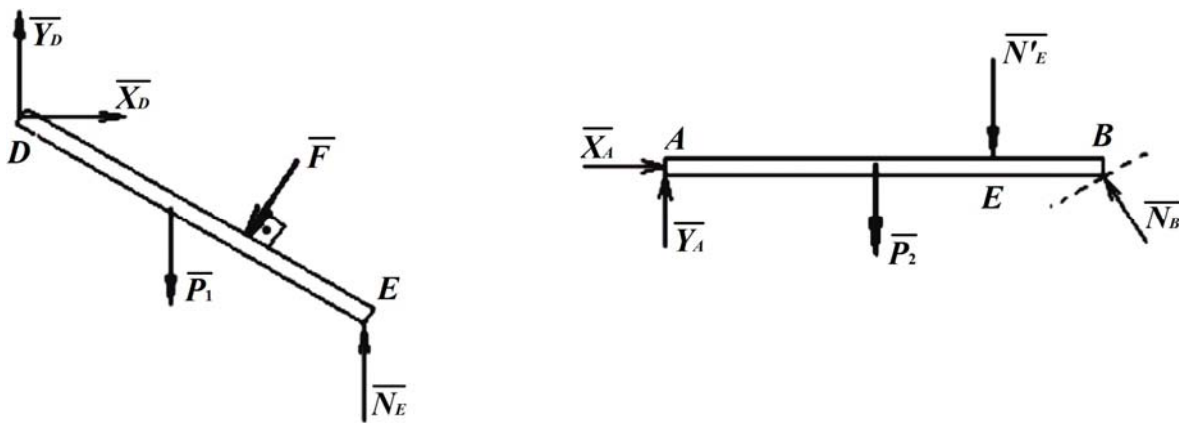


Рис. 3.6

Уравнения равновесия балки DE :

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_D - F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_D - F \cdot \sin 60^\circ - P_1 + N_E = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0; \quad N_E \cdot DE \cdot \cos 30^\circ - F \cdot 4 - P_1 \cdot (DE/2) \cdot \cos 30^\circ = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия балки AB :

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - N_B \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_2 - N'_E + N_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad (AB) \cdot N_B \cdot \cos 30^\circ - N'_E \cdot (AE) - P_2 \cdot (AB/2) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (1) $X_D = F \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 0,5 = 0,5$ кН.

Из уравнения (3) $N_E = (F \cdot 4 + P_1 \cdot DE/2 \cdot \cos 30^\circ) / (DE \cdot \cos 30^\circ) = 1,52$ кН.

Из уравнения (6) $N_B = (N'_E \cdot AE + P_2 \cdot AB/2) / (AB \cdot \cos 30^\circ) = 2,67$ кН.

Ответ: $X_D = 0,5$ кН; $Y_D = 0,85$ кН; $X_A = 1,35$ кН; $Y_A = 1,21$ кН; $N_B = 2,67$ кН.

Проверка. Составим уравнение моментов относительно точки D для всей конструкции:

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-P_1 \cdot DE/2 \cdot \cos 30^\circ - F \cdot CD - P_2 \cdot AB/2 + AB \cdot N_B \cdot \cos 30^\circ - DA \cdot N_B \cdot \cos 60^\circ + X_A \cdot DA = 0;$$

$$DA = DE \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ м.}$$

$$-1,5 \cdot 6/2 \cdot \cos 30^\circ - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 6/2 + 6 \cdot 2,67 \cdot \cos 30^\circ - 3 \cdot 2,67 \cdot \cos 60^\circ + 1,35 \cdot 3 = 0; \quad 0 \approx 0.$$

Проверка сошлась.

3.3. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор твёрдого тела (система двух тел)»

Задание С.5. Для заданной составной конструкции определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

Размеры показаны на чертеже в метрах. Задаваемые нагрузки приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Определение реакций опор твёрдого тела

№ варианта (рис. 3.7–3.9)	q , кН/м	M , кНм	P , кН	α , град
1	10	80	100	30
2	12	120	80	45
3	5	100	75	60
4	2	60	50	30
5	10	50	40	45
6	20	20	35	60
7	24	10	30	30
8	14	8	30	45
9	16	30	45	60
10	40	25	60	30
11	25	16	30	45
12	10	12	45	60
13	8	14	60	30
14	4	8	30	45
15	10	25	45	60
16	24	120	30	30
17	14	100	45	45
18	16	60	60	60
19	40	50	30	30
20	25	20	45	45
21	10	10	60	60
22	8	8	30	30
23	10	30	100	45
24	12	25	80	60
25	5	25	75	30
26	2	16	50	45
27	10	12	40	60
28	20	14	35	30
29	24	8	30	45
30	10	25	100	60

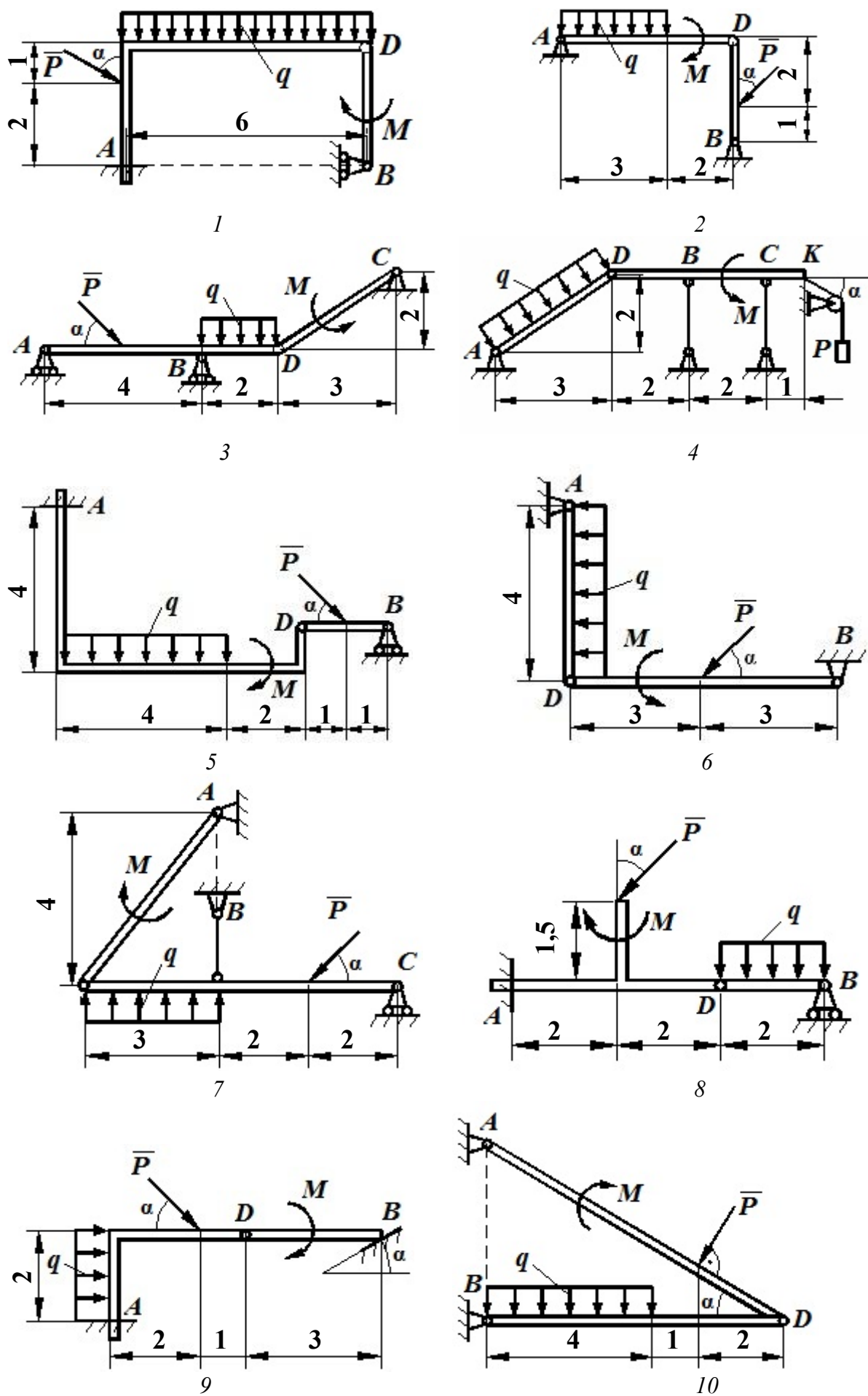


Рис. 3.7

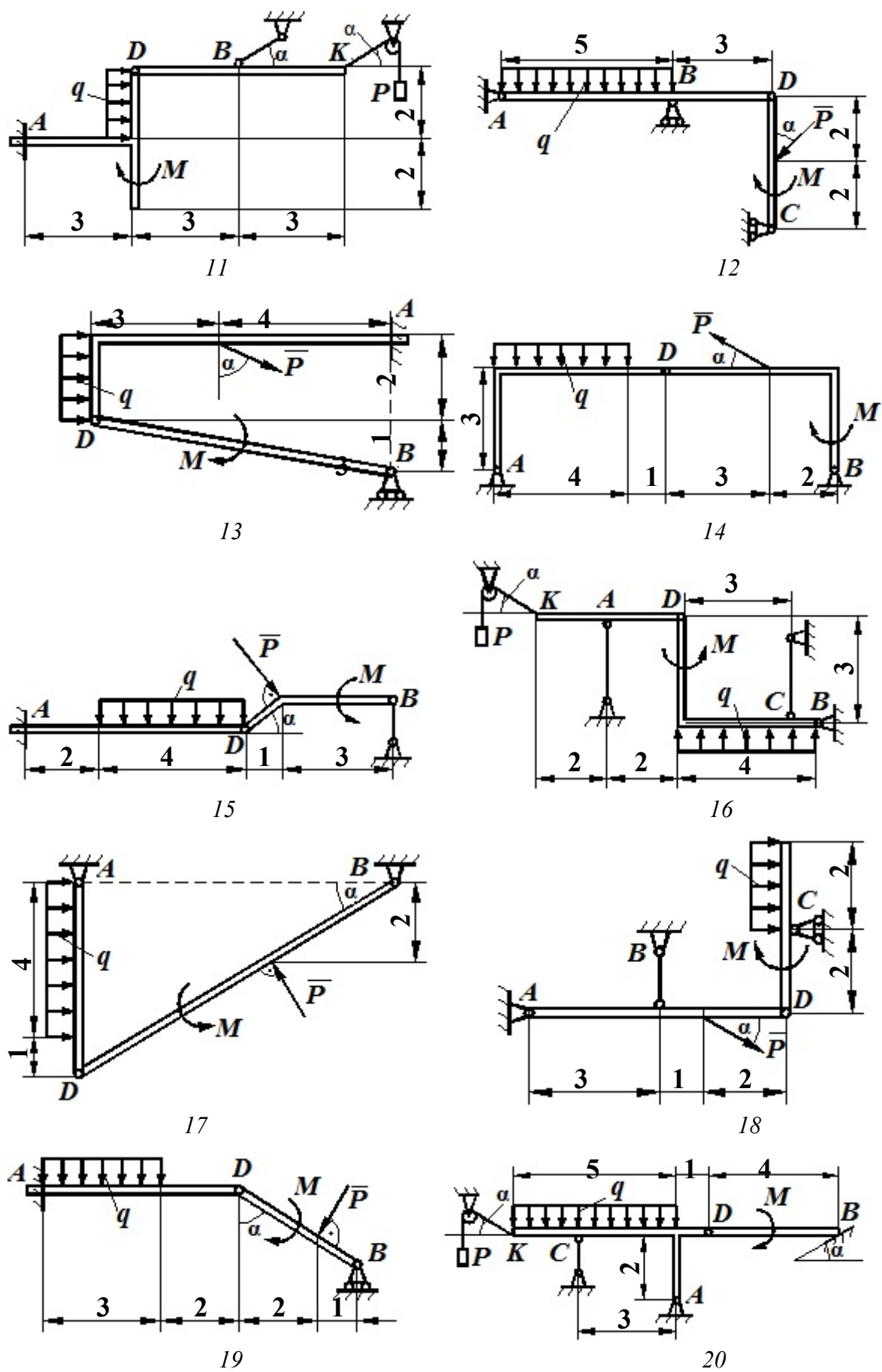
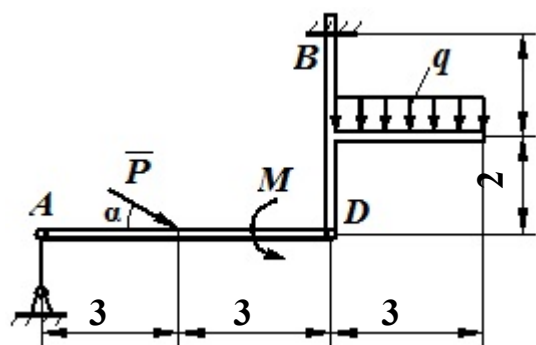
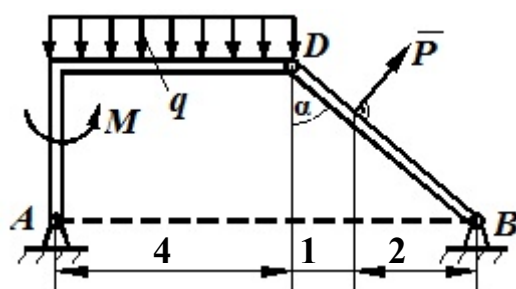


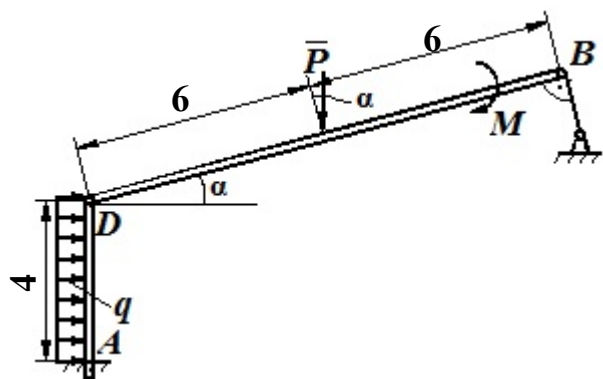
Рис. 3.8



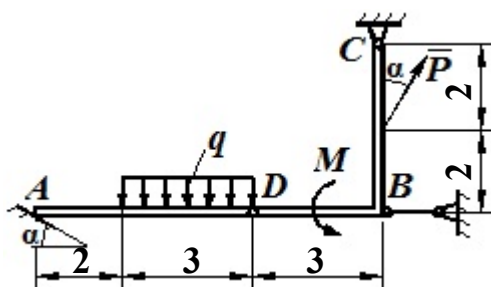
21



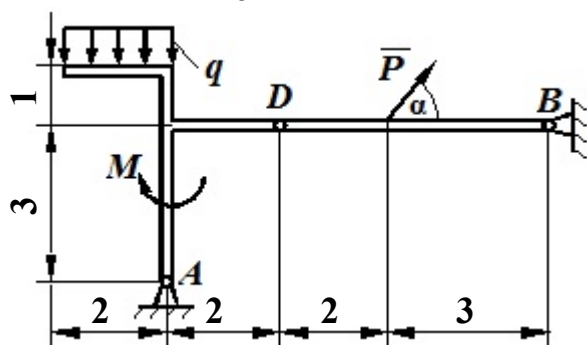
22



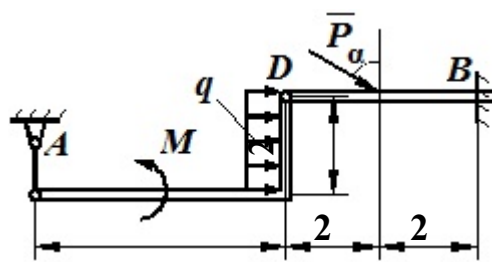
23



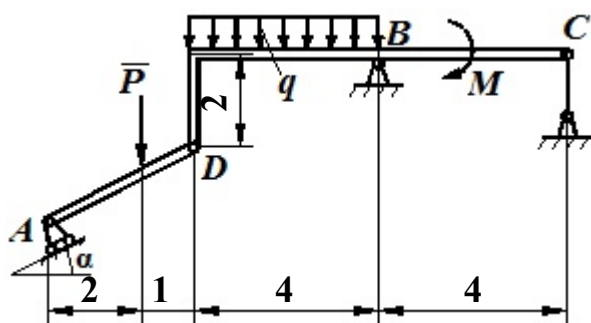
24



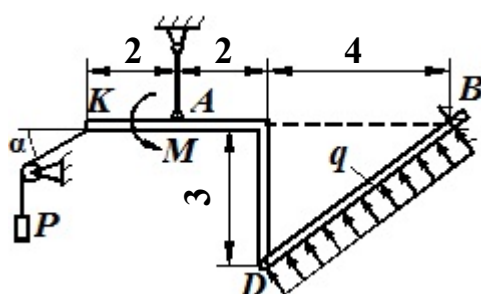
25



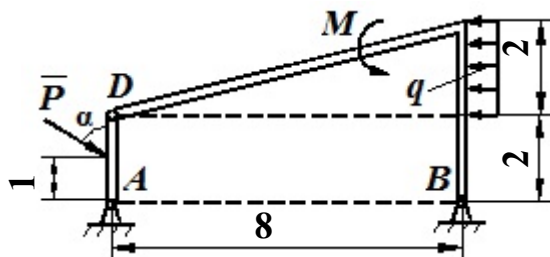
26



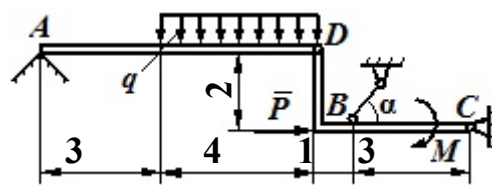
27



28



29



30

Рис. 3.9

4. РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

4.1. Общие сведения о фермах

Фермой называется жёсткая (кинематическая неизменяемая) конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединённых на концах шарнирами. Места соединения стержней называются *узлами*, к которым прикладываются внешние силы. Весом стержней и трением в шарнирах пренебрегают. В случае необходимости учёта их веса вес стержней распределяют по узлам. Следовательно, на каждый стержень фермы действуют только две силы, приложенные по его концам. Поэтому стержни работают либо на растяжение, либо на сжатие. Таким образом, на каждый узел действует система сходящихся сил. Если стержни расположены в одной плоскости, то такая ферма называется плоской.

В плоской ферме различают следующие элементы: *верхний пояс*, *нижний пояс*, *стойки*, *раскосы*, *узлы*, *панели* (рис. 4.1).

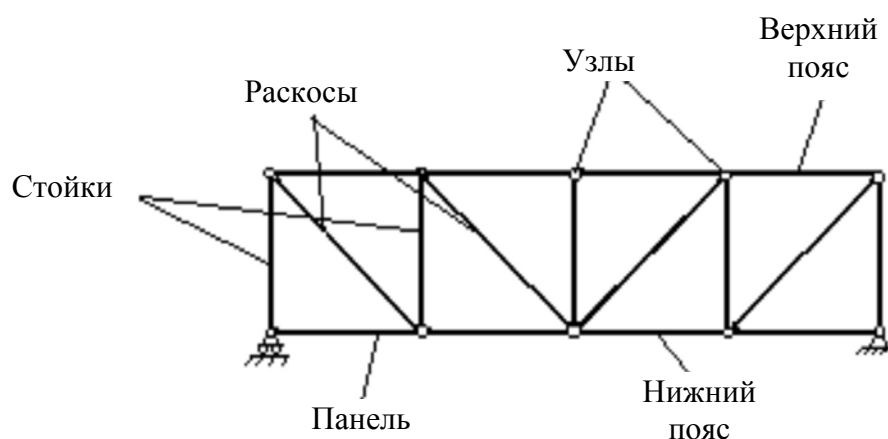


Рис. 4.1

Стержни, располагающиеся на верхнем контуре фермы, образуют *верхний пояс*, а находящиеся на нижнем контуре — *нижний пояс*. Стержни, соединяющие узлы панели, образуют решётку фермы, при этом наклонные стержни называются *раскосами*, а вертикальные стержни — *стойками*. Часть фермы, находящаяся между узлами поясов, называется *панелью*.

В инженерной практике стержни обычно жёстко соединены в узлах с помощью сварных, заклёпочных или болтовых соединений, при этом в жёстких узлах возникают изгибающие моменты. Однако напряжения изгиба, по сравнению с нормальным напряжением, весьма малы, поэтому ими при расчёте фермы, как правило, пренебрегают.

Фермы используются при устройстве мостовых переходов, перекрытий большепролётных зданий, создании грузоподъёмных устройств (например, строительных кранов).

Большое разнообразие конструктивных решений ферм затрудняет их классификацию. В настоящее время фермы классифицируют по следующим признакам:

1) *по характеру усилий* – фермы балочные (рис. 4.2а), висячие (рис. 4.2б), комбинированные (рис. 4.2в).

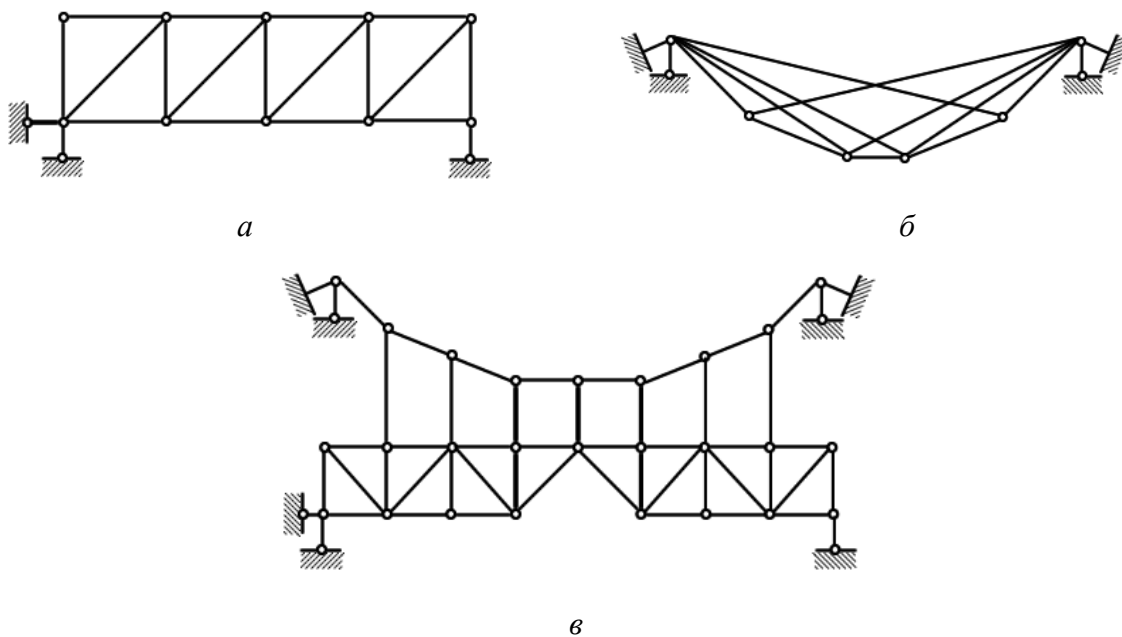


Рис. 4.2

2) *по очертанию поясов* – фермы с параллельными поясами (рис. 4.2а), с полигональными поясами (рис. 4.3б), треугольными поясами (рис. 4.3в).

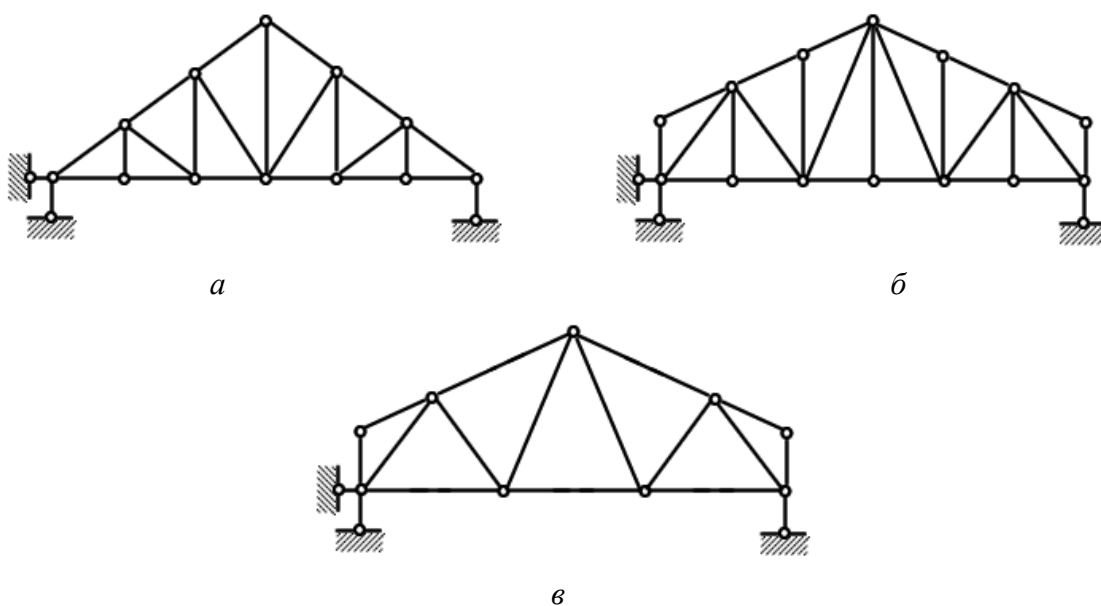


Рис. 4.3

3) по конфигурации решётки – раскосные (рис. 4.2а), с треугольной решёткой (рис. 4.4а), полураскосные (рис. 4.4б), многораскосные (рис. 4.4в), решётчатые (рис. 4.4г).

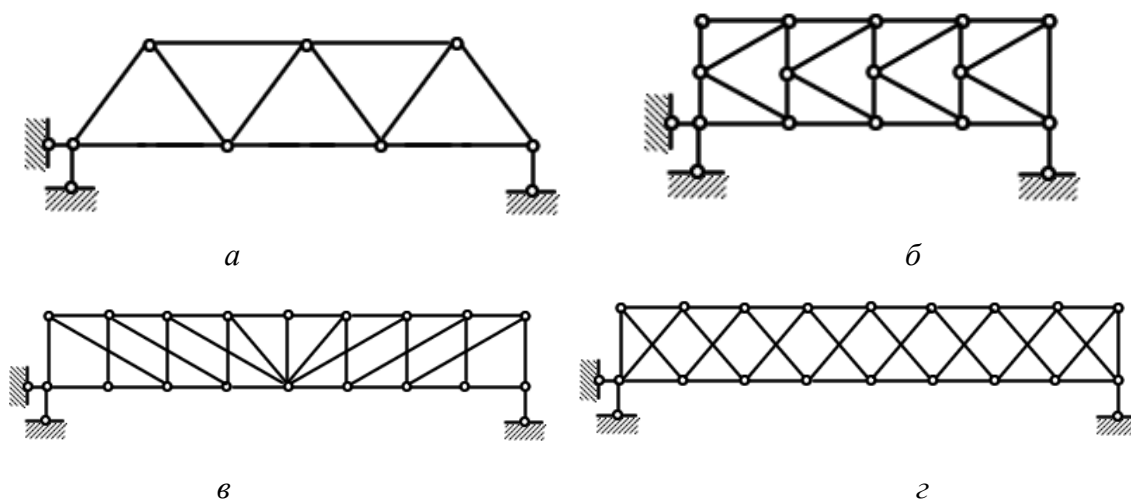


Рис. 4.4

Фермы с составной решёткой называются *шпренгельными* фермами. Шпренгелями называют дополнительные малые фермочки, которые можно рассматривать как элементы верхнего или нижнего поясов фермы (рис. 4.5).

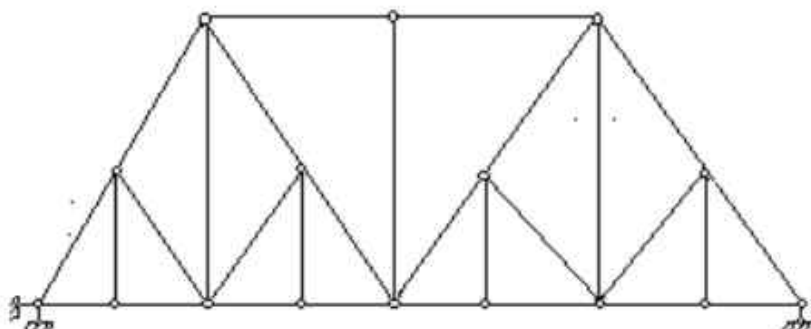


Рис. 4.5

При устройстве мостовых переходов фермы выполняют не только своё функциональное назначение, но и могут служить архитектурно-художественным памятником инженерного творчества. Примером нестандартного решения конфигурации фермы может служить железнодорожный мост через реку Бузан в районе Астрахани (рис. 4.6).



Рис. 4.6

Для плоской статически определимой фермы должно выполняться условие $C = 2 \cdot U - 3$, где U – число узлов фермы; C – число стержней.

Если $C > 2 \cdot U - 3$, то ферма статически неопределима, если $C < 2 \cdot U - 3$, то конструкция является кинематической изменяемой системой.

Приступая к расчёту фермы необходимо установить, нет ли среди стержней таких, усилия в которых равны нулю, т. е. являются «нулевыми».

Определение «нулевых» стержней производится согласно *леммам о «нулевых» стержнях*.

Лемма I. Если в ненагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рис. 4.7а).

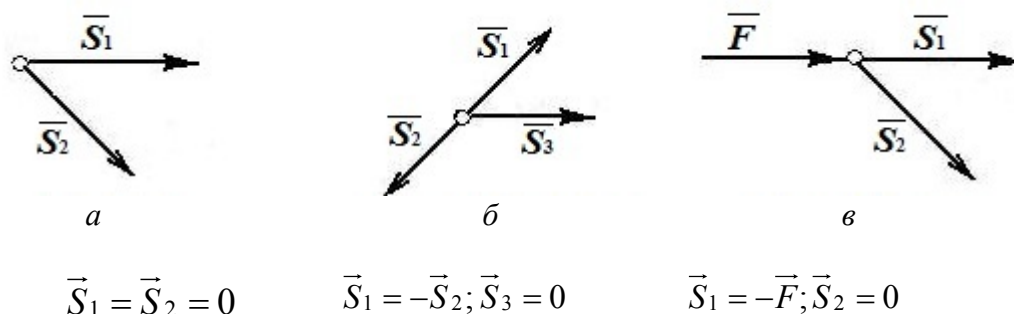


Рис. 4.7. «Нулевые» стержни фермы

Лемма II. Если в ненагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, а усилия в первых двух стержнях равны между собой (рис. 4.7б).

Лемма III. Если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне по модулю равно приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

Расчёт плоских ферм заключается в определении реакций внешних связей (опорных узлов) и усилий в стержнях.

Порядок решения задач

1. Проверить, выполняется ли условие статической определимости фермы: $C = 2 \cdot U - 3$, где C – число стержней фермы; U – количество узлов.

2. Отбросить связи, приложив соответствующие реакции. Составить уравнения равновесия для всей фермы, из которых определить реакции связей. Выполнить проверку правильности решения, составив уравнение равновесия моментов сил относительно точки.

3. Согласно лемме о «нулевых» стержнях следует удалить стержни, усилия в которых равны нулю. Пронумеровать оставшиеся стержни и проверить «исправленную» ферму на статическую определимость.

4. Применить способ вырезания узлов. Составить уравнения равновесия для каждого узла фермы.

5. Совместно решить полученную систему уравнений относительно неизвестных усилий в стержнях фермы. Если в результате расчёта значение усилия в стержне получится отрицательным, это означает, что данный стержень сжат.

6. Проверить результаты расчёта фермы способом сечений (Риттера). Для этого ферму в каком-либо месте рассечь плоскостью, действие стержней заменить их реакциями и составить уравнения отсечённой части. Уравнения равновесия в форме сил или моментов следует составлять так, чтобы эти уравнения содержали бы не более одной неизвестной силы.

Расчёт плоской фермы можно выполнить как аналитическим, так и графическим методом. К аналитическим методам расчёта фермы относятся способ вырезания узлов и способ сечений (Риттера).

4.2. Расчёт плоской фермы методом вырезания узлов

Способ вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов. Для этого в качестве объекта исследования один за другим выбирают все узлы фермы. Для каждого из них составляют расчётную схему сил и уравнения равновесия. Способом вырезания узлов удобно пользоваться, когда нужно найти усилия во всех стержнях фермы.

Пример. К узлам плоской фермы (рис. 4.8) приложены внешние силы: $P_1 = 1$ кН; $P_2 = 5$ кН; $P_3 = 2$ кН; $P_4 = 2$ кН; $P_5 = 3$ кН; $P_6 = 3$ кН. Необходимо определить усилия в стержнях фермы.

Решение.

1. Стержни фермы будем заранее считать растянутыми, тогда положительным усилиям соответствуют растянутые стержни, отрицательным – сжатые. Стержни фермы пронумеруем арабскими цифрами (1, 2 ... 9), узлы – римскими цифрами (I, II ... VI) (рис. 4.8). В рассматриваемой ферме число узлов $U = 15$, число стержней $C = 27$.

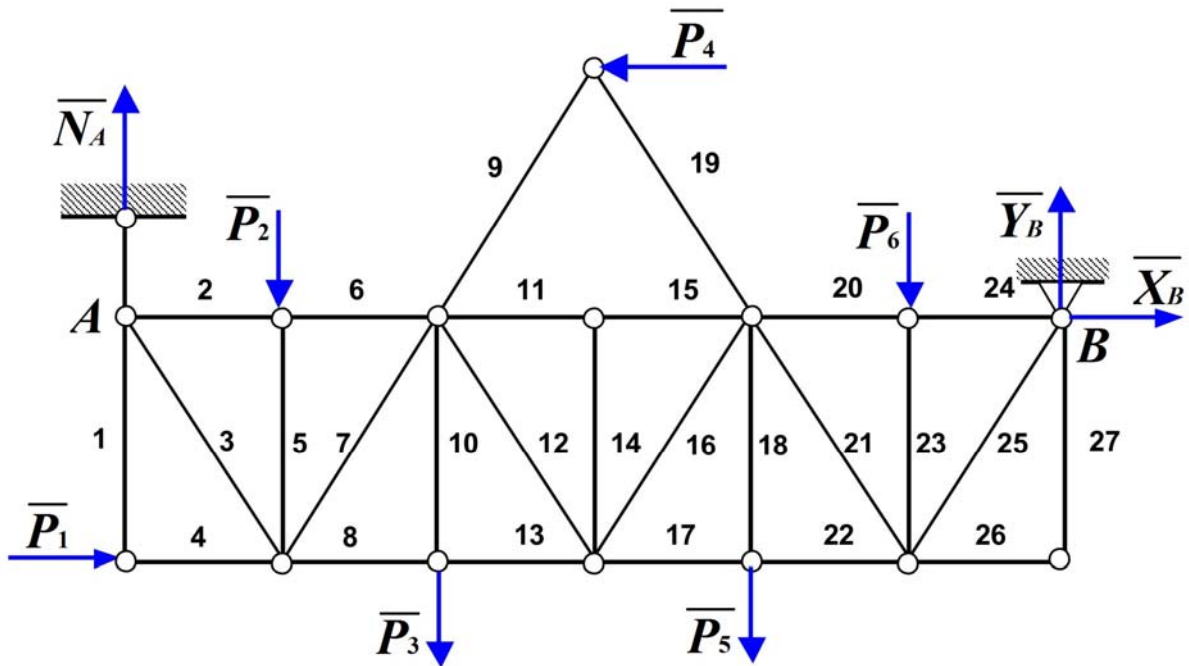


Рис. 4.8

Условие статической определимости фермы:

$$C = 2 \cdot Y - 3; \quad 27 = 2 \cdot 15 - 3.$$

Условие статической определимости выполняется. Ферма статически определима.

2. Отбросим внешние связи и составим уравнения равновесия для всей фермы:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_B + P_1 - P_4 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_A - P_2 - P_3 - P_5 - P_6 + Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = P_2 + P_3 + P_5 + P_6 - N_A \quad (2)$$

$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad P_1 \cdot 2 \cdot a + P_2 \cdot 5 \cdot a + P_3 \cdot 4 \cdot a + P_4 \cdot 2 \cdot a + P_5 \cdot 2 \cdot a + P_6 \cdot a - N_A \cdot 6 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Из уравнения (1) находим $X_B = P_4 - P_1 = 2 - 1 = 1$ кН.

Из уравнения (3) находим $N_A = 8$ кН.

Из уравнения (2) $Y_B = 5$ кН.

Проверка. Составим уравнение равновесия моментов сил относительно точки A:

$$\begin{aligned} \sum m_A(F_k) &= Y_B \cdot 6 \cdot a + P_1 \cdot 2 \cdot a - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2 \cdot a + P_4 \cdot 2 \cdot a - P_5 \cdot 4 \cdot a - P_6 \cdot 5 \cdot a = \\ &= (5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 5) \cdot a = (36 - 36) \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Опорные реакции определены верно.

3. Согласно лемме о «нулевых» стержнях по признаку I усилия в стержнях 26 и 27 равны нулю, поэтому эти стержни следует удалить. По признаку 2 леммы стойка 14 – «нулевая»; усилие в стержне 1 равно нулю по признаку 3. Удалим из схемы фермы все «нулевые» стержни, а силу P_1 как скользящий вектор вдоль линии её действия и приложим к узлу III.

4. Пронумеруем оставшиеся стержни и проверим «исправленную» ферму на статическую определимость (рис. 4.9).

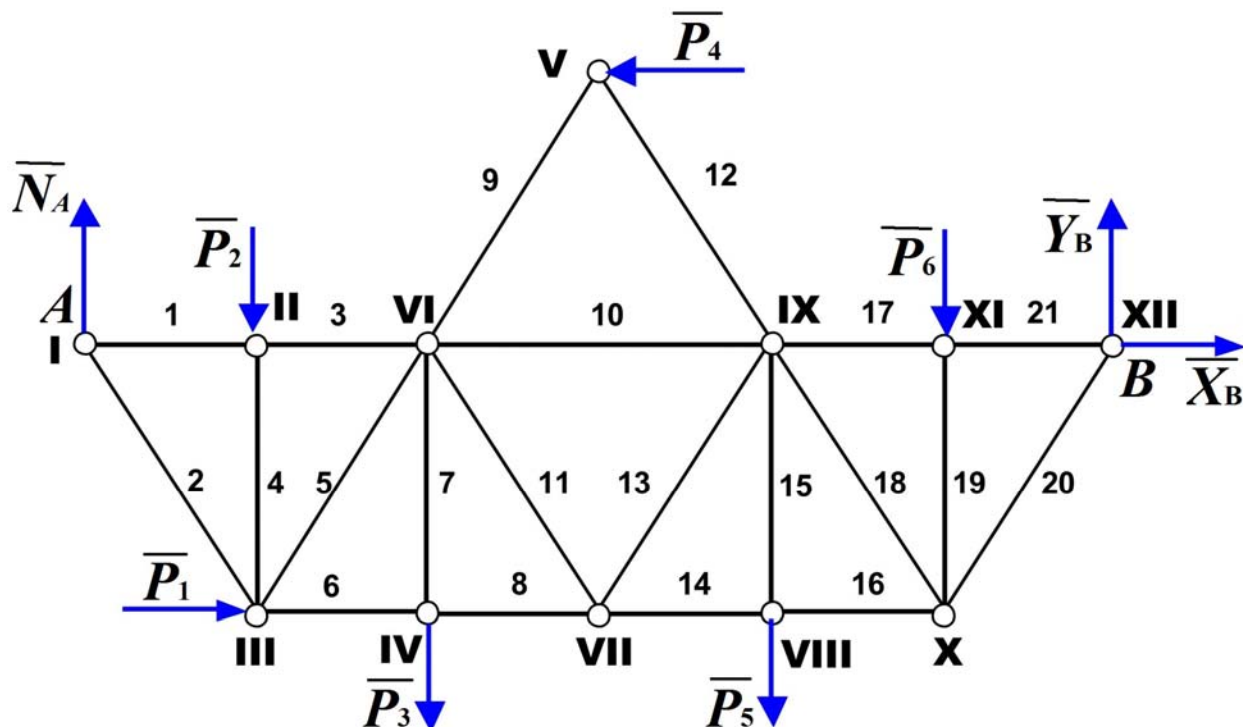


Рис. 4.9

Арабскими цифрами обозначены номера стержней, римскими цифрами – номера узлов. Число узлов равно 12, число стержней равно 21. Условие статической определимости запишем в виде $C = 2 \cdot Y - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 21$. Ферма жёсткая, статически определимая.

5. Применим способ вырезания узлов. Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы.

Результаты запишем в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1

Результаты расчётов

Рисунок	Уравнения равновесия
	Уравнения равновесия для первого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; S_1 + S_2 \cos \alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; N_A - S_2 \sin \alpha = 0,$ где: $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447214;$ $\sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894427.$

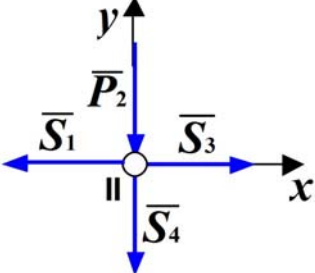
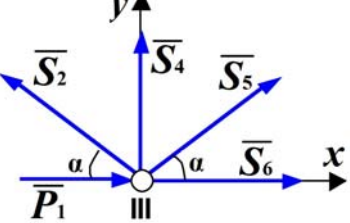
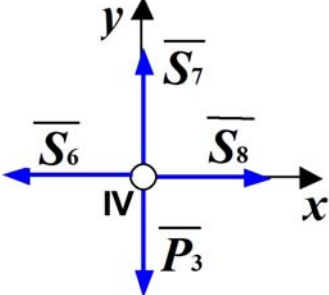
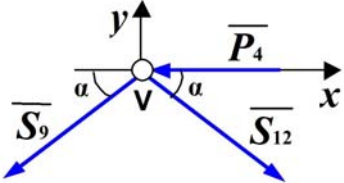
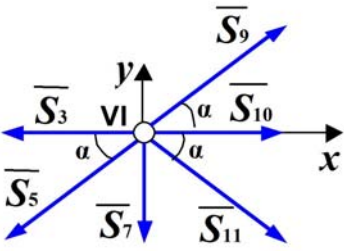
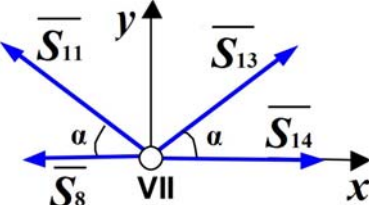
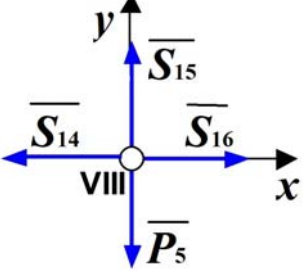
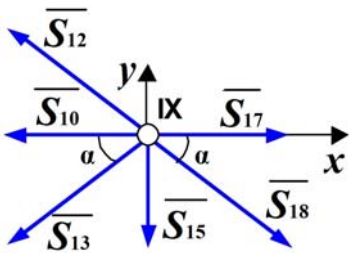
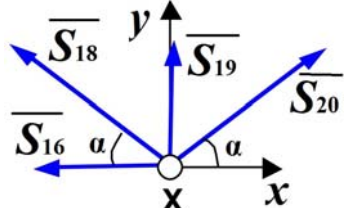
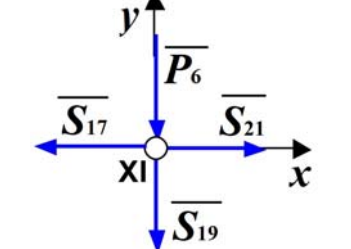
Рисунок	Уравнения равновесия
	Уравнения равновесия для второго узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; S_3 - S_1 = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; -P_2 - S_4 = 0.$
	Уравнения равновесия для третьего узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; P_1 + S_6 + (S_5 - S_2)\cos\alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_4 + (S_2 + S_5)\sin\alpha = 0.$
	Уравнения равновесия для четвертого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; -S_6 + S_8 = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_7 - P_3 = 0.$
	Уравнения равновесия для пятого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; -P_4 + (S_{12} - S_9)\cos\alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{12} + S_9)\sin\alpha = 0.$
	Уравнения равновесия для шестого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; -S_3 + (S_{11} + S_9 - S_5)\cos\alpha + S_{10} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_9 - S_5 - S_{11})\sin\alpha - S_7 = 0.$
	Уравнения равновесия для седьмого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; -S_8 + S_{14} + (S_{31} - S_{11})\cos\alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{11} + S_{13})\sin\alpha = 0.$
	Уравнения равновесия для восьмого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; S_{16} - S_{14} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_{15} - P_5 = 0.$

Рисунок	Уравнения равновесия
	Уравнения равновесия для девятого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; S_{17} + (S_{18} - S_{13} - S_{12})\cos \alpha - S_{10} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; (S_{12} - S_{13} - S_{18})\sin \alpha - S_{15} = 0.$
	Уравнения равновесия для десятого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; (S_{20} - S_{18})\cos \alpha - S_{16} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; S_{19} + (S_{18} + S_{20})\sin \alpha = 0.$
	Уравнения равновесия для одиннадцатого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; S_{21} - S_{17} = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; -S_{19} - P_6 = 0.$

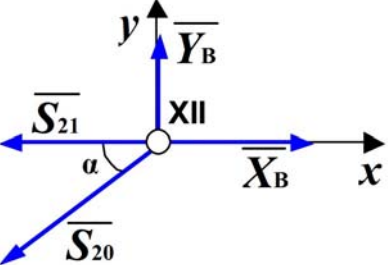
Совместно решим полученную систему уравнений относительно неизвестных $(\vec{S}_1, \vec{S}_2 \dots \vec{S}_{21})$.

Результаты решения:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -4 \text{ кН}; S_2 = 8,94 \text{ кН}; S_3 = -4 \text{ кН}; S_4 = -5 \text{ кН}; \\
 S_5 &= -3,35 \text{ кН}; S_6 = 4,5 \text{ кН}; S_7 = 2 \text{ кН}; S_8 = 4,5 \text{ кН}; \\
 S_9 &= -2,24 \text{ кН}; S_{10} = -4 \text{ кН}; S_{11} = -1,12 \text{ кН}; \\
 S_{12} &= 2,24 \text{ кН}; S_{13} = 1,12 \text{ кН}; S_{14} = 3,5 \text{ кН}; S_{15} = 3 \text{ кН}; \\
 S_{16} &= 3,5 \text{ кН}; S_{17} = -1,5 \text{ кН}; S_{18} = -2,24 \text{ кН}; \\
 S_{19} &= -3 \text{ кН}; S_{20} = 5,59 \text{ кН}; S_{21} = -1,5 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Если в результате расчёта значение усилия в стержне получится отрицательным, это означает, что данный стержень сжат.

6. Проверка правильности решения.

	Уравнения равновесия для двенадцатого узла фермы: $\sum F_{kx} = 0; X_B - S_{21} - S_{20} \cos \alpha = 0;$ $\sum F_{ky} = 0; Y_B - S_{20} \sin \alpha = 0;$ $1 - (-1,5) - 5,59 \cdot 0,447214 = 0;$ $5 - 5,59 \cdot 0,894427 = 0.$
---	---

Расчёт произведён верно.

4.3. Проверка результатов расчёта фермы методом сечений

Для проверки расчёта следует применять *способ сечений (Риттера)*. Для этого ферму в каком-либо месте рассечь плоскостью, действие стержней заменить их реакциями и составить уравнения отсечённой части. Уравнения равновесия в форме сил или моментов следует составлять так, чтобы эти уравнения содержали бы не более одной неизвестной силы.

Например, проведя сечение I–I, можно рассмотреть равновесие правой и левой её частей. Целесообразно рассмотреть равновесие левой части, т. к. здесь меньше сил (рис. 4.10).

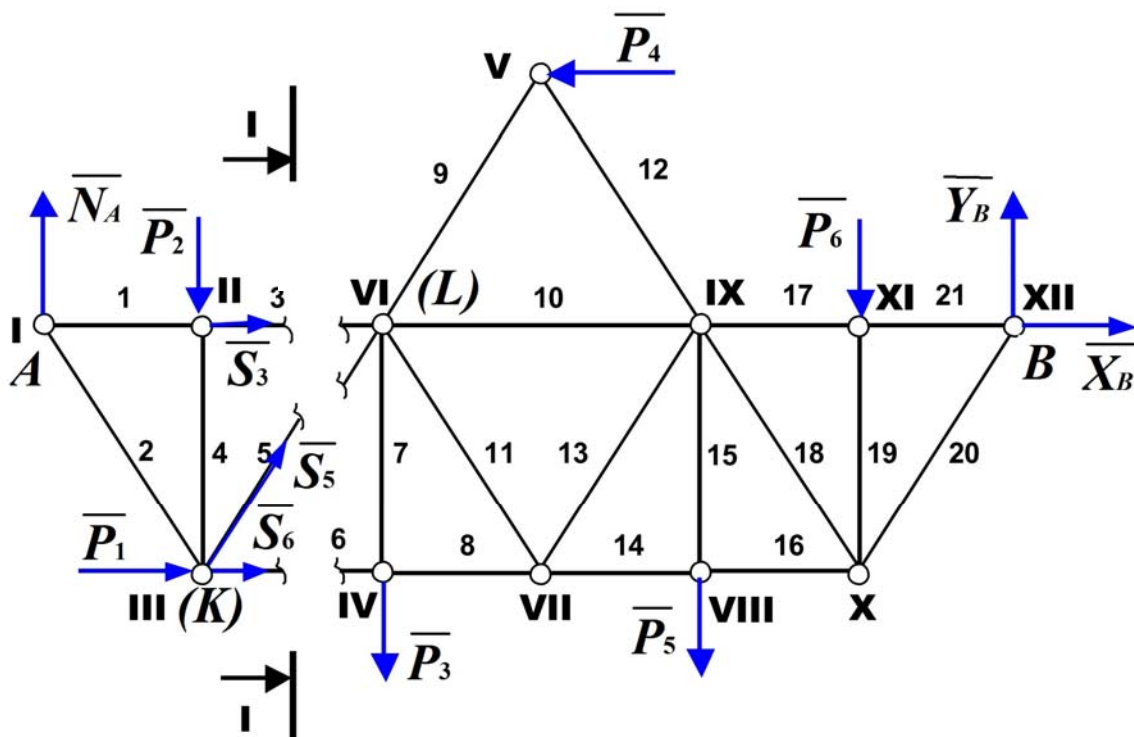


Рис. 4.10

Составим уравнения равновесия для левой части:

$$\sum F_{ky} = 0; N_A - P_2 + S_5 \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum m_L(\vec{F}_k) = 0; P_2 \cdot a + P_1 \cdot 2 \cdot a + S_6 \cdot 2 \cdot a - N_A \cdot 2 \cdot a = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_K(\vec{F}_k) = 0; -N_A \cdot a - S_3 \cdot 2 \cdot a = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1) $S_5 = (P_2 - N_A) / 0,894427 = (5 - 8) / 0,894427 = -3,35$ кН.

Из уравнения (2) $S_6 = N_A - P_1 - P_2 / 2 = 8 - 1 - 5 / 2 = 4,5$ кН.

Из уравнения (3) $S_3 = -N_A / 2 = -8 / 2 = -4,0$ кН.

Проверка показала, что расчёт сил в стержнях 3, 5 и 6 произведён правильно.

4.4. Построение диаграммы Максвелла–Кремоны

Диаграмма Максвелла–Кремоны даёт наглядное представление о силах в стержнях фермы, степени неравномерности нагружения и характере их работы (растяжение или сжатие). Кроме того, диаграмма Максвелла–Кремоны позволяет выполнить общую проверку расчёта фермы: если расчёт выполнен верно, то диаграмма будет замкнута, если же в расчёте были допущены ошибки, то диаграмма не замкнётся.

При построении диаграммы рекомендуется использовать систему обозначений стержней, предложенную Боу. Внешние поля, т. е. части плоскости вне фермы, ограниченные линиями действия внешних сил, и внутренние поля, ограниченные стержнями, будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (рис. 4.11).

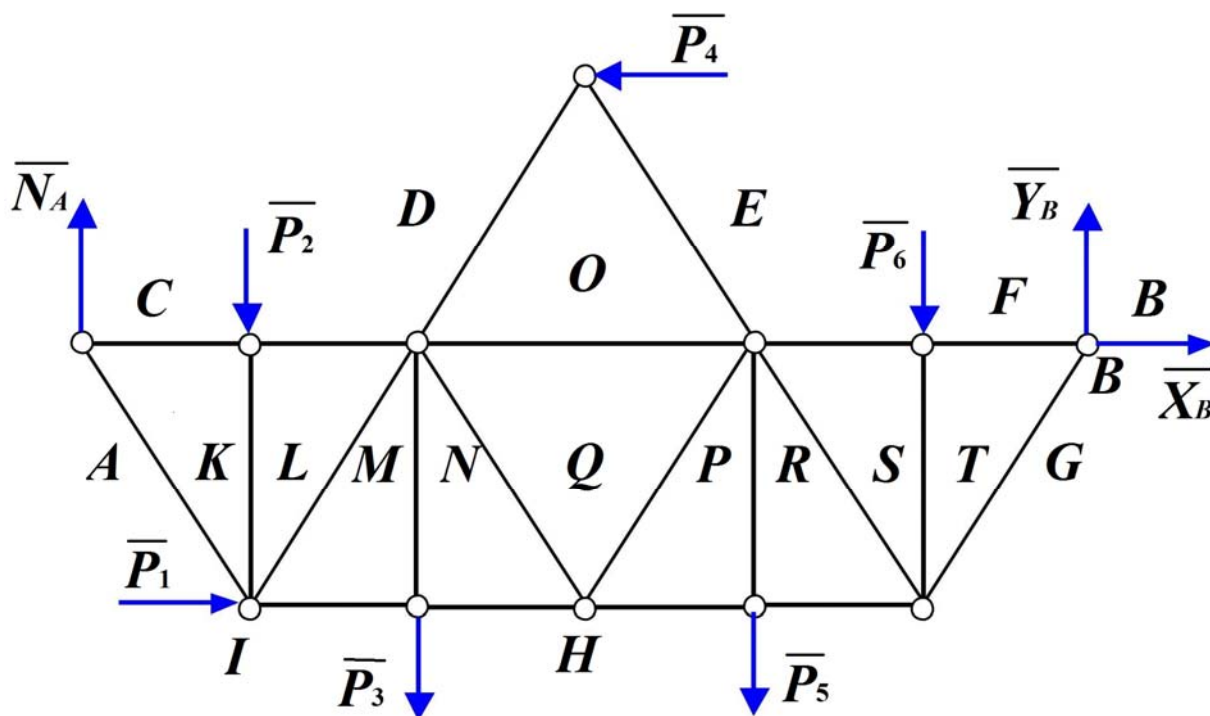


Рис. 4.11

Векторы сил на диаграмме принято обозначать двумя малыми буквами, соответствующими обозначениям тех полей, для которых линия действия силы или стержень являются границей.

Строится сначала многоугольник внешних сил $acdefbghi$ (рис. 4.12). Силы в этом многоугольнике откладываются в том порядке, в котором они встречаются при обходе контура фермы по ходу часовой стрелки.

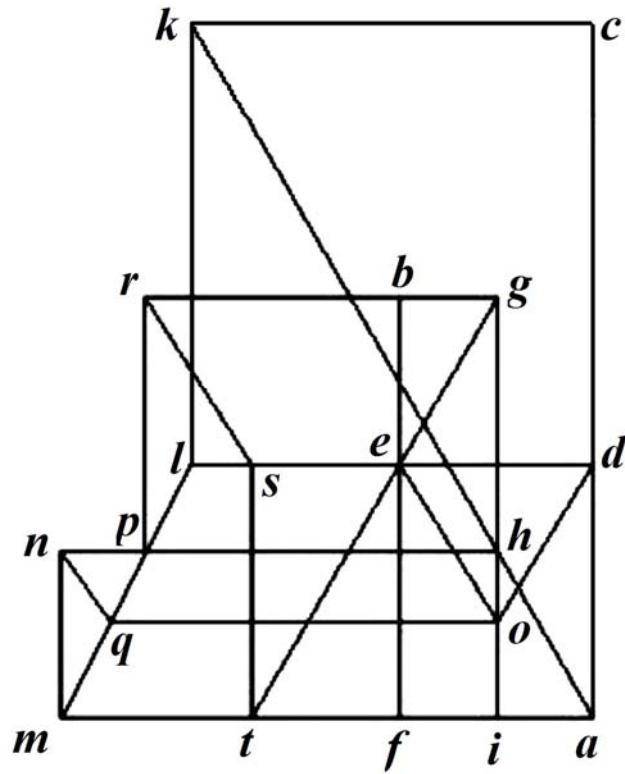


Рис. 4.12. Диаграмма Максвелла–Кремоны

Начало и конец каждой силы обозначаются теми же буквами, какими обозначены две смежные области, разграниченные линией действия этой силы. При этом последовательность букв от начала к концу силы должна соответствовать принятому направлению обхода. Например, сила $\bar{P}_1$ обозначена буквами ia , сила реакции связи в точке A $\bar{N}_A$ обозначена буквами ac , сила $\bar{P}_2$ обозначена cd и т. д.

К этому многоугольнику внешних сил последовательно пристраиваются силовые треугольники для узлов I–XI, начиная с узла, в котором сходится не более двух стержней. Например, на узел I действует одна внешняя сила $\bar{N}_A$ и реакции стержней 1 и 2. Проведя через точку A прямую, параллельную стержню 2, а через точку C – прямую, параллельную стержню 1, получим силовой треугольник ACK , в котором CK – реакция стержня 1, а AK – реакция стержня 2. Далее строятся силовые треугольники для остальных узлов фермы.

Указанное правило построения плана сил позволяет определить не только величину силы, но и её знак, т. е. установить, будет ли данный стержень растянут или сжат. Обходя, например, узел 3 по ходу часовой стрелки, встречаем стержень 5 (lm). Первая буква l , вторая – m . Следовательно, стержень 5 сжат, т. к. вектор lm направлен к узлу. Если возникает необходимость определить знак силы в стержне 13 (qp), производят обход узла 7. Первая буква q , вторая – p . Вектор по диаграмме Максвелла направлен от узла. Следовательно, стержень 13 растянут.

Аналогично определяются знаки сил и в остальных стержнях фермы.

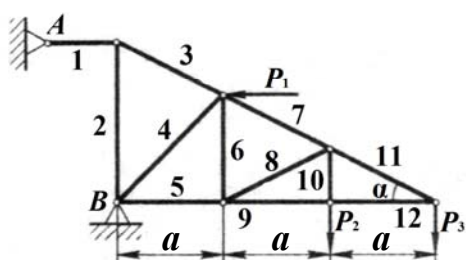
4.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы»

Задание С.9. Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также силы во всех её стержнях способом вырезания узлов. Схемы ферм показаны на рис. 4.13 – 4.15. Необходимые для расчёта данные приведены в табл. 4.2. Дополнительно определить силы в трёх стержнях фермы от той же нагрузки способом Риттера (номера стержней указаны в табл. 4.2).

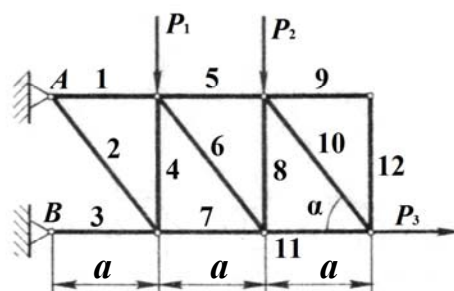
Таблица 4.2

Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

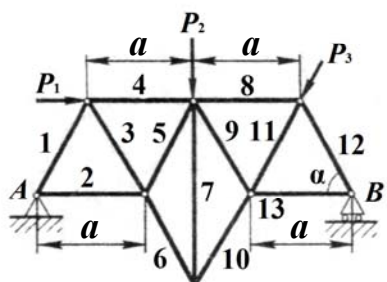
Номер варианта (рис. 4.13–4.15)	P_1	P_2	P_3	a	h	α , град	Номера стержней
	кН			м			
1	4	9	2	2,0	–	30	3, 8, 9
2	10	3	4	2,5	–	60	2, 5, 7
3	2	12	6	3,0	–	60	4, 5, 10
4	10	10	5	4,0	–	60	5, 6, 11
5	2	4	2	–	2,0	60	4, 5, 10
6	3	7	5	4,0	3,0	–	8, 9, 11
7	4	6	3	4,0	–	60	4, 6, 12
8	5	7	7	3,2	–	45	3, 4, 5
9	10	8	2	5,0	–	60	6, 7, 12
10	3	4	5	4,4	3,3	–	3, 5, 7
11	2	6	8	2,5	3,0	–	2, 7, 8
12	5	7	2	4,0	–	60	4, 5, 10
13	4	6	2	4,8	3,6	–	4, 5, 10
14	3	5	5	3,0	–	60	5, 6, 8
15	2	2	10	4,0	6,0	–	2, 6, 9
16	5	6	2	5,0	–	60	3, 5, 6
17	4	4	10	4,0	6,0	–	4, 7, 8
18	5	2	8	–	5,0	60	1, 4, 8
19	8	4	10	5,0	10,0	60	4, 5, 7
20	2	3	5	4,0	6,0	–	5, 6, 8
21	3	2	7	6,0	–	45	5, 8, 9
22	4	2	9	4,0	–	45	2, 6, 8
23	5	8	8	4,0	9,0	30	4, 7, 9
24	6	10	2	3,6	–	45	4, 5, 10
25	7	10	5	4,4	3,3	–	8, 10, 11
26	8	12	2	4,0	–	30	4, 5, 9
27	9	4	4	4,0	3,0	–	5, 9, 11
28	10	5	3	5,0	–	30	3, 5, 6
29	12	8	2	6,0	–	45	5, 6, 11
30	5	10	4	4,0	2,0	–	6, 7, 12



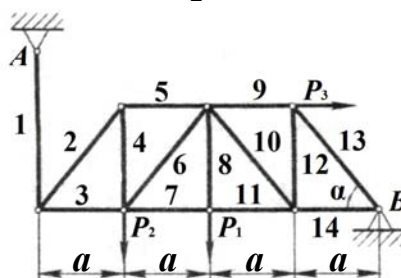
1



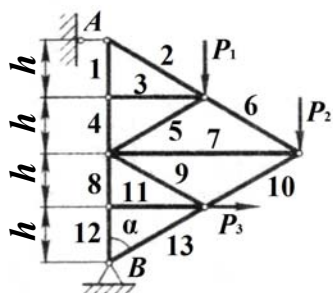
2



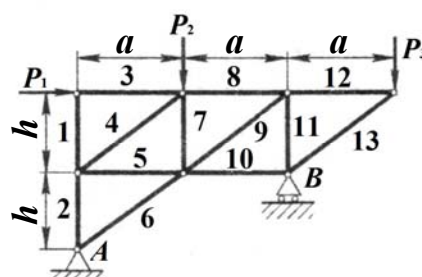
3



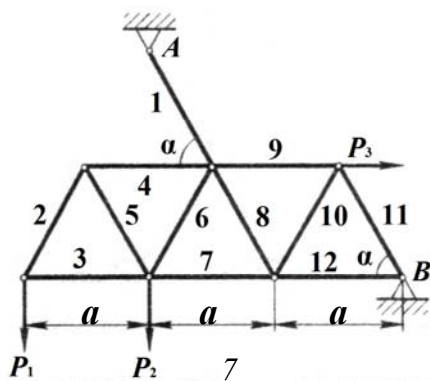
4



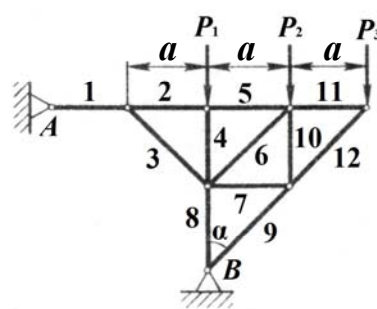
5



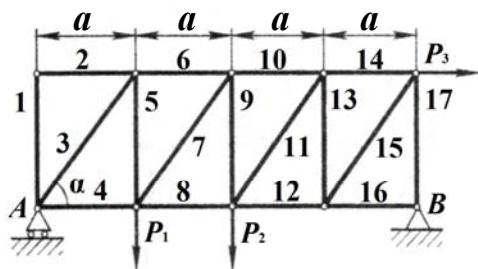
6



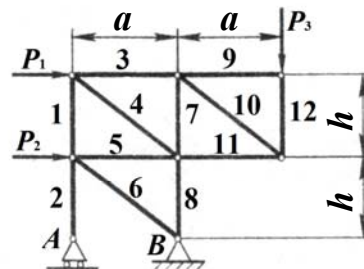
7



8



9



10

Рис. 4.13

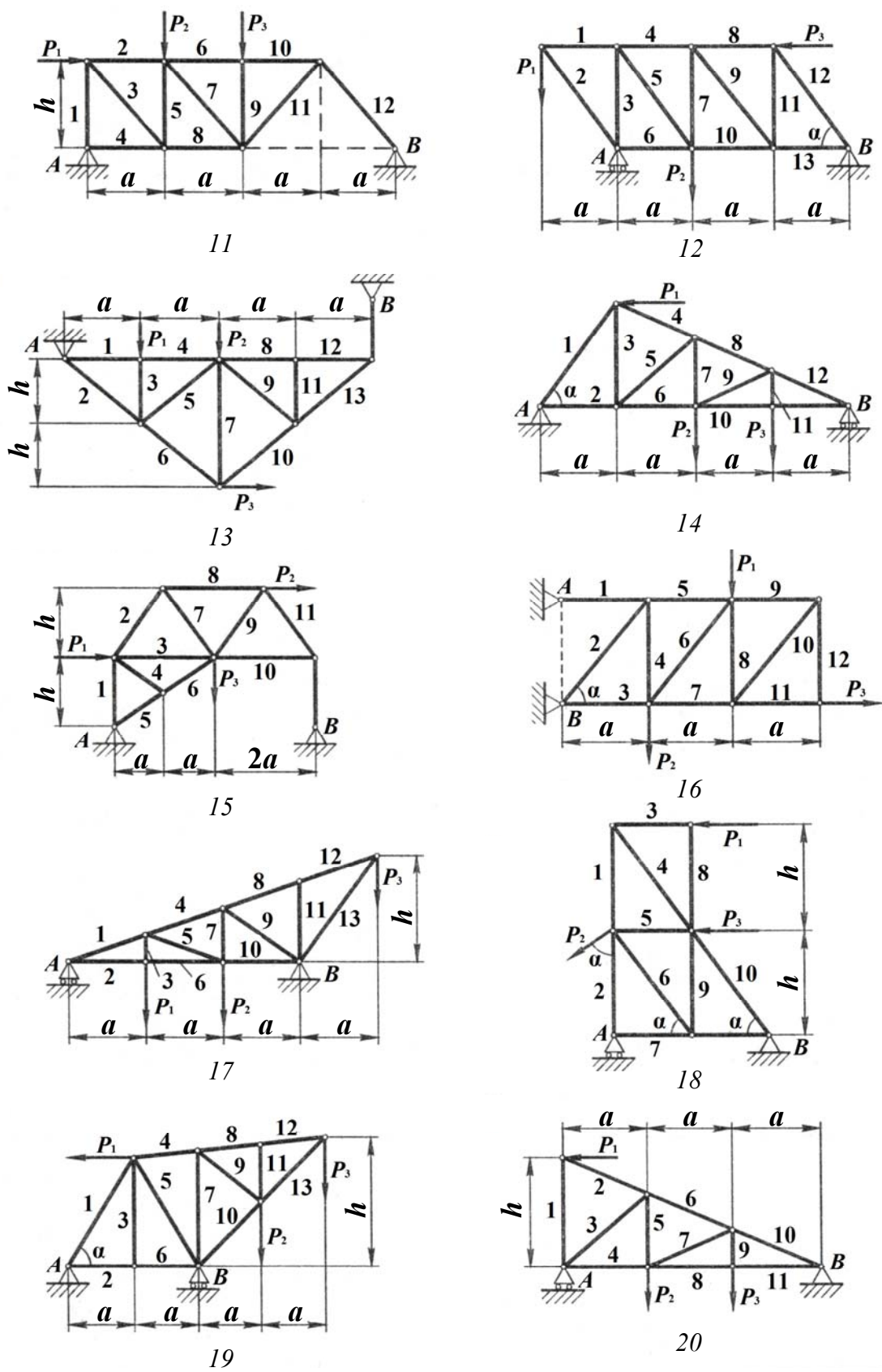


Рис. 4.14

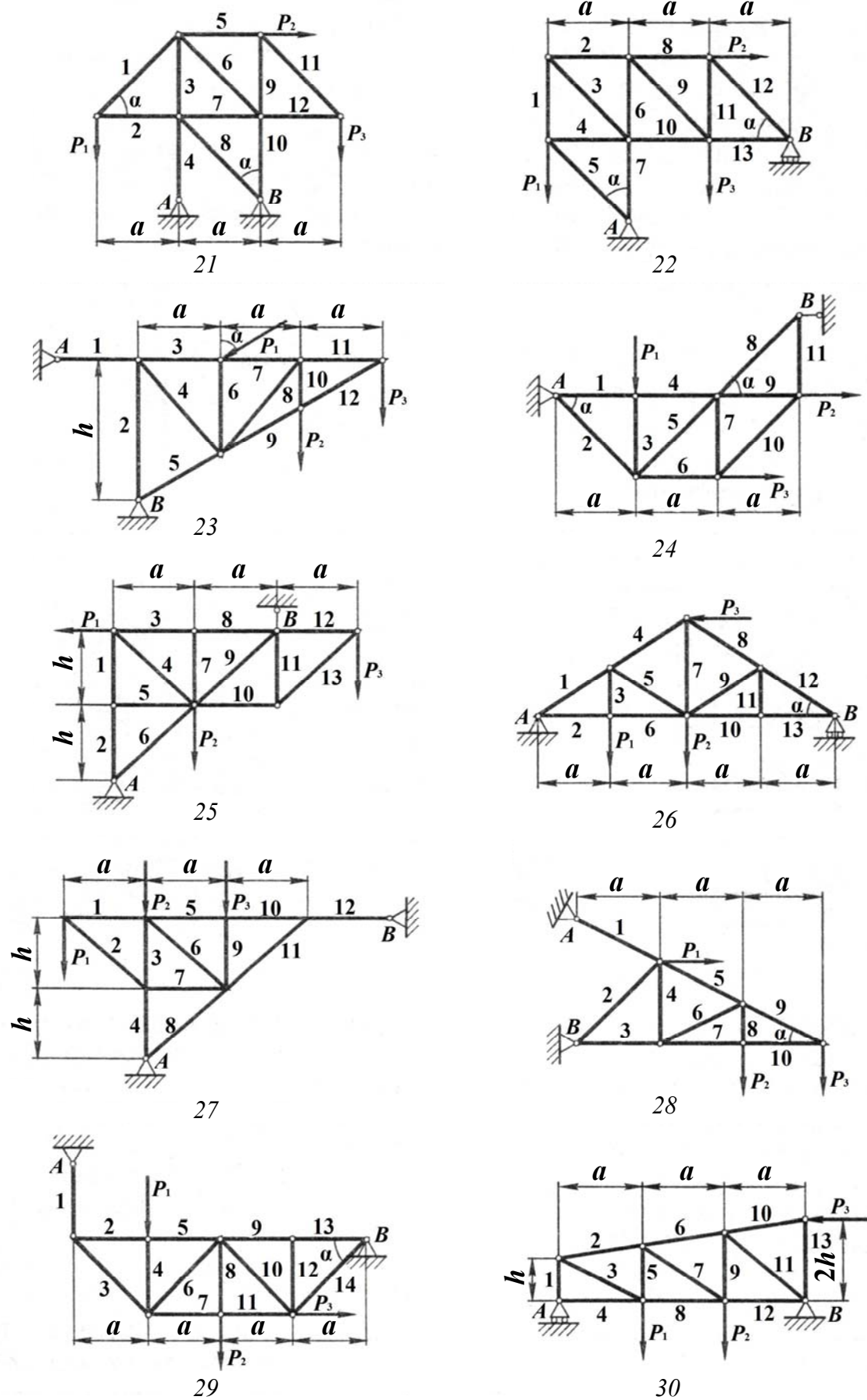


Рис. 4.15

5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

5.1. Момент силы относительно оси

Рассмотрим тело, к которому в точке A приложена сила $\vec{F}$. Проведём через точку A плоскость xy . Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие: одну параллельно оси z и другую, лежащую в плоскости xy $\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{xy}$. Проведём ось z . Точку пересечения оси z с плоскостью xy обозначим буквой O . Сила F_z , параллельная оси z , не обладает вращательным эффектом; она только может переместить тело вдоль оси z (рис. 5.1).

Вращательный эффект силы $\vec{F}$ может создавать составляющая $\vec{F}_{xy}$, следовательно, *момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на перпендикулярную оси плоскость, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью* (рис. 5.1).

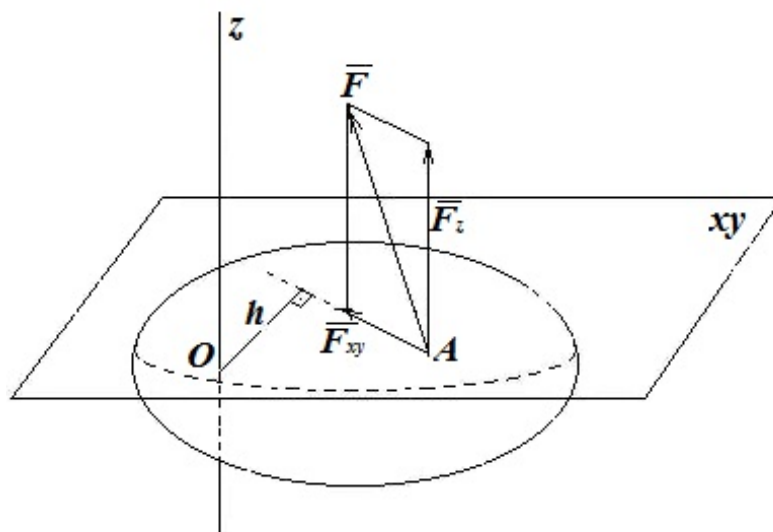


Рис. 5.1

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или когда сила пересекает ось, относительно которой определяется момент силы. Обобщая эти условия, можно заключить, что *момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось находятся в одной плоскости*.

Для вычисления момента силы относительно оси z необходимо:

- 1) провести плоскость xy , перпендикулярную этой оси;

2) спроецировать на эту плоскость силу $\overline{F}$ и найти величину проекции $\overline{F}_{xy}$;

3) опустить из точки O перпендикуляр на линию действия силы $\overline{F}_{xy}$ и найти длину перпендикуляра h ;

4) вычислить величину момента силы $F_{xy} \cdot h$;

5) определить знак момента силы.

Таким образом, модуль момента силы $\overline{F}$ относительно оси z (рис. 5.1) равен $m_0(\overline{F}) = F_{xy} \cdot h$.

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z будет иметь знак «плюс», когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила $\overline{F}_{xy}$, будет виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак «минус» – по ходу часовой стрелки.

5.2. Теорема Вариньона для моментов силы относительно оси.

Аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей

Для пространственной системы сходящихся сил справедлива теорема Вариньона, приведённая во второй главе (п. 2.3.6): $\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k)$. Момент равнодействующей силы относительно точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно той же точки. Если обе части векторного равенства спроецировать на ось z , проходящую через центр O , то получим $m_z(\overline{R}) = \sum m_z(\overline{F}_k)$. Полученная формула есть теорема Вариньона относительно оси.

Разложим пространственную силу $\overline{F}$, приложенную в точке A с координатами x, y, z , на составляющие $\overline{F}_x, \overline{F}_y$ и $\overline{F}_z$ (рис. 5.2). Тогда по теореме Вариньона $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}_x) + m_x(\overline{F}_y) + m_x(\overline{F}_z)$. Так как по свойству момента силы $m_x(\overline{F}_x) = 0$, то получим $m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y$.

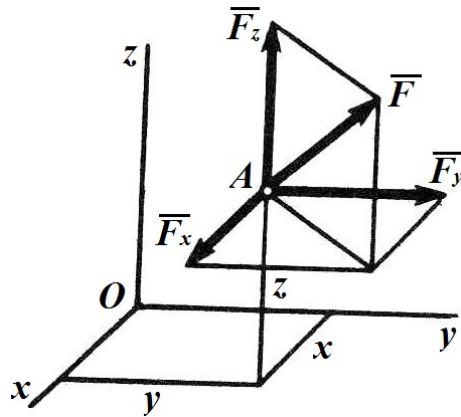


Рис. 5.2

Аналогично находятся моменты относительно осей y и z . Окончательно, получим

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y;$$

$$m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Полученные формулы есть аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей.

5.3. Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру

Произвольная пространственная система сил, действующих на абсолютно твёрдое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом $\vec{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O . Доказательство данного утверждения аналогично рассмотренному во второй главе (п. 2.5). Однако в случае приведения пространственной системы сил учитываем, что главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_O$ не лежат в одной плоскости.

5.4. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

Частные случаи приведения пространственной системы сил представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Частные случаи приведения пространственной системы сил

№	Значения главного вектора и главного момента	Результат приведения
1	$\vec{R} = 0; \vec{M}_O \neq 0.$	Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту M_O (главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения O).
2	$\vec{R} \neq 0; \vec{M}_O = 0.$	Система сил приводится к равнодействующей, равной $\vec{R}$, проходящей через центр O .
3	$\vec{R} \neq 0; \vec{M}_O \neq 0; ,$ $\vec{R} \perp \vec{M}_O.$	Система сил приводится к равнодействующей $\vec{R}'$, равной главному вектору $\vec{R}$ и параллельной ему и отстоит от него на расстоянии $h = M_O / R$. Положение линии действия равнодействующей должно быть таким, чтобы направление её момента относительно центра приведения O совпадало с направлением M_O относительно центра O .
4	$\vec{R} \neq 0; \vec{M}_O \neq 0$, причём векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ не перпендикулярны.	Система сил приводится к динаме (силовому винту) – совокупности силы $\vec{R}$ и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе.
5	$\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0.$	Система сил, приложенных к твёрдому телу, является уравновешивающейся.

5.5. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трёх координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0; & \sum m_y(\vec{F}_k) &= 0, & \sum m_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Если система сил образует пространственную систему параллельных сил, то оси координат целесообразно выбрать так, чтобы одна из осей была параллельна силам. В этом случае число уравнений равновесия будет равно трём. Например, если система сил параллельна оси z :

$$\sum F_{kz} = 0; \sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \sum m_y(\vec{F}_k) = 0.$$

5.6. Методические указания к решению задач по исследованию условий равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

Порядок решения задач

1. Выделить материальную систему (тело), равновесие которой следует рассмотреть.
2. Приложить к выделенному телу все активные (заданные) силы.
3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции.
4. Направить оси координат.
5. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, из которых определить искомые величины.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то направление её выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль её при этом остаётся прежним).

После того как задача решена, необходимо произвести проверку правильности решения. Для этого следует составить сумму моментов относительно трёх новых взаимно перпендикулярных осей. При этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю суммы моментов подтвердит правильность решения задачи.

Пример. Однородная прямоугольная пластинка весом $P = 60$ Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и цилиндрического шарнира B . Пластинка удерживается в горизонтальном положении тросом CE , наклоненным к горизонтальной плоскости под углом 30° . Определить натяжение троса и опорные реакции.

Решение. Для определения неизвестных рассмотрим равновесие пластинки $ABCD$ (рис. 5.3).

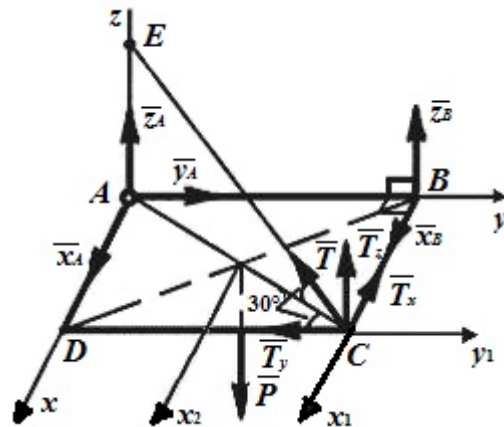


Рис. 5.3

К ней в точке пересечения диагоналей прямоугольной пластины приложена одна активная сила – сила тяжести $\bar{P}$. Применяв принцип освобождения от связей, мысленно отбросим связи, наложенные на пластинку: шаровой шарнир A и цилиндрический шарнир B . Заменим действие связей на пластинку соответствующими реакциями связей.

Рассечём нить DE и направим реакцию $\bar{T}$ от точки D по нити. Направление реакции шарового шарнира $\bar{R}_A$ заранее неизвестно, поэтому заменим реакцию $\bar{R}_A$ тремя взаимно перпендикулярными составляющими. Направив оси x и y вдоль сторон пластинки и ось z перпендикулярно к ней, изобразим эти составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$. Цилиндрический шарнир B допускает перемещение пластинки вдоль AB , поэтому реакцию $\bar{R}_B$, перпендикулярную AB , заменим двумя взаимно перпендикулярными составляющими $\bar{X}_B$ и $\bar{Z}_B$. Итак, пластинка $ABCD$ находится в покое под действием активной силы тяжести $\bar{P}$ и реакций: $\bar{T}$, $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, $\bar{X}_B$ и $\bar{Z}_B$. Так как число скалярных неизвестных также равно шести: T , X_A , Y_A , Z_A , X_B и Z_B , то задача является статически определённой. Переходя к составлению уравнений равновесия, заметим, что неизвестны углы, которые образует сила $\bar{T}$ с осями x и y , поэтому разложим силу $\bar{T}$ на две составляющие, чтобы одна из них ($\bar{T}_{xy}$) лежала в плоскости xy пластинки, а вторая ($\bar{T}_z$) была параллельна оси z , т. е. $\bar{T} = \bar{T}_{xy} + \bar{T}_z$. Модули этих составляющих равны: $T_{xy} = T \cos 30^\circ$; $T_z = T \sin 30^\circ$. Затем составляющую $\bar{T}_{xy}$ разложим по осям координат x и y : $T_x = T \cos 30^\circ \sin 30^\circ$; $T_y = T \cos 30^\circ \cos 30^\circ$.

Составим уравнения равновесия данной системы:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T_x = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - T_y = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - P + T_z = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Z_B \cdot AB - P \cdot AB/2 + T_z \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot BC/2 - T_z \cdot BC = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) $X_B = 0$.

Из уравнения (5) $T_z = P/2 = 60/2 = 30$ Н.

Отсюда: $T = T_z/\sin 30^\circ = 30/0,5 = 60$ Н; $T_x = 25,98$ Н; $T_y = 45$ Н.

Из уравнения (1) $X_A = T_x - X_B = 25,98$ Н.

Из уравнения (2) $Y_A = T_y = 45$ Н.

Из уравнения (4) $Z_B = P/2 - T_z = 30 - 30 = 0$.

Из уравнения (3) $Z_A = P - T_z - Z_B = 60 - 30 - 0 = 30$ Н.

Проверка.

Уравнение моментов относительно оси x_1 :

$$\begin{aligned} \sum m_{x1}(\vec{F}_k) &= 0; & -Z_A \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB/2 + T_z \cdot AB/2 &= 0; \\ -30 + 0 + 30 &= 0; & 0 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение моментов относительно оси y_1 :

$$\begin{aligned} \sum m_{y1}(\vec{F}_k) &= 0; & (Z_A + Z_B) \cdot BC - P \cdot BC/2 &= 0; \\ (30 + 0) - 60/2 &= 0; & 0 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение моментов относительно оси z_1 :

$$\begin{aligned} \sum m_{z1}(\vec{F}_k) &= 0; & X_A \cdot AB - Y_A \cdot BC &= 0; \\ 25,98 \cdot AB - 45 \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} &= 0; & 0 &= 0. \end{aligned}$$

Проверка сошлась.

Ответ:

$$X_B = 0 \text{ Н}; \quad Z_B = 0 \text{ Н}; \quad T = 60 \text{ Н};$$

$$X_A = 25,98 \text{ Н}; \quad Y_A = 45 \text{ Н}; \quad Z_A = 30 \text{ Н}.$$

5.7. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме: «Определение реакций опор пространственной конструкции»

Задание С.10. Две однородные прямоугольные плиты жёстко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем l (рис. 5.4 – 5.11) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями l и 2 (рис. 5.12, 5.13); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 8$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 4$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xu – горизонтальная).

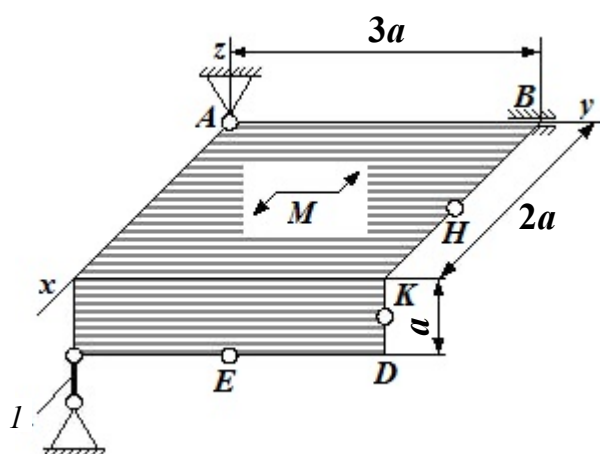


Рис. 5.4

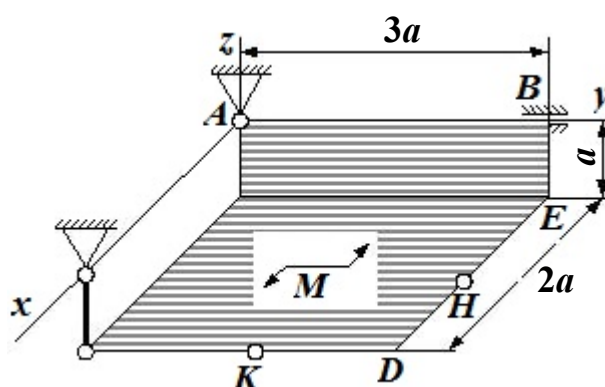


Рис. 5.5

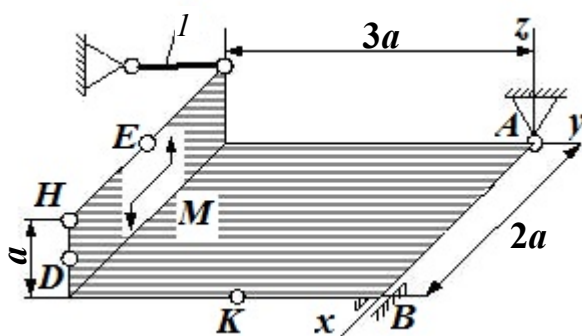


Рис. 5.6

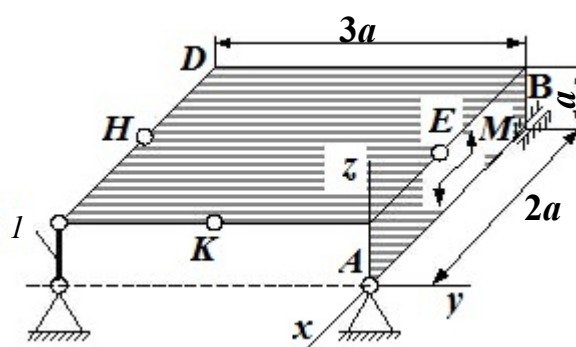


Рис. 5.7

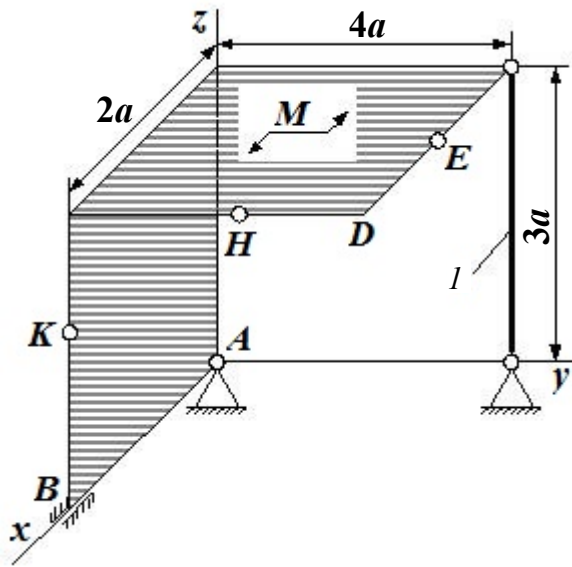


Рис. 5.8

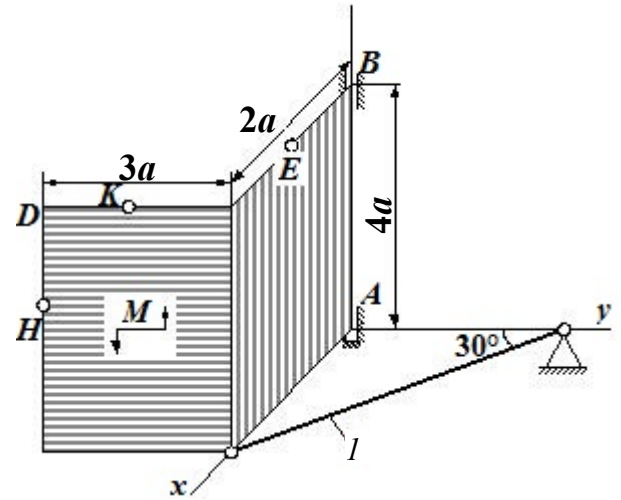


Рис. 5.9

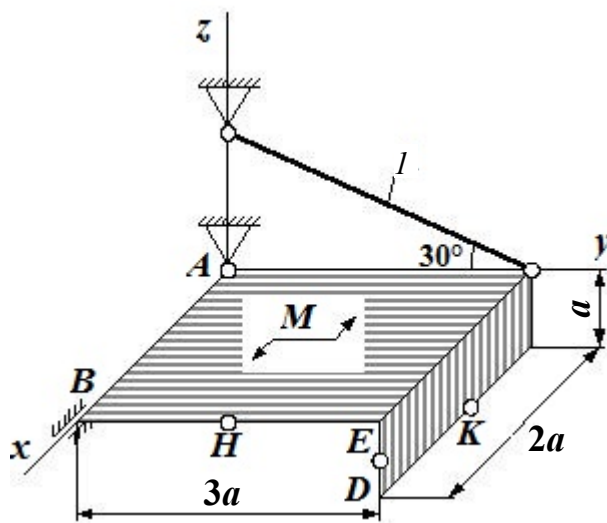


Рис. 5.10

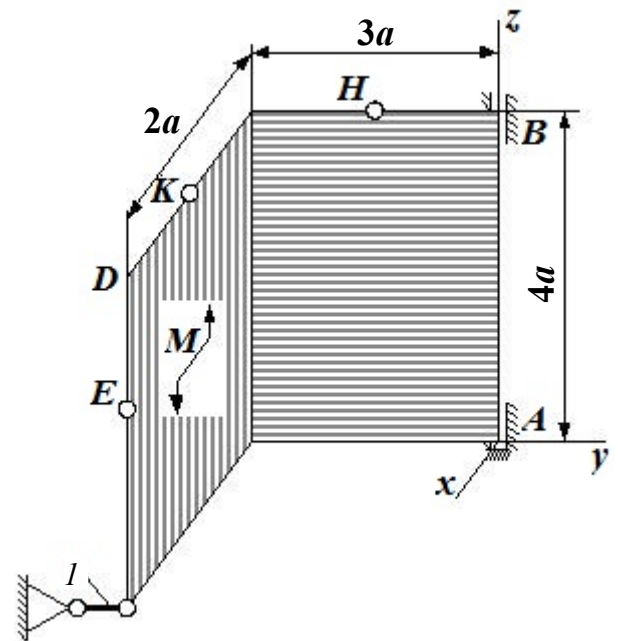


Рис. 5.11

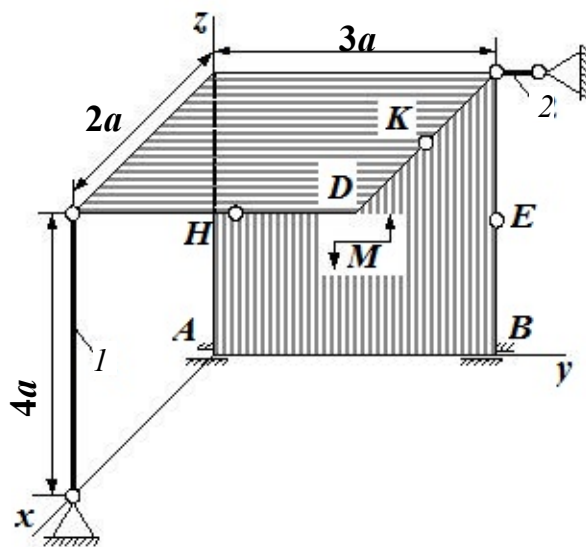


Рис. 5.12

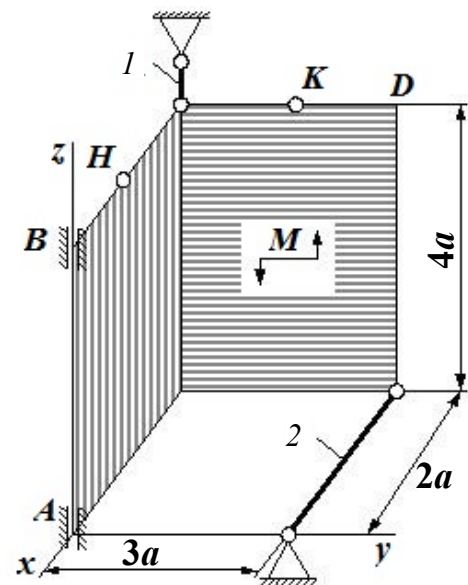


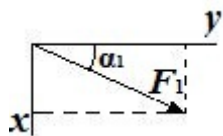
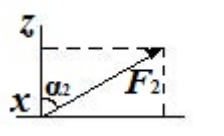
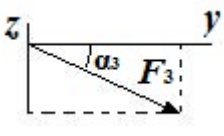
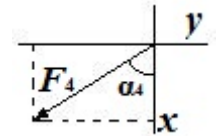
Рис. 5.13

На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 5.2. При этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xu , сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz , и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчётах принять $a = 0,8 \text{ м}$.

Таблица 5.2

Значения сил, их направления и точки приложения

Номер условия	Силы							
								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 12 \text{ кН}$		$F_4 = 14 \text{ кН}$	
	точка приложения	α_1 , град	точка приложения	α_2 , град	точка приложения	α_3 , град	точка приложения	α_4 , град
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	E	60	H	30	–	–	–	–
1	–	–	D	60	E	30	–	–
2	–	–	–	–	K	60	E	30
3	K	30	–	–	D	0	–	–
4	–	–	E	30	–	–	D	60
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	H	0	K	60	–	–	–	–
6	–	–	H	90	D	30	–	–
7	–	–	–	–	H	60	K	90
8	D	30	–	–	K	0	–	–
9	–	–	D	90	–	–	H	30

6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

6.1. Общие сведения

Центр параллельных сил. Рассмотрим две параллельные, направленные в одну сторону силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные к телу в точках A_1 и A_2 (рис. 6.1). Эта система сил имеет равнодействующую $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, линия действия которой проходит через некоторую точку C . Положение точки C можно найти с помощью теоремы Вариньона:

$$m_C(\vec{R}) = m_C(\vec{F}_1) - m_C(\vec{F}_2) = 0.$$

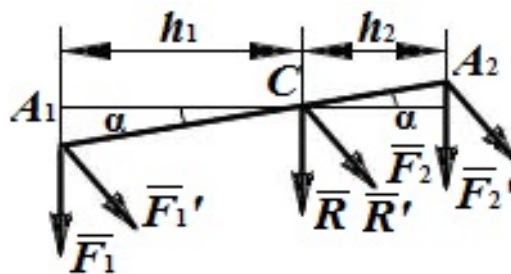


Рис. 6.1

Если повернуть силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ около точек A_1 и A_2 в одну сторону и на один и тот же угол, то получим новую систему параллельных сил, имеющих те же модули. При этом их равнодействующая будет также проходить через точку C . Такая точка называется центром параллельных сил.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_n$, приложенных к твёрдому телу в точках $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$. Эта система имеет равнодействующую $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$.

Если каждую силу системы повернуть около точек их приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, то получатся новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения. Равнодействующая таких систем будет иметь тот же модуль R , но всякий раз другое направление. Сложив силы F_1 и F_2 найдём что их равнодействующая R_1 , которая всегда будет проходить через точку C_1 , положение которой определяется равенством $F_1 \cdot A_1C_1 = F_2 \cdot A_2C_1$. Сложив далее R_1 и F_3 найдём их равнодействующую, которая всегда будет проходить через точку C_2 , лежащую на прямой A_3C_2 . Доведя процесс сложения сил до конца, придём к выводу, что равнодействующая всех сил действительно всегда будет проходить через одну и ту же точку C , положение которой по отношению к точкам $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ будет неизменным.

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около точек их приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол называется центром параллельных сил (рис. 6.2).

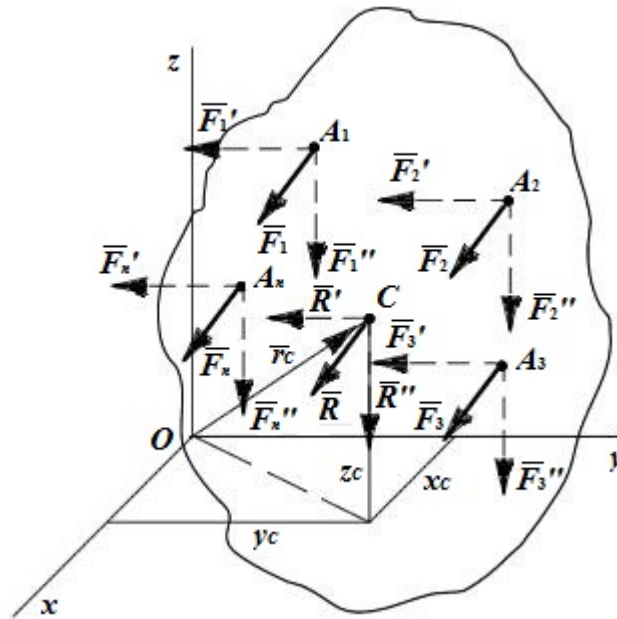


Рис. 6.2

Определим координаты центра параллельных сил. Поскольку положение точки C по отношению к телу является неизменным, то её координаты от выбора системы координат не зависят. Повернём все силы около их приложения так, чтобы они стали параллельны оси Oy , и применим к повернутым силам теорему Вариньона. Так как R' является равнодействующей этих сил, то согласно теореме Вариньона имеем $m_x(\bar{R}') = \sum m_x(\bar{F}'_k)$, т. к. $R' = R$, $F'_k = F_k$, получим

$$m_x(\bar{R}') = R \cdot z_C = F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_n \cdot z_n = \sum F_k \cdot z_k.$$

Отсюда находим координату центра параллельных сил z_C : $z_C = \frac{\sum F_k z_k}{R}$.

Для определения координаты x_C составим выражение момента сил относительно оси Oz .

$$m_z(\bar{R}') = \sum m_z(\bar{F}'_k);$$

$$-R \cdot x_C = -F_1 \cdot x_1 + (-F_2 \cdot x_2) + \dots + (-F_n \cdot x_n) = -\sum F_k \cdot x_k;$$

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{R}.$$

Для определения координаты y_C повернём все силы, чтобы они стали параллельны оси Oz .

$$m_x(\overline{R''}) = \sum m_x(\overline{F_k''}); R'' = R, F_k'' = F_k;$$

$$-R \cdot y_C = -F_1 \cdot y_1 + (-F_2 \cdot y_2) + \dots + (-F_n \cdot y_n) = -\sum F_k \cdot y_k;$$

$$y_C = \frac{\sum F_k \cdot y_k}{R}.$$

Положение центра параллельных сил относительно начала координат (рис. 6.2) можно определить его радиусом-вектором: $\overline{r_C} = \frac{\sum \overline{F_k} \cdot \overline{r_k}}{R}$.

6.2. Центр тяжести твёрдого тела

Центром тяжести твёрдого тела называется неизменно связанная с этим телом точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести данного тела, при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести применяется при исследовании устойчивости положений равновесия тел и сплошных сред, находящихся под действием сил тяжести и в некоторых других случаях, а именно: в сопротивлении материалов и в строительной механике – при использовании правила Верещагина.

Существуют два способа определения центра тяжести тела: аналитический и экспериментальный. Аналитический способ определения центра тяжести непосредственно вытекает из понятия центра параллельных сил.

Координаты центра тяжести как центра параллельных сил определяются формулами:

$$X_c = \frac{\sum (p_k x_k)}{P}; Y_c = \frac{\sum (p_k y_k)}{P}; Z_c = \frac{\sum (p_k z_k)}{P},$$

где P – вес всего тела; p_k – вес частиц тела; x_k, y_k, z_k – координаты частиц тела.

Для однородного тела вес всего тела и любой её части пропорционален объёму: $P = V \gamma$; $p_k = v_k \gamma$, где γ – вес единицы объёма, V – объём тела. Подставив выражения P, p_k в формулы определения координат центра тяжести и сократив на общий множитель γ , получим:

$$X_c = \frac{\sum (v_k x_k)}{V}; Y_c = \frac{\sum (v_k y_k)}{V}; Z_c = \frac{\sum (v_k z_k)}{V}.$$

Точка C , координаты которой определяются полученными формулами, называется *центром тяжести объёма*.

Если тело представляет собой тонкую однородную пластину, то центр тяжести определяется формулами:

$$X_c = \frac{\sum (s_k x_k)}{S}; \quad Y_c = \frac{\sum (s_k y_k)}{S},$$

где S – площадь всей пластины; s_k – площадь её части; x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести частей пластины.

Точка C в данном случае носит название *центра тяжести площади*.

Числители выражений, определяющих координаты центра тяжести плоских фигур, называются *статическими моментами площади* относительно осей y и x :

$$M_y = \sum s_k x_k; \quad M_x = \sum s_k y_k.$$

Тогда центр тяжести площади можно определить по формулам:

$$X_c = \frac{M_y}{S}; \quad Y_c = \frac{M_x}{S}.$$

Для тел, длина которых во много раз превышает размеры поперечного сечения, определяют центр тяжести линии. Координаты центра тяжести линии определяют с помощью формул:

$$X_c = \frac{\sum (l_k x_k)}{L}; \quad Y_c = \frac{\sum (l_k y_k)}{L}; \quad Z_c = \frac{\sum (l_k z_k)}{L},$$

где L – длина линии; l_k – длина её частей; x_k, y_k, z_k – координата центра тяжести частей линии.

6.3. Способы определения координат центров тяжести тел

Основываясь на полученных формулах, можно предложить практические способы определения центров тяжести тел.

1. *Симметрия*. Если тело имеет центр симметрии, то центр тяжести находится в центре симметрии.

Если тело имеет плоскость симметрии, например, плоскость XOY , то центр тяжести лежит в этой плоскости.

2. *Разбиение.* Для тел, состоящих из простых по форме тел, используется способ разбиения. Тело разбивается на части, центр тяжести которых находится методом симметрии. Центр тяжести всего тела определяется по формулам центра тяжести объёма (площади).

Пример. Определить центр тяжести пластины, изображенной на рис. 6.3. Пластину можно разбить на прямоугольники различными способами и определить координаты центра тяжести каждого прямоугольника и их площади.

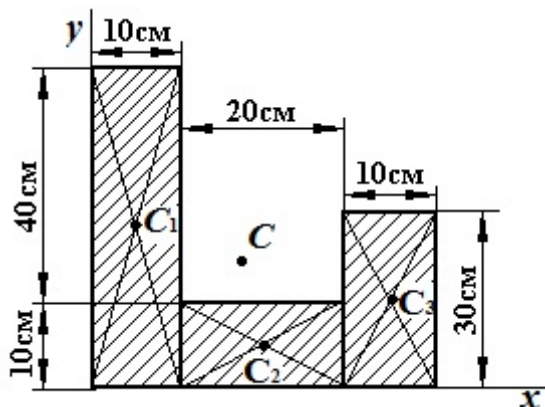


Рис. 6.3

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 500 \text{ см}^2; x_{c1} = 5 \text{ см}; y_{c1} = 25 \text{ см}. \\
 S_2 &= 200 \text{ см}^2; x_{c2} = 20 \text{ см}; y_{c2} = 5 \text{ см}. \\
 S_3 &= 300 \text{ см}^2; x_{c3} = 35 \text{ см}; y_{c3} = 15 \text{ см}. \\
 x_C &= \frac{500 \cdot 5 + 200 \cdot 20 + 300 \cdot 35}{1000} = 17,0 \text{ см}; \\
 y_C &= \frac{500 \cdot 25 + 200 \cdot 5 + 300 \cdot 15}{1000} = 18,0 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $x_C = 17,0 \text{ см}; y_C = 18,0 \text{ см}.$

3. *Дополнение.* Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он используется, когда тело имеет вырезы, срезы и др., если координаты центра тяжести тела без выреза известны.

Пример. Определить центр тяжести круглой пластины, имеющей вырез радиусом $r = 0,6 R$ (рис. 6.4).

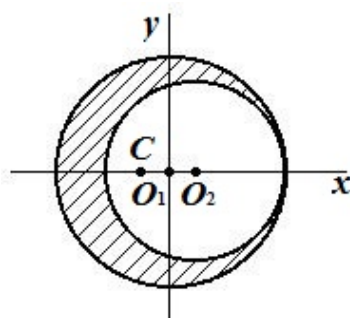


Рис. 6.4

Круглая пластина имеет центр симметрии. Поместим начало координат в центре пластины. Площадь пластины без выреза $S_1 = \pi R^2$, площадь выреза $S_2 = \pi r^2 = \pi 0,36 R^2$. Площадь пластины с вырезом $S = \pi R^2(1 - 0,36) = 0,64 \pi R^2$; $x_{C2} = R - r = 0,4R$.

Пластина с вырезом имеет ось симметрии O_1x , следовательно, $y_c = 0$.

$$x_c = \frac{S_1 \cdot 0 - S_2 \cdot x_{C2}}{S} = -\frac{\pi R^2 \cdot 0,36 \cdot 0,4R}{\pi R^2 \cdot 0,64} = -0,225R.$$

4. *Интегрирование.* Если тело нельзя разбить на конечное число частей, положения центров тяжести которых известны, тело разбивают на произвольные малые объёмы ΔV_k , для которых формула с использованием метода разбиения принимает вид $x_c = \frac{1}{V} \sum \Delta V_k x_k$.

Далее переходят к пределу, устремляя элементарные объёмы к нулю, т. е. стягивая объёмы в точки. Суммы заменяют интегралами, распространёнными на весь объём тела, тогда формулы определения координат центра тяжести объёма принимают вид:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$

Формулы для определения координат центра тяжести площади:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS.$$

Координаты центра тяжести площади необходимо определять при изучении равновесия пластинок, при вычислении интеграла Мора в строительной механике.

Пример. Определить центр тяжести дуги окружности радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$ (рис. 6.5).

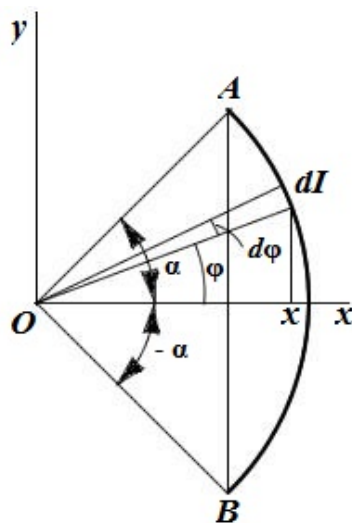


Рис. 6.5

Дуга окружности симметрична оси Ox , следовательно, центр тяжести дуги лежит на оси Ox , $y_c = 0$.

Согласно формуле для центра тяжести линии:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad dl = R d\varphi;$$

$$x = R \cos \varphi; \quad L = R \cdot 2\alpha;$$

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2R\alpha} R^2 \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \\ &= \frac{R^2 (\sin \alpha - \sin(-\alpha))}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

6. *Экспериментальный способ.* Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации можно определять экспериментально: методом подвешивания и взвешивания. Первый способ состоит в том, что тело подвешивается на тросе за различные точки. Направление троса, на котором подвешено тело, будет давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Метод взвешивания состоит в том, что сначала определяется вес тела, например, автомобиля, затем на весах определяется давление заднего моста автомобиля на опору. Составив уравнение равновесия относительно какой-либо точки, например, оси передних колёс, можно вычислить расстояние от этой оси до центра тяжести автомобиля (рис. 6.6).

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot x - N \cdot a = 0; \quad x = \frac{N \cdot a}{P}.$$

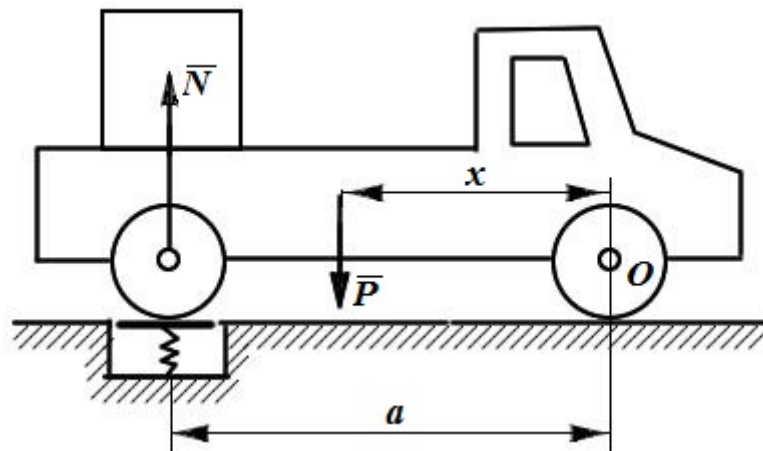


Рис. 6.6

Иногда при решении задач следует применять одновременно разные методы определения координат центра тяжести.

6.4. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур

Для определения центров тяжести тел часто встречающейся формы (треугольника, дуги окружности, сектора, сегмента) удобно использовать справочные данные (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Координаты центра тяжести некоторых однородных тел

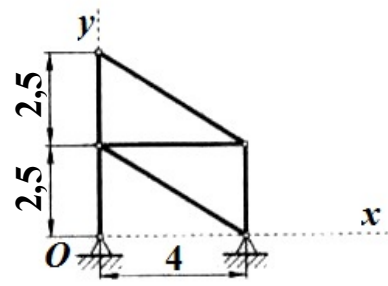
№	Наименование фигуры	Рисунок
1	<i>Дуга окружности:</i> центр тяжести дуги однородной окружности находится на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	
2	<i>Однородный круговой сектор:</i> центр тяжести расположен на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	

№	Наименование фигуры	Рисунок
3	<i>Сегмент</i>: центр тяжести расположен на оси симметрии (координата $y_C = 0$). $x_C = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}; y_C = 0,$ где α – половина центрального угла; R – радиус окружности.	
4	<i>Полукруг</i>: $x_C = OC = \frac{4R}{3\pi}.$	
5	<i>Треугольник</i>: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан. $x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координаты вершин треугольника.	
6	<i>Конус</i>: центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его высоте и отстоит на расстоянии 1/4 высоты от основания конуса. $y_C = AC = \frac{OA}{4}.$	

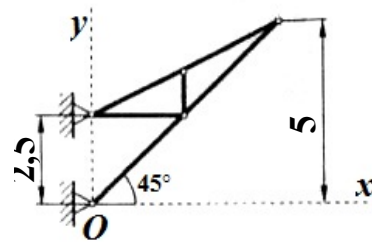
№	Наименование фигуры	Рисунок
7	Полусфера: центр тяжести лежит на оси симметрии. $x_C = AC = \frac{3R}{8}.$	
8	Трапеция: $x_C = \frac{(a+2d) \cdot a + (a+b+d) \cdot b}{3 \cdot (a+b)}; \quad y_C = \frac{2a+b}{3(a+b)}h;$ $S = \frac{a+b}{2}h - \text{площадь фигуры.}$	
9	$S = \frac{2}{3}lh - \text{площадь фигуры; } x_1 = \frac{1}{4}l; \quad x_2 = \frac{5}{8}l.$	
10	$S = \frac{1}{4}lh - \text{площадь фигуры; } x_1 = \frac{1}{5}l; \quad x_2 = \frac{4}{5}l.$	

6.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Центр тяжести»

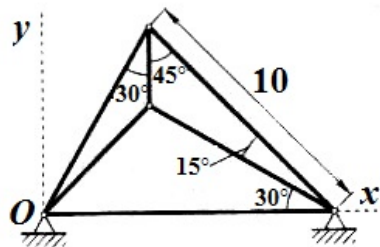
Задание С.13. Определить координаты центра тяжести твёрдых тел (схемы приведены на рис. 6.7–6.9).



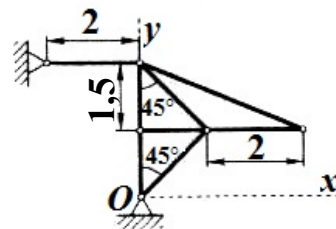
1



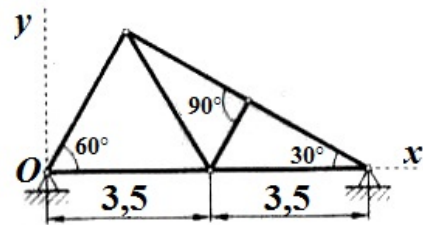
2



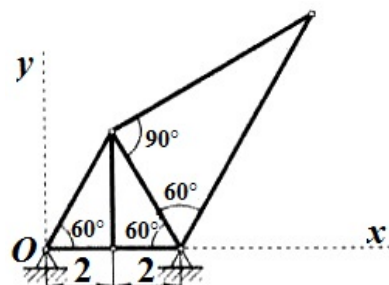
3



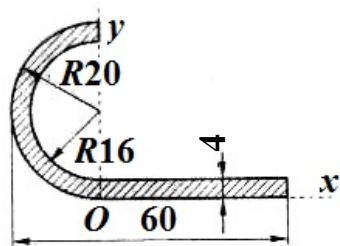
4



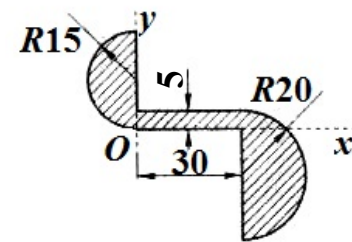
5



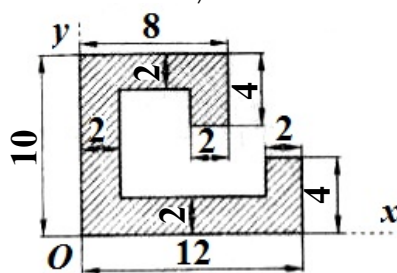
6



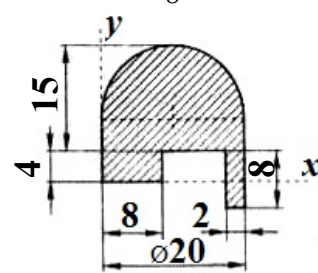
7



8



9



10

Рис. 6.7

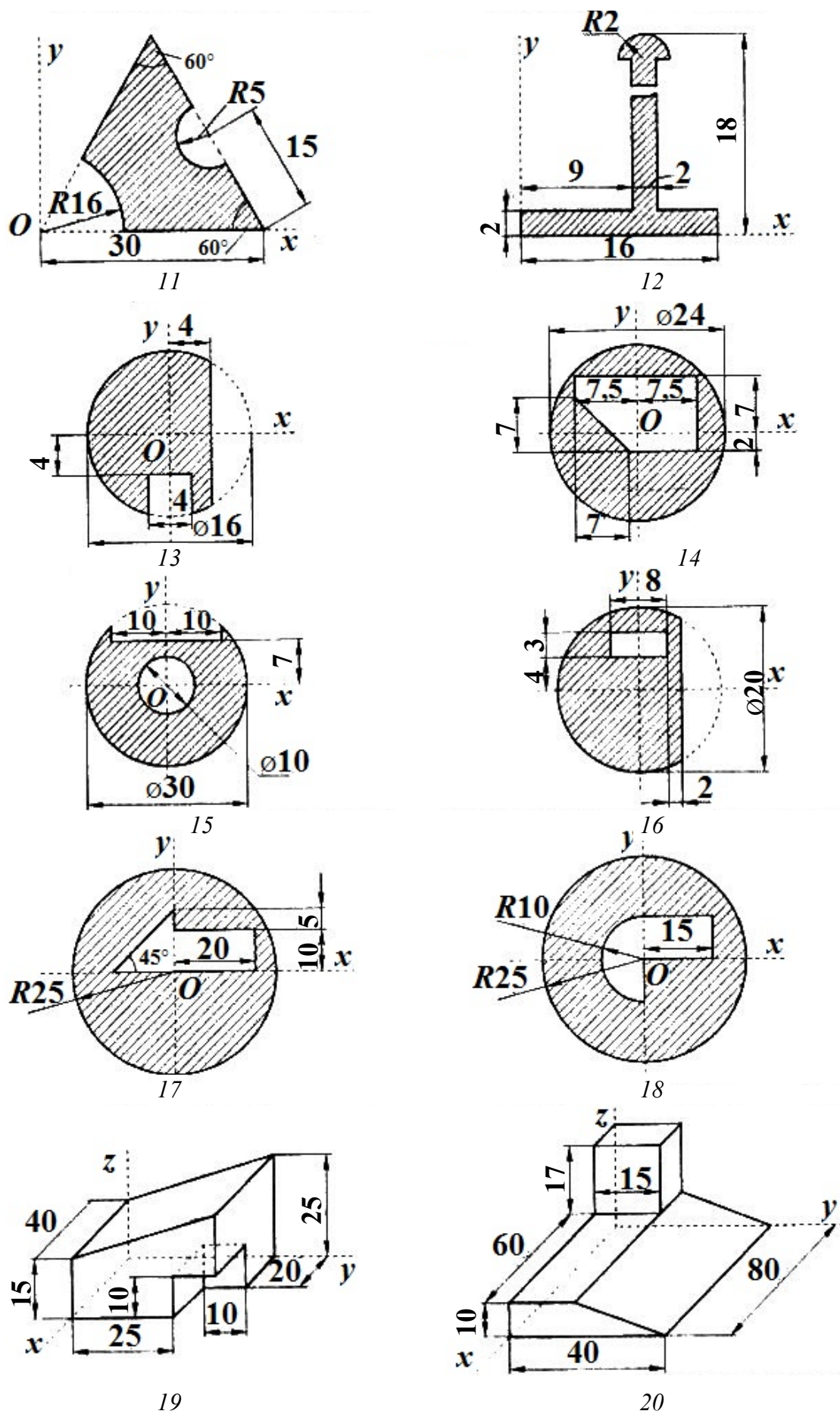


Рис. 6.8

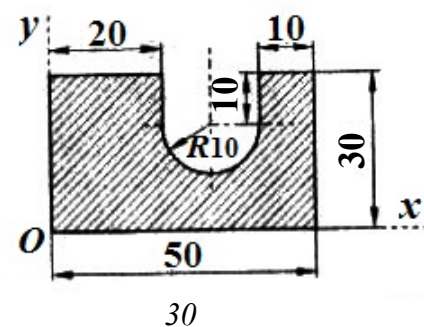
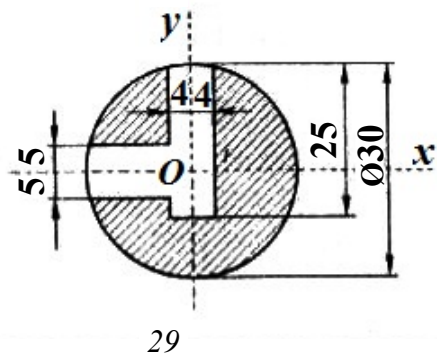
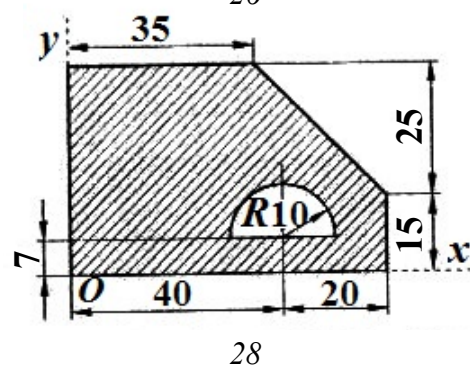
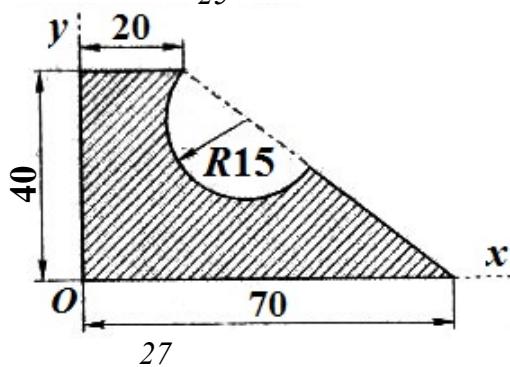
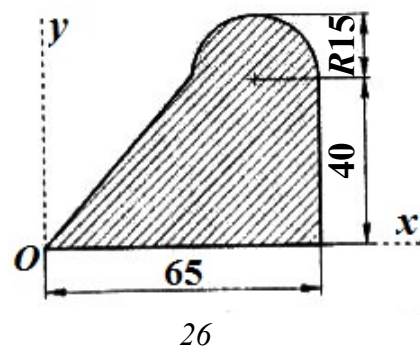
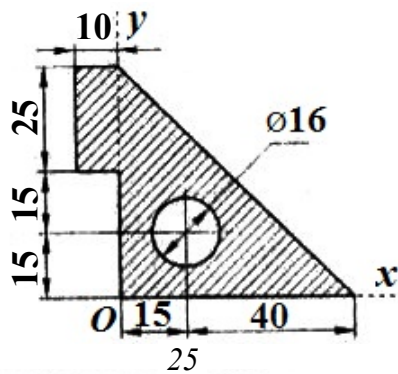
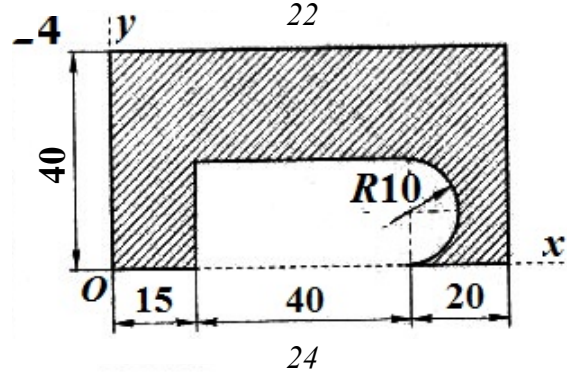
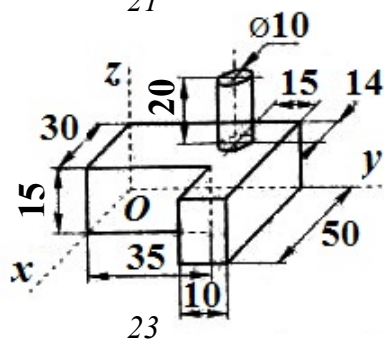
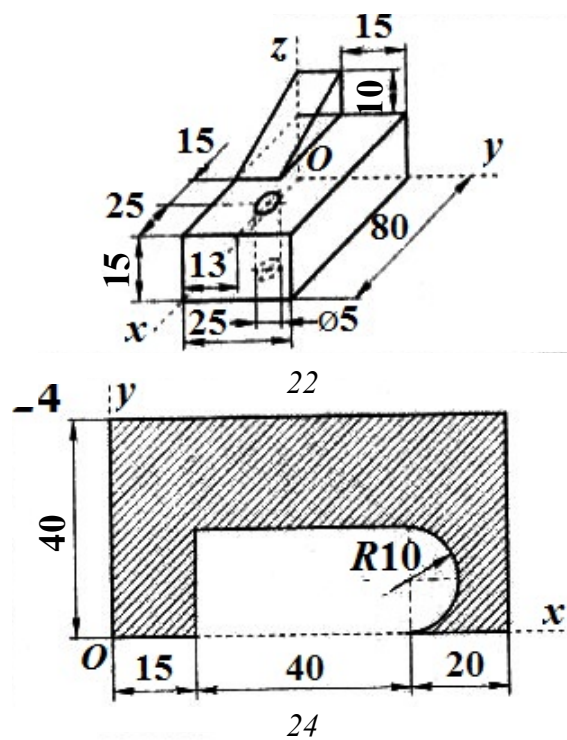
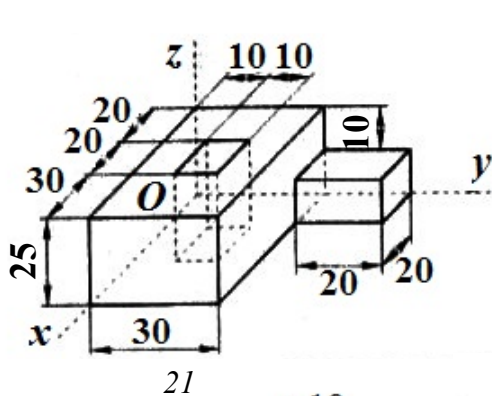


Рис. 6.9

7. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Соппротивление, возникающее при стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого, называется *трением скольжения*. Возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью соприкасающихся тел. Изучение всех факторов, влияющих на трение, представляет собой весьма сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

7.1. Законы трения скольжения

В инженерных расчётах обычно исходят из установленных опытным путём закономерностей, называемых законами трения скольжения.

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает *сила трения*, которая может принимать любые значения, отличные от нуля, до величины *предельной силы трения*: $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пр}}$.

Предельная сила трения численно равна произведению *статического коэффициента трения* f_0 на нормальное давление или нормальную реакцию: $F_{\text{пр}} = f_0 N$.

Значение предельной силы трения в достаточно широких пределах не зависит от площади соприкосновения при трении поверхностей.

Следует отметить, что величине $F_{\text{пр}}$ сила трения будет равна лишь в случае, когда действующая на тело сдвигающая сила достигнет такого значения, что при малейшем её увеличении тело начнёт двигаться (скользить). Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $F_{\text{пр}}$, будем называть *предельным равновесием*.

7.2. Реакция шероховатой поверхности. Угол трения

Рассмотрим тело весом $\bar{P}$, лежащее на горизонтальной шероховатой плоскости. Пусть к телу приложена горизонтальная сила $\bar{T}$, под действием которой тело находится в покое. В этом случае сила $\bar{T}$ должна уравновешиваться другой силой, равной по величине и направленной в противоположную сторону, – силой трения скольжения (рис. 7.1).

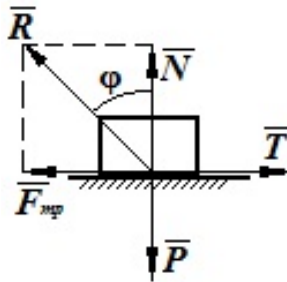


Рис. 7.1

Следовательно, полная реакция шероховатой поверхности складывается из двух составляющих: нормальной реакции $\bar{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\bar{F}_{\text{тр}}$. При увеличении силы трения от нуля до $F_{\text{пр}}$ полная реакция шероховатой поверхности изменится от $\bar{N}$ до $\bar{R}_{\text{пр}}$, а угол φ – от нуля до φ_0 . Наибольший угол φ_0 , который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью, называется *углом трения* (рис. 7.2а).

Если вектор полной реакции шероховатой поверхности $\bar{R}_{\text{пр}}$ поворачивать вокруг нормали, то он опишет поверхность конуса (рис. 7.2б), называемого *конусом трения*. Построив конус трения, можно определить равновесие тела. Для равновесия тела, лежащего на шероховатой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы действующая на тело сила проходила внутри конуса трения (или по его образующей через вершину конуса).



Рис. 7.2

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу $\vec{P}$, образующую угол α с нормалью (рис. 7.3), то тело сдвинется только в том случае, когда сдвигающее усилие будет больше предельной величины трения: $T > F_{\text{тр}}$.

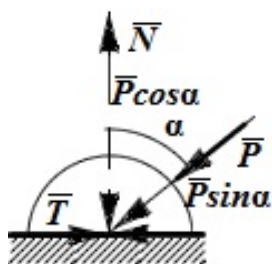


Рис. 7.3

Поскольку $T = P \sin \alpha$ и $N = P \cos \alpha$, то $F_{\text{тр}} = f_0 N = f_0 P \cos \alpha$. Условием сдвига является неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$ или $\tan \alpha > f_0$, т. к. $f_0 = \tan \varphi_0$, то $\alpha > \varphi_0$. Следовательно, *никакой силой, образующей с нормалью угол $\alpha < \varphi_0$, невозможно сдвинуть тело*. Это условие объясняет известное в инженерной практике явление заклинивания и самоторможения тел.

7.3. Методические указания по исследованию условий равновесия тел при наличии трения

Исследование равновесия тел с учётом трения сводится к рассмотрению предельных положений равновесия.

1. Выделить тело (систему тел), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Расставить все активные силы, действующие на твёрдое тело (систему тел).
3. Изобразить систему координат.
4. Освободить тело от связей, заменив их действие силами реакций. Реакцию шероховатой поверхности представить в виде нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$.
5. Составить уравнения равновесия для выделенного тела (системы тел).
6. Решить полученную систему уравнений, определить искомые величины.

Пример. Однородная лестница AB весом P опирается своим нижним концом на горизонтальный шероховатый пол, а верхним концом — на шероховатую вертикальную стену. Коэффициент трения лестницы о пол и стену одинаков и равен f_0 . Определить реакции пола N_A и стены N_B , а также наибольший угол α между стеной и лестницей в положении равновесия (рис. 7.4).

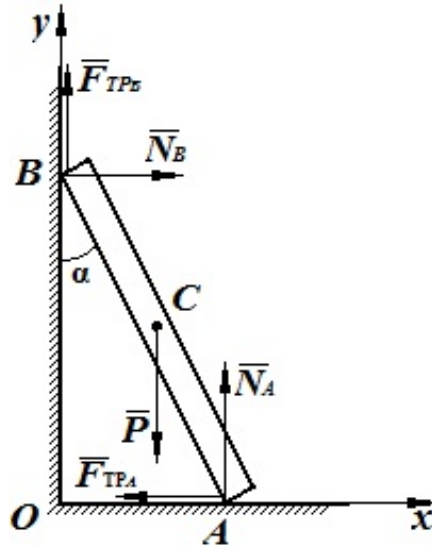


Рис. 7.4

Решение. Исследование равновесия тел с учётом сил трения сводится к рассмотрению предельных положений равновесия.

Так, при исследовании равновесия лестницы AB , опирающейся на негладкие пол и стену, следует считать угол наклона α предельным. При его увеличении равновесие лестницы нарушится.

Покажем на чертеже действующие на лестницу силы и составим уравнения равновесия сил (рис. 7.4):

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - F_{\text{тр}A} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_{\text{тр}B} - P + N_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad P \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{\text{тр}B} AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

где $F_{\text{тр}A} = f_0 \cdot N_A$; $F_{\text{тр}B} = f_0 N_B$.

Из уравнения (1) $N_B = F_{\text{тр}A} = f_0 N_A$.

Из уравнения (2): $f_0 N_B - P + N_A = 0$; $f_0 f_0 N_A - P + N_A = 0$,

$$N_A = \frac{P}{1 + f_0^2}; \quad N_B = \frac{f_0 P}{1 + f_0^2}.$$

Из уравнения (3): $P \frac{AB}{2} \sin \alpha - f_0 N_B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha = 0 \quad | : AB \cos \alpha$;

$$\frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha - f_0 N_B \operatorname{tg} \alpha - N_B = 0; \quad \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{f_0^2 P}{1 + f_0^2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{f_0 P}{1 + f_0^2} = 0 \quad | : \frac{P}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{2 f_0^2}{1 + f_0^2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2 f_0}{1 + f_0^2} = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{2 f_0^2}{1 + f_0^2} \right) = \frac{2 f_0}{1 + f_0^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1 + f_0^2 - 2f_0^2}{1 + f_0^2} \right) = \frac{2f_0}{1 + f_0^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2f_0}{1 - f_0^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{2f_0}{1 - f_0^2} \right).$$

Ответ: для того чтобы лестница была в равновесии, необходимо, чтобы угол наклона к стене не превышал угол $\alpha_0 \leq \operatorname{arctg} \frac{2f_0}{1 - f_0^2}$.

7.4. Равновесие твёрдого тела при наличии трения качения

Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения могут возникнуть силы реакции, препятствующие не только скольжению, но и качению. Примерами таких катков являются различные колёса, как, например, у электровозов, вагонов, автомашин, шарики и ролики в шариковых и роликовых подшипниках и т. п.

Пусть цилиндрический каток находится на горизонтальной плоскости под действием активных сил. Соприкосновение катка с плоскостью из-за деформации фактически происходит не вдоль одной образующей, как в случае абсолютно твёрдых тел, а по некоторой площадке. Если активные силы приложены симметрично относительно среднего сечения катка, т. е. вызывают одинаковые деформации вдоль всей его образующей, то можно изучать только одно среднее сечение катка. Этот случай рассмотрен ниже.

Между катком и плоскостью, на которой он покоится, возникают силы трения, если приложить к оси катка силу $\bar{S}$ (рис. 7.5), стремящуюся его двигать по плоскости.

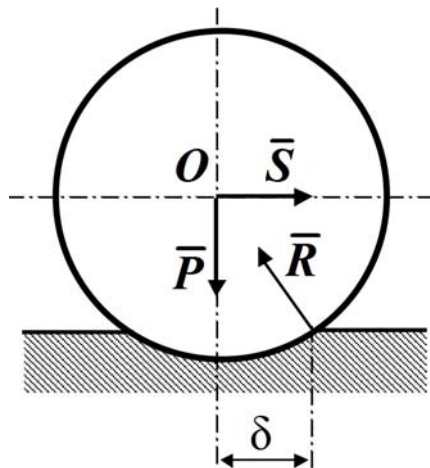


Рис. 7.5

Рассмотрим случай, когда сила $\bar{S}$ параллельна горизонтальной плоскости. Из опыта известно, что при изменении модуля силы $\bar{S}$ от нуля до некоторого предельного значения $\bar{S}_{\text{пр}}$ каток остаётся в покое, т. е. силы, действующие на каток, уравниваются. Кроме активных сил (веса $\bar{P}$ и силы $\bar{S}$), к катку, равновесие которого рассматривается, приложена реакция плоскости. Из условия равновесия трёх непараллельных сил следует, что реакция плоскости $\bar{R}$ должна проходить через центр катка O , т. к. две другие силы приложены к этой точке.

Следовательно, точка приложения реакции C должна быть смещена на некоторое расстояние δ от вертикали, проходящей через центр колеса, иначе реакция $\bar{R}$ не будет иметь горизонтальной составляющей, необходимой для удовлетворения условий равновесия. Разложим реакцию плоскости $\bar{R}$ на две составляющие: нормальную составляющую $\bar{N}$ и касательную реакцию $\bar{F}$, являющуюся силой трения (рис. 7.6).

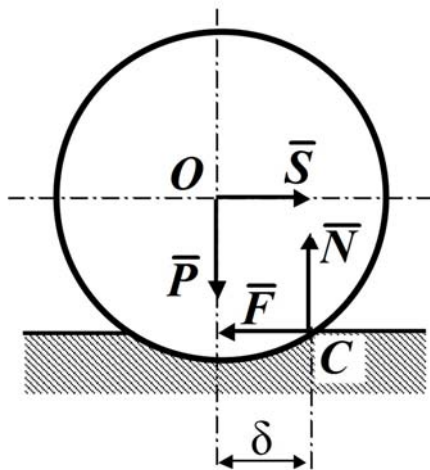


Рис. 7.6

В предельном положении равновесия катка к нему будут приложены две взаимно уравнивающиеся пары: одна пара сил ($\bar{S}_{\text{пр}}, \bar{F}$) с моментом $S_{\text{пр}} \cdot r$ (где r – радиус катка) и вторая пара сил ($\bar{N}, \bar{P}$), удерживающая каток в равновесии.

Момент пары, называемой *моментом трения качения*, определяется формулой

$$m_{\text{max}} = S_{\text{пр}} \cdot r = \delta \cdot N. \quad (1)$$

Из (1) следует, что для того чтобы имело место чистое качение (без скольжения), необходимо, чтобы сила трения качения $S_{\text{пр}} = F = \frac{\delta}{r} N$ была меньше максимальной силы трения скольжения:

$$F < f \cdot N, \quad (2)$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Таким образом, чистое качение (без скольжения) будет, если $\frac{\delta}{r} < f$.

Трение качения возникает из-за деформации катка и плоскости, вследствие чего соприкосновение между катком и плоскостью происходит по некоторой поверхности, смещённой от нижней точки катка в сторону возможного движения.

Если сила $\bar{S}$ не направлена по горизонтали, то её следует разложить на две составляющие, направленные по горизонтали и вертикали. Вертикальную составляющую следует сложить с силой $\bar{P}$. Снова приходим к схеме действия сил, изображенных на рис. 7.11.

Установлены следующие приближённые законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующий качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

Предельное значение момента m_{max} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции $\bar{N}$:

$$m_{\text{max}} = \delta \cdot N.$$

Коэффициент пропорциональности δ называют *коэффициентом трения качения при покое* или *коэффициентом трения второго рода*. Коэффициент δ имеет размерность длины.

3. Коэффициент трения качения δ зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости. Для случая качения вагонного колеса по стальному рельсу коэффициент трения качения $\delta \approx 0,5 \text{ мм}$.

Законы трения качения, как и законы трения скольжения, справедливы для не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформирующихся материалов катка и плоскости.

Эти законы позволяют не рассматривать деформации катка и плоскости, считая их абсолютно твёрдыми телами, касающимися в одной точке. В этой точке соприкосновения, кроме нормальной реакции и силы трения, надо приложить еще и пару сил, препятствующую качению.

Для того чтобы каток не скользил, необходимо выполнение условия

$$|\overline{F}| < F_{\max} = f \cdot N.$$

Для того чтобы каток не катился, должно выполняться условие

$$|m| < m_{\max} = \delta \cdot N.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Роль и место теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Усвоение теоретической механики усложняется тем, что в этой науке существенную роль играет моделирование и математическое представление исследуемых явлений природы. Поэтому при решении инженерных задач студенты зачастую испытывают значительные трудности. Проблему формирования у студентов исследовательского подхода к поставленным задачам (из раздела «Статика» курса теоретической механики) позволяет решить предлагаемое учебное пособие. В пособии доступно освещены основные темы раздела «Статика» с приведением всех необходимых доказательств. Даны методические рекомендации к решению задач и приведены примеры их решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1 / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. М. : Наука, 1986. 560 с.
2. **Васько, Н. Г. [и др.].** Статика и кинематика : учеб. пособие / Н. Г. Васько, А. Н. Кабельков, О. А. Кузина, Д. Г. Черненко // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск : ЮРГТУ, 2005. 136 с.
3. **Васько, Н. Г.** Статика и кинематика : методические указания к решению задач по теоретической механике / Н. Г. Васько, В. А. Кабельков, Н. И. Ковалева // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск : ЮРГТУ, 2002. 60 с.
4. **Кирсанов, М. Н.** Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.
5. **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. М. : Наука, 1986. 447 с.
6. **Сборник** заданий для курсовых работ по теоретической механике / под общ. ред. А. А. Яблонского. М. : Высш. шк., 1978. 388 с.
7. **Сборник** задач по теоретической механике / отв. ред. К. С. Колесников. М. : Наука, 1989. 446 с.
8. **Сборник** задач по теоретической механике / отв. ред. Н. А. Бражниченко. М. : Наука, 1989. 231 с.
9. **Сборник** коротких задач по теоретической механике / отв. ред. О. Э. Кепе. М. : Высш. шк., 1989. 368 с.
10. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С. М. Тарг. М. : Высш. шк., 1998. 416 с.
11. **Никитин, Е. М.** Краткий курс теоретической механики / Е. М. Никитин. М. : Наука, 1971. 400 с.
12. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : в 2 ч. Ч. 1. Статика и кинематика / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. 6-е изд., испр. М. : Высш. шк., 1984. 368 с. (и другие издания).
13. **Степанова, Г. В.** Расчёт ферм с использованием ЭВМ : метод. пособие / Г. В. Степанова. М. : 1988. 24 с.

Учебное издание

**Ольга Александровна Хохлова
Елена Владимировна Пономарёва**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
СТАТИКА**

Учебное пособие

Издано в соответствии с системой менеджмента качества
ФГОУ ВПО «АГТУ»,
сертифицированной DQS по (DIN EN) ISO: 9001
в сфере высшего и дополнительного профессионального образования

Директор издательства А. В. Гречкин
Редактор Н. А. Долина
Компьютерная верстка А. В. Калмыкова
Дизайн обложки А. В. Якушева

Подписано в печать 16.11.2010. Формат 60×84/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 4,60.
Тираж 150 экз. Заказ 917.
Издательство АГТУ.
414025, Астрахань, Татищева, 16.