АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. В. Пономарёва
О. А. Хохлова
А. В. Хохлов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Астрахань
Издательство АГТУ
2013

УДК 531.1(075.8)
ББК 22.21я73
П 56

*Допущено редакционно-издательским советом
Астраханского государственного технического университета
в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических
специальностей и направлений высших учебных заведений*

Рецензенты: кафедра «Промышленное и гражданское строительство» Астраханского инженерно-строительного института;

доктор технических наук, доцент А. М. Лихтер (Астраханский государственный университет);

кандидат технических наук А. В. Синельщиков (Астраханский государственный технический университет)

Пономарёва Е. В.
П 56 Теоретическая механика. Кинематика : учеб. пособие / Е. В. Пономарёва, О. А. Хохлова, А. В. Хохлов ; Астрахан. гос. техн. ун-т. – Астрахань : Изд-во АГТУ, 2013. – 144 с.

ISBN 978-5-89154-484-0

Приведены основы теории по разделу «Кинематика» в объёме требований программ по курсу «Теоретическая механика» для технических специальностей высшего профессионального образования. Представлены варианты и подробные примеры решения расчётно-графических работ по основным темам раздела, а также задания для самостоятельной работы студентов.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим специальностям.

УДК 531.1(075.8)
ББК 22.21я73

Рисунки изданы в авторской редакции

ISBN 978-5-89154-484-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие содержит теоретические материалы по кинематике, методические указания и варианты заданий к выполнению расчётно-графических работ (приводятся в конце глав), а также задания для самостоятельной работы студентов в форме тестов. Тестовые задания подобраны таким образом, что могут быть полезны при подготовке студентов к интернет-экзамену по дисциплине (за основу взяты тестовые задания предыдущих этапов интернет-экзаменов).

Относительная краткость разделов курса потребовала тщательного отбора теоретических материалов и примеров, поясняющих основные темы кинематики, и наиболее рациональные способы их изложения.

Пособие состоит из 6-ти глав, включающих базовые темы раздела «Кинематика» курса теоретической механики. Теоретические и практические материалы содержат таблицы и рисунки, что, несомненно, поможет освоению излагаемого раздела механики.

При отборе материала были использованы труды отечественных учёных (в библиографический список включены 16 трудов по теоретической механике), а также многолетний опыт сотрудников кафедры «Теоретическая и прикладная механика» АГТУ, которым авторы предлагаемого пособия выражают глубокую признательность.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, а также может быть использовано для организации самостоятельной работы при заочной и дистанционной формах обучения.

ВВЕДЕНИЕ

К числу основных отличительных тенденций, характерных для развития современного общества, относится быстрое увеличение объёма накопленной и реально используемой информации, необходимой квалифицированному специалисту в его профессиональной деятельности. Это позволяет предъявлять жёсткие требования к организации образовательного процесса в техническом университете.

В современных условиях вузовское образование должно ориентироваться не только на усвоение студентом определённого объёма информации, но и на развитие у будущего инженера склонности и способности к творческому мышлению, что даст возможность успешно адаптироваться к быстро изменяющимся требованиям практики. Такое мышление опирается на умение самостоятельно строить и использовать математические и физические модели объектов и явлений реального мира.

Формированию у будущих специалистов этих качеств способствует изучение теоретической механики – фундаментальной дисциплины, служащей своеобразным мостом между основными разделами высшей математики и остальными дисциплинами – как общетехническими, так и специальными. Она играет роль звена, связывающего в сознании студента мир абстрактных понятий математики с миром реальных объектов – машин, конструкций, приборов.

Теоретическая механика является базой для изучения всех общетехнических наук: сопротивления материалов, основ конструирования машин, материаловедения, гидро- и газодинамики, а также многих специальных курсов. Именно в рамках данной дисциплины студенты получают возможность практического применения общих понятий математики и физики к исследованию реальных систем, впервые учатся самостоятельно работать с моделями таких систем, квалифицированно применяя для исследования основные алгоритмы высшей математики.

Законы и выводы теоретической механики широко применяются при решении самых разнообразных и сложных технических задач: расчёты при постройке различных сооружений, проектировании зданий, механизмов и машин.

Предлагаемое учебное пособие рассчитано на студентов очной и заочной форм обучения. В пособии рассмотрен раздел теоретической механики «Кинематика», включающий темы: «Кинематика точки», «Кинематика поступательного и вращательного движения твёрдого тела», «Плоскопараллельное движение твёрдого тела», «Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки» и «Движение свободного твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Сложное движение твёрдого тела».

Наряду с изложением теоретического материала, приведены варианты заданий по основным темам раздела, рассмотрены примеры решения типовых задач, сопровождаемые соответствующими методическими указаниями; имеются задания для самостоятельной работы студентов.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Основные понятия и определения кинематики

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учёта их инертности (массы) и действующих на них сил. Кинематика занимает двойственное положение в механике. С одной стороны, кинематику можно рассматривать как вводный раздел динамики, т. к. установление основных кинематических зависимостей необходимо для изучения движения тел с учётом действующих сил. А с другой стороны, кинематика имеет самостоятельное практическое значение, в частности, при изучении передачи движения в механизмах.

Выделить кинематику в самостоятельный раздел механики впервые предложил Л. Эйлер (1772). Однако такое выделение фактически произошло гораздо позже – в первой половине XIX в. в связи с бурным развитием машиностроения.

Рассмотрим основные понятия кинематики.

Движение – изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для того, чтобы определить положение движущегося тела *А* с телом *Б*, по отношению к которому изучается движение (рис. 1), жёстко связывают систему координат. Это тело *Б* вместе с системой координат образует систему отсчёта.

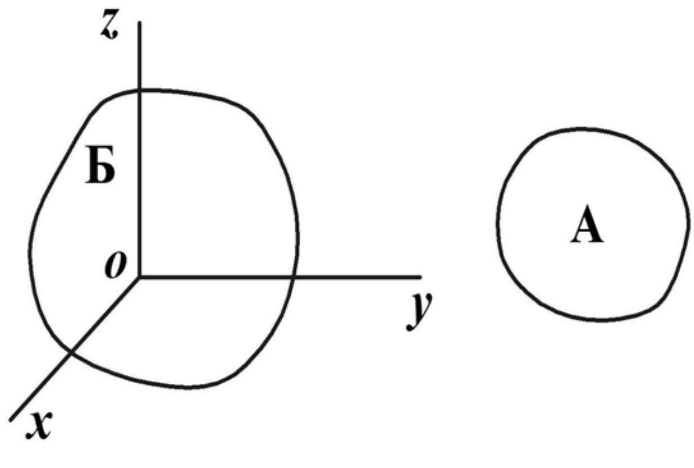


Рис. 1. Система отсчёта

Система отсчёта – тело, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени.

Траектория точки – непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчёта. Если траектория – прямая линия, то движение точки называется *прямолинейным*, если кривая – *криволинейным*.

Пространство в механике предполагается трёхмерным эвклидовым пространством, и все измерения в нём производятся на основе методов эвклидовой геометрии. За единицу длины принимается один метр.

Время в механике считается универсальным, т. е. одинаково протекающим во всех рассматриваемых системах отсчёта. За единицу времени принимается одна секунда.

В кинематике время t принимается за независимую переменную, а все другие величины выражаются как функции времени. Отсчёт времени ведётся от некоторого начального момента (обычно принимается $t_0 = 0$). Всякий данный момент времени t_1 определяется числом секунд, прошедших от начального момента до данного.

Скорость точки – это физическая векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки с течением времени. Единицей измерения скорости в системе СИ является м/с.

Ускорение точки – физическая векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки с течением времени. Единицей измерения ускорения в системе СИ является м/с^2.

Изучение кинематики начинают с изучения движения простейшего объекта – точки (кинематика точки), а затем переходят к изучению кинематики твёрдого тела.

Для изучения движения тела (или точки) необходимо, чтобы оно было математически описано (или, как говорят, задано движение). Кинематически задать движение тела (или точки) – значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчёта в любой момент времени.

Кинематика решает две важные задачи:

1) разработка методов задания движения тела (точки);

2) определение основных кинематических характеристик движения тела (точки).

1.2. Способы задания движения точки

Существует три способа задания движения точки:

– векторный;

– координатный;

– естественный.

1.2.1. Векторный способ задания движения

Пусть точка M движется по отношению к системе отсчёта $Oxyz$ (рис. 2). Положение точки M можно определить, задав её радиус-вектор $\overline{OM} = \overline{r}$, проведённый из любой точки O тела отсчёта в движущуюся точку M. При движении точки M этот вектор изменяется по модулю и направлению, являясь векторной функцией времени.

Закон движения точки в векторной форме: $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

Годограф радиуса-вектора – это геометрическое место последовательных положений конца радиуса-вектора $\overline{r} = \overline{r}(t)$, представляет собой траекторию точки.

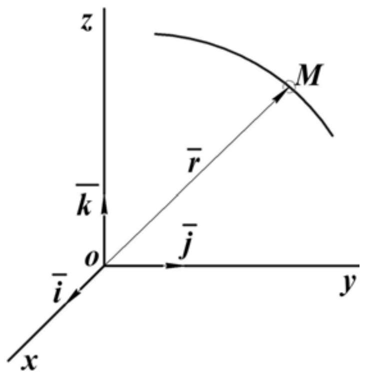


Рис. 2. Векторный способ задания движения точки

Векторный способ задания движения удобен для установления общих кинематических зависимостей, т. к. позволяет описать движение одним векторным уравнением.

Вектор скорости точки. Определение скорости точки при векторном способе задания движения.

Если точка в момент времени t находится в положении M, определяемом радиусом-вектором $\overline{r}$, а в момент времени t_1 находится в положении M_1, определяемом радиусом-вектором $\overline{r}_1$ (рис. 3), значит за время $\Delta t = t_1 - t$ её перемещение $\Delta\overline{r}$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, называемым *вектором перемещения*. Этот вектор направлен по хорде.

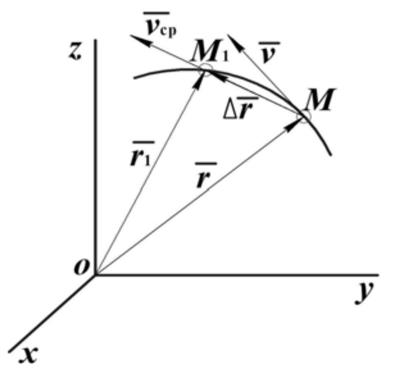


Рис. 3. Определение скорости точки при векторном способе задания движения

Из ΔOMM_1 следует, что $\bar{r}_1 = \bar{r} + \overline{MM_1}$ или $\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}$. Приращение вектора-функции $\bar{r}$ равно

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}.$$

Отношение вектора перемещения $\Delta\bar{r}$ к соответствующему промежутку времени даёт векторную величину, называемую *средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени* Δt:

$$\bar{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t},$$

где вектор средней скорости $\bar{v}_{\text{ср}}$ направлен так же, как и вектор перемещения.

Уменьшая промежуток времени, мы точнее определяем среднюю скорость точки за соответствующий промежуток времени.

Для того, чтобы получить характеристику скорости, не зависящую от выбора промежутка времени, вводится понятие *скорости точки в данный момент времени* (или *мгновенной скорости*):

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Таким образом, $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, т. е. вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора по времени.

Вектор ускорения точки. Определение ускорения точки при векторном способе задания движения.

Пусть в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\bar{v}$, а в момент времени t_1 – положение M_1 и скорость $\bar{v}_1$ (рис. 4).

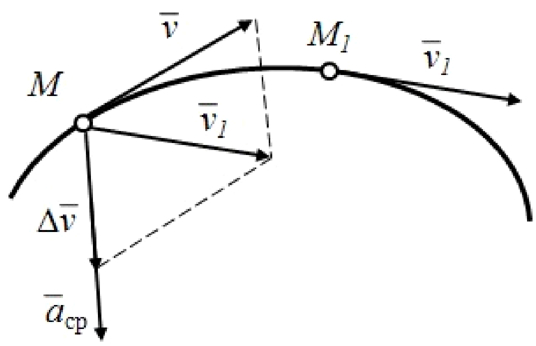


Рис. 4. Определение ускорения точки

Следовательно, за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$.

Вектор *среднего ускорения* точки за промежуток времени Δt равен отношению вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени:

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Направлен этот вектор так же, как и вектор приращения скорости $\Delta \bar{v}$ (в сторону вогнутости траектории).

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора по времени:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt};$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Расположение вектора ускорения точки по отношению к траектории:

1) если траектория – прямая линия, то вектор ускорения направлен вдоль траектории;

2) если траектория – плоская кривая, то вектор ускорения расположен в плоскости кривой и направлен в сторону вогнутости траектории;

3) если траектория точки – пространственная кривая, то вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории (см. п. 1.2.3).

1.2.2. Координатный способ задания движения

Положение точки по отношению к данной системе отсчёта определяется тремя декартовыми координатами *x, y, z* (рис. 5). При движении точки все три её координаты будут непрерывно меняться.

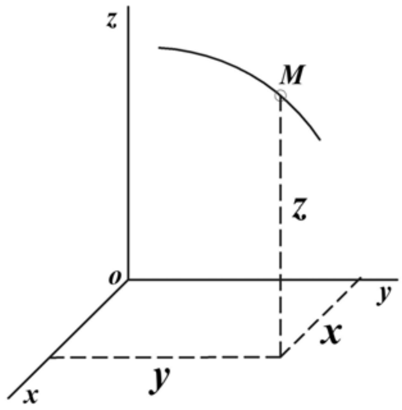


Рис. 5. Координатный способ задания движения точки

Чтобы задать закон движения, т. е. положение точки в пространстве в любой момент времени, необходимо определить значения координат для каждого момента времени, т. е. знать зависимости: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Уравнения движения точки в декартовых координатах отражают *закон движения точки при координатном способе задания движения точки*. Эти уравнения представляют собой также *уравнения траектории точки в параметрической форме*. Для того, чтобы найти уравнение траектории в координатной форме, надо исключить время *t*.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения.

Положение точки определяется радиусом-вектором, связанным с координатами следующей зависимостью: $\bar{r} = r_x\bar{i} + r_y\bar{j} + r_z\bar{k}$, т. к. $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$, а $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты (единичные векторы) осей координат.

Так как скорость точки равна первой производной от радиуса-вектора, то разложение скорости на компоненты по осям координат примет вид

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k},$$

иначе скорость точки в данной системе отсчёта равна

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости точки на координатные оси *x*, *y*, *z*.

Проекции вектора скорости точки на оси декартовой системы координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Полный модуль скорости точки равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Направляющие косинусы, определяющие направление вектора скорости точки в пространстве, вычисляются по формулам:

$$\cos(\bar{v},\bar{i}) = \frac{v_x}{v};\ \cos(\bar{v},\bar{j}) = \frac{v_y}{v};\ \cos(\bar{v},\bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

Определение ускорения точки при координатном способе задания движения.

Ускорения точки также можно разложить на компоненты $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, а поскольку ускорение точки равно первой производной скорости точки по времени, то

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k}.$$

Проекции ускорения точки на оси декартовой системы координат равны первым производным от проекций скоростей или вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x};\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y};\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения точки находится следующим образом

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направляющие косинусы, определяющие направление вектора ускорения точки в пространстве, вычисляются по формулам:

$$\cos(\bar{a},\bar{i}) = \frac{a_x}{a};\ \cos(\bar{a},\bar{j}) = \frac{a_y}{a};\ \cos(\bar{a},\bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Если движение точки задано в декартовых прямоугольных координатах и точка движется, например, в плоскости *Oxy*, то в этом случае во всех формулах, выражающих скорости и ускорения, должна быть отброшена проекция на ось *Oz*.

1.2.3. Естественный (или натуральный) способ задания движения

Естественный (или натуральный) способ задания движения используют, когда известна траектория *AB* движения точки (рис. 6). Траекторией в данном случае будет геометрическое место последовательных положений движущейся точки по отношению к данной системе отсчёта.

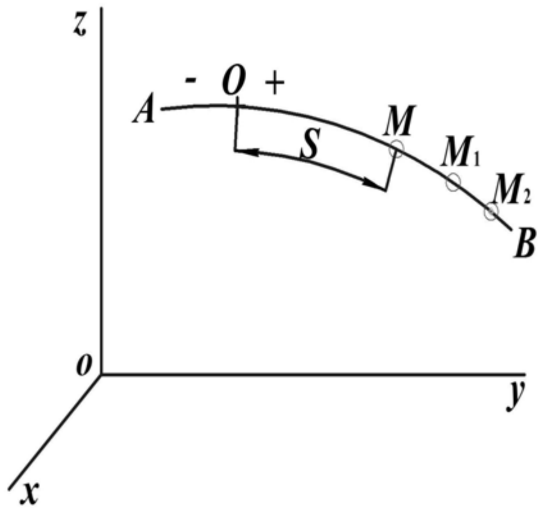


Рис. 6. Естественный способ задания движения точки

На траектории AB выберем неподвижную точку O, которую примем за начало отсчёта. С течением времени точка будет занимать положения M, M_1, M_2 и т. д., определяемые координатами S, S_1, S_2 и т. д. Следовательно, чтобы знать положение точки на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость $S = f(t)$ *– закон движения точки по траектории (дуговая координата)*.

Таким образом, чтобы задать движение естественным способом, необходимо задать:

1) траекторию точки;

2) начало O и направление отсчёта положительных и отрицательных дуговых координат S, определяющих положение точки M на траектории;

3) закон движения точки по траектории $S = f(t)$ (как функцию дуговой координаты от времени).

При естественном способе задания движение точки рассматривают в естественных осях (осях естественного трёхгранника).

Естественные оси координат (скоростные оси, оси естественного трёхгранника).

Естественными координатными осями называются три взаимно перпендикулярные оси: *касательная* τ, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, *главная нормаль* n, направленная в сторону вогнутости кривой, и *бинормаль* b, направленная по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось Oz направлена по отношению к осям Ox и Oy в правой системе координатных осей. Единичные векторы-орты этих осей обозначаются соответственно $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ и $\overline{b}$ (рис. 7).

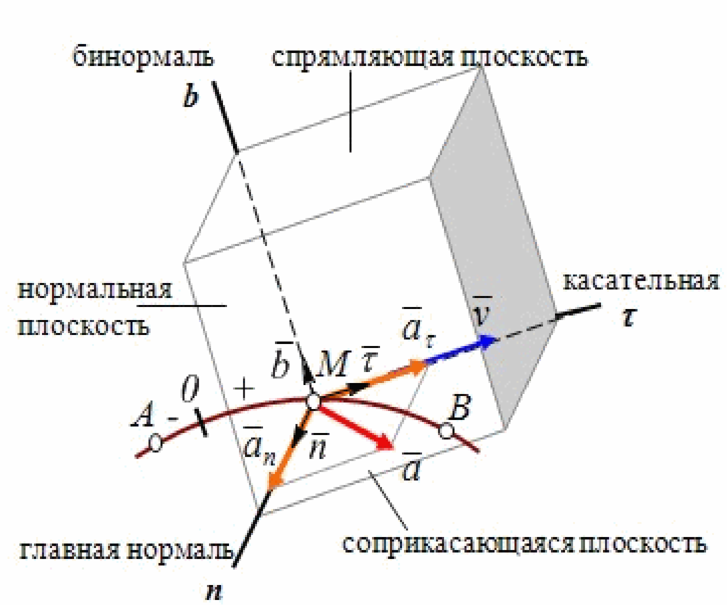


Рис. 7. Оси естественного трёхгранника

Естественные оси попарно образуют координатные плоскости (грани естественного трёхгранника):

1) τ, n – соприкасающаяся плоскость;

2) τ, b – спрямляющая плоскость;

3) n, b – нормальная плоскость.

Естественные оси имеют начало в точке M кривой и при движении точки M по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимно перпендикулярными, но изменяя своё направление в пространстве.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения.

Пусть дана траектория AB точки M и задан закон движения точки по траектории $S = f(t)$ (рис. 8).

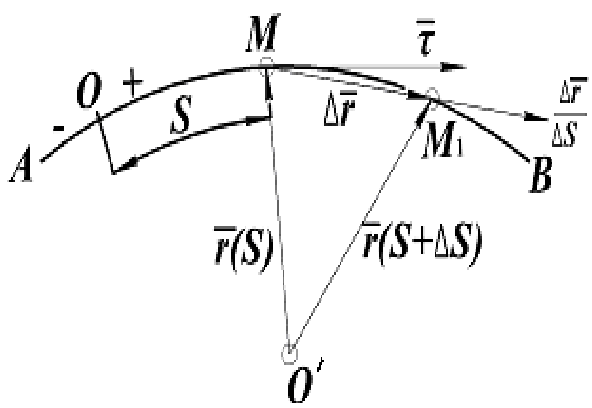


Рис. 8. Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ – положение M_1.

Дуговые координаты этих точек имеют следующие значения: $S = \cup OM$ и $S_1 = \cup OM_1 = S + \Delta S$, где $\Delta S = \cup MM_1$ – приращение дуговой координаты.

Проведём из произвольного центра O' в точку M радиус-вектор, тогда скорость этой точки будет равна $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$.

Введём в качестве промежуточной переменной дуговую координату S, от которой, очевидно, зависит радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки. Таким образом, радиус-вектор является сложной функцией времени: $\bar{r} = \bar{r}(S)$, т. к. $S = f(t)$. Тогда скорость точки M равна

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

где $\dfrac{d\bar{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ вектор $\dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ (направлен так же как и вектор $\Delta \bar{r}$) стремится к направлению касательной в соответствующей точке в сторону увеличения дуговой координаты. Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\cup MM_1} = 1.$$

Следовательно, $\left| \dfrac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$. Значит, $\dfrac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ – есть орт касательной. Тогда скорость точки M равна $\bar{v} = \dfrac{ds}{dt}\bar{\tau}$. Алгебраическая величина скорости точки равна $v = \dfrac{ds}{dt}$.

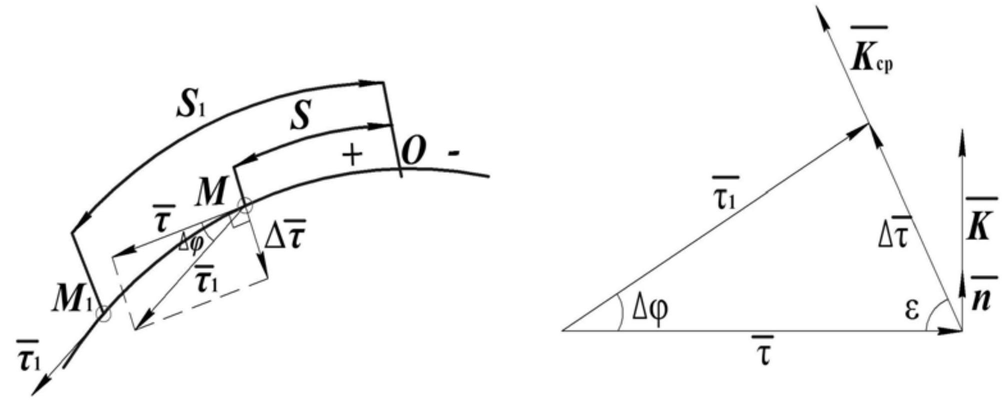
Скорость точки определяется производной по времени t от дуговой координаты.

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону движения (в сторону возрастания дуговой координаты), если $v > 0$, или в обратную сторону, если $v < 0$.

Вектор кривизны траектории.

Возьмём на траектории две точки M и M_1 (рис. 9*а*) с координатами $OM = S$ и $OM_1 = S_1 = S + \Delta S$.

Покажем орты касательных $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ в точках M и M_1. Модули ортов постоянны $|\bar{\tau}| = |\bar{\tau}_1| = 1$ при перемещении точки по кривой. Следовательно, орт $\bar{\tau}$ является переменным вектором по направлению.



а *б*

Рис. 9. Определение модуля и направления вектора кривизны траектории:
а – построение векторного параллелограмма; *б* – построение вектора $\overline{K}$

Определим приращение вектора $\overline{\tau}$ на участке $MM_1 = \Delta S$. Для этого построим в точке *M* векторный параллелограмм со сторонами $\overline{\tau}$ и $\Delta\overline{\tau}$ и диагональю $\overline{\tau}_1$, т. е. $\overline{\tau}_1 = \overline{\tau} + \Delta\overline{\tau}$.

Разделив приращение орта $\overline{\tau}$ на приращение дуговой координаты ΔS, получим значение $\dfrac{\Delta\overline{\tau}}{S} = \overline{K}_{\text{ср}}$ – вектор, характеризующий поворот касательной к кривой на некотором участке MM_1, который называется *вектором средней кривизны кривой* на этом участке MM_1.

Направление этого вектора совпадает с направлением вектора приращения орта касательной $\Delta\overline{\tau}$, т. е. направлен в сторону вогнутости кривой.

Предел, к которому стремится вектор средней кривизны кривой, когда $\Delta S \to 0$, называется *вектором кривизны кривой в данной точке:*

$$\overline{K} = \lim_{\Delta S \to 0} \overline{K}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta S} = \frac{d\overline{\tau}}{dS}.$$

Вектор кривизны кривой в данной точке равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате. Определим модуль и направление вектора $\overline{K}$ (рис. 9*б*).

Модуль $\left|\Delta\overline{\tau}\right|$ найдём как длину основания равнобедренного треугольника с малым углом $\Delta\varphi$ в вершине и боковыми сторонами, равными единице. Тогда

$$\left|\Delta\overline{\tau}\right| = 2\tau \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cong 2 \cdot 1 \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta\varphi.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что предел отношения угла $\Delta\varphi$ к приращению дуговой координаты ΔS при $\Delta S \to 0$ равен *кривизне кривой* $\frac{1}{\rho}$, где ρ – *радиус кривизны кривой в данной точке*.

Таким образом,

$$\left|\bar{K}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left|\Delta\bar{\tau}\right|}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\rho}.$$

Угол ε при основании равнобедренного треугольника равен

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

При $\Delta S \to 0$ углы равнобедренного треугольника будут стремиться: $\Delta\varphi \to 0$, $\varepsilon \to \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ перпендикулярен орту $\bar{\tau}$, т. е. направлен по главной нормали; отсюда

$$\bar{K} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho}\bar{n}.$$

Окончательно, вектор кривизны кривой равен произведению орта $\bar{n}$ на кривизну кривой: $\bar{K} = \frac{1}{\rho}\bar{n}$.

Определение ускорения точки при задании её движения естественным способом.

Вектор скорости точки определяется из выражения $\bar{v} = \frac{dS}{dt}\bar{\tau}$.

Вектор ускорения точки равен

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\bar{\tau}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}\bar{\tau} + \frac{dS}{dt}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\bar{\tau} + \frac{dS}{dt}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\bar{\tau} + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\frac{1}{\rho}\bar{n},$$

или

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется *нормальным ускорением точки*, а другой направлен по касательной и называется *касательным ускорением точки*.

Так, $\overline{a}_\tau = \dfrac{d^2S}{dt^2}\overline{\tau}$ – *касательное ускорение точки*, существующее лишь при неравномерном движении точки и характеризующее изменение модуля скорости точки.

А $\overline{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$ – *нормальное ускорение точки*, существующее лишь при криволинейном движении точки и характеризующее изменение направления скорости точки.

Модуль касательного ускорения точки равен

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2},$$

т. к. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ и $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v_x \dfrac{dv_x}{dt} + v_y \dfrac{dv_y}{dt} + v_z \dfrac{dv_z}{dt}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

или

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}},$$

где знак «плюс», полученный в ответе после вычисления дроби, соответствует ускоренному движению точки, а знак «минус» – замедленному.

Модуль нормального ускорения точки определяется по формуле $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$.

Бинормальное ускорение точки всегда равно нулю, т. к. точка всегда находится в соприкасающейся плоскости $(a_b = 0)$.

1.3. Частные случаи движения точки

Существует несколько случаев движения точки.

1. Прямолинейное неравномерное движение.

Если траекторией точки является прямая, то $\rho = \infty$ и $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = 0$.

Следовательно,

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

2. Равномерное криволинейное движение.

Если $v = \text{const}$, $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, то $a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

Поскольку $v = \frac{dS}{dt}$, $dS = vdt$, то $\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t vdt$, $S - S_0 = vt$, $S = S_0 + vt$ – уравнение равномерного криволинейного движения.

3. Равномерное прямолинейное движение.

В этом случае $v = \text{const}$, $\rho = \infty$, поэтому $a = a_\tau = a_n = 0$.

4. Равнопеременное криволинейное движение.

Если $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const}$, то $dv = a_\tau dt$.

Проинтегрируем дважды данное равенство в известных пределах:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_\tau \int_0^t dt;$$

получим $v - v_0 = a_\tau t$, $v = v_0 + a_\tau t$.

Поскольку $v = \frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t$, то

$$dS = v_0 dt + a_\tau t dt; \quad \int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt; \quad S - S_0 = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Окончательно, $S = S_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}$ – уравнение равнопеременного криволинейного движения.

В частном случае, при $S_0 = 0$ уравнение примет вид

$$S = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Определение кинематических характеристик движущейся точки при различных способах задания её движения представлено в табл. 1.

Таблица 1

Кинематические характеристики точки при различных способах задания её движения

Способ задания движения точки	Что задаётся	Определение скорости ($\bar{v}$)	Определение ускорения ($\bar{a}$)
Векторный	$\bar{r}=\bar{r}(t)$	$\bar{v}=\dfrac{d\bar{r}}{dt}$	$\bar{a}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}=\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$
Координатный	$x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$; $z=f_3(t)$.	$v_x=\dot{x}$; $v_y=\dot{y}$; $v_z=\dot{z}$; $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$; $\cos(\bar{v},\bar{i})=\dfrac{v_x}{v}$; $\cos(\bar{v},\bar{j})=\dfrac{v_y}{v}$; $\cos(\bar{v},\bar{k})=\dfrac{v_z}{v}$.	$a_x=\ddot{x}$; $a_y=\ddot{y}$; $a_z=\ddot{z}$; $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$; $\cos(\bar{a},\bar{i})=\dfrac{a_x}{a}$; $\cos(\bar{a},\bar{j})=\dfrac{a_y}{a}$; $\cos(\bar{a},\bar{k})=\dfrac{a_z}{a}$.
Естественный	$S=f(t)$, траектория, начало и направление отсчёта.	$\bar{v}=\dfrac{dS}{dt}\bar{\tau}$; $v=\dfrac{dS}{dt}$.	$\bar{a}=\bar{a}_\tau+\bar{a}_n$; $a=\sqrt{a_\tau^{\,2}+a_n^{\,2}}$; $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2S}{dt^2}$; $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$.

1.4. Методические указания и пример выполнения расчётно-графической работы по теме «Кинематика точки»

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Кинематика точки». При решении задачи на определение уравнения траектории точки и её кинематических характеристик целесообразно придерживаться следующего порядка:

1) исключить из уравнений движения точки в координатной форме время и получить уравнение относительно координат точки. В некоторых вариантах при расчётах следует использовать тригонометрические тождества:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

2) построить траекторию точки, указав при этом, является ли траекторией движения точки вся линия или какая-то её часть;

3) по уравнениям движения точки найти её координаты, проекции скорости и ускорения на оси координат в данный момент времени, показать на чертеже положение точки и построить векторы скорости и ускорения;

4) определить касательное и нормальное ускорения точки в данный момент времени и показать на чертеже разложение вектора ускорения точки на указанные составляющие;

5) определить по направлениям векторов скорости и касательного ускорения точки, является ли её движение в данный момент времени ускоренным или замедленным;

6) найти радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Пример.

Условие. Точка M движется в плоскости Oxy. По заданным уравнениям движения $x = x(t)$, $y = y(t)$ точки M **(**где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах) найти траекторию точки, а также для заданного момента времени $t = t_1$ найти положение точки на её траектории, определить и построить векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений, вычислить радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Исходные данные.

Уравнения движения точки:

$$x(t) = -4\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right) - 1; \qquad y(t) = -4\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right);$$

$t_1 = 1$(с) – заданный момент времени, $t_0 = 0$ – начальный момент времени.

Решение.

1. Уравнения движения $x(t)$, $y(t)$ являются также *уравнениями траектории в параметрическом виде*. Чтобы получить *уравнение траектории в координатной форме*, надо исключить из уравнений движения параметр t. Пользуясь основным тригонометрическим тождеством $\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\right)$, получим следующее уравнение:

$$(x(t)+1)^2 + (y(t))^2 = 4.$$

Траектория движения точки – окружность радиусом 2 см с центром в точке с координатами (– 1; 0) (рис. 10).

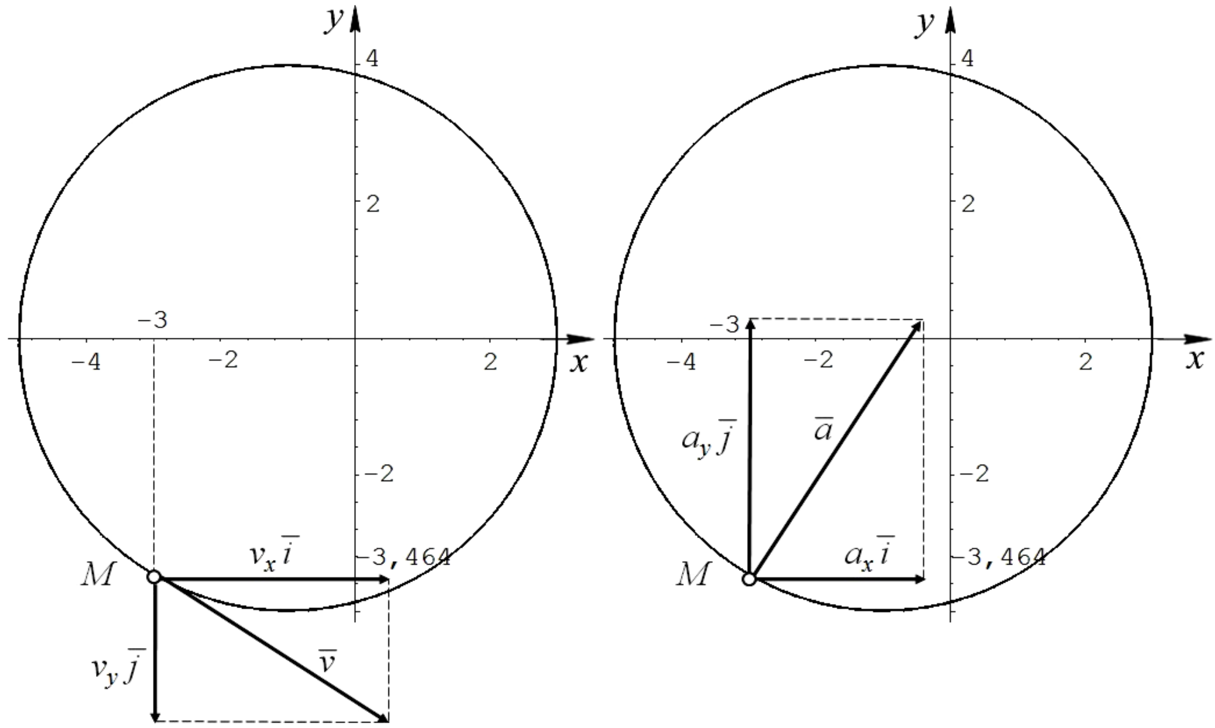


Рис. 10. Построение скоростей и ускорений точки

В момент времени t_1 = 1(с) координаты точки M равны: $x = -3$ (см), $y = -3{,}464$ (см).

2. Модуль скорости точки определим по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где v_x, v_y – проекции скорости на оси x и y.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 = 1(с) $v_{x(t_1)} = 3{,}628$(см/с), $v_{y(t_1)} = -2{,}094$(см/с), $v = 4{,}189$ (см/с).

3. Модуль полного ускорения точки вычислим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где a_x, a_y – проекции ускорения на оси x и y.

$$\mathrm{a}_x = \frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}} = \frac{4\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad \mathrm{a}_y = \frac{\mathrm{dv_y}}{\mathrm{dt}} = \frac{4\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При t_1 = 1(с) $a_{x(t_1)} = 2{,}193$(см/с^2), $a_{y(t_1)} = 3{,}799$(см/с^2), $a = 4{,}386$ (см/с^2).

4. Определение касательного ускорения точки:

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{3{,}628 \cdot 2{,}193 + (-2{,}094 \cdot 3{,}799)}{4{,}189} = 0 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

5. Определение нормального ускорения точки:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a^2\tau};$$

$$\text{a}_n = \sqrt{4{,}386^2 - 0^2} = 4{,}386 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

6. Определение радиуса кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}; \quad \rho = \frac{4{,}189^2}{4{,}386} = 4 \text{(см)};$$

Ответ: $v_{x(t_1)} = 3{,}628$ (см/с), $v_{y(t_1)} = -2{,}094$ (см/с), $v = 4{,}189$ (см/с); $a_{x(t_1)} = 2{,}193$ (см/с^2), $a_{y(t_1)} = 3{,}799$ (см/с^2), $a = 4{,}386$ (см/с^2); $a_\tau = 0$ см/с^2, $a_n = 4{,}386$ (см/с^2); $\rho = 4$ (см).

1.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Кинематика точки»

Условие. Точка B движется в плоскости Oxy (рис. 11). Закон движения точки задан уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах. Зависимости $x = x(t)$ и $y = y(t)$ даны в табл. 2.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t = t_1$ определить скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

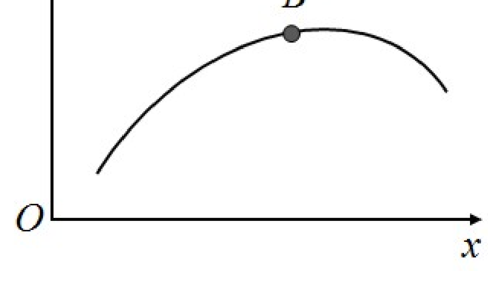


Рис. 11. Схема к заданию

Варианты исходных данных

№	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t_1, с
1	$\sin(2t) + 3$	$\cos(2t) + 4$	$\pi/6$
2	$3\sin(\pi t/3)$	$-2\cos(\pi t/3) + 2$	1
3	$4\cos(\pi t^2/3) + 2$	$-4\sin(\pi t^2/3) - 3$	1
4	$-4\sin(\pi t^2/6) + 2$	$4\cos(\pi t^2/6) + 2$	1
5	$6\sin(\pi t/2)$	$8\cos(\pi t/2) - 1$	5
6	$3\cos(t)$	$-5\sin(t) + 3$	$\pi/4$
7	$-2\cos(2t)$	$\sin(2t) + 3$	$\pi/4$
8	$-3\sin(\pi t/3) - 1$	$-3\cos(\pi t/3)$	1
9	$3\cos(\pi t^2/3) - 1$	$2\sin(\pi t^2/3) + 2$	1
10	$4\sin(\pi t^2/6)$	$-2\cos(\pi t^2/6) - 3$	1
11	$-\sin(\pi t/2) + 1$	$\cos(\pi t/2) + 2$	1/3
12	$5\sin(t) + 1$	$3\cos(t) - 3$	$\pi/4$
13	$2\cos(2t) + 3$	$-3\sin(2t) + 2$	$\pi/3$
14	$2\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/3) + 1$	1
15	$\cos(\pi t^2/3)$	$2\sin(\pi t^2/3) + 4$	1
16	$\cos(\pi t) + 1$	$2\sin(\pi t)$	2/3
17	$2\sin(2t) - 3$	$\cos(2t) - 4$	$\pi/3$
18	$2\cos(\pi t/3) + 1$	$-2\sin(\pi t/3) - 4$	1
19	$2\cos(2t) + 1$	$\sin(2t) - 3$	$\pi/6$
20	$-2\sin(\pi t/3)$	$4\cos(\pi t/3) + 1$	1
21	$2\sin(2t) - 3$	$3\cos(2t) - 2$	$\pi/3$
22	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
23	$4\cos(2t) - 1$	$3\sin(2t) - 3$	$\pi/6$
24	$-\cos(2t) - 2$	$\sin(2t) + 1$	$\pi/3$

Примечание. По данной и другим темам варианты заданий определяет преподаватель.

1.6. Задания для самостоятельной работы

1.6.1. Ускорение точки при векторном способе задания движения

Пример. Движение материальной точки M задано уравнением

$$\bar{r} = t^3\bar{i} - \cos\alpha\bar{j} + e^{-2}t\bar{k}.$$

Ускорение точки направлено … (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

1) перпендикулярно оси Ox;
2) параллельно оси Ox;
3) параллельно плоскости yOz;
4) параллельно оси Oz.

Решение. Ускорение точки определяется следующим образом:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}\,,$$

в данном случае

$$a = (t^3)''\bar{i} + (-\cos\alpha)''\ \bar{j} + (e^{-2}\cdot t)''\ \bar{k},$$

или

$$\bar{a} = 6t\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k}\,.$$

Так как $\bar{a} = a_x\cdot\bar{i} + a_y\cdot\bar{j} + a_z\cdot\bar{k}$, то $a_x \neq 0$, $a_y = 0$, $a_z = 0$.

Ответ: полное ускорение точки параллельно оси *Ox*.

Возможны и другие варианты ответов, например, полное ускорение точки направлено:

– перпендикулярно оси *Oy*;
– перпендикулярно оси *Oz*;
– параллельно плоскости *xOy*;
– параллельно плоскости *xOz*;
– перпендикулярно плоскости *yOz*.

Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

Условие. Движение материальной точки *M* задано уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Ускорение точки направлено … (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

Вариант 1

$$\bar{r} = 12\bar{i} + e^{3t}\bar{j} + 8t^4\bar{k}$$

а) перпендикулярно плоскости *xOz* (не параллельно осям);
б) перпендикулярно плоскости *yOz*;
в) перпендикулярно оси *Ox*;
г) параллельно оси *Ox*.

Вариант 2

$$\bar{r} = 2t\bar{i} + 3t\bar{j} - 4e^{3t}\bar{k}$$

а) параллельно оси *Ox*;
б) параллельно плоскости *xOy*;
в) перпендикулярно оси *Oz*;
г) параллельно оси *Oz*.

Вариант 3

$$r = 6t\bar{i} - \cos\pi t\bar{j} + (3+\sqrt{2})^4 t\bar{k}$$

а) перпендикулярно плоскости *xOz*;
б) перпендикулярно оси *Oy*;
в) параллельно плоскости *xOy* (не параллельно осям);
г) параллельно плоскости *xOz*.

Вариант 4

$\overline{r} = 3t^4\overline{i} - 3t\overline{j} + e^{-2t}\overline{k}$

а) перпендикулярно плоскости xOz;

б) перпендикулярно оси Oy;

в) параллельно плоскости xOz (не параллельно осям);

г) параллельно оси Oy.

1.6.2. Ускорение точки при координатном способе задания движения

Пример. Точка движется согласно уравнениям $x = 2t$, $y = 3t^2$ (x, y – в метрах). Модуль ускорения точки (в м/с^2) равен … (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 0;

б) 6;

в) 12;

г) 3.

Решение. Модуль ускорения точки при координатном способе задания движения точки определяется следующим образом:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения точки на координатные оси, которые вычислим:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = (2t)'' = 0\,(\text{м/с}^2), \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \left(3t^2\right)'' = 6\,(\text{м/с}^2), \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0\,(\text{м/с}^2).$$

Модуль полного ускорения точки равен

$$a = \sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2} = 6\,(\text{м/с}^2).$$

Ответ: $a = 6$ (м/с^2).

1.6.3. Ускорение точки при естественном способе задания движения

Пример. По окружности радиуса R = 2(м) движется точка по закону $S = 2t^2$, где t – время в секундах, S – в метрах. Нормальное ускорение точки в момент времени t = 1(с) равно … (м/с^2) (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 12;

б) 8;

в) 18;

г) 16;

д) 6.

Решение. Модуль нормального ускорения точки определяется по формуле $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, где v^2 – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории.

При естественном способе задания движения точки модуль скорости определяется по формуле $v = \frac{dS}{dt}$. В данном случае

$$v = \frac{d}{dt}\left(2t^2\right) = 4 \cdot t; \quad v(1) = 4(\text{м/с}).$$

Если траектория движения точки – окружность, то радиус кривизны траектории равен радиусу самой окружности, т. е. $\rho = R$. Тогда нормальное ускорение точки будет равно

$$a_n = \frac{4^2}{2} = 8 \ (\text{м/с}^2).$$

Ответ: $a_n = 8\,(\text{м/с}^2)$.

1.6.4. Радиус кривизны траектории при естественном способе задания движения

Пример. Точка движется по заданной траектории по закону $S(t) = -2 - 3t + 4t^2$ (м). В момент времени t = 1(с) нормальное ускорение равно a_n = 10(м/с^2). Радиус кривизны траектории ρ (м) в данный момент равен ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 0,5;

б) 2,5;

в) 0,9;

г) 0,1.

Решение. Модуль нормального ускорения точки определяется по формуле $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, где v – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории.

Отсюда

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{a_n}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2;$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-2 - 3 \cdot t + 4 \cdot t^2\right) = -3 + 8t.$$

При $t = 1$(с)

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=1} = -3 + 8 \cdot 1 = 5 \text{ (м/с)}.$$

Окончательно, $\rho = \frac{1}{10} \cdot 5^2 = 2{,}5 \text{ (м)}$.

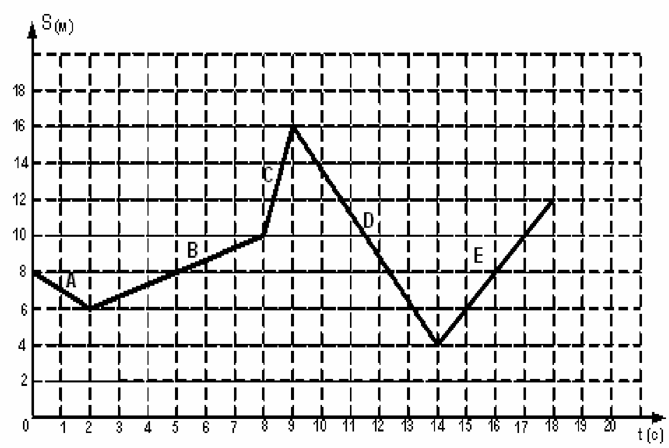
Ответ: $\rho = 2{,}5 \text{ (м)}$.

1.6.5. Нахождение скорости точки по графику движения

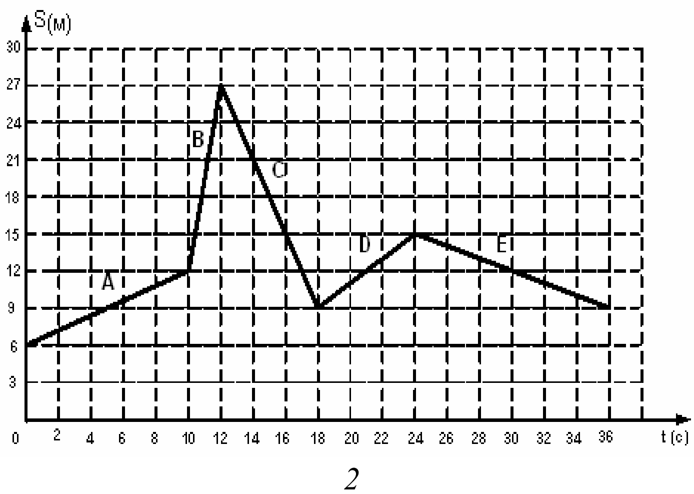
Условие. На рис. 12 представлен график движения точки, имеющей разные скорости на отдельных участках движения.

Расставьте наименования участков движения в порядке увеличения абсолютного значения скорости точки:

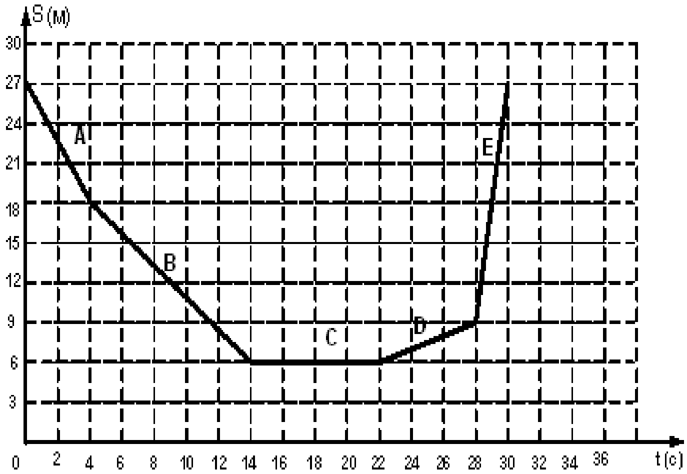
а) *E*;
б) *A*;
в) *D*;
г) *C*;
д) *B*.



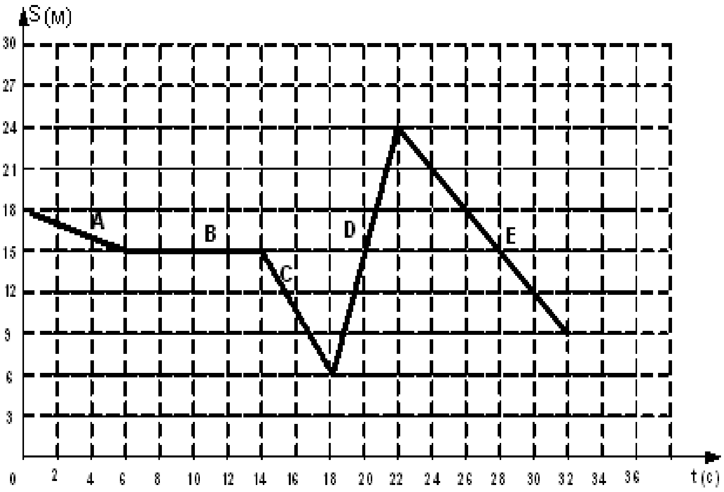
1



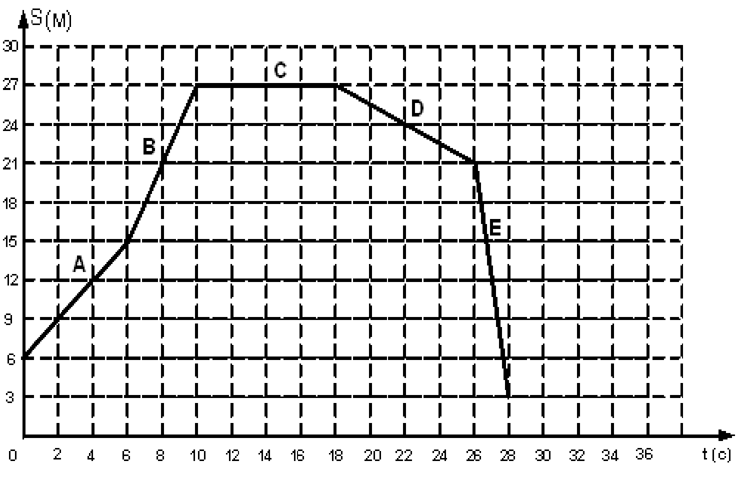
2



3



4



5

Рис. 12. График движения точки

2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

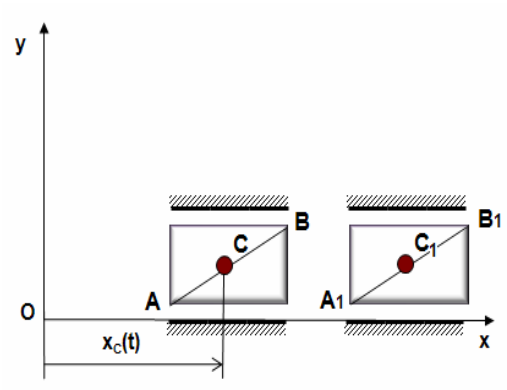
Кинематика твёрдого тела рассматривает следующие основные виды движения: поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое, свободное, сложное.

Простейшими движениями твёрдого тела являются поступательное движение и вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

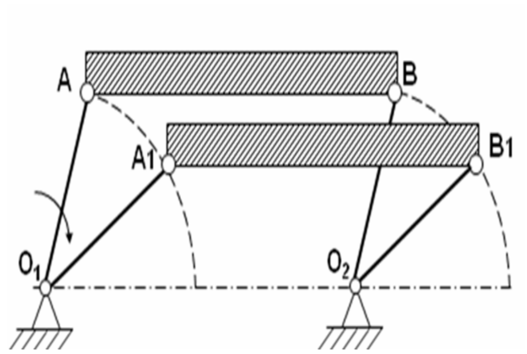
2.1. Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Примеры: движение кузова автомобиля на прямолинейном участке пути, движение кабины колеса обозрения, движение ползуна вдоль направляющих (рис. 13*а*), скольжение груза вдоль наклонной плоскости, спарник AB (рис. 13*б*). При вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A = O_2B$) спарник AB также движется поступательно (любая проведённая в нём прямая остаётся параллельной её начальному положению). Точки спарника движутся при этом по окружности.



а



б

Рис. 13. Примеры поступательного движения твёрдых тел

Следовательно, траектории точек тела, совершающего поступательное движение, могут быть самыми разными: прямая, циклоида, окружность и др., в то время как движение тела может быть поступательным.

Свойства поступательного движения.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения.*

Возьмём на теле две точки A и B (рис. 14). Определим их положение радиусами-векторами $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$. Положение точки B относительно точки A определится вектором $\overline{AB}$. Из векторного треугольника OAB очевидно, что $\bar{r}_B = \bar{r}_A + AB$.

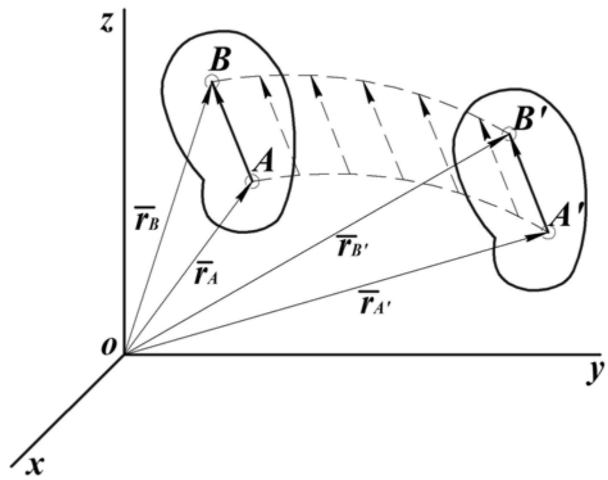


Рис. 14. Поступательное движение твёрдого тела

При поступательном движении тела точка A описывает некоторую траекторию. Траекторию точки B можно получить из траектории точки A, сместив все её точки на постоянный вектор $\overline{AB}$. На рис. 14 положение точки B' после перемещения тела определяется по формуле

$$\bar{r}'_B = \bar{r}'_A + \overline{A'B'},$$

где $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \text{const}$ (из определения поступательного движения твёрдого тела). Следовательно, если наложить траекторию точки B на траекторию точки A, то они совпадут.

Определим скорости точек A и B:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}.$$

Так как $\overline{AB} = \text{const}$, то $\dfrac{d\,\overline{AB}}{dt} = 0$ и $\dfrac{d\bar{r}_B}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_A}{dt}$, отсюда $\bar{v}_B = \bar{v}_A$.

Определим ускорения точек A и B: $\dfrac{d\bar{v}_B}{dt} = \dfrac{d\bar{v}_A}{dt}$, т. е. $\bar{a}_B = \bar{a}_A$.

Поскольку точки A и B выбраны произвольно, полученные результаты будут справедливы для всех точек тела.

В качестве примера приведём механизм спарника, в котором скорости и ускорения точек A и B равны (рис. 15).

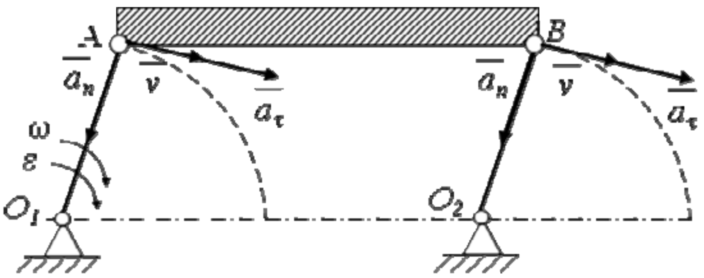


Рис. 15. Скорости и ускорения точек спарника

Из доказанной теоремы следует, что *поступательное движение тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки, и изучение поступательного движения тела сводится к кинематике точки.*

Кинематическими уравнениями поступательного движения тела являются уравнения движения любой точки тела (например, точки A на рис. 15): $x_A = x_A(t), y_A = y_A(t),$ а основными кинематическими характеристиками поступательно движущегося тела являются скорость и ускорение любой точки тела.

2.2. Вращательное движение твёрдого тела

2.2.1. Определение вращательного движения твёрдого тела

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно связанные с ним), остаются во всё время движения неподвижными.

Прямая Az, проходящая через две неподвижные точки A и B, называется *осью вращения* (рис. 16).

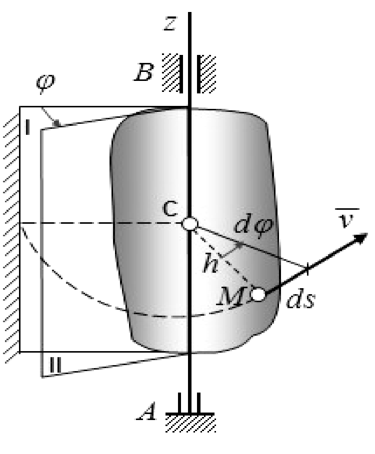


Рис. 16. Вращательное движение твёрдого тела

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси *Az* точки, лежащие на оси вращения, неподвижны; остальные точки описывают окружности с центрами, находящимися на оси вращения, и с радиусами, равными длине перпендикуляра, опущенного из точки на ось вращения.

2.2.2. Угол поворота тела

Положение твёрдого тела однозначно определяется *углом поворота* φ, который образуется между неподвижной плоскостью *I* и подвижной плоскостью *II*, связанной с вращающимся телом (рис. 16).

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, т. е. является функцией времени *t*.

Угол φ называется *угловым перемещением твёрдого тела (углом поворота тела)*, вращающегося вокруг неподвижной оси за заданный промежуток времени. За положительное направление угла поворота φ принято считать отсчёт против хода часовой стрелки, если за поворотом наблюдать с положительного направления оси вращения *Az*.

Уравнение, выражающее *закон вращательного движения твёрдого тела:* $\varphi = f(t)$. Угол поворота φ можно определить также по формуле $\varphi = 2\pi N$ (рад), где N – число оборотов вращающегося тела.

Угол поворота вычисляется в радианах и градусах, имеющих следующее соотношение: 1(рад) = $57°17'44{,}8''$.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твёрдого тела являются его *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε.

2.2.3. Угловая скорость тела

Угловой скоростью ω называется величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота с течением времени. Единицей измерения угловой скорости является [рад/с].

Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$. Тогда *средняя угловая скорость* за промежуток времени Δt равна $\omega_{ср} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Угловая скорость в данный момент времени (*мгновенная угловая скорость*): $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, т. е. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости во времени служит *угловое ускорение* ε.

2.2.4. Угловое ускорение тела

Угловым ускорением тела ε называется величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени. Единицей измерения углового ускорения является [рад/с^2].

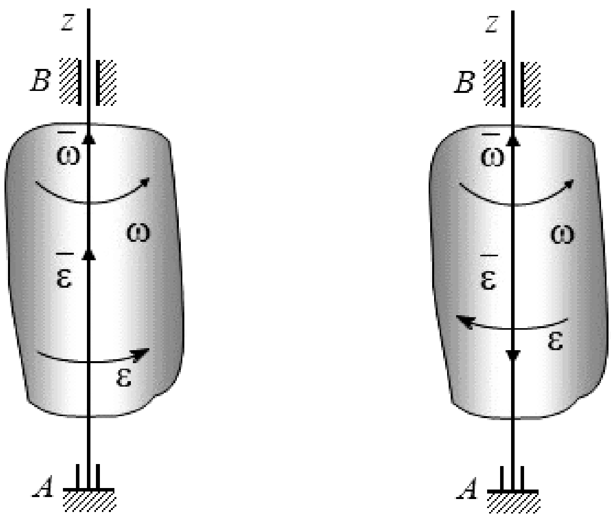
Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость получила приращение $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$. *Среднее угловое ускорение тела* за этот промежуток времени равно $\varepsilon_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Угловое ускорение тела в данный момент времени (*мгновенное угловое ускорение*): $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$, т. е. $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, или $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Таким образом, уголовое ускорение равно ω или $\ddot{\varphi}$.

2.2.5. Угловая скорость и угловое ускорение как вектор

В теоретической механике условились откладывать вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ от любой точки оси вращения, направляя его по этой оси так, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть вращение тела против хода часовой стрелки. Принятое правило обусловлено применением правой системы осей координат, которой соответствует положительное направление вращения в сторону, обратную вращению часовой стрелки (рис. 17).



а *б*

Рис. 17. Направление векторов угловых скоростей и ускорений твёрдого тела: *а* – ускоренное вращение; *б* – замедленное вращение

Вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ откладывают на оси вращения аналогично вектору угловой скорости $\overline{\omega}$. При ускоренном вращении тела направления $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ совпадают (рис. 17*а*), а при замедленном они противоположны (рис. 17*б*).

2.2.6. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Рассмотрим какую-либо точку M тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (рис. 18).

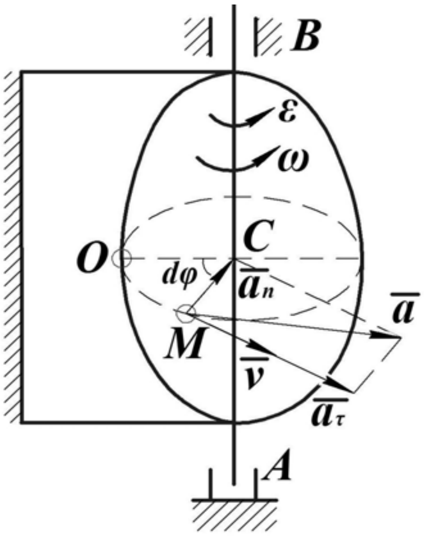


Рис. 18. Определение линейной скорости и линейного ускорения точки

Дуговая координата на окружности, описываемая точкой M, равна $\cup OM = dS = OCd\varphi$, где $OC = h$. Так как $dS = hd\varphi$, то модуль скорости этой точки равен $v = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{hd\varphi}{dt} = h\omega$.

Линейная (окружная) скорость точки вращающегося тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Скорость точки направлена по касательной к описываемой точкой окружности в сторону угловой скорости ω (рис. 18).

Численная величина скоростей точек вращающегося тела пропорциональна их расстояниям до оси вращения. Поле скоростей точек вращающегося тела имеет вид, показанный на рис. 19.

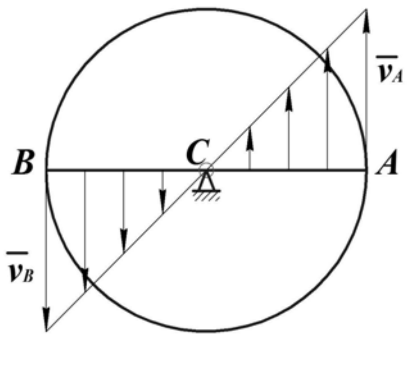


Рис. 19. Поле скоростей точек вращающегося тела

Ускорение $\overline{a}$ точки M вращающегося твёрдого тела складывается из нормального ускорения $\overline{a}_n$ и касательного ускорения $\overline{a}_\tau$ (рис. 18):

$$\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau.$$

Для нахождения модулей касательного и нормального ускорений точки M воспользуемся формулами:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(h\omega)}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(h\omega)^2}{h} = h\omega^2,$$

где $\rho = h$ – радиус окружности, описываемый точкой M. Так как $a_\tau = h\varepsilon$, $a_n = h\omega^2$, то модуль полного ускорения точки равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Нормальное ускорение $\overline{a}_n$ направлено от точки к оси вращения по радиусу описываемой окружности, в сторону этой оси; *касательное ускорение* $\overline{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории в сторону углового ускорения ε (рис. 18).

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой окружности определяется углом μ (рис. 20), который вычисляется по формуле $\mathrm{tg}\mu = \dfrac{a_\tau}{a_n} = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

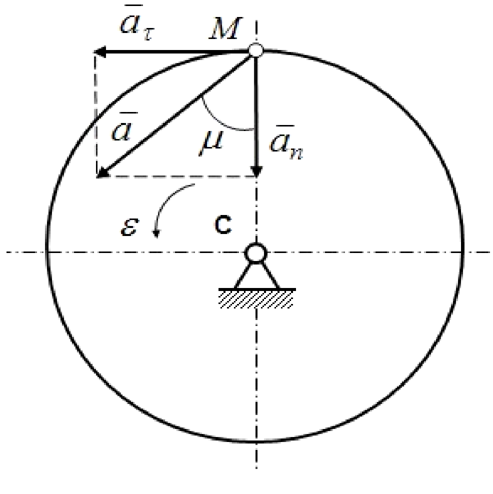


Рис. 20. Отклонение линейного ускорения точки вращающегося тела от радиуса описываемой окружности

Угол μ, составленный ускорением точки вращающегося тела с отрезком, соединяющим точку с центром описываемой ею окружности, не зависит от положения точки в теле.

2.2.7. Векторы скорости и ускорения точек вращающегося тела

Чтобы найти выражения непосредственно для векторов $\bar{v}$ и $\bar{a}$, проведём из произвольной точки *O* оси *AB* радиус-вектор $\bar{r}$ точки *M* (рис. 21).

Тогда $h = r \cdot \sin\alpha,$ и по формуле для вычисления скоростей точек вращающегося тела $|\bar{v}| = h|\omega| = |\omega| \cdot r \cdot \sin\alpha,$ или $|\bar{v}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$.

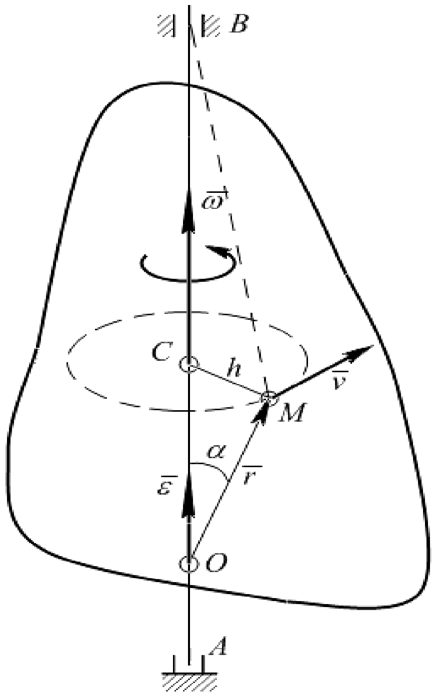


Рис. 21. К определению векторов скорости и ускорения точки тела

Таким образом, модуль векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ равен модулю скорости точки *M*. Направления векторов $\bar{\omega} \times \bar{r}$ и $\bar{v}$ тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости *OMB*) и размерности их одинаковы.

Следовательно, $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, т. е. *вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки*. Данное равенство называют *формулой Эйлера*.

Взяв от обеих частей этого равенства производные по времени, получим:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right),$$

или

$$\bar{a} = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{v}).$$

Полученное выражение определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела.

Вектор $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ направлен так же, как и вектор $\bar{\omega}\times\bar{r}$, т. е. по касательной к траектории точки M, а $|\bar{\varepsilon}\times\bar{r}| = \varepsilon\cdot r\cdot\sin\alpha = \varepsilon\cdot h$.

Вектор же $\bar{\omega}\times\bar{v}$ направлен вдоль MC, т. е. по нормали к траектории точки M, а $|\bar{\omega}\times\bar{v}| = \omega\cdot v\cdot\sin 90° = \omega^2\cdot h$, т. к. $v = \omega\cdot h$. Учитывая все эти результаты, а также формулы для вычисления модулей нормального и касательного ускорений, заключаем, что $\bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \bar{a}_\tau$ и $\bar{\omega}\times\bar{v} = \bar{a}_n$.

На рис. 18 показаны векторы $\bar{a}$, $\bar{a}_n$, $\bar{a}_\tau$ в случае ускоренного вращения тела.

2.2.8. Частные случаи вращательного движения тела

1. Равномерное вращение.

При равномерном вращении тела $\omega = \text{const}$, т. к. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то $d\varphi = \omega dt$.

Проинтегрируем данное выражение в известных пределах:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t \omega dt,$$

получим $\varphi - \varphi_0 = \omega t$, или уравнение равномерного вращения тела $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

При $\varphi_0 = 0$ оно приобретает вид $\varphi = \omega t$.

В технике скорость равномерного вращения часто определяют *числом оборотов в минуту*, обозначая эту величину через n (об/мин). Так как при одном обороте тело повернётся на угол 2π, а при n-оборотах – на $2\pi n$, этот поворот делается за $t = 60$(с) = 1(мин). Тогда $\omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n$.

2. Равнопеременное вращение.

При равнопеременном вращении тела $\varepsilon = \text{const}$, т. к. $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$, то $d\omega = \varepsilon dt$.

Проинтегрируем данное выражение в известных пределах:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int\limits_0^t \varepsilon dt, \quad \omega\Big|_{\omega_0}^{\omega} = \varepsilon t, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t.$$

Тогда $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, т. к. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, то $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$; $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$; $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt$. Тогда $\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$, или уравнение равнопеременного вращения тела $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$.

При $\varphi_0 = 0$ оно приобретает вид $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$, а при $\varphi_0 = 0$ и $\omega_0 = 0$ получим $\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2}$.

Аналогия формул для вычисления кинематических характеристик вращательного движения тела и точек, принадлежащих этому телу, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Кинематические характеристики вращательного движения тела и его точек

Кинематические характеристики	**Формулы для точек**	**Расчётные формулы для тела**
Закон движения	$S = f(t)$	$\varphi = f(t)$
Модуль скорости	$v = \frac{dS}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Модуль ускорения	$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$
Уравнение равномерного движения	$S = S_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Уравнение равнопеременного движения	$S = S_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$

Пример. Гребной винт судна, имеющий угловую скорость $\omega = 20\pi$ (1/с), останавливается через 16(с) вследствие сопротивления воды и трения в подшипниках. Считая вращение винта равнопеременным, определить угловое ускорение и число оборотов, сделанных винтом до остановки.

Решение. Закон изменения угловой скорости гребного винта имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

В момент остановки $\omega = 0$, следовательно, $\omega_0 = -\varepsilon t$, тогда

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = \frac{-5\pi}{4}\,(1/\text{с}^2).$$

Закон равнопеременного вращения винта:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Подставив полученное выражение ε, получим:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{t}\frac{t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}; \quad \varphi = \frac{20\pi \cdot 16}{2} = 160\pi(\text{рад}).$$

Так как угол поворота тела и количество его оборотов связаны соотношением $\varphi = 2\pi N$, то число оборотов будет равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{160\pi}{2\pi} = 80 \text{ (оборотов)}.$$

Ответ: $\varepsilon = -\frac{5\pi}{4}\,(1/\text{с}^2)$, $N = 80$ (оборотов).

2.3. Передача движения

Передача вращательного движения от одного тела к другому осуществляется посредством зубчатых передач с внутренним (рис. 22*а*) и внешним (рис. 22*б*) зацеплением, а также цепных, ременных (рис. 23), фрикционных и других передач.

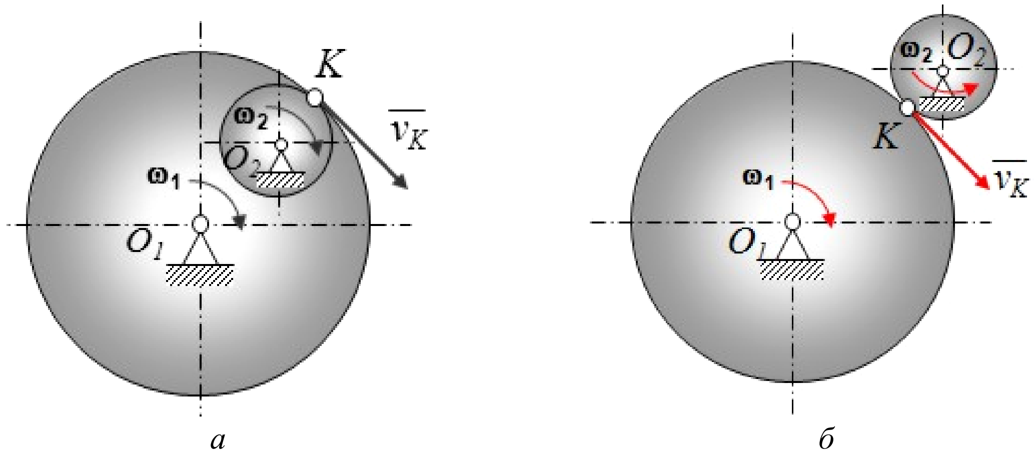


Рис. 22. Зубчатые передачи:
а – внутреннее зацепление; *б* – внешнее зацепление

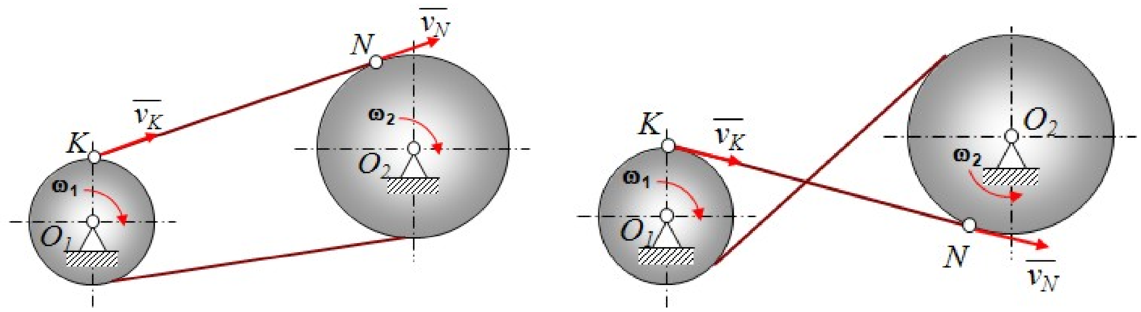


Рис. 23. Ременные передачи

В точках контакта (точка K на рис. 22) скорости точек обоих тел равны

$$v_K = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 ,$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости тел *1* и *2* соответственно; r_1, r_2 – радиусы тел *1* и *2*.

Угловые скорости тел, находящихся в зацеплении, обратно пропорциональны их радиусам или числам зубьев:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

где z_1, z_2 – числа зубьев тел (на рис. 22 условно не показаны).

Ременная передача представляет собой нерастяжимую нить, охватывающую вращающиеся тела (рис. 23). Скорости всех точек нерастяжимой нити равны по модулю: $v_K = v_N$, или $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$; тогда $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$, где ω_1, ω_2 – угловые скорости шкивов *1* и *2* соответственно; r_1, r_2 – радиусы шкивов.

2.4. Методические указания и пример выполнения расчётно-графической работы по теме «Простейшие движения твёрдого тела»

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Простейшие движения твёрдого тела». При решении задач двух типов рекомендуется придерживаться следующей последовательности.

Первый тип задач. Задано уравнение вращения i-го колеса.

1. Найдите угловую скорость и угловое ускорение i-го колеса, дважды дифференцируя по времени заданный закон вращения.

2. Исходя из расчётной схемы, определите угловые скорости и угловые ускорения колёс, находящихся в зацеплении с i-м колесом, либо соединённых с ним ременной передачей.

3. Последовательно обходя кинематическую схему, найдите угловые скорости и угловые ускорения всех ступенчатых колёс исследуемого механизма.

4. Зная угловые скорости и угловые ускорения всех ступенчатых колёс, найдите скорость и ускорения обозначенных на схемах точек, а также рейки *4* и груза *5*.

5. Изобразите на расчётной схеме все найденные кинематические характеристики с учётом положительного направления, заданного в исходных данных.

Второй тип задачи. Задан закон поступательного движения рейки (груза).

1. Найдите скорость и ускорение рейки (груза), дважды дифференцируя по времени заданный закон движения тела.

2. Скорость и касательное ускорение точки ступенчатого колеса, находящегося в зацеплении с рейкой, закон движения которой задан, будут равны скорости и касательному ускорению этой рейки. Аналогично, если задан закон движения груза, то его скорость и ускорение будут равны по модулю скорости и касательному ускорению точки контакта нити и ступенчатого колеса.

3. Остальные вычисления кинематических характеристик произведите аналогично первому типу задач.

Пример.

Условие. По заданному уравнению $x(t)$ поступательного движения груза *1* определить скорость, а также нормальное, касательное и полное ускорение точки M механизма в момент времени $t_1 = 1$(с).

Исходные данные.

$R_2 = 100$ (см), $r_2 = 60$ (см), $r_3 = 75$ (см), $x(t) = 18 + 70 \cdot t^2$(см).

Найти: скорость и ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$(с).

Решение. Рассматриваемый механизм состоит из трёх подвижных тел (рис. 24):

1) груз *1* совершает поступательное движение по закону $x(t) = 18 + 70 \cdot$ $\cdot t^2$ (см);

2) ступенчатый барабан *2* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O_2;

3) диск *3* совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O_3.

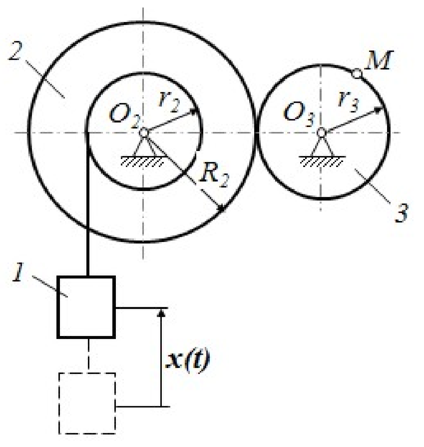


Рис. 24. Расчётная схема

Определим скорость груза *1*, взяв производную по времени от закона движения $x(t)$:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = (18 + 70 \cdot t^2)' = 140 \cdot t\,.$$

В момент времени $t_1 = 1$(с) модуль скорости груза *1* равен

$$v_1(t) = 140 \cdot 1 = 140(\text{см/с})\,.$$

Поскольку нить нерастяжима, скорости всех точек нити на вертикальном участке имеют одинаковые модули и направления, т. е. $\bar{v}_1 = \bar{v}_A$ (рис. 25).

Модуль линейной скорости точки *A* ступенчатого барабана определяется по формуле $v_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость барабана *2*, r_2 – радиус малой ступени барабана *2*.

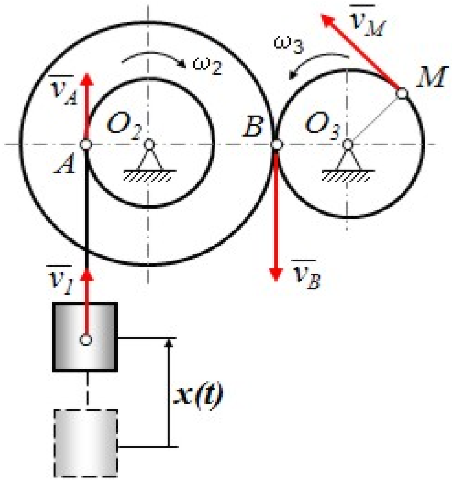


Рис. 25. Направления линейных скоростей точек

Отсюда угловая скорость степенчатого барабана равна

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{140}{60} = 2{,}3\,(\text{рад/с}).$$

Зная угловую скорость ω_2 барабана *2*, найдём линейную скорость точки *B*:

$$v_B = \omega_2 R_2 = 2{,}3 \cdot 100 = 230(\text{см/с}) = 2{,}3(\text{м/с})\,.$$

Точки *B* и *M* лежат на ободе диска *3*, поэтому скорости точек *B* и *M* равны по модулю $|\vec{v}_M| = |\vec{v}_B|$, отсюда угловая скорость диска *3* равна

$$\omega_3 = \frac{v_M}{r_3} = \frac{230}{75} = 3{,}07(\text{рад/с}).$$

Направления угловых скоростей тел *2* и *3* и линейных скоростей всех обозначенных точек показаны на рис. 25.

Ускорение груза *1* определяется как первая производная по времени от скорости v_1, или как вторая производная от заданного уравнения движения:

$$a_1 = \frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d\dot{v}_1}{dt} = 140 \text{ (см/с}^2\text{)} = 1{,}4 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из условия нерастяжимости нити по модулю равны ускорение груза *1* и касательное ускорение точки *A*: $a_1 = a_A^\tau$.

Так как точка *A* одновременно принадлежит барабану *2*, её касательное ускорение находится по формуле $a_A^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2$, где ε_2 – угловое ускорение барабана *2*. Отсюда $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{r_2} = \dfrac{140}{60} = 2{,}3$ (рад/с^2).

Касательное ускорение точки *B* равно

$$a_B^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 2{,}3 \cdot 100 = 230 \text{ (см/с}^2\text{)} = 2{,}3 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Так как $a_B^\tau = a_M^\tau$, отсюда $\varepsilon_3 = \dfrac{a_M^\tau}{r_3} = \dfrac{230}{75} = 3{,}07$(рад/с^2).

Определим модуль нормального ускорения точки *M*:

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot r_3 = 3{,}1^2 \cdot 75 \approx 721 \text{ (см/с}^2\text{)} = 7{,}21 \text{(м/с}^2\text{)}.$$

Модуль полного ускорения точки *M* найдём по формулам:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M{}^n\right)^2 + \left(a_M{}^\tau\right)^2}; \quad a_M = \sqrt{(7{,}21)^2 + (2{,}30)^2} = 7{,}57 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Направления угловых ускорений тел *2* и *3* и ускорений всех обозначенных на схеме точек показаны на рис. 26.

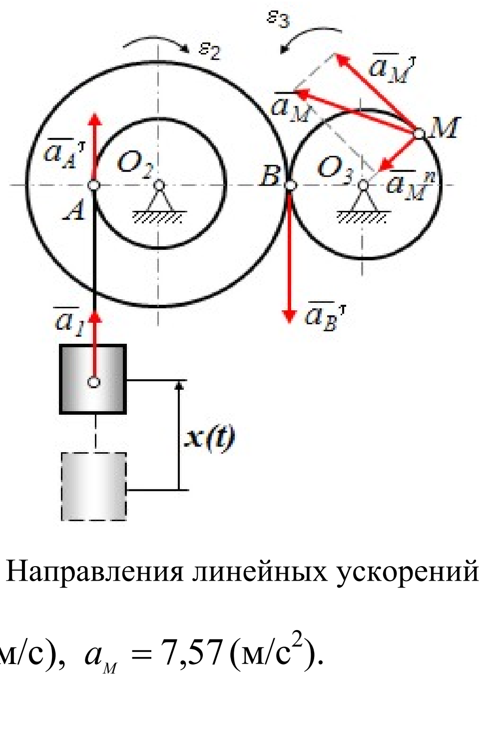


Рис. 26. Направления линейных ускорений точек

Ответ: $v_M = 2{,}33$(м/с), $a_M = 7{,}57$ (м/с^2).

2.5. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Простейшие движения твёрдого тела»

Условие. Механизм состоит из ступенчатых колёс *1–3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей; из зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колёс. Радиусы ступеней колёс *1–3* равны соответственно: r_1 = 2(см), R_1 = 4(см), r_2 = 6(см), R_2 = 8(см), r_3 = 12(см), R_3 = 16(см). На ободах колёс расположены точки A, B и C.

В столбце «Дано» (табл. 4) указан закон движения одного из звеньев механизма, причём под $\varphi_i = f(t)$(рад) подразумевается закон вращения i-го колеса, а $S_i = f(t)$(см) обозначает закон поступательного движения рейки *4* или груза *5*; время t измеряется в секундах.

Положительным для $\varphi_i = f(t)$ считается вращение i-го колеса против хода часовой стрелки, а для S_i – перемещение i-го тела вертикально сверху вниз.

Таблица 4

Варианты исходных данных

Номер		**Дано**		**t_1, с**
строки	**схемы**	**заданная функция**	**$f(t)$**	
0	*0*	S_4	$4(7-t^2)$	0,5
1	*1*	S_5	$2(t^2-3)$	0,75
2	*2*	φ_1	$2t^2-9$	1,0
3	*3*	φ_2	$7t-3t^2$	1,25
4	*4*	φ_3	$3t-t^2$	1,5
5	*5*	φ_1	$5t-2t^2$	2,0
6	*6*	φ_2	$3t^2-8$	0,25
7	*7*	S_4	$2(t^2-3t)$	0,5
8	*8*	S_5	$2t^2-5t$	0,75
9	*9*	φ_3	$8t-3t^2$	1,5

Для механизма, изображённого ниже на схемах (рис. 27), по заданному закону движения одного из звеньев найти в момент времени t_1 величины скоростей и ускорений точек A, B, C, рейки *4*, груза *5*, а также угловые скорости и угловые ускорения колёс *1*, *2*, *3*.

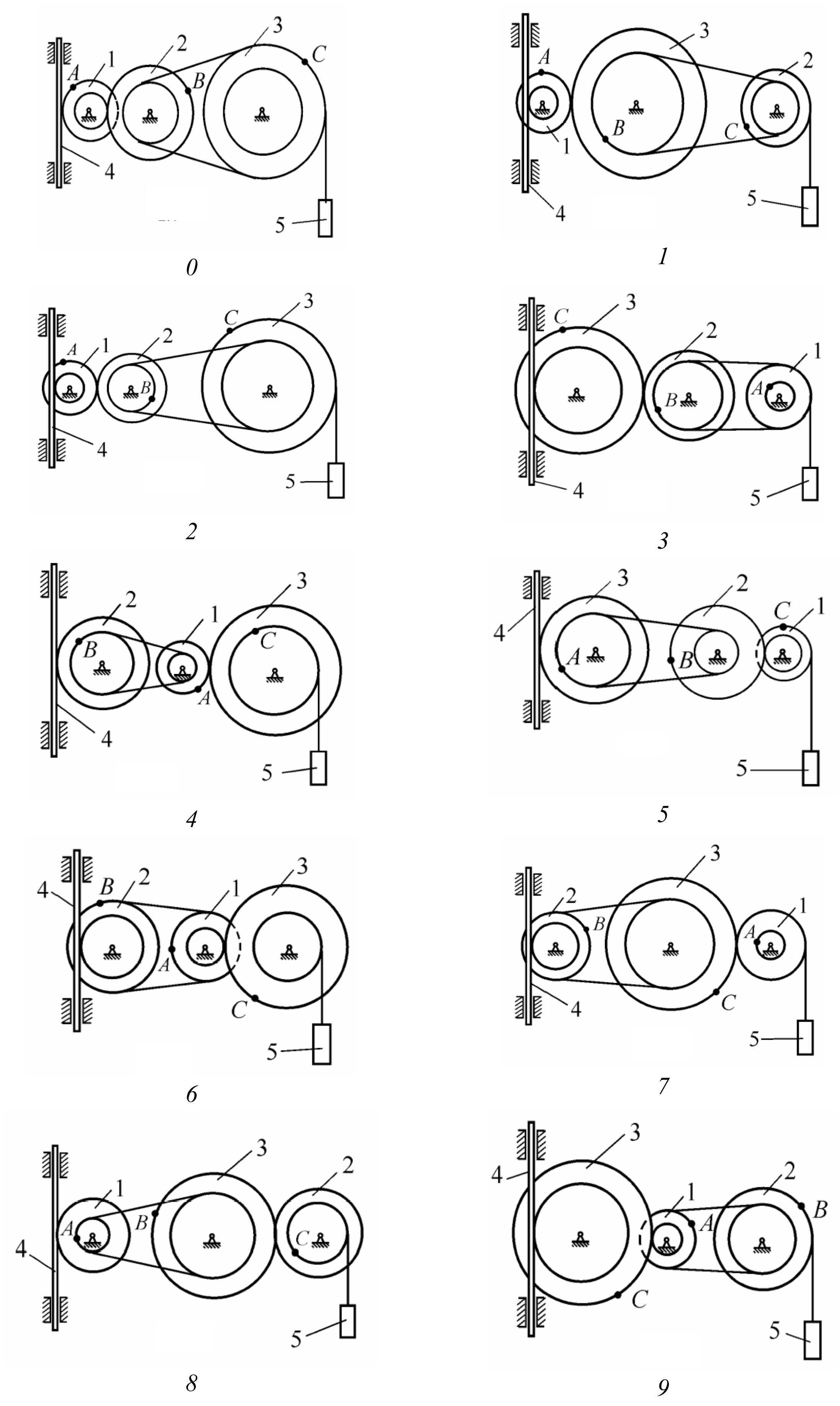


Рис. 27. Схемы механизмов

Указания. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колёс, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считать, что ремень по ободу колеса не скользит.

2.6. Задания для самостоятельной работы

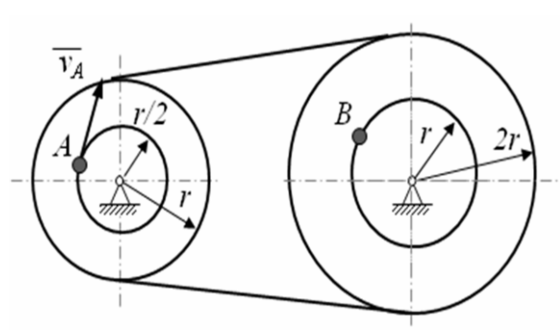
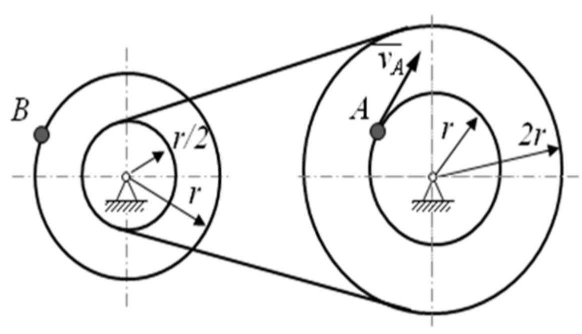
2.6.1. Скорости точек при передаче движения

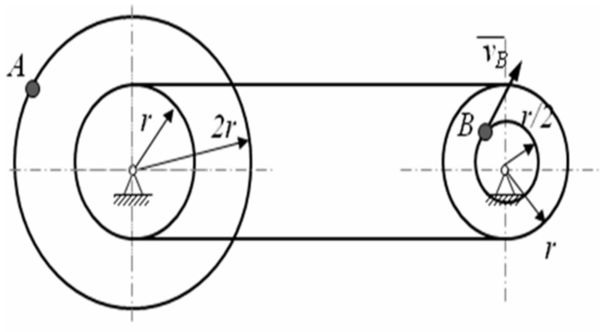
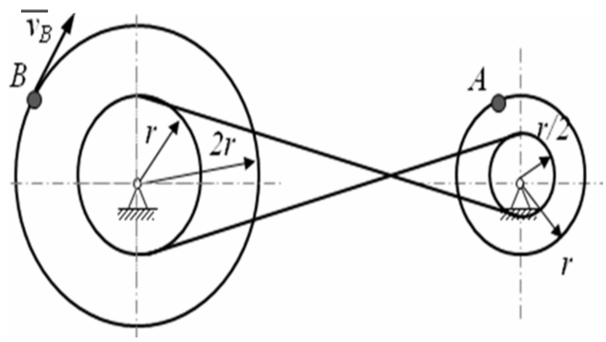
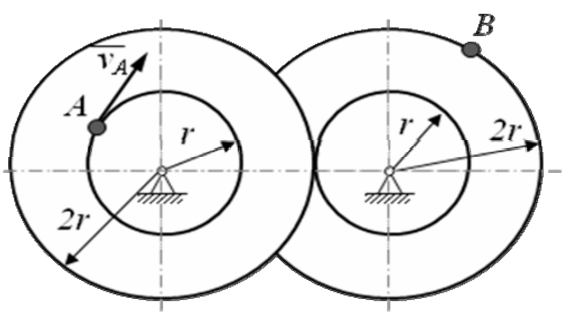
В табл. 5 для вариантов 1–4 известна скорость точки одного из шкивов, тогда скорость обозначенной точки другого шкива в этом случае равна … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Для варианта 5 известна скорость точки *A* одного из колёс, тогда скорость точки *B* другого ступенчатого колеса равна … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 5

Варианты тестовых заданий по теме «Скорости точек при передаче движения»

№	Расчётная схема	Заданная скорость точки	Варианты ответов
1		$V_A = 8$ (см/с)	а) $V_B = 8$ (см/с); б) $V_B = 4$ (см/с); в) $V_B = 16$ (см/с); г) $V_B = 2$ (см/с).
2		$V_A = 8$ (см/с)	а) $V_B = 16$ (см/с); б) $V_B = 8$ (см/с); в) $V_B = 4$ (см/с); г) $V_B = 32$ (см/с).

№	Расчётная схема	Заданная скорость точки	Варианты ответов
3		V_B = 12 (см/с)	а) V_A = 3 (см/с); б) V_A = 48 (см/с); в) V_A = 24 (см/с); г) V_A = 6 (см/с).
4		V_B = 30 (см/с)	а) V_A = 15 (см/с); б) V_A = 120 (см/с); в) V_A = 60 (см/с); г) V_A = 30 (см/с).
5		V_A = 20 (см/с)	а) V_B = 10 (см/с); б) V_B = 20 (см/с); в) V_B = 80 (см/с); г) V_B = 40 (см/с).

2.6.2. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Пример 1. Диск радиуса R = 10 (см) вращается вокруг оси Ox (рис. 28) по закону $\varphi = 3 + 2t$ (φ – в радианах, t – в секундах). Скорость точки A при t = 2 (с) будет равна … (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 70 (см/с);

б) 23 (см/с);

в) 20 (см/с);

г) 40 (см/с).

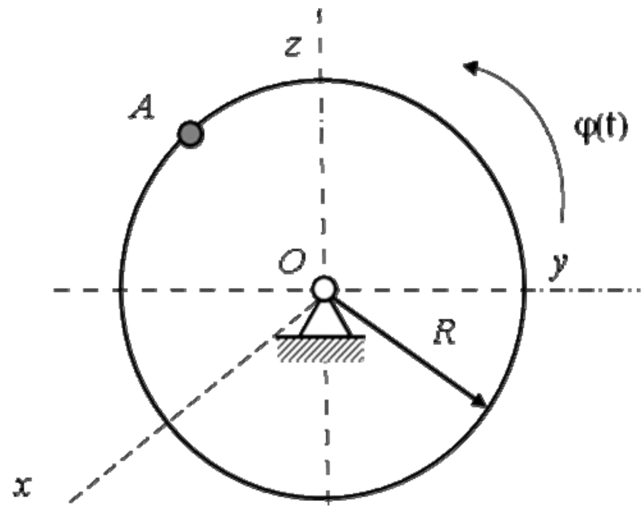


Рис. 28. Иллюстрация к примерам 1–3

Решение. Скорость точки *A* по модулю равна $v_A = \omega \cdot R = \varphi' \cdot R$, где

$$\varphi' = (3 + 2t)' = 2 \text{ (рад/с)}; \quad v_A = \varphi' \cdot R = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см/с)}.$$

Ответ: $v_A = 20$ (см/с).

Пример 2. Диск радиуса *R* = 10 (см) вращается вокруг оси *Ox* по закону $\varphi = 3 + t^2$ (φ – в радианах, *t* – в секундах). Касательное ускорение точки *A* в момент времени *t* = 3 (с) равно ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 40 (см/с^2);
б) 90 (см/с^2);
в) 20 (см/с^2);
г) 120 (см/с^2).

Решение. Касательное ускорение точки *A* по модулю равно $a_A^\tau = \varepsilon \cdot R = \varphi'' \cdot R$, где

$$\varphi'' = (2t)' = 2 \text{ (рад/с}^2\text{)}; \quad a_A^\tau = \varphi'' \cdot R = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $a_A^\tau = 20$ (см/с^2).

Пример 3. Диск радиуса *R* = 10 (см) вращается вокруг оси *Ox* по закону $\varphi = 3 + 2t$ (φ – в радианах, *t* – в секундах). Ускорение точки *A* при *t* = 1(с) равно ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) 0 (см/с^2);
б) 40 (см/с^2);

в) 50 (см/с^2);

г) 250 (см/с^2).

Решение. Модуль полного ускорения точки A равен:

$$a_A = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2} = R \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = R \cdot \sqrt{(\varphi')^4 + (\varphi'')^2};$$

$$a_A = 10 \cdot \sqrt{(2)^4 + (0)^2} = 40(\text{см/с}^2).$$

Ответ: $a_A = 40(\text{см/с}^2)$.

2.6.3. Угловые характеристики вращательного движения тела

Пример 4. Круглая пластинка вращается вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярную плоскости пластины с угловой скоростью ω (рис. 29). Укажите точку с максимальной линейной скоростью (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) B;

б) A;

в) D;

г) C.

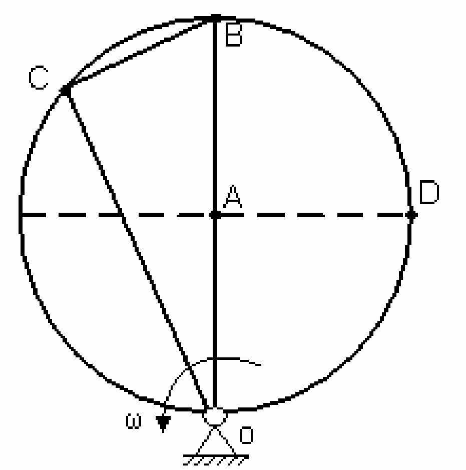


Рис. 29. Иллюстрация к примеру 4

Решение. Чем дальше точка отстоит от оси вращения, тем больше модуль её линейной скорости. Для решения задачи необходимо найти точку, максимально удалённую от точки O, через которую проходит ось вращения. В данном примере $OB > OC > OD > OA$, следовательно, точка с максимальной скоростью – это точка B.

Пример 5. Круглая пластинка вращается вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярную плоскости пластины с угловым ускорением ε (рис. 30). Укажите точку с наибольшим касательным ускорением (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) B;

б) A;

в) D;

г) C.

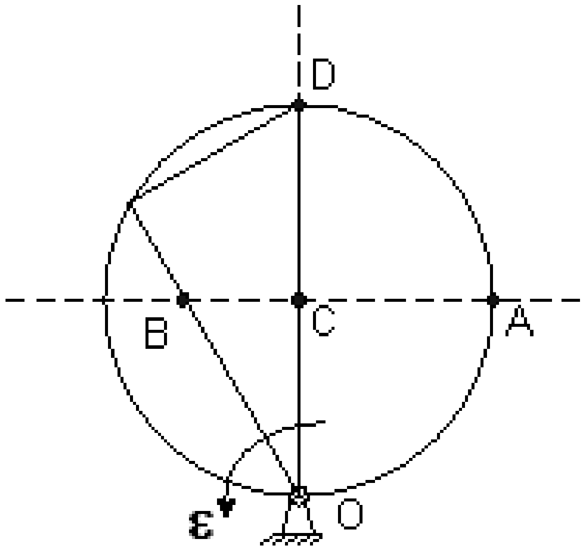


Рис. 30. Иллюстрация к примеру 5

Решение. Чем дальше точка отстоит от оси вращения, тем больше модуль её касательного ускорения. Для решения задачи необходимо найти точку, максимально удалённую от точки O, через которую проходит ось вращения. В данном примере $OD > OA > OB > OC$, следовательно, точка с максимальным касательным ускорением – это точка D.

Пример 6. Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2 (рис. 31) по закону $\varphi = \left(4 + \sqrt{3}\right)^2 - 7t$. В момент времени $t = 1$(с) тело будет вращаться ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) замедленно;

б) равнозамедленно;

в) равноускоренно;

г) ускоренно;

д) равномерно.

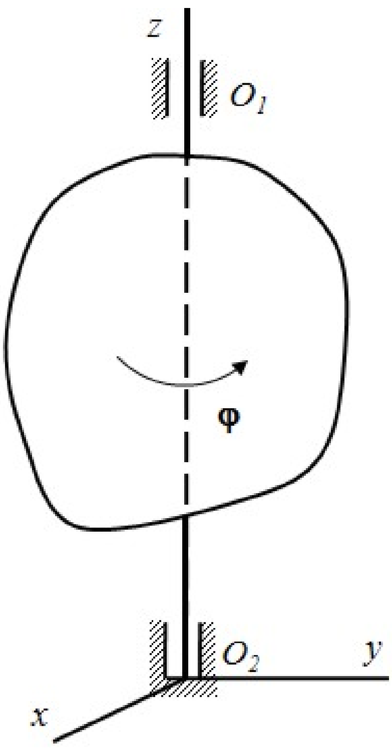


Рис. 31. Иллюстрация к примерам 6–8

Решение. Угловая скорость твёрдого тела $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = -7(\text{рад/с})$.

Угловое ускорение твёрдого тела $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 0\ (\text{рад/с}^2)$.

Угловое ускорение твёрдого тела равно нулю, твёрдое тело вращается с постоянной угловой скоростью, движение твёрдого тела равномерное.

Ответ: равномерное движение.

Пример 7. Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2 по закону $\varphi = (t-3)^2 - 9$. В момент времени t = 1(с) тело будет вращаться ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) замедленно;

б) равнозамедленно;

в) равноускоренно;

г) ускоренно;

д) равномерно.

Решение. Угловая скорость твёрдого тела $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 2(t-3)(\text{рад/с})$. При $t = 1(\text{с})$ $\omega(1) = 2(1-3) = -4(\text{рад/с})$.

Угловое ускорение твёрдого тела $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 2\ (\text{рад/с}^2)$.

Угловая скорость твёрдого тела в данный момент времени отрицательна. Угловое ускорение твёрдого тела постоянно, не зависит от времени, положительно. Так как знаки угловой скорости и углового ускорения не совпадают, следовательно, движение твёрдого тела или равнозамедленное, или замедленное. Если при этом угловое ускорение не зависит от времени – движение равнозамедленное, если зависит от времени – то замедленное. В данном примере твёрдое тело вращается равнозамедленно.

Ответ: равнозамедленное движение.

Пример 8. Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2 по закону $\varphi = 4 - t + 2t^3$. В момент времени t = 1(с) тело будет вращаться ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) замедленно;

б) равнозамедленно;

в) равноускоренно;

г) ускоренно;

д) равномерно.

Решение. Угловая скорость твёрдого тела $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = -1 + 6t^2 (\text{рад/с})$. При t = 1(с) $\omega(1) = -1 + 6 \cdot 1^2 = 5(\text{рад/с})$.

Угловое ускорение твёрдого тела $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 12t(\text{рад/с}^2)$. При t = 1(с) $\varepsilon(1) = 12 \cdot 1 = 12(\text{рад/с}^2)$.

Знаки угловой скорости и углового ускорения твёрдого тела в данный момент времени совпадают, угловое ускорение твёрдого тела является функцией времени, следовательно, вращение твёрдого тела ускоренное.

Ответ: ускоренное движение.

3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

3.1. Общие сведения о плоскопараллельном движении твёрдого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твёрдого тела, при котором каждая его точка перемещается параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Рассмотрим перемещения точек, лежащих на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости *II* (рис. 32).

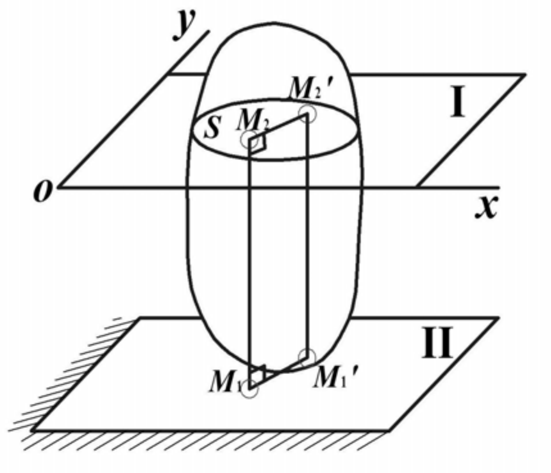


Рис. 32. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Пусть отрезок M_2M_1 определяет положение перпендикуляра к плоскости *II* в начальный момент времени, а отрезок $M_2'M_1'$ – после перемещения тела. Так как $M_2M_2' \| M_1M_1'$ (по определению), а отрезок $M_2'M_1'$ перпендикулярен плоскости *II* (исходя из свойств твёрдого тела), получим, что $M_2M_2' = M_1M_1'$.

Следовательно, точки M_1 и M_2 перемещаются одинаково и поэтому все другие точки, лежащие на перпендикуляре, также будут перемещаться одинаково.

Поэтому при изучении плоскопараллельного движения нет необходимости изучать движение всех точек тела, а достаточно рассмотреть движение сечения S.

Совместим сечение S с плоскостью Oxy, которая параллельна неподвижной плоскости II и находится в плоскости I (рис. 32). Положение сечения S можно определить по положению отрезка AB, проведённого в этом сечении (рис. 33).

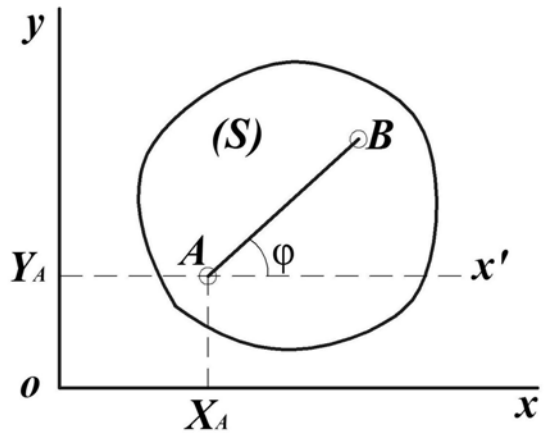


Рис. 33. Задание движения сечения *S* в плоскости *Oxy*

В свою очередь, положение отрезка AB можно определить, зная координаты точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x. При движении параметры X_A, Y_A и φ будут изменяться. Чтобы задать закон движения тела, т. е. знать положение тела в любой момент времени, необходимо знать зависимости: $X_A = f_1(t)$, $Y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$ – *уравнения движения плоской фигуры в её плоскости (уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела)*.

Покажем, что плоскопараллельное движение слагается из поступательного и вращательного движений.

Рассмотрим два последовательных положения *I* и *II*, которые сечение S занимает в моменты времени t_1 и $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 34).

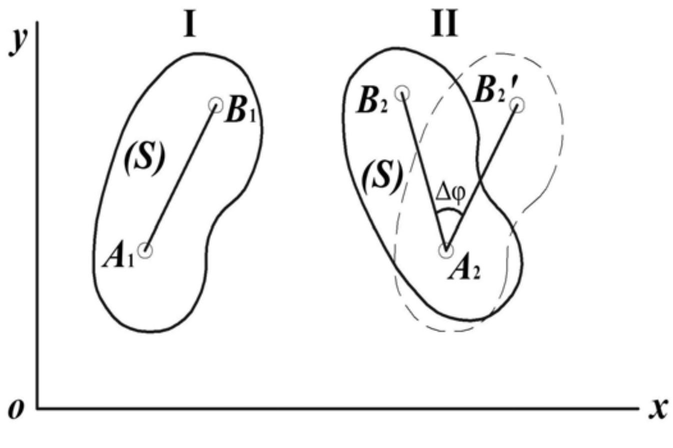


Рис. 34. Плоскопараллельное движение сечения *S*

Сечение S можно перевести из положения I (которое определяется положением отрезка A_1B_1) в положение II следующим образом. Переместим сечение сначала поступательно вместе с отрезком (точка A_1 займёт положение точки A_2), при этом отрезок A_1B_1 переместится в положение A_2B_2'. Затем повернём сечение вокруг полюса A_2 на угол $\Delta\varphi$ (отрезок A_2B_2' займёт окончательное положение A_2B_2).

Таким образом, можно сделать **вывод:** *плоскопараллельное движение твёрдого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как и полюс, и из вращательного движения вокруг этого полюса.*

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость $\bar{v}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ полюса A, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг этого полюса.

Поступательная часть движения зависит от выбора полюса, а вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

3.2. Определение траекторий точек плоской фигуры

Рассмотрим точку M плоской фигуры, положение которой определяется отрезком AM, равным b, и углом BAM, равным α (рис. 35).

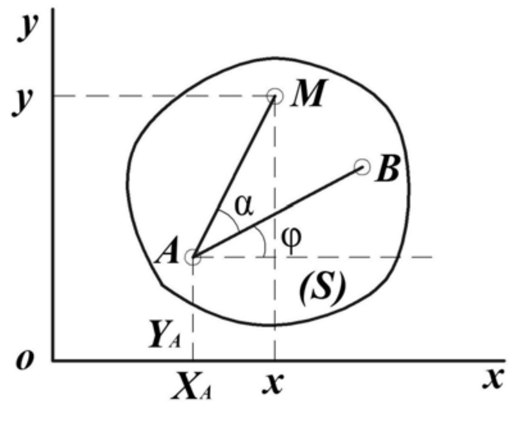


Рис. 35. К определению траекторий точек плоской фигуры

Координаты x и y точки M будут равны:

$$x = X_A + b\cos(\alpha + \varphi); \quad y = Y_A + b\sin(\alpha + \varphi),$$

где X_A, Y_A, φ – известные по ранее записанным уравнениям функции времени t. Данные уравнения выражают закон движения точки M и одновременно выражают уравнения траектории в параметрической форме. При плоском движении плоской фигуры её точки будут иметь различные траектории (в противном случае движение было бы поступательным).

Пример. В механизме, изображённом на рис. 36, стержень *MC* проходит через поворотный ползун в точке *A*, а в точке *B* – шарнирно закреплён на ползуне, движущемся по прямолинейной вертикальной направляющей. Составить уравнения движения точки *M*, если $AO = a$, $BM = b$, а положение стержня *MC* определяется углом φ.

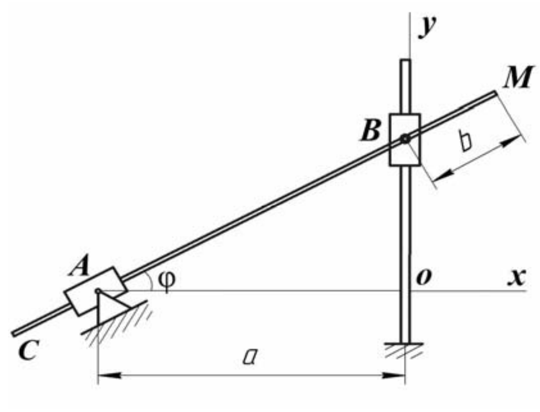


Рис. 36. Расчётная схема механизма

Решение.

Рассмотрим точку *M* плоской фигуры, положение которой определяется геометрическими параметрами механизма и углом φ.

Координаты точки *M* в осях *Oxy* будут следующими:

$$x = b \cdot \cos\varphi; \quad y = a \cdot \operatorname{tg}\varphi + b \cdot \sin\varphi,$$

отсюда

$$\cos\varphi = \frac{x}{b}.$$

Используем тригонометрические соотношения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}; \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi},$$

получим

$$y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + b \cdot \sin\varphi = (a + b \cdot \cos\varphi)\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = (a + b \cdot \cos\varphi)\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Окончательно,

$$y = (a+x) \cdot \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2}}{\frac{x}{b}} = (a+x) \cdot \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{x}.$$

Точка *M* движется по кривой, называемой *конхоидой Никомеда*. Таким образом, если рассматривается движение звена какого-нибудь механизма, то для определения траектории любой точки этого звена достаточно выразить её координаты через какой-нибудь параметр, а затем исключить этот параметр из полученных параметрических уравнений движения.

3.3. Примеры плоскопараллельного движения твёрдых тел

Плоскопараллельное движение совершают многие звенья механизмов и машин (рис. 37–41).

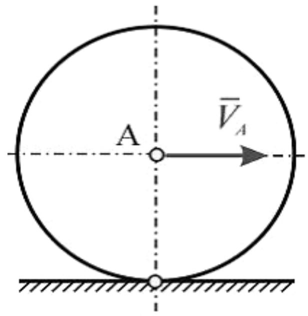


Рис. 37. Катящееся колесо

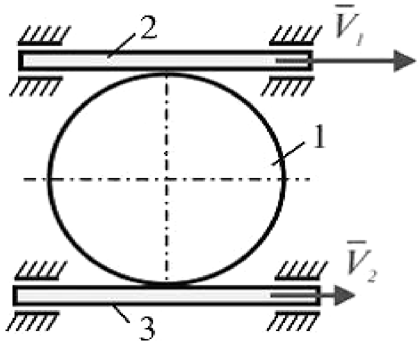


Рис. 38. Зубчатое колесо (*1*), перемещающееся между рейками (*2*) и (*3*)

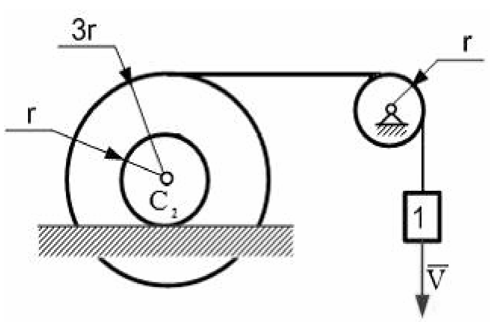


Рис. 39. Ступенчатый барабан

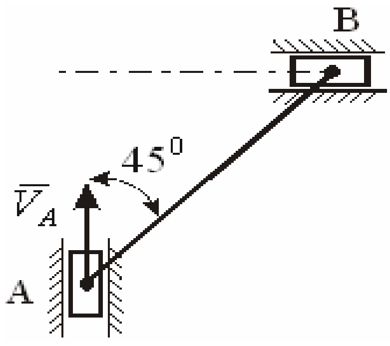


Рис. 40. Шатун *AB* в механизме эллипсографа

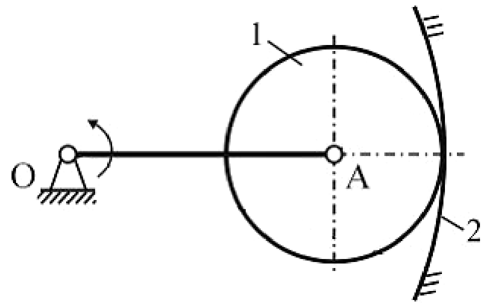


Рис. 41. Колесо *1* планетарного механизма, катящееся внутри неподвижного колеса *2*

3.4. Определение скоростей точек плоской фигуры

3.4.1. Теорема о скоростях точек плоской фигуры

Движение плоской фигуры складывается из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как и полюс, и вращательного движения вокруг полюса.

Покажем, что скорость любой точки плоской фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

Дана плоская фигура, расположенная в плоскости *Oxy* (рис. 42).

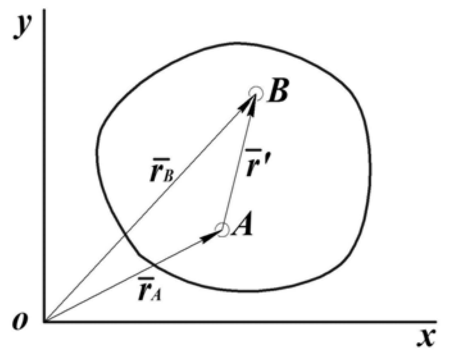


Рис. 42. Плоская фигура в плоскости *Oxy*

Положение полюса A определяется радиусом-вектором $\bar{r}_A$. Тогда положение точки B этой фигуры можно определить как векторную сумму:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}',$$

где $\bar{r}'$ – вектор, определяющий положение точки B относительно полюса A.

Продифференцировав данное равенство по времени, получим выражение для скорости точки B:

$$\bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt},$$

где $\dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$ – скорость полюса A, $\dfrac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}_{BA}$ – скорость точки B относительно полюса A. Так как $|\bar{r}'| = \text{const}$, то $\bar{r}'$ меняется только по направлению. Это означает, что точка B совершает вращение вокруг полюса A. Поэтому $\bar{v}_{BA} \perp \overline{AB}$ и $v_{BA} = \omega \cdot AB$. Таким образом, получаем формулу, выражающую ***теорему о скоростях точек плоской фигуры:*** *скорость любой точки плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-либо другой точки, принятой за полюс, и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса:*

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Следовательно, скорость некоторой точки B плоской фигуры изображается диагональю векторного параллелограмма (построенного при точке B), в котором его сторонами являются вектор $\bar{v}_{BA}$, перпендикулярный отрезку AB и сонаправленный с угловой скоростью ω, и вектор $\bar{v}_A$ (рис. 43).

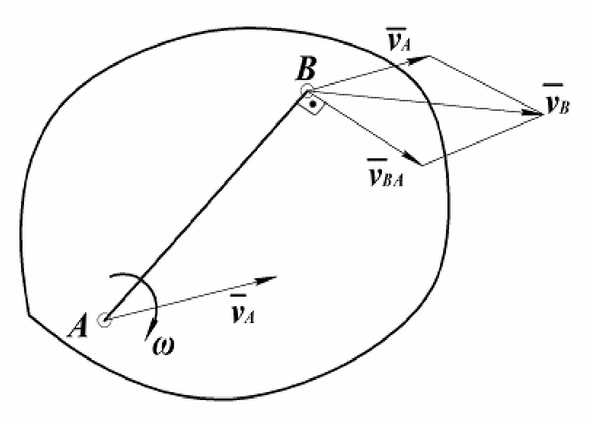


Рис. 43. К доказательству теоремы о скоростях точек плоской фигуры

Модуль скорости точки B (или любой другой точки плоской фигуры) можно найти следующими способами:

– графически (по правилу треугольника или параллелограмма);

– аналитически, используя теорему косинусов

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2 \cdot v_A \cdot v_{BA} \cdot \cos(\bar{v}_A, \bar{v}_{BA})};$$

– способом проекций

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2},$$

где v_{Bx}, v_{By} – проекции скорости точки B на заранее выбранные оси x и y декартовой системы координат.

3.4.2. Теорема о равенстве проекций скоростей точек плоской фигуры

Модуль скорости точки B можно также определить, используя теорему о скоростях точек плоской фигуры, спроецировав векторное равенство $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ на прямую AB (рис. 44): $v_B \cdot \cos\beta = v_A \cdot \cos\alpha$.

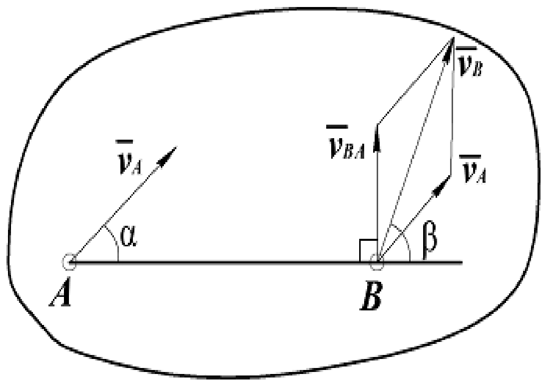


Рис. 44. К доказательству теоремы о равенстве проекций скоростей

Проекции скоростей $\bar{v}_B, \bar{v}_A$ *двух точек A и B твёрдого тела на прямую AB, соединяющую эти точки, равны.*

3.4.3. Теорема о существовании мгновенного центра скоростей

Пользуясь теоремой о скоростях точек плоской фигуры, покажем, что в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с этой фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку обычно обозначают буквой P и называют *мгновенным центром скоростей (МЦС).*

Пусть известны скорость точки A плоской фигуры и угловая скорость фигуры в некоторый момент времени. Примем точку A за полюс. Восстановим в точке A перпендикуляр к направлению $\bar{v}_A$ так, чтобы направление поворота $\bar{v}_A$ к этому перпендикуляру совпадало с направлением вращения фигуры. Скорость любой точки плоской фигуры, находящейся на этом перпендикуляре, будет равна $\bar{v}_{M1} = \bar{v}_A + \bar{v}_{M1A}$; $\bar{v}_{M2} = \bar{v}_A + \bar{v}_{M2A}$, и т. д.

Вращательные скорости всех точек этого перпендикуляра вокруг полюса A будут направлены противоположно скорости полюса A. На этом перпендикуляре, очевидно, найдётся такая точка P, вращательная скорость которой по модулю будет равна скорости полюса A, т. е. $v_{PA} = v_A$ (рис. 45).

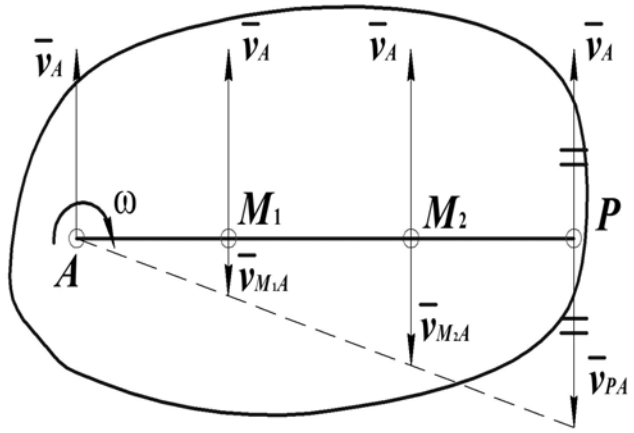


Рис. 45. К доказательству теоремы существования МЦС

Так как направления векторов этих скоростей противоположны (по построению), то $\bar{v}_{PA} = -\bar{v}_A$. Отсюда $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0$.

Следовательно, точка P является мгновенным центром скоростей плоской фигуры в данный момент времени.

При непоступательном движении плоской фигуры в её плоскости в каждый момент времени имеется единственная точка, неизменно связанная с этой фигурой, скорость которой равна нулю.

Так как $v_{PA} = \omega \cdot AP$, то $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$, т. е. мгновенный центр скоростей лежит на перпендикуляре к вектору скорости данной точки A на расстоянии $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$ от этой точки.

3.4.4. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

Понятие МЦС удобно использовать при определении скоростей точек плоской фигуры.

Возьмём за полюс точку P, тогда $\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP}$, но $\bar{v}_P = 0$, поэтому $\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}$. Тогда $v_A = v_{AP} = \omega \cdot AP$; $v_B = \omega \cdot BP$, и т. д.

Скорость любой точки плоской фигуры равна её линейной скорости при вращении этой фигуры вокруг МЦС (рис. 46): $\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}$.

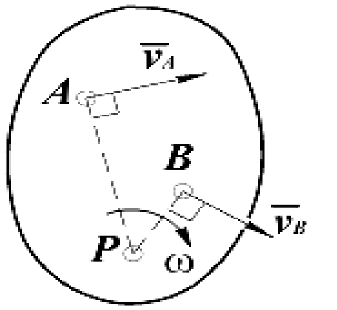


Рис. 46. Определение линейных скоростей точек при помощи МЦС

Положение мгновенного центра скоростей можно определить, если известны:

а) угловая скорость плоской фигуры и скорость какой-либо её точки;

б) направление скорости каких-либо двух её точек;

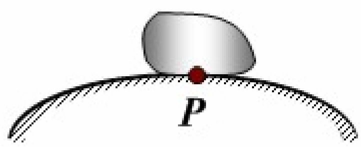
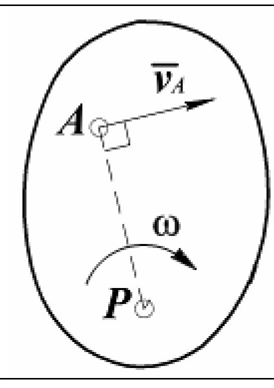
в) точка, скорость которой в данный момент равна нулю.

3.4.5. Различные случаи определения положения мгновенного центра скоростей

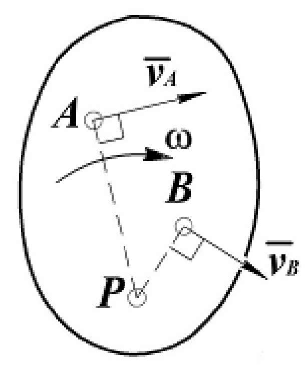
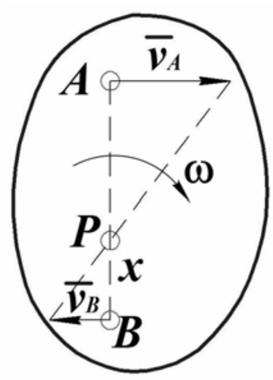
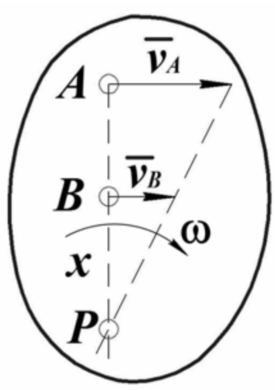
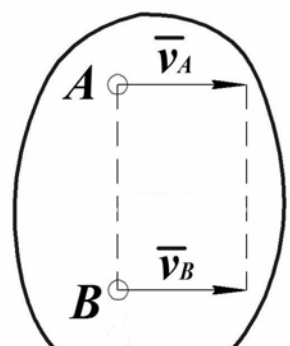
Известны следующие случаи определения положения МЦС (табл. 6).

Таблица 6

Различные случаи определения положения МЦС

№	Исходные данные и пояснения	Иллюстрация
1	Тело катится без скольжения по неподвижной поверхности (или плоскости). *МЦС находится в точке контакта тела с неподвижной поверхностью.*	
2	Известна скорость $\bar{v}_A$ какой-либо точки A и угловая скорость ω плоской фигуры. *Вектор $\bar{v}_A$ повернуть на угол 90° по направлению вращения ω и отложить на полученном перпендикуляре отрезок $AP = v_A / \omega$.*	

Окончание табл. 6

№	Исходные данные и пояснения	Иллюстрация
3	Известны направления скоростей двух точек A и B (векторы $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ не параллельны). *МЦС находится на пересечении перпендикуляров, проведённых из точек A и B к направлениям скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ соответственно.*	
4	Известны скорости двух точек A и B, причём $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ и направлены в разные стороны. *МЦС находится в точке пересечения прямой AB и прямой, соединяющей концы векторов $\bar{v}_A, \bar{v}_B$, отложенных в масштабе.* Положение МЦС можно определить аналитически из выражения $$\omega = \frac{v_A}{AB - x} = \frac{v_B}{x} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$	
5	Известны скорости двух точек A и B, причём $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ направлены в одну сторону и не равны по модулю. *МЦС находится в точке пересечения прямой AB и прямой, соединяющей концы отложенных в масштабе векторов $\bar{v}_A, \bar{v}_B$.* Положение МЦС можно определить аналитически из выражения $$\omega = \frac{v_A}{AB + x} = \frac{v_B}{x} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$	
6	Известны скорости двух точек, причём $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ направлены в одну сторону и равны по модулю. *МЦС находится в бесконечности (не существует).* Тело совершает мгновенно-поступательное движение, линейные скорости всех точек твёрдого тела в данный момент времени имеют одинаковые линейные скорости, т. е. $\omega = 0$, $\bar{v}_A = \bar{v}_B$.	

3.5. Определение ускорений точек плоской фигуры

3.5.1. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры

Согласно рассмотренному ранее, движение плоской фигуры складывается из поступательного и вращательного движений. Покажем, что ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорений, которые точка получает в каждом из этих движений.

Положение точки B можно определить по формуле $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}'$, где $\bar{r}_A$ – радиус-вектор полюса A, $\bar{r}'$ – вектор, определяющий положение точки B относительно полюса A (рис. 47).

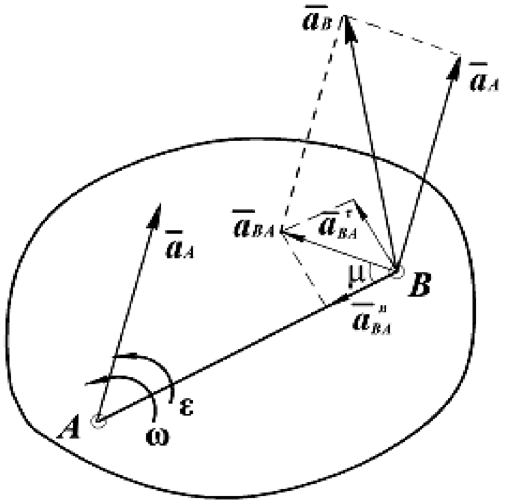


Рис. 47. Построение вектора ускорения точки B

Согласно теореме о скоростях точек плоской фигуры,

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}, \quad \text{или} \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Очевидно, что ускорение точки B будет равно

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}'}{dt^2},$$

где $\dfrac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} = \bar{a}_A$ – ускорение полюса A. Так как $|\bar{r}'| = \text{const}$, исходя из свойств плоской фигуры, можно утверждать, что $\dfrac{d^2\bar{r}'}{dt^2} = \bar{a}_{BA}$ – ускорение точки B в её вращательном движении вокруг полюса A.

Ускорение любой точки плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и ускорения этой точки в её вращении вместе с фигурой вокруг полюса: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$.

Следовательно, ускорение некоторой точки B плоской фигуры изображается диагональю векторного параллелограмма (построенного при точке B), в котором его сторонами являются $\overline{a}_{BA}$ и $\overline{a}_A$ (рис. 47).

При решении задач вектор $\overline{a}_{BA}$ раскладывают на составляющие:

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n},$$

где $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB$ – касательная составляющая ускорения ($\overline{a}_{BA}^{\tau} \perp AB$ и направлен в сторону вращения ε на рис. 47, 48); $a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB$ – нормальная составляющая ускорения ($\overline{a}_{BA}^{n}$ всегда направлен из точки B к полюсу A).

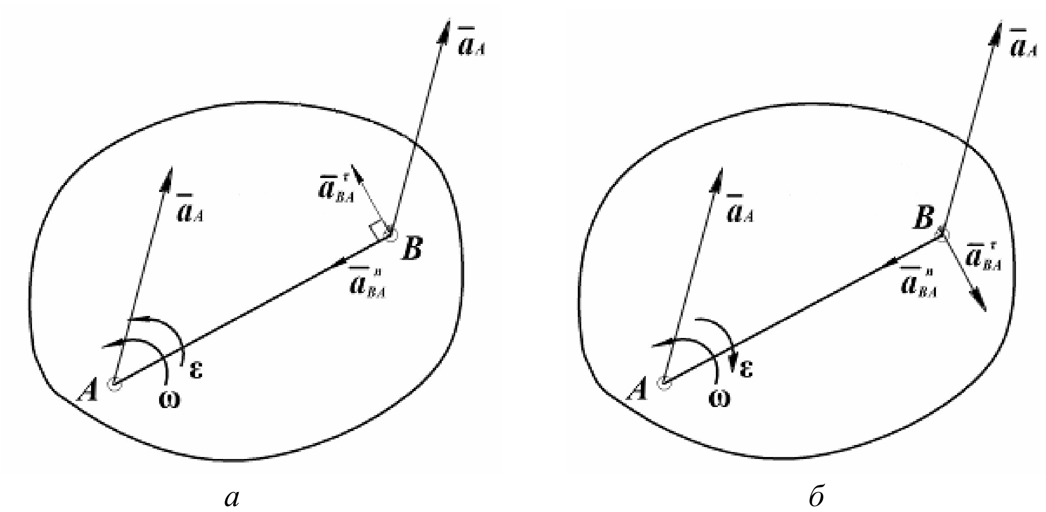


Рис. 48. К доказательству теоремы об ускорениях точек плоской фигуры: *а* – случай ускоренного вращения; б – случай замедленного вращения

Модуль полного ускорения $\overline{a}_{BA}$ определяют по формуле

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^{\tau})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

При графическом определении ускорения точки B удобно пользоваться углом μ, тангенс которого находят из выражения

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{a_{BA}^{n}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Если известны траектории полюса A и точки B, ускорение которой надо найти, то ускорения этих точек для удобства вычисления раскладывают на нормальные и касательные составляющие. Тогда теорема об ускорениях точек плоской фигуры примет развёрнутый вид

$$\overline{a}_B^{n} + \overline{a}_B^{\tau} = \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau}.$$

Таким образом, для определения ускорения произвольной точки B необходимо знать ускорение какой-либо точки плоской фигуры A, принимаемой за полюс, угловую скорость ω плоской фигуры и её угловое ускорение ε в данный момент времени.

Модуль ускорения точки B (или любой другой точки плоской фигуры) можно найти следующими способами:

– графически;

– аналитически (способом проекций): $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$, где a_{Bx}, a_{By} – проекции ускорения точки B на заранее выбранные оси x и y прямоугольной системы координат.

3.5.2. Теорема о существовании мгновенного центра ускорений

Пользуясь теоремой об ускорениях точек плоской фигуры, покажем, что в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, *ускорение которой в данный момент времени равно нулю*. Эту точку обычно обозначают буквой Q и называют *мгновенным центром ускорений (МЦУ)*.

Заданы ускорение $\overline{a}_A$ точки A плоской фигуры (рис. 49), угловая скорость ω и угловое ускорение ε в некоторый момент времени. Пусть фигура вращается ускоренно; зная ω и ε, определим угол $\mu = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. Проведём из точки A луч под углом μ от вектора $\overline{a}_A$, сонаправленно с ε. Ускорение любой точки на этом луче будет равно $\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}$, где вектор $\overline{a}_{MA}$ будет сонаправлен с ε и образует с лучом угол μ. На данном луче отложим отрезок, равный $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$. Докажем, что полученная точка Q будет являться МЦУ.

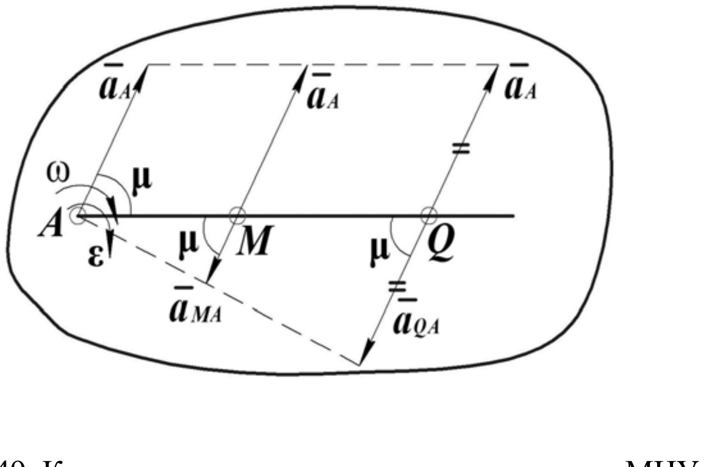


Рис. 49. К доказательству теоремы существования МЦУ

Ускорение этой точки равно $\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}$, где численно $a_{QA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot AQ$. Подставляя сюда значение AQ, находим, что $a_{QA} = a_A$. Кроме того, вектор $\bar{a}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол μ. Следовательно, $\bar{a}_{QA} \parallel \bar{a}_A$, но направлен в противоположную сторону, поэтому $\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A$ и $\bar{a}_Q = 0$.

При непоступательном движении плоской фигуры в каждый момент времени в её плоскости имеется единственная точка, ускорение которой равно нулю.

3.5.3. Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра ускорений

Ускорения точек плоской фигуры при её непоступательном движении распределяются так же, как и при вращательном движении фигуры вокруг МЦУ с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε (рис. 50).

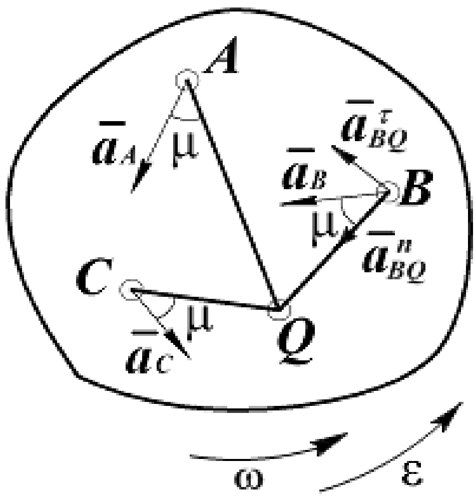


Рис. 50. Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью МЦУ

Если за полюс принять мгновенный центр ускорений $\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ}$, где $\bar{a}_Q = 0$, то $\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ}$; $\bar{a}_B = \bar{a}_{BQ}$; $\bar{a}_C = \bar{a}_{CQ}$.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно ускорению этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений (точки Q).

Модули ускорений точек плоской фигуры будут равны:

$$a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad a_C = CQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Ускорение точки B можно найти по составляющим:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{BQ}^n + \overline{a}_{BQ}^\tau,$$

где $\overline{a}_{BQ}^n$ – нормальное ускорение точки B в её вращении вокруг МЦУ; $\overline{a}_{BQ}^\tau$ – касательное ускорение точки B в её вращении вокруг МЦУ.

$$a_{BQ}^n = \omega^2 \cdot BQ; \quad a_{BQ}^\tau = \varepsilon \cdot BQ,$$

где BQ – расстояние от точки B до мгновенного центра ускорений.

Вектор $\overline{a}_{BQ}^n$ направлен от точки B к мгновенному центру ускорений Q, вектор $\overline{a}_{BQ}^\tau$ направлен перпендикулярно прямой BQ в сторону вращения плоской фигуры, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если вращение замедленное.

Модули ускорений точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ} = \ldots$$

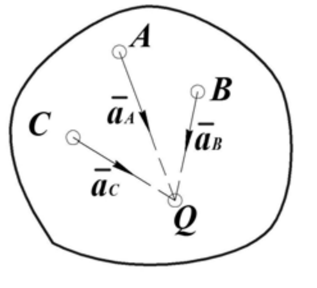
Векторы ускорений точек плоской фигуры составляют с отрезками, соединяющими эти точки с МЦУ, один и тот же угол $\mu = \mathrm{arctg}\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ (рис. 50).

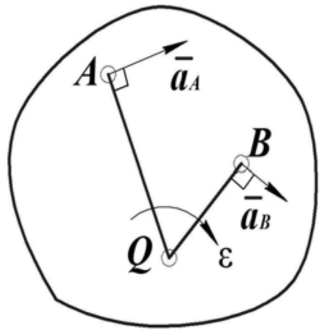
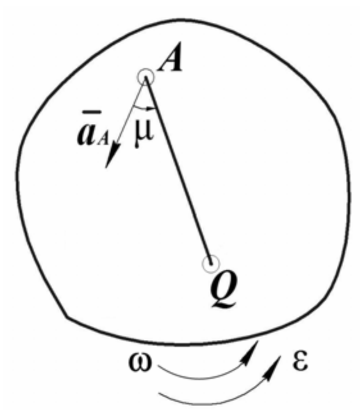
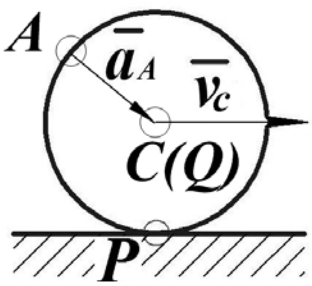
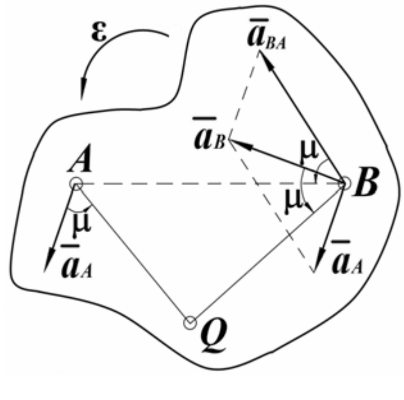
3.5.4. Различные случаи определения положения мгновенного центра ускорений

Известны следующие случаи определения положения МЦУ (табл. 7).

Таблица 7

Разные случаи определения положения МЦУ

№	Исходные данные и пояснения	Иллюстрация
1	Равномерное вращение плоской фигуры: $\varepsilon = 0,\ \omega \neq 0$. В этом случае: $\mathrm{tg}\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2} = 0; \quad AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \dfrac{a_A}{\omega^2}.$ *МЦУ лежит на прямой, вдоль которой направлено ускорение какой-либо точки плоской фигуры.*	

№	Исходные данные и пояснения	Иллюстрация
2	Момент обращения угловой скорости в ноль: $\varepsilon \neq 0,\ \omega = 0$. Так как $\mathrm{tg}\mu = \frac{\lvert\varepsilon\rvert}{\omega^2} = \frac{\lvert\varepsilon\rvert}{0} = \infty$, то $\mu = \frac{\pi}{2}$ и $AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}$. *МЦУ находится на пересечении перпендикуляров к ускорениям точек.*	
3	Неравномерное вращение: $\varepsilon \neq 0$, $\omega \neq 0$. В данном случае должны быть известны: ускорение какой-либо точки плоской фигуры $\bar{a}_A$, угловая скорость ω и угловое ускорение ε плоской фигуры. *Отложив от вектора $\bar{a}_A$ луч под углом μ, сонаправленный с ε, и отрезок $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ на этом луче, получим искомое положение МЦУ.*	
4	Ускорение какой-либо точки плоской фигуры по условию задачи равно нулю, *тогда эта точка является МЦУ* (качение без скольжения по прямолинейному рельсу колеса, если $\bar{v}_C = \mathrm{const}$). Как видно, положение МЦУ и МЦС не совпадают. Ускорение каждой точки колеса будет направлено к точке *C*.	
5	Известны модули и направления ускорений двух точек плоской фигуры – $\bar{a}_A, \bar{a}_B$. Примем точку *A* за полюс, тогда $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$. Построим при точке *B* параллелограмм ускорений по заданным $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$, из которого найдём $\bar{a}_{BA}$, образующий с прямой *AB* угол μ. Определив угол μ графически и направление ε, отложим этот угол от ускорений точек *A* и *B* по направлению ε. *Пересечение двух проведённых полупрямых из заданных точек даст положение МЦУ.*	

3.6. Методические указания и пример выполнения расчётно-графической работы по теме «Плоскопараллельное движение твёрдого тела»

При выполнении задания необходимо изучить тему «Плоскопараллельное движение твёрдого тела».

При решении задания рекомендуется придерживаться следующей последовательности действий:

1) на чертеже изобразите механизм в том положении, в котором требуется определить его кинематические характеристики;

2) по данным задачи определите модуль и направление скорости одной точки звена механизма, совершающего плоскопараллельное движение, и направление скорости другой точки этого же звена;

3) определите линейные скорости точек звеньев механизма и угловые скорости звеньев, используя теорему о проекциях скоростей двух точек или понятие мгновенного центра скоростей этого звена;

4) найдите ускорение какой-нибудь точки звена, принимая её в дальнейшем за полюс; при этом, если точка движется по окружности, то её ускорение представьте геометрической суммой касательного и нормального ускорений;

5) запишите векторное равенство, являющееся аналитическим выражением теоремы об ускорениях точек тела при плоскопараллельном движении; при этом одна точка является полюсом, а другая – точкой, ускорение которой надо найти;

6) представьте искомое ускорение точки геометрической суммой касательного и нормального ускорений, если точка, ускорение которой определяется, движется по окружности;

7) проецируя обе части векторного равенства относительно ускорений указанных точек на прямую, проходящую через точки, и на прямую, перпендикулярную к ней, найдите требуемое ускорение точки и её угловое ускорение по отношению к полюсу.

Примечание. В механизме, состоящем из нескольких звеньев, каждое звено, совершающее плоскопараллельное движение, имеет свой мгновенный центр скоростей и свою угловую скорость в данный момент времени.

Пример 1. Ползун линейки эллипсографа движется со скоростью $v_A = 10\sqrt{3}$ (см/с) (рис. 51); длина эллипсографа AB = 20(см). Определить скорость и ускорение ползуна B, положение МЦУ линейки эллипсографа в момент, когда она образует с осью Ox угол $a = 30°$, а ускорение точки A равно нулю.

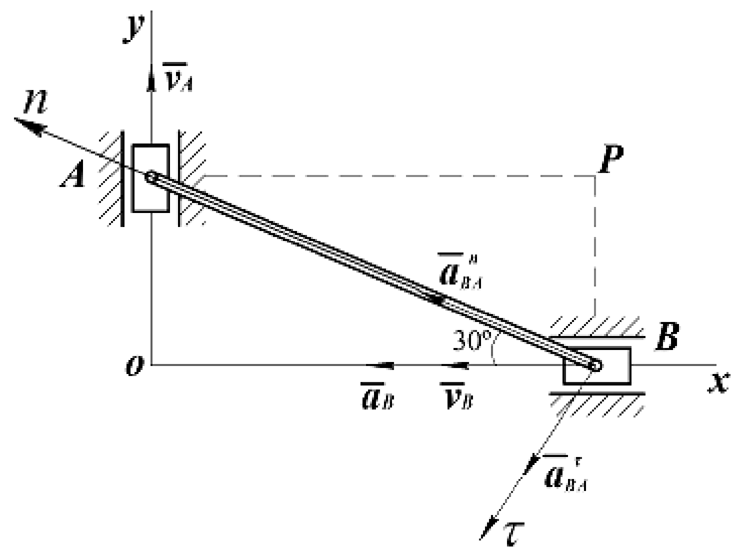


Рис. 51. Расчётная схема

Решение. Определим скорость точки *B* с помощью МЦС, проведя перпендикуляры к векторам скоростей $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ до их пересечения. Модули скоростей этих точек связаны соотношением

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP},$$

отсюда

$$v_B = v_A \frac{BP}{AP} = v_A \cdot \mathrm{tg}30^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\,(\text{см/с}).$$

Угловая скорость звена *AB* равна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{10\sqrt{3}}{20 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{10\sqrt{3}}{20\sqrt{3}/2} = 1\,(\text{рад/с}).$$

Определим ускорение точки *B*: $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^\tau_{BA} + \overline{a}^n_{BA}$, где $a_A = 0$ по условию.

Спроецируем векторное равенство на ось *n*: $a_B \cos 30^\circ = a^n_{BA}$, где

$$a^n_{BA} = \omega_{AB}{}^2 \cdot AB = 1^2 \cdot 20 = 20\,(\text{см/с}^2);$$

$$a_B = \frac{20}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}/2} = 40\frac{\sqrt{3}}{3}\,(\text{см/с}^2).$$

Спроецируем теперь векторное равенство на ось τ: $a_B \cos 60^\circ = a^\tau_{BA}$, отсюда

$$a^\tau_{BA} = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 = 20\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\text{см/с}^2).$$

Угловое ускорение звена AB равно

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{20}{20} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Определим положение мгновенного центра ускорений, используя формулу

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

отсюда $\mu = 30°$.

Расстояние от точки B до МЦУ равно

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{1/3 + 1}} = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2 / \sqrt{3}} = 20\,(\text{см}).$$

Мгновенный центр ускорений совпадает с точкой A.

Пример 2. Условие. Механизм (рис. 52) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна B, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Определить скорости точек B и E, угловую скорость звена DE, а также ускорение точки B и угловое ускорение звена AB.

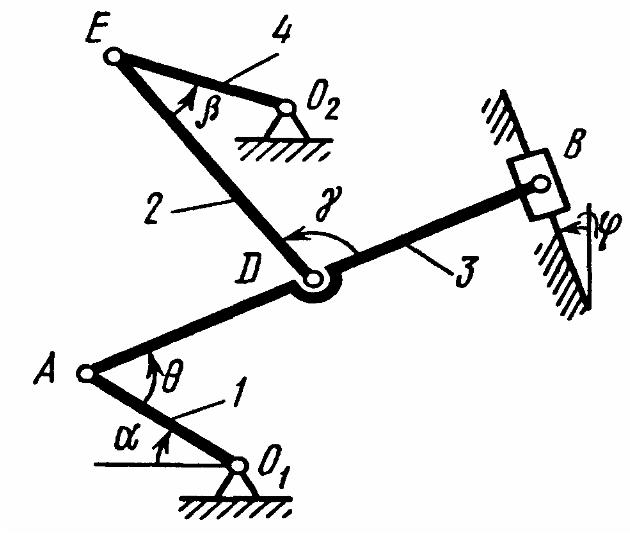


Рис. 52. Исходная схема

Исходные данные: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$(м), $l_2 = 1{,}2$(м), $l_3 = 1{,}4$(м), $\omega_1 = 2(\text{с}^{-1})$, $\varepsilon_1 = 7(\text{с}^{-2})$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

Найти: v_B, v_E , ω_2, a_B, ε_3.

Решение.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами. На рис. 53 в ходе решения изобразим все векторы скоростей.

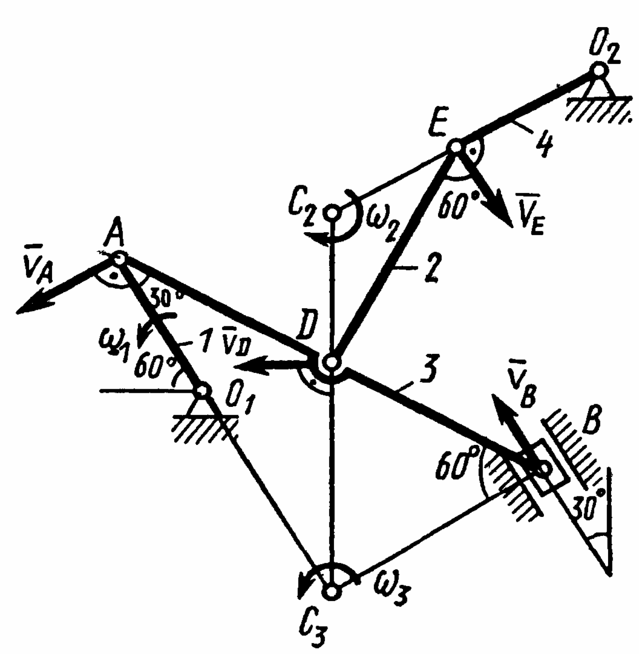


Рис. 53. Схема к определению скоростей точек плоской фигуры

2. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, можем определить $\bar{v}_A$ численно:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0{,}8 \text{ (м/с)}; \quad \bar{v}_A \perp O_1A.$$

Направление $\bar{v}_B$ найдём, учитывая, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{v}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим: $v_B \cdot \cos 30° = v_A \cdot \cos 60°$, и $v_B = 0{,}46$ (м/с).

3. Найдём $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB – это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\bar{v}_A$

определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину $\bar{v}_D$ найдём из пропорции $\dfrac{v_D}{C_3D} = \dfrac{v_B}{C_3B}$.

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, т. к. острые углы в нём равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \cdot \sin 30° = 0{,}5 \cdot AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ (м/с)}; \quad \bar{v}_D \perp C_3D.$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. 53 видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдём, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}; \quad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ (м/с)}.$$

4. Вычислим ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2), и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ (м), то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

5. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. 54), на котором изображаем все векторы ускорений.

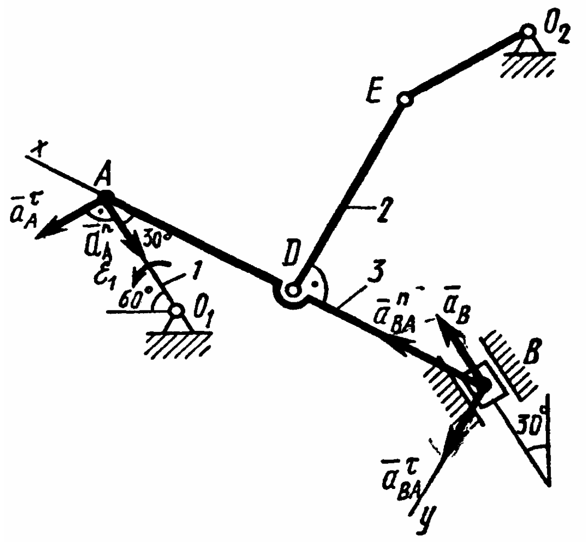


Рис. 54. Схема к определению ускорений точек плоской фигуры

Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2{,}8\,(\text{м/с}^2); \quad a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1{,}6\,(\text{м/с}^2).$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\bar{a}_A^\tau$ – сонаправлен ε_1 перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (рис. 54). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{v}_B$.

Для определения $|\bar{a}_B|$ воспользуемся векторным равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня *3*, получим $\omega_3 = \dfrac{v_A}{C_3A} = \dfrac{v_A}{l_3 \cdot \cos 30°} = 0{,}66\,(\text{с}^{-1})$ и $a_{BA}^n = 0{,}61\,(\text{м/с}^2)$.

Таким образом, из величин, входящих в векторное равенство, выражающее $\bar{a}_B$, неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроецировав обе части данного равенства на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроецируем обе части векторного равенства на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cdot \cos 30° = a_A^\tau \cdot \cos 60° - a_A^n \cdot \cos 30° + a_{BA}^n.$$

Подставив в полученное равенство числовые значения всех величин, найдём, что

$$a_B = 0{,}72\ (\text{м/с}^2).$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен так, как показано на рис. 54.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части векторного равенства, выражающего $\bar{a}_B$, спроецируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B \cdot \sin 30° = a_A^\tau \cdot \sin 60° + a_A^n \cdot \sin 30° + a_{BA}^\tau.$$

Подставив в полученное равенство известные числовые значения, найдём, что $a^{\tau}_{BA} = -\,3{,}58(\text{м/с}^2)$. Знак указывает, что направление a^{τ}_{BA} противоположно показанному на рис. 54.

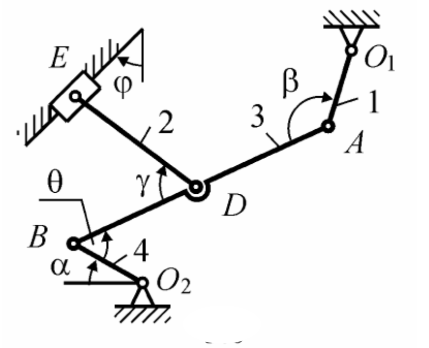
Теперь из равенства $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_3 \cdot l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a^{\tau}_{BA}\right|}{l_3} = 2{,}56\,(\text{с}^{-2}).$$

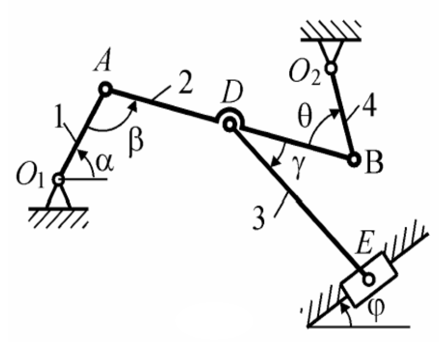
Ответ: $v_B = 0{,}46$ (м/с); $v_E = 0{,}46$ (м/с); $\omega_2 = 0{,}67$ (с^{-1}); $a_B = 0{,}72$ (м/с^2); $\varepsilon_3 = 2{,}56$ (с^{-2}).

3.7. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Плоскопараллельное движение твёрдого тела»

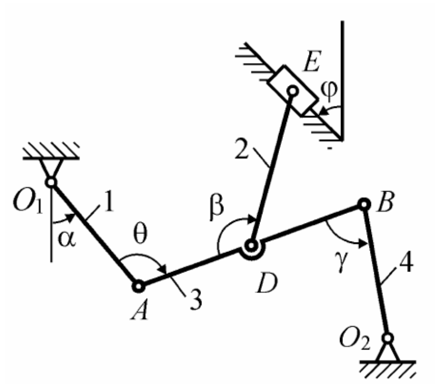
Условие. Плоский механизм состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B* или *E* (рис. 55), соединённых шарнирами друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2; шарнир *D* находится в середине стержня *AB*. Длины стержней равны соответственно: $l_1 = 0{,}4$(м), $l_2 = 1{,}2$(м), $l_3 = 1{,}4$(м), $l_4 = 0{,}6$(м). Угловое ускорение звена *1* в данный момент времени равно $\varepsilon_1 = 1(\text{с}^{-2})$. Положительные направления отсчёта заданных угловых скоростей и углового ускорения ε_1 – против хода часовой стрелки.



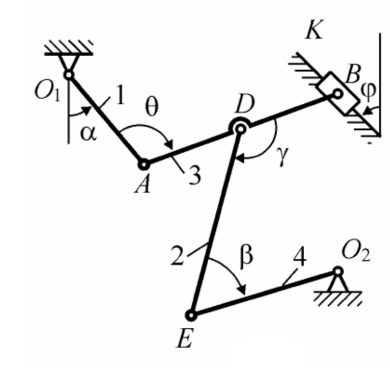
0



1



2



3

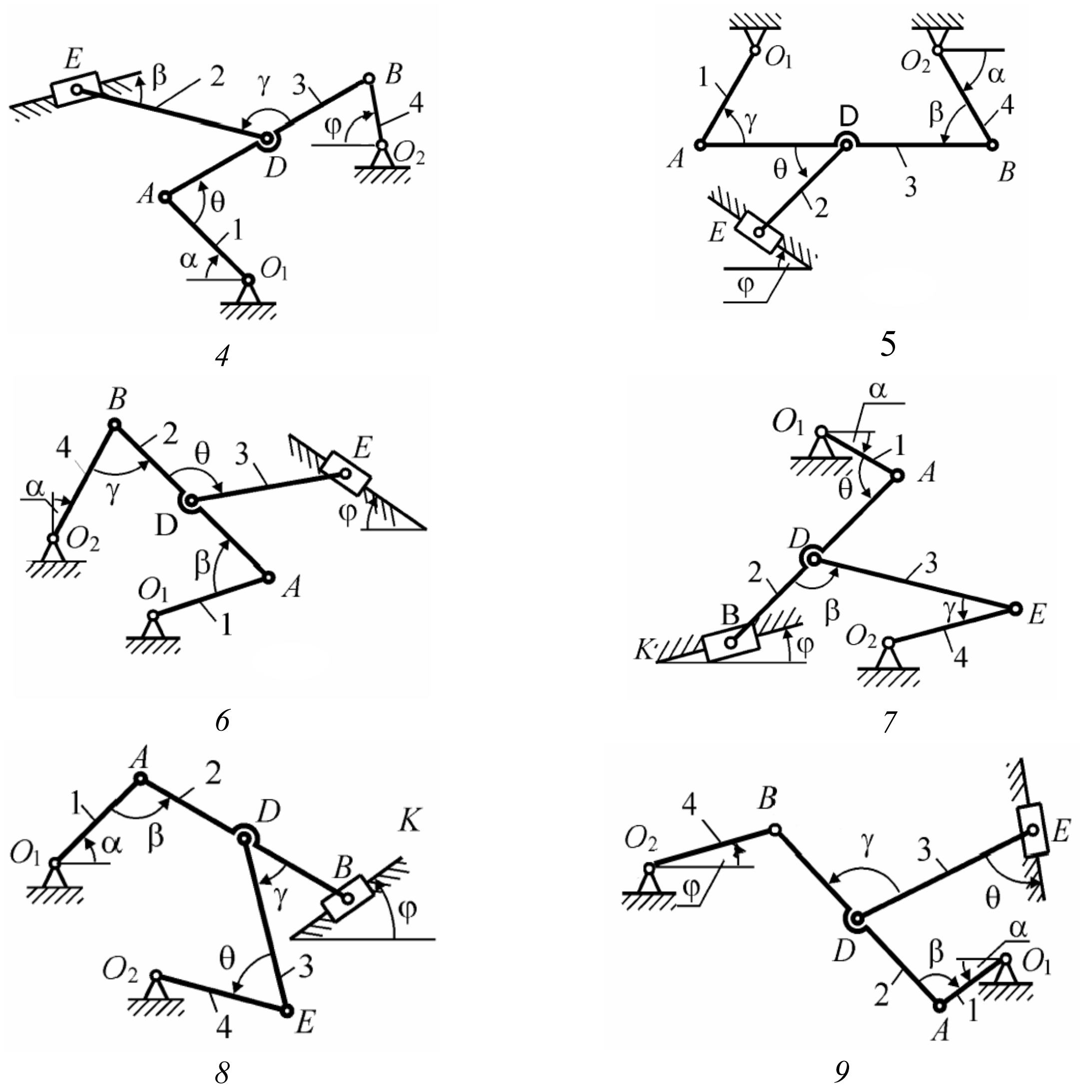


Рис. 55. Схемы к заданиям

Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 8.

Таблица 8

Исходные данные

Номер		**Углы, градусы**					**Дано**	
строки	**рисунка**	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, \mathbf{1/c}$	$\omega_4, \mathbf{1/c}$
0	0	0	60	30	0	120	6	
1	1	90	120	150	0	30		4
2	2	60	150	150	90	30		5
3	3	30	30	60	0	150	4	
4	4	90	120	120	90	60		6
5	5	90	120	120	0	60		5
6	6	90	150	120	90	60	3	
7	7	0	60	60	0	120		2
8	8	60	150	120	90	30	2	
9	9	30	120	150	0	60		8

Определить скорости всех точек механизма, обозначенных буквами на схемах, угловые скорости всех стержней и ускорение точки *A* (если задана ω_4) или точки *B* (если задана ω_1), а также угловое ускорение звена *AB*.

Дуговые стрелки на рис. 55 показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы (по ходу или против хода часовой стрелки). Построение чертежа необходимо начинать со стержня, положение которого определяется углом α.

3.8. Задания для самостоятельной работы

3.8.1. Мгновенный центр скоростей плоской фигуры

Пример. Зубчатое колесо *1* перемещается между рейками *2* и *3*, имеющими скорости $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ (рис. 56), причём $V_1 > V_2$. Мгновенный центр скоростей колеса ... (выберите один правильный ответ из списка предложенных):

а) совпадает с центром колеса;

б) не существует;

в) находится на прямой *L* выше рейки *3*;

г) находится на прямой *L* выше рейки *2*.

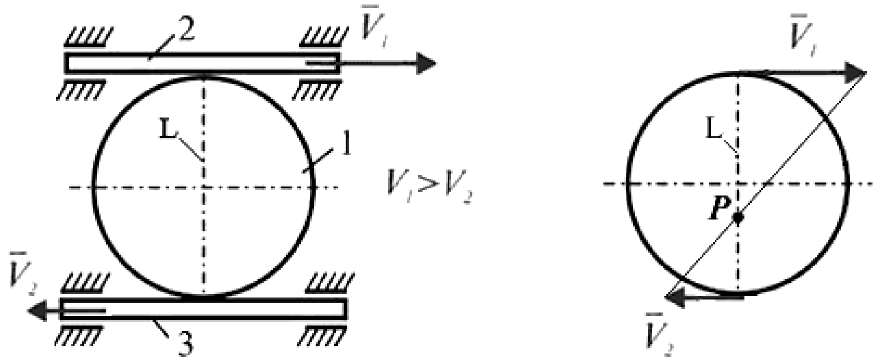


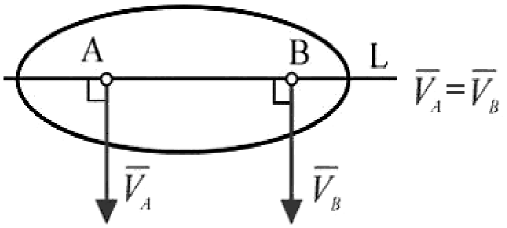
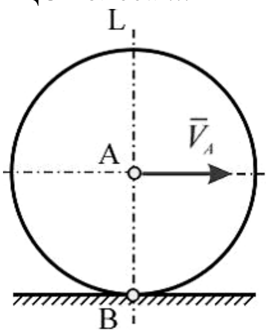
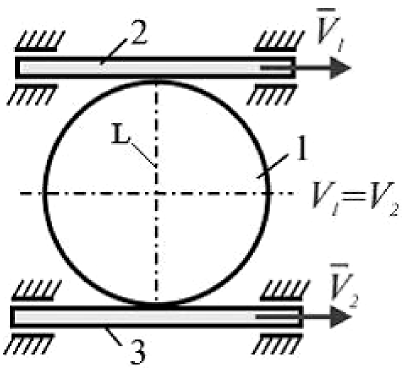
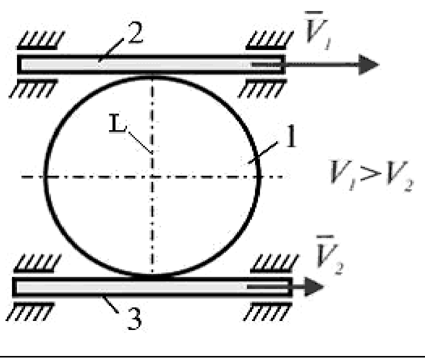
Рис. 56. Иллюстрация к определению МЦС плоской фигуры

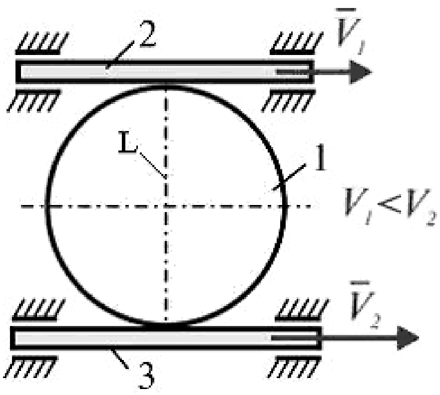
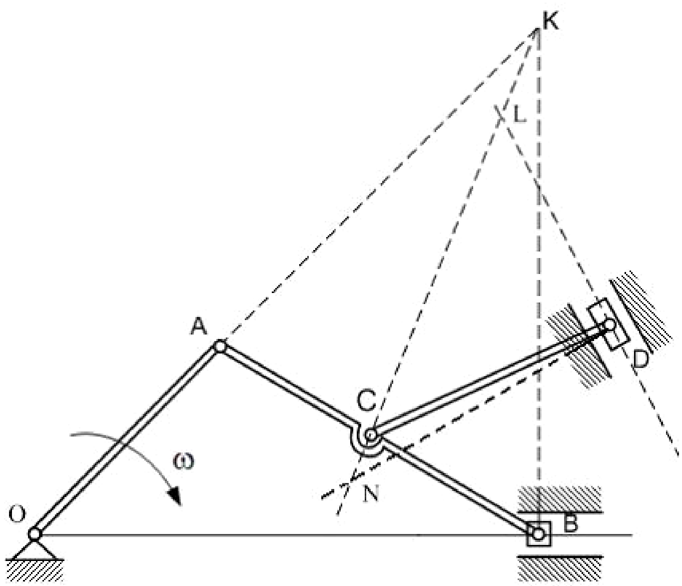
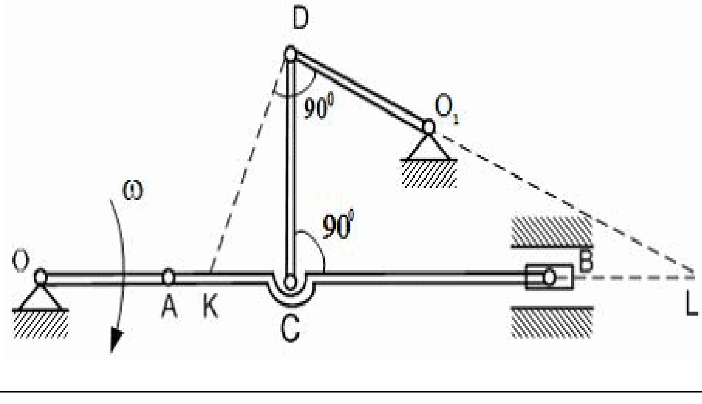
Решение. Согласно разделу 3.4.5, МЦС находится в точке пересечения прямой *L* и прямой, соединяющей концы векторов $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$, отложенных в масштабе. Выполнив построения, получим, что МЦС в данном случае будет находиться на прямой *L* выше рейки *3*.

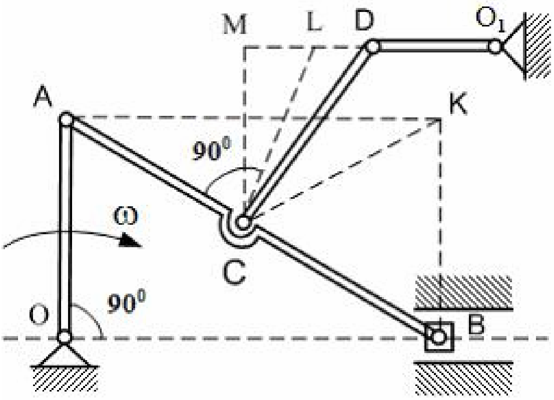
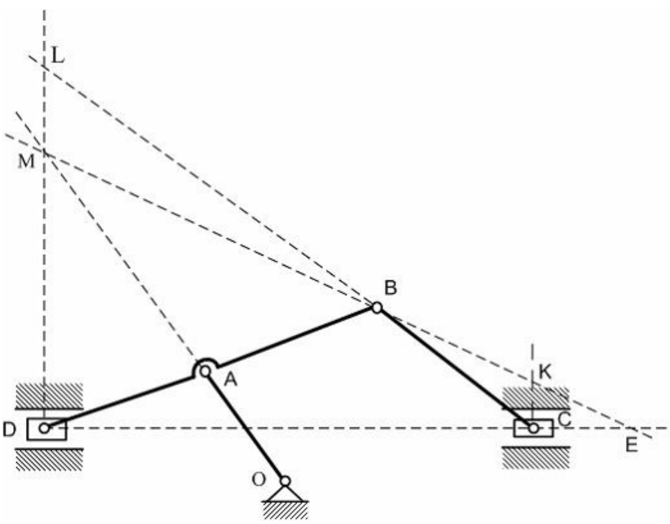
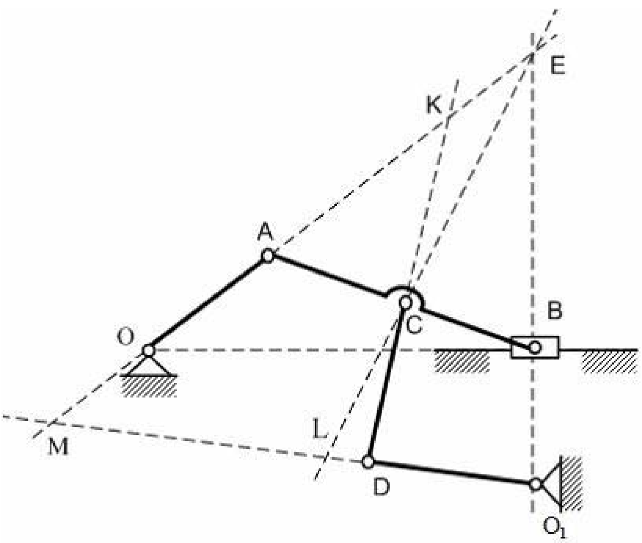
Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

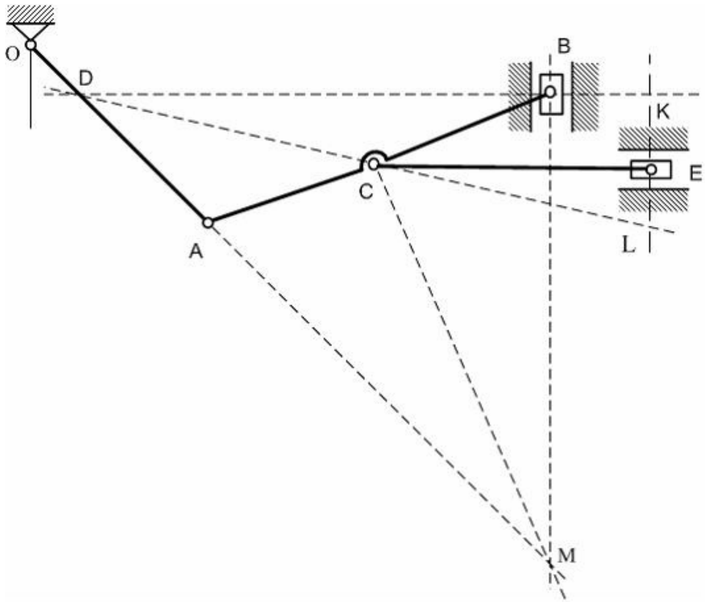
Условие. Фигура, изображёная на схемах, совершает плоскопараллельное движение (табл. 9). Мгновенный центр скоростей фигуры … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Варианты тестовых заданий по теме «Мгновенный центр скоростей плоской фигуры»

№	Условие задания	Варианты ответов
1	Плоская фигура движется не поступательно. В некоторый момент скорости точек *A* и *B* направлены так, как указано на схеме. МЦС фигуры ...  	а) не существует; б) находится на прямой *L* слева от точки *A*; в) находится на прямой *L* справа от точки *B*; г) находится на прямой *L* между точками *A* и *B*.
2	Колесо автомобиля движется по дороге без проскальзывания. МЦС колеса ...  	а) совпадает с точкой *B*; б) находится на прямой *L* между точками *A* и *B*; в) находится на прямой *L* ниже точки *B*; г) находится на прямой *L* выше точки *A*.
3	Зубчатое колесо *1* перемещается между рейками *2* и 3, имеющими скорости $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$. МЦС колеса ...  	а) совпадает с центром колеса; б) не существует; в) находится на прямой *L* ниже рейки *3*; г) находится на прямой *L* выше рейки *2*.
4	Зубчатое колесо *1* перемещается между рейками *2* и *3*, имеющими скорости $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$. МЦС колеса ...  	а) совпадает с центром колеса; б) не существует; в) находится на прямой *L* выше рейки *2*; г) находится на прямой *L* ниже рейки *3*.

№	Условие задания	Варианты ответов
5	Зубчатое колесо *1* перемещается между рейками *2* и *3*, имеющими скорости $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$. МЦС колеса ... 	а) находится на прямой *L* ниже рейки *3*; б) находится на прямой *L* выше рейки *2*; в) не существует; г) совпадает с центром колеса.
6	Для механизма в положении, представленном на рисунке, МЦС звена *CD* находится в … 	а) ∞; б) точке *L*; в) точке *N*; г) точке *C*.
7	Для механизма в положении, представленном на рисунке, мгновенный центр скоростей звена *AB* находится в … 	а) точке *B*; б) ∞; в) точке *L*; г) точке *A*.

№	Условие задания	Варианты ответов
8	Для механизма в положении, представленном на рисунке, МЦС звена *AB* находится в … 	а) ∞; б) точке *K*; в) точке *A*; г) точке *B*.
9	Для механизма в положении, представленном на рисунке, МЦС звена *DB* находится в … 	а) ∞; б) точке *E*; в) точке *L*; г) точке *M*.
10	Для механизма в положении, представленном на рисунке, МЦС звена *CD* находится в … 	а) ∞; б) точке *K*; в) точке *L*; г) точке *M*.

№	Условие задания	Варианты ответов
11	Для механизма в положении, представленном на рисунке, МЦС звена *CE* находится в …  	а) ∞; б) точке *D*; в) точке *L*; г) точке *M*.

3.8.2. Угловая скорость плоской фигуры

Пример. Груз *1* имеет скорость *V* (рис. 57). Найдите угловую скорость тела *2*, соединённого нитью с грузом.

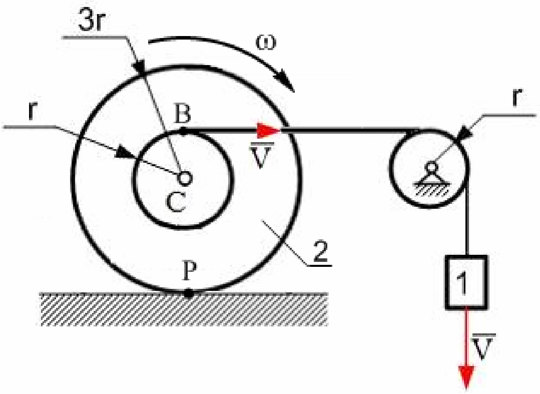


Рис. 57. Иллюстрация к примеру

Решение. Так как нить, соединяющая тела *1* и *2*, нерастяжима, то скорости всех точек нити имеют одинаковые модули, т. е. $V_1 = V_B$. На схеме точкой контакта тела *2* с неподвижной поверхностью будет МЦС. Следовательно, угловая скорость этого тела равна

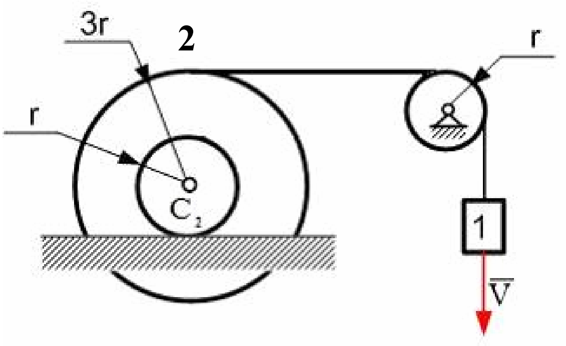
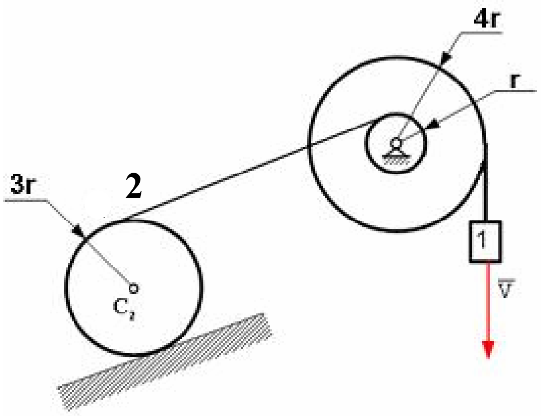
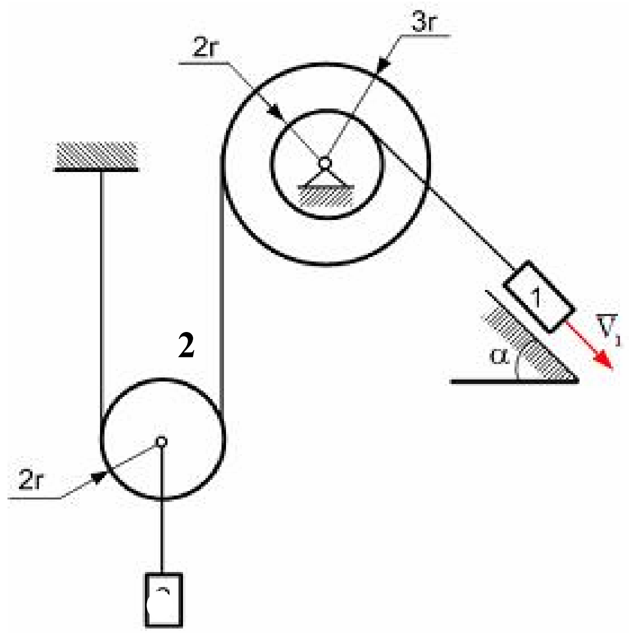
$$\omega_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V}{3r + r} = \frac{V}{4r}.$$

Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

Условие. Груз *1* имеет скорость *V*. Угловая скорость (табл. 10) тела *2* равна … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 10

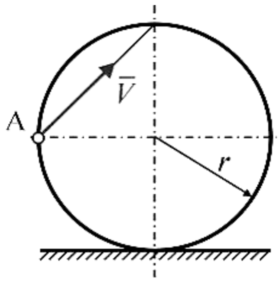
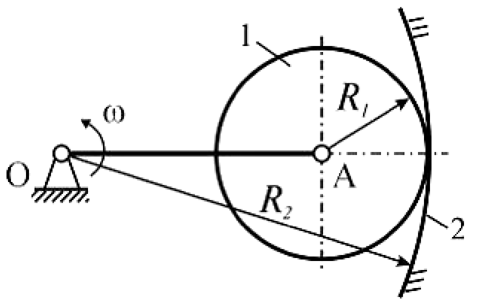
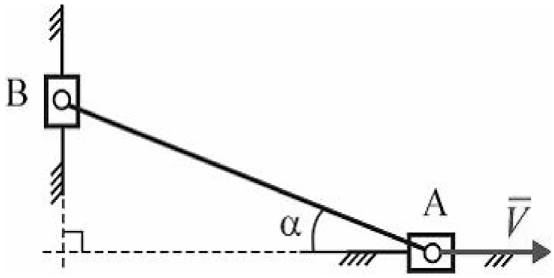
Тестовые задания в общем виде по теме «Угловая скорость плоской фигуры»

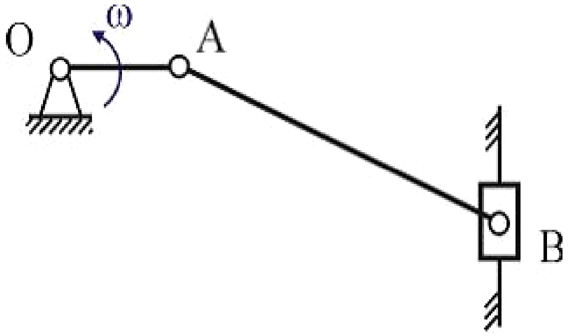
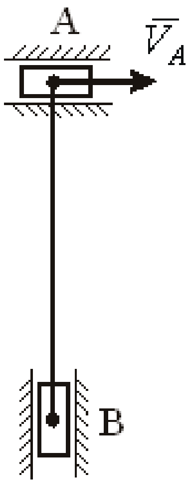
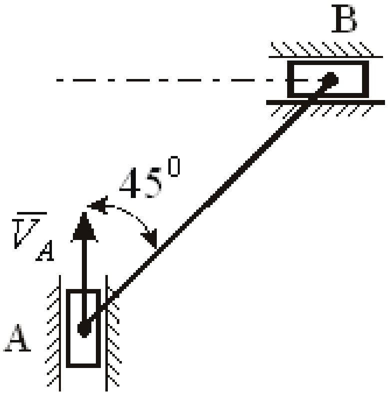
№	Схема	Варианты ответов
1		а) $3V/r$; б) $3V/4r$; в) $V/4r$; г) $V/3r$; д) $4V/3r$.
2		а) $3V/4r$; б) $V/3r$; в) $4V/r$; г) $V/24r$; д)$3V/8r$.
3		а) $V/6r$; б) $3V/8r$; в) $3V/2r$; г) $2V/3r$; д) $4V/3r$.

Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

Таблица 11

Тестовые задания в числах по теме «Угловая скорость плоской фигуры»

№	Условие задачи в числах	Варианты ответов
1	Колесо радиуса $r = 0{,}2$(м) катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Скорость точки *A* равна $V = 3\sqrt{2}$ (м/с).  Угловая скорость колеса равна … (рад/с).	а) 15; б) $0{,}6\sqrt{2}$; в) $15\sqrt{2}$; г) 6.
2	В планетарном механизме с внутренним зацеплением колесо *1* катится по неподвижному колесу *2*. Механизм приводится в движение кривошипом *OA*, угловая скорость которого $\omega = 20$ (рад/с). Радиусы колёс $R_1 = 0{,}1$(м), $R_2 = 0{,}3$(м).  Угловая скорость колеса 1 равна … (рад/с).	а) 40; б) 60; в) 20; г) 10.
3	Ползуны *A* и *B*, соединённые шатуном *AB*, перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим. В положении, изображённом на рисунке, ползун *A* имеет скорость $V = 3$ (м/с), $\alpha = 30°$, $AB = 1$(м).  Угловая скорость шатуна равна … (рад/с).	а) 6; б) 3; в) 10; г) 5.

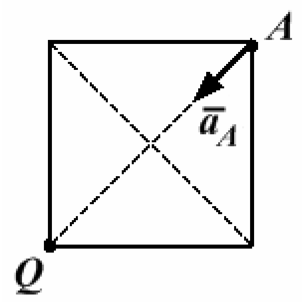
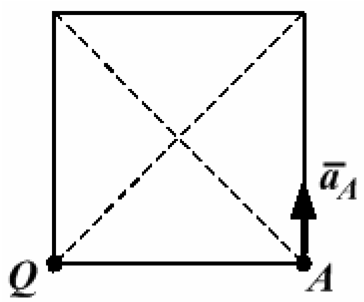
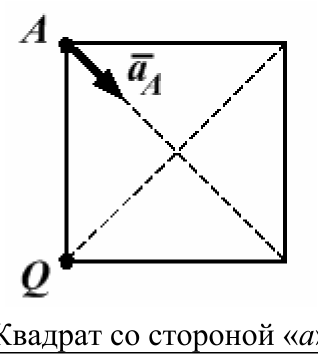
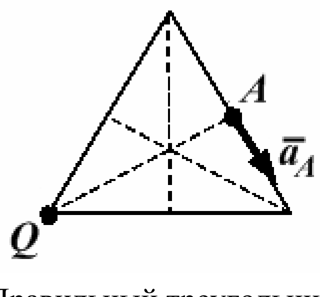
№	Условие задачи в числах	Варианты ответов
4	Кривошипно-шатунный механизм занимает положение, изображённое на рисунке. Кривошип *OA* вращается с угловой скоростью $\omega = 12$ (рад/с).  Угловая скорость шатуна *AB* равна … (рад/с).	а) $4\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{3}$; д) 1.
5	Ползуны *A* и *B*, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем $AB = 20(\text{см})$. Скорость ползуна *A* равна $V_A = 40$ (см/с).  Угловая скорость стержня *AB* равна … (c^{-1}).	а) $4\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{3}$; д) 1.
6	Ползуны *A* и *B*, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем $AB = 20(\text{см})$. Скорость ползуна *A* равна $V_A = 40$ (см/с).  Угловая скорость стержня *AB* равна … (c^{-1}).	а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{3}$; д) 1.

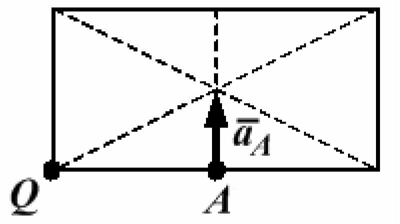
3.8.3. Угловое ускорение плоской фигуры

Фигура, изображённая на схеме (табл. 12), движется плоскопараллельно так, что ускорение точки A равно $a_A = 6a$ (м/с^2). Точка Q – мгновенный центр ускорений. Мгновенное угловое ускорение фигуры равно $\varepsilon = \dots$ (рад/с^2) (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 12

Варианты тестовых заданий по теме «Угловое ускорение плоской фигуры»

№	Схема	a_A (м/с^2)	Варианты ответов
1	 Квадрат со стороной «*a*»	$a_A = 6a$	а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) 3; г) 0.
2	 Квадрат со стороной «*a*»	$a_A = 6a$	а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) 3; г) 0.
3	 Квадрат со стороной «*a*»	$a_A = 6a$	а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) 3; г) 0.
4	 Правильный треугольник со стороной «*a*»	$a_A = 6a$	а) $4\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 3; г) 0.

№	Схема	a_A (м/с^2)	Варианты ответов
5	 Прямоугольный параллелограмм с основанием «2*a*»	$a_A = 6a$	а) 6; б) $3\sqrt{2}$; в) 3; г) 0.

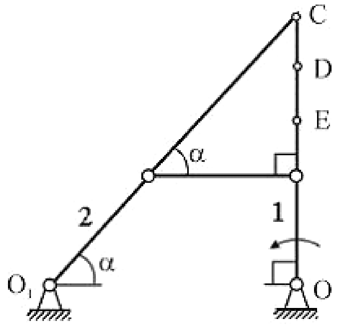
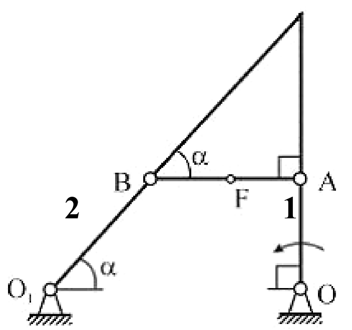
3.8.4. Скорости точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

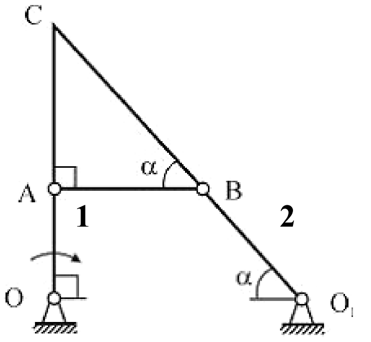
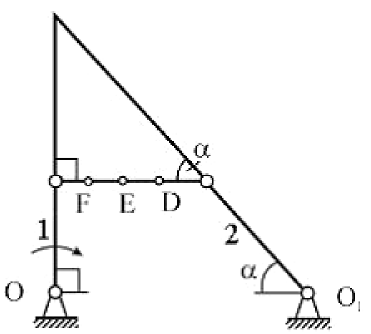
Условие. В четырёхзвенном механизме кривошип *1*, вращающийся вокруг неподвижной оси *O*, передаёт движение через коромысло, выполненное в форме треугольника, кривошипу *2*.

В положении механизма, указанного на схеме (табл. 13), наибольшую скорость среди отмеченных точек коромысла имеет точка … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 13

Варианты тестовых заданий по теме «Скорости точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении»

№	Схема	Варианты ответов
1		а) *C*; б) *D*; в) *E*.
2		а) *A*; б) *B*; в) *F*.

№	Схема	Варианты ответов
3		а) *A*; б) *B*; в) *C*.
4		а) *F*; б) *E*; в) *D*.

4. ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ) И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

4.1. Движение твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку

Рассмотрим движение по отношению к системе отсчёта $Ox_1y_1z_1$ твёрдого тела, закреплённого так, что одна его точка O остаётся во всё время движения неподвижной. Такое движение совершает, например, волчок, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость, или любое другое тело, закреплённое в точке O шаровым шарниром.

1. Уравнения движения. Найдём, какими параметрами определяется положение тела, имеющего неподвижную точку. Для этого свяжем жёстко с телом трёхгранник *Oxyz,* по положению которого можно судить о положении тела (рис. 58).

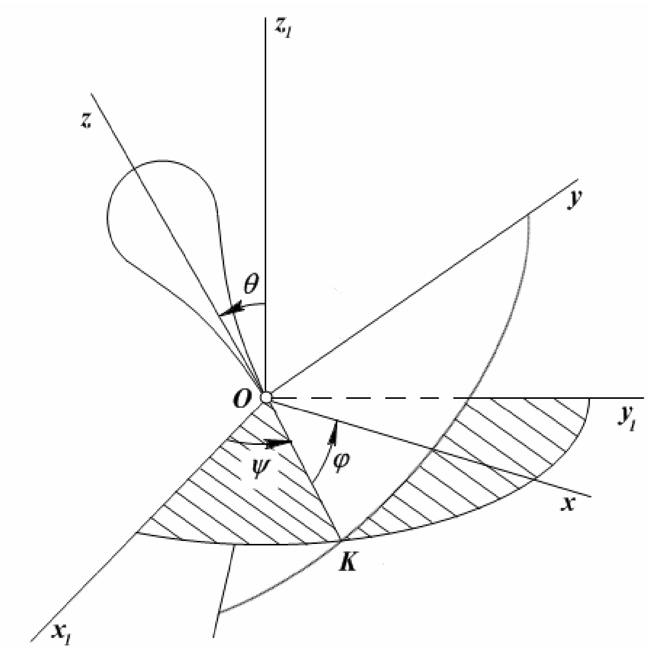


Рис. 58. Определение уравнений движения твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку

Линия *OK,* вдоль которой пересекаются плоскости *Oxy* и Ox_1y_1, называется *линией узлов.* Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ трёхгранника *Oxyz*, а с ним и самого тела можно определить углами $\varphi = \angle KOx$, $\psi = \angle x_1OK$, $\theta = \angle z_1Oz$. Эти углы, называемые *углами Эйлера,* имеют следующие, взятые из небесной механики, наименования: φ – *угол собственного вращения*, ψ – *угол прецессии,* θ – *угол нутации.* Положительные направления отсчёта углов показаны на рис. 58 стрелками.

Чтобы задать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т. е. знать зависимости: $\varphi = f_1(t)$, $\psi = f_2(t)$, $\theta = f_3(t)$ – *уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки.*

2. Угловая скорость тела. При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла ψ – вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\psi}$, и при изменении угла θ – вращение вокруг линии узлов OK (нутация) с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$. Векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ этих угловых скоростей направлены соответственно по осям Oz, Oz_1 и OK (рис. 59). Поскольку при движении тела изменяются все три угла, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$, равной геометрической сумме названных угловых скоростей.

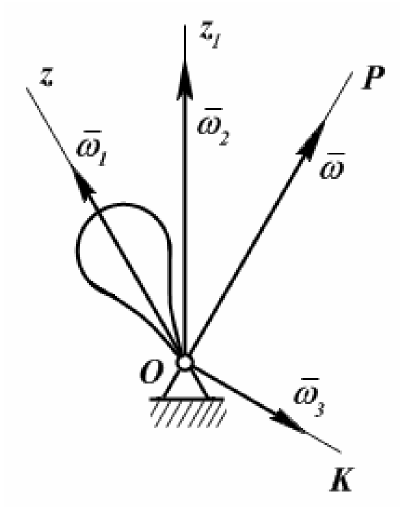


Рис. 59. Вектор угловой скорости тела

Таким образом, $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$. Поскольку значения $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ со временем изменяются, вектор $\overline{\omega}$ будет при движении тела тоже изменяться и численно, и по направлению. По этой причине $\overline{\omega}$ называют ещё *мгновенной угловой скоростью тела.*

3. Геометрическая картина движения тела. Если тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\overline{\omega}$, то его элементарное перемещение за промежуток времени dt представляет собой элементарный поворот на угол $d\theta = \omega \cdot dt$ вокруг оси OP, вдоль которой направлен вектор $\overline{\omega}$ (рис. 59). Эта ось OP называется *мгновенной осью вращения.* Иначе, мгновенная ось вращения – это ось, элементарным поворотом вокруг которой тело перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному. От неподвижной оси мгновенная ось вращения отличается тем, что её направление и в пространстве, и в самом теле непрерывно меняется.

Переместившись элементарным поворотом вокруг оси OP в соседнее положение, тело из этого положения в последующее перемещается поворотом вокруг новой мгновенной оси вращения OP_1 и т. д. Таким образом, движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку (рис. 60).

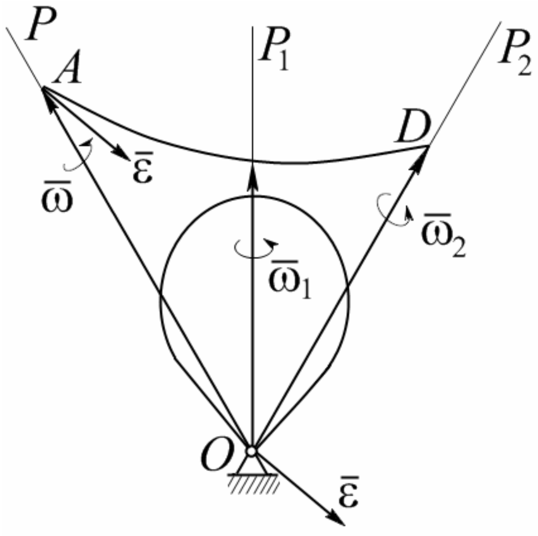


Рис. 60. Вектор углового ускорения тела

4. Угловое ускорение тела. Векторная величина $\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt$, характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется *угловым ускорением тела в данный момент времени,* или *мгновенным угловым ускорением.*

При изменении вектора $\bar{\omega}$ его конец A будет описывать в пространстве некоторую кривую AD, являющуюся годографом вектора $\bar{\omega}$ (рис. 60). Тогда, сравнивая выражение $\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt$ с равенством $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, приходим к выводу, что угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ можно вычислить как скорость, с которой конец вектора $\bar{\omega}$ перемещается вдоль кривой AD. В частности, направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением касательной к кривой AD в соответствующей точке.

Следовательно, в данном случае, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора $\bar{\varepsilon}$ *не совпадает* с направлением вектора $\bar{\omega}$.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются основными кинематическими характеристиками движения тела, имеющего неподвижную точку. Их можно определить аналитически, зная уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Значение $\bar{\omega}$ можно найти и геометрически.

4.2. Кинематические уравнения Эйлера

Для определения вектора $\overline{\omega}$ найдём его проекции на подвижные оси *Oxyz* (рис. 61). Этот вектор можно представить в виде

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3,$$

где численно

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\psi}, \quad \omega_3 = \dot{\theta}.$$

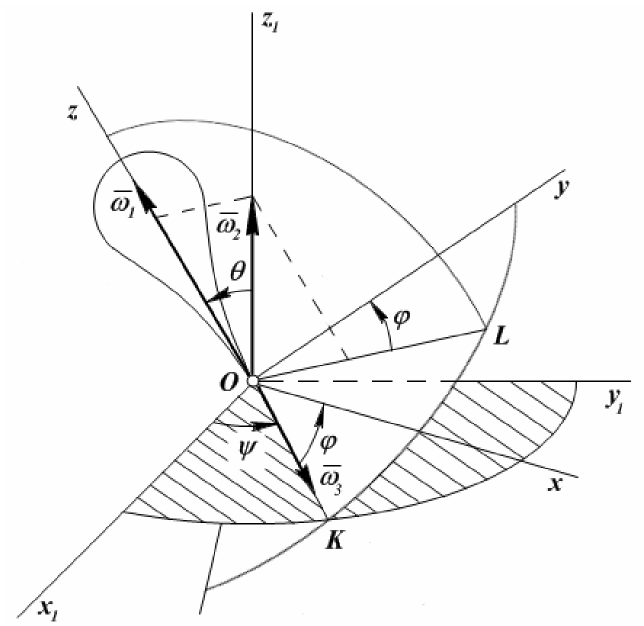


Рис. 61. Проекции вектора $\overline{\omega}$ на подвижные оси координат

Проецируя обе части векторного равенства на оси x, y, z, получим:

$$\omega_x = \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x};$$

$$\omega_y = \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y};$$

$$\omega_z = \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}.$$

Проекции векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_3$ находим сразу (согласно численным значениям слагаемых векторов и рис. 61):

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0, \ \omega_{1z} = \dot{\varphi},$$

$$\omega_{3x} = \dot{\theta} \cdot \cos\varphi, \ \omega_{3y} = -\dot{\theta} \cdot \sin\varphi, \ \omega_{3z} = 0.$$

Для определения проекций вектора $\overline{\omega}_2$ проведём через оси Oz_1 и Oz плоскость, которая пересечётся с плоскостью *Oxy* вдоль линии *OL*. Так как линяя *OK* перпендикулярна плоскости zOz_1, то она перпендикулярна и линии *OL* ($\angle KOL = 90°$, а $\angle LOy = \varphi$). Тогда, проецируя вектор $\overline{\omega}_2$ на линию *OL*, а эту проекцию, в свою очередь, на оси *Ox* и *Oy*, получим:

$$\omega_{2x} = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi;$$

$$\omega_{2y} = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi;$$

$$\omega_{2z} = \dot{\psi} \cdot \cos\theta.$$

Определив проекции всех слагаемых мгновенной угловой скорости тела на подвижные оси *Oxyz*, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \cdot \sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta. \end{aligned}\right\}$$ *Кинематические уравнения Эйлера.*

Аналогично можно найти проекции вектора $\overline{\omega}$ на неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$. Соответствующие формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + \dot{\theta} \cdot \cos\psi, \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi + \dot{\theta} \cdot \sin\psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cdot \cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\}$$

Используя эти равенства, можно определить проекции на неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$ вектора $\overline{\varepsilon}$. Так как $\overline{\varepsilon} = d\overline{\omega}/dt$, то

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1}, \quad \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}, \quad \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1}.$$

Эти проекции и определяют вектор $\overline{\varepsilon}$. Таким образом, зная уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки, можно по полученным формулам найти $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$.

4.3. Скорости и ускорения точек тела

Так как тело, движущееся вокруг неподвижной точки, имеет в каждый момент времени мгновенную ось вращения *OP*, вокруг которой происходит элементарный поворот с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (рис. 62), то вектор скорости какой-нибудь точки *M* тела будет определяться в этот момент равенством $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор, проведённый в точку *M* из неподвижной точки *O*. Вектор $\overline{v}$ направлен перпендикулярно плоскости *MOP*, проходящей через точку *M* и ось *OP*, в сторону поворота тела.

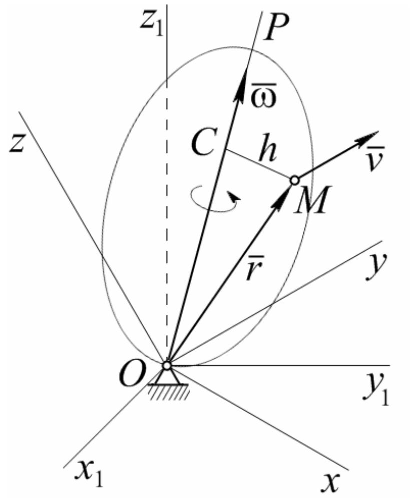


Рис. 62. Вектор скорости точки исследуемого тела

Численно $v = \omega \cdot h$, где $h = MC$ – расстояние точки M до мгновенной оси.

Геометрически скорость любой точки M тела в данный момент времени можно найти, зная в этот момент скорость $\overline{v}_A$ какой-нибудь точки A тела и направление скорости $\overline{v}_B$ другой точки B этого тела. Пусть $\overline{v}_A$ и направление $\overline{v}_B$ известны. Проведём тогда через точку А плоскость *1*, перпендикулярную вектору $\overline{v}_A$ (рис. 63). Как было показано ранее (рис. 62), мгновенная ось OP должна лежать в этой плоскости.

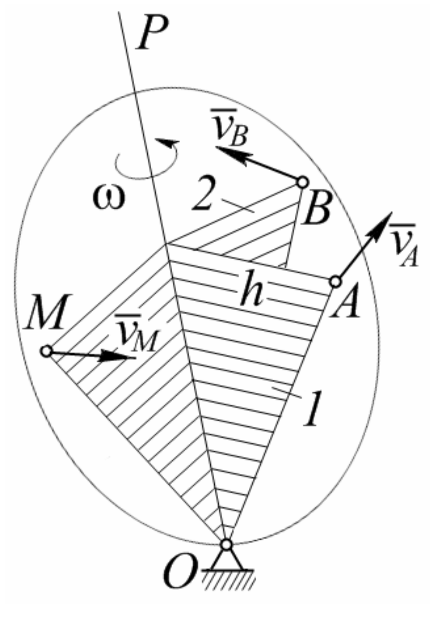


Рис. 63. Распределение линейных скоростей точек исследуемого тела

Но одновременно ось OP должна лежать и в плоскости *2,* проведённой через точку B перпендикулярно вектору $\overline{v}_B$. Следовательно, прямая, по которой пересекутся эти плоскости, и будет мгновенной осью вращения OP. Теперь, определив расстояние h от точки A до оси OP, найдём угловую скорость ω тела в данный момент времени: $\omega = v_A / h$. После этого значение скорости v_M любой точки *M* тела находится по формуле $v_M = \omega \cdot h$, а вектор $\bar{v}_M$ будет направлен перпендикулярно плоскости *OMP* (h_M – расстояние от точки *M* до оси *OP*).

В частном случае, когда известно, что скорость какой-то точки тела равна в данный момент времени нулю, прямая, проходящая через эту точку и неподвижную точку *O* тела, будет мгновенной осью вращения, и расчёт существенно упростится.

Аналитически скорость $\bar{v}$ определяют по её проекциям на какие-нибудь координатные оси. Найдём проекции вектора $\bar{v}$ на оси *Oxyz,* жёстко связанные с телом и движущиеся с ним (рис. 62); эти оси имеют то преимущество, что в них координаты *x, y, z* точки *M* будут величинами постоянными. Так, $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то по известной формуле векторной алгебры

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Отсюда, разлагая определитель по элементам первой строки, учитывая, что $\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$ и что, следовательно, коэффициенты при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в этом разложении должны равняться v_x, v_y, v_z соответственно, получим:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \\ v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \\ v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x. \end{aligned}\right\}$$

Эти формулы, также как и определяющие проекции вектора $\bar{\omega}$ на подвижные оси *Oxyz*, называют *формулами Эйлера.* Каждую из них можно получить из предыдущей формулы с помощью круговой перестановки букв *x*, *y*, *z*.

В частном случае эти формулы справедливы и при вращении тела вокруг неподвижной оси *z*. Так как при этом $\omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega$, то для такого случая

$$v_x = -\omega \cdot y,\ v_y = \omega \cdot x,\ v_z = 0.$$

Определим теперь ускорение точки *M.* Дифференцируя равенство $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ по времени, найдём:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \left(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}\right).$$

Так как $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$, а $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$, то окончательно

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \bar{v}\right).$$

Ускорение $\overline{a}_1 = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ называют ещё *вращательным*, а ускорение $\overline{a}_2 = \overline{\omega} \times \overline{v}$ – *осестремительным* ускорением точки *M*. Вектор $\overline{a}_1$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку *M* и вектор $\overline{\varepsilon}$ (рис. 64), а по модулю $a_1 = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot h_1$, где h_1 – расстояние от точки *M* до вектора $\overline{\varepsilon}$. Вектор же $\overline{a}_2$, перпендикулярный одновременно $\overline{v}$ и $\overline{\omega}$, будет направлен вдоль *MC,* причём по модулю $a_2 = \omega \cdot v \cdot \sin 90° = \omega^2 \cdot h$, т. к. $v = \omega \cdot h$.

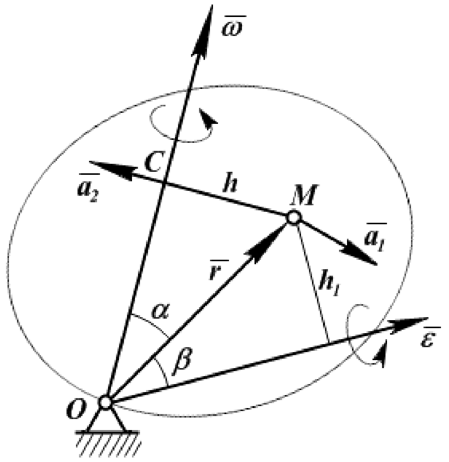


Рис. 64. Определение векторов ускорений точек тела

Заметим, что, в отличие от результатов, полученных ранее, здесь $\overline{a}_1 = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ не будет вообще вектором касательного ускорения точки *M* (по касательной направлен вектор $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, а направление вектора $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ будет вообще другим); следовательно, и вектор $\overline{\omega} \times \overline{v}$ не будет вектором нормального ускорения точки *M*.

4.4. Общий случай движения свободного твёрдого тела

Рассмотрим наиболее общий случай движения твёрдого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчёта $Ox_1y_1z_1$ (рис. 65).

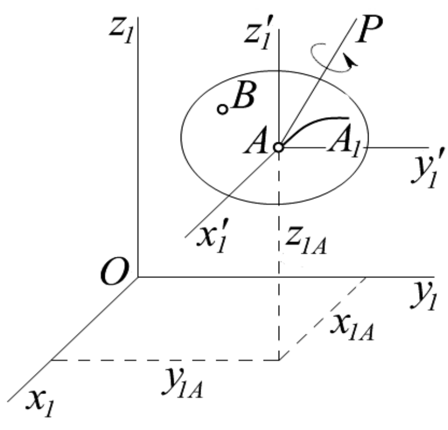


Рис. 65. Определение уравнений движения свободного твёрдого тела

Установим вид уравнений, определяющих закон рассматриваемого движения. Выберем произвольную точку A тела в качестве полюса и проведём через неё оси $Ax_1'y_1'z_1'$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом поступательно. Тогда положение тела в системе отсчёта $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если будем знать положение полюса A, т. е. его координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, и положение тела по отношению к осям $Ax_1'y_1'z_1'$, определяемое, как и в случае движения твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку, углами Эйлера φ, ψ, θ. На рис. 65 углы Эйлера не показаны, чтобы не затемнять чертёж. Следовательно, *уравнения движения свободного твёрдого тела*, позволяющие найти его положение по отношению к системе отсчёта $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} & x_{1A} = f_1(t), y_{1A} = f_2(t), z_{1A} = f_3(t), \\ & \varphi = f_4(t), \psi = f_5(t), \theta = f_6(t). \end{aligned}\right\}$$

Установим теперь геометрическую картину рассматриваемого движения. Первые три из представленных уравнений определяют то движение, которое тело совершало бы при постоянных углах φ, ψ, θ, т. е. при поступательном движении тела вместе с полюсом A. Последние же три уравнения определяют движение, которое происходило бы при постоянных значениях координат x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, т. е. когда точка A неподвижна. Но движение тела вокруг неподвижной точки слагается из поворотов вокруг мгновенных осей вращения. Отсюда заключаем, что в общем случае *движение свободного твёрдого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью* $\bar{v}_A$, *и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью* $\bar{\omega}$ *вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс A* (рис. 66). Такой будет, например, картина движения любого непоступательно перемещающегося в воздухе тела: брошенного камня, самолета, проделывающего фигуры высшего пилотажа, артиллерийского снаряда и т. д.

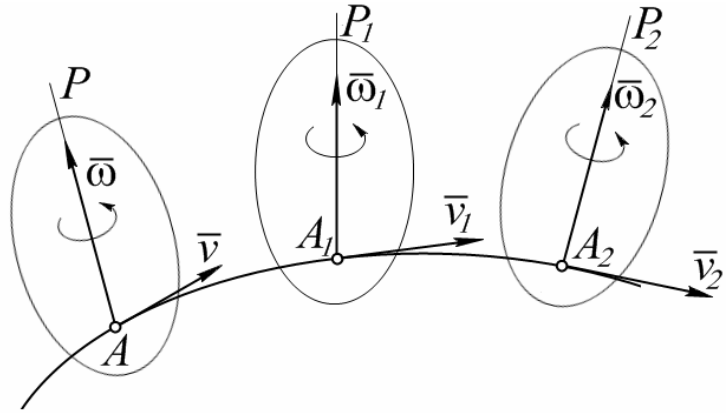


Рис. 66. Схематичное представление свободного движения твёрдого тела

Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость $\bar{v}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ полюса A, определяющие скорость и ускорение поступательной части движения, а также угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по уравнениям движения свободного твёрдого тела. Заметим, что если за полюс принять другую точку тела, например, точку B (рис. 65), то значения $\bar{v}_B$ и $\bar{a}_B$ окажутся отличными от $\bar{v}_A$ и $\bar{a}_A$ (предполагается, что тело движется не поступательно). Но если связанные с телом оси, проведённые из точки B (на рис. 65 не показаны), направить так же, как и в точке A, то значения углов φ, ψ, θ, а следовательно, и связанные с ними уравнения движения не изменятся. Поэтому здесь, как и в случае плоского движения, вращательная часть движения тела, в частности, значения ω и ε, от выбора полюса не зависят.

Движение свободного твёрдого тела может быть в частном случае плоскопараллельным.

Скорости и ускорения точек тела.

Скорость $\bar{v}_M$ любой точки M тела в рассматриваемом движении слагается, как и в случае плоскопараллельного движения, из скорости $\bar{v}_A$ полюса A и скорости $\bar{v}_{MA}$, которую точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса A. При этом, т. к. движение тела вокруг полюса A происходит как движение вокруг неподвижной точки, то значение $\bar{v}_{MA}$ определяется формулой $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{AM}$, т. е. $\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}$. Таким образом, $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$, или $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \left(\bar{\omega} \times \overline{AM}\right)$. Аналогично, вектор ускорения любой точки M тела $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$, где величина $\bar{a}_{MA}$, т. е. ускорение, которое точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса A, определяется равенством

$$\bar{a}_{MA} = \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}\right) + \left(\bar{\omega} \times \bar{v}\right),$$

в котором $\bar{r} = \overline{AM}$, а вектор $\bar{v}$ будет равен

$$\bar{v} = \bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}.$$

Таким образом, ускорение любой точки свободного твёрдого тела можно определить построением многоугольника ускорений.

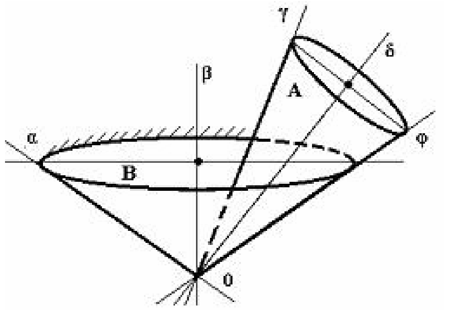
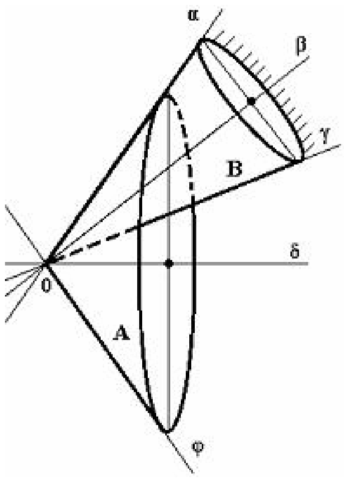
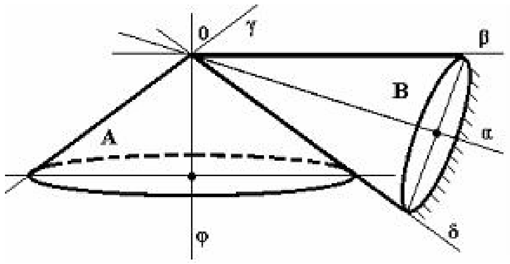
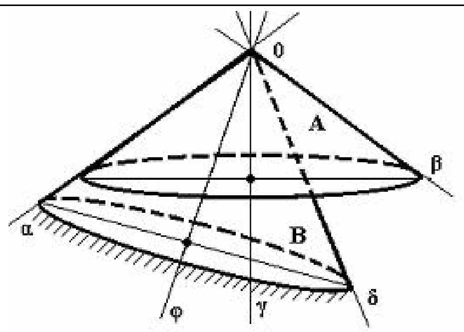
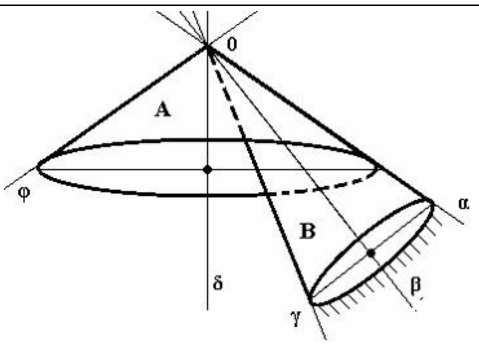
4.5. Задания для самостоятельной работы

4.5.1. Мгновенная ось вращения

Подвижный конус A (табл. 14) катится без скольжения по неподвижному конусу B, имея неподвижную точку O. Мгновенная ось вращения совпадает с направлением … (выберите один правильный ответ).

Таблица 14

Варианты тестовых заданий по теме «Мгновенная ось вращения»

№	Схема	Варианты ответов
1		а) $O\varphi$; б) $O\gamma$; в) $O\beta$; г) $O\delta$; д) $O\alpha$.
2		а) $O\beta$; б) $O\alpha$; в) $O\varphi$; г) $O\delta$; д) $O\gamma$.
3		а) $O\alpha$; б) $O\gamma$; в) $O\beta$; г) $O\varphi$; д) $O\delta$.
4		а) $O\delta$; б) $O\varphi$; в) $O\gamma$; г) $O\alpha$; д) $O\beta$.
5		а) $O\varphi$; б) $O\beta$; в) $O\alpha$; г) $O\gamma$; д) $O\delta$.

4.5.2. Мгновенная угловая скорость тела при сферическом движении

Пример. Подвижный конус A катится без проскальзывания по неподвижному конусу B так, что угловая скорость вращения оси OC вокруг OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Найдите мгновенную угловую скорость конуса A, если известны углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ (рис. 67).

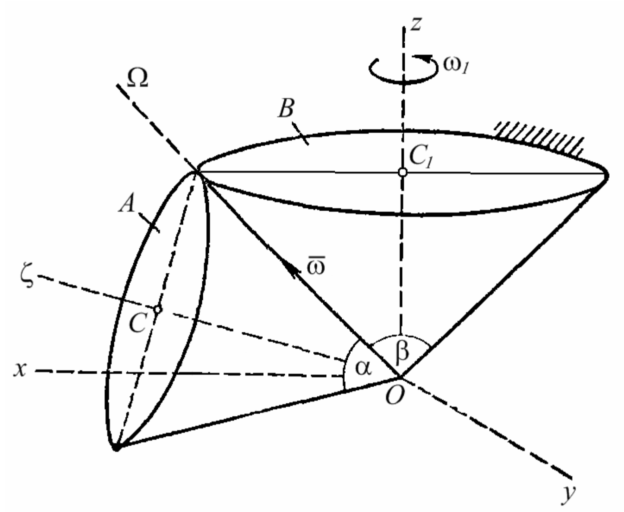


Рис. 67. Иллюстрация к примеру

Решение. Мгновенную угловую скорость ω конуса A, вектор которой направлен вдоль мгновенной оси вращения $O\Omega$, можно найти путём сложения вращений вокруг пересекающихся осей – построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 68).

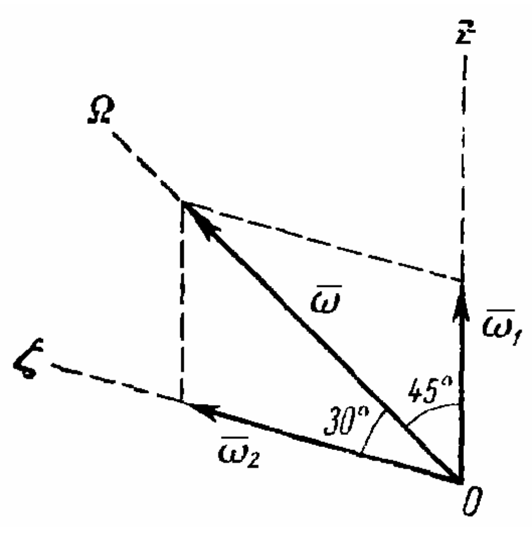


Рис. 68. Построение параллелограмма угловых скоростей

На схеме ω_2 – угловая скорость конуса A во вращении относительно собственной оси $O\varsigma$, ω – искомая мгновенная угловая скорость конуса A во вращении относительно мгновенной оси $O\Omega$.

По теореме синусов

$$\frac{\omega}{\sin 105°} = \frac{\omega_1}{\sin 30°},$$

откуда

$$\omega = \omega_1 \frac{\sin 105°}{\sin 30°} = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}966}{0{,}5} = 2{,}32 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Ответ: $\omega = 2{,}32$ (с$^{-1}$).

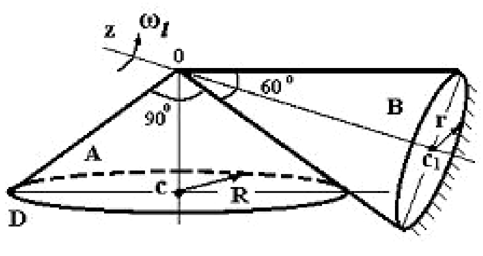
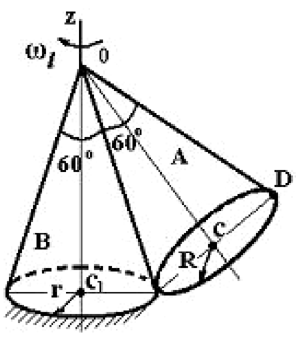
Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

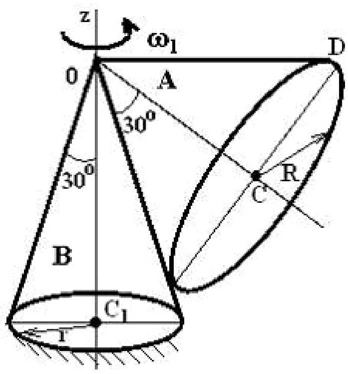
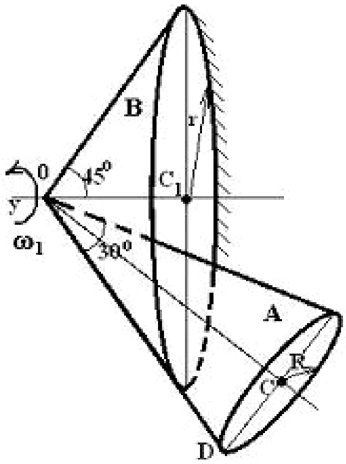
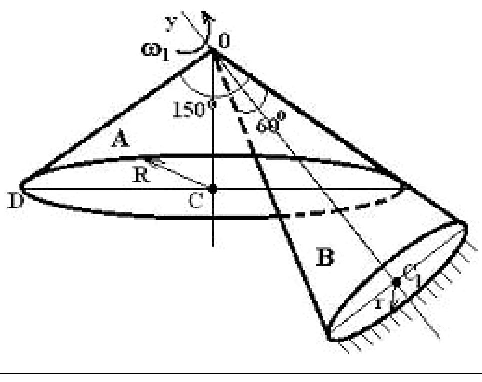
Условие. Подвижный конус A (табл. 15) катится без проскальзывания по неподвижному конусу B так, что угловая скорость вращения оси OC вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1 (рад/с). Если известны углы и радиус основания R = 1(м), мгновенная угловая скорость конуса A равна … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

П р и м е ч а н и е . $\sin 15° = \cos 75° = 0{,}26$; $\sin 75° = \cos 15° = 0{,}96$.

Таблица 15

Варианты тестовых заданий по теме «Мгновенная угловая скорость тела при сферическом движении»

№	Схема	Варианты ответов
1		а) $\Omega = 1{,}92\omega_1$ (с$^{-1}$); б) $\Omega = 0{,}28\omega_1$ (с$^{-1}$); в) $\Omega = 1{,}37\omega_1$ (с$^{-1}$); г) $\Omega = 0{,}73\omega_1$ (с$^{-1}$); д) $\Omega = 0{,}52\omega_1$ (с$^{-1}$).
2		а) $\Omega = \omega_1$ (с$^{-1}$); б) $\Omega = 0{,}5\omega_1$ (с$^{-1}$); в) $\Omega = 1{,}73\omega_1$ (с$^{-1}$); г) $\Omega = 0{,}866\omega_1$ (с$^{-1}$); д) $\Omega = 1{,}15\omega_1$ (с$^{-1}$).

№	Схема	Варианты ответов
3		а) $\Omega = 0{,}866\omega_1$ (с$^{-1}$); б) $\Omega = 1{,}15\omega_1$ (с$^{-1}$); в) $\Omega = \omega_1$ (с$^{-1}$); г) $\Omega = 0{,}5\omega_1$ (с$^{-1}$); д) $\Omega = 1{,}73\omega_1$ (с$^{-1}$).
4		а) $\Omega = 2{,}7\omega_1$ (с$^{-1}$); б) $\Omega = 0{,}7\omega_1$ (с$^{-1}$); в) $\Omega = 0{,}52\omega_1$ (с$^{-1}$); г) $\Omega = 0{,}35\omega_1$ (с$^{-1}$); д) $\Omega = 1{,}9\omega_1$ (с$^{-1}$).
5		а) $\Omega = 0{,}52\omega_1$ (с$^{-1}$); б) $\Omega = 0{,}73\omega_1$ (с$^{-1}$); в) $\Omega = 0{,}28\omega_1$ (с$^{-1}$); г) $\Omega = 1{,}37\omega_1$ (с$^{-1}$); д) $\Omega = 1{,}92\omega_1$ (с$^{-1}$).

5. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

5.1. Понятие о сложном движении точки

Обычно движение точки рассматривается по отношению к условно неподвижной системе отсчёта (телу отсчёта) или неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$. В некоторых случаях при решении задач необходимо рассматривать движение точки в подвижной системе координат $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 69).

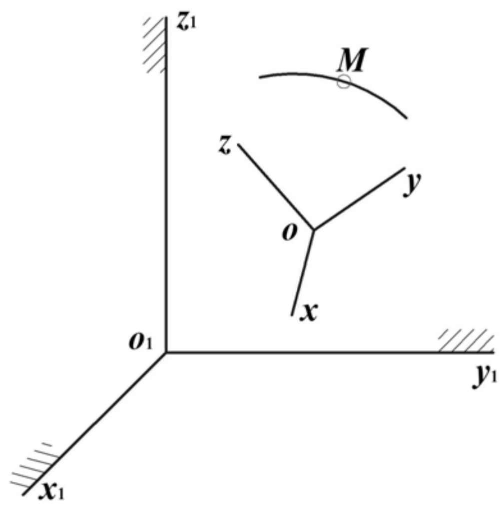


Рис. 69. Сложное движение точки

В этом случае движение точки рассматривают как *сложное* (или *составное*), которое состоит из двух или более простых движений.

Движение точки называется *сложным*, если его рассматривать одновременно относительно двух (и более) систем отсчёта, причём одна из них условно считается неподвижной, а вторая определённым образом движется по отношению к первой.

Сложное движение, например, совершают: лодка, пересекающая реку; пассажир, идущий в вагоне движущегося поезда; человек, поднимающийся по лестнице движущегося эскалатора.

Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчёта $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 69) называется *абсолютным движением*. Скорость и ускорение точки по отношению к неподвижной системе отсчёта называется *абсолютной скоростью* $\bar{v}_a$ и *абсолютным ускорением точки* $\bar{a}_a$. Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчёта $Oxyz$ называется *относительным движением*. Скорость и ускорение точки в относительном движении называется *относительной скоростью* $\bar{v}_r$ и *относительным ускорением* $\bar{a}_r$ точки (*relative* – относительный).

Движение, совершаемое подвижной системой отсчёта и всеми неизменно связанными с этой системой точками пространства по отношению к неподвижной системе отсчёта, является для точки *M переносным движением*.

Скорость и ускорение той точки, неизменно связанной с подвижной системой отсчёта, с которой в данный момент совпадает точка *M*, называется *переносной скоростью* $\bar{v}_e$ и *переносным ускорением* $\bar{a}_e$ точки (*emporter* – увлекать).

Основная задача кинематики сложного движения состоит в установлении зависимости между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

На основании рассмотренного ранее (см. раздел 4.4) можно утверждать, что само переносное движение можно рассматривать как совокупность поступательного движения подвижной системы отсчёта *Oxyz* вместе с точкой *O* (полюсом) и из серии элементарных поворотов вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через этот полюс.

5.2. Производные по времени от единичных векторов подвижных осей координат

Рассмотрим вращение подвижной системы отсчёта *Oxyz* вокруг мгновенной оси *OP* с угловой скоростью ω_e. Выберем точку *A* на конце единичного вектора оси *Ox* (рис. 70).

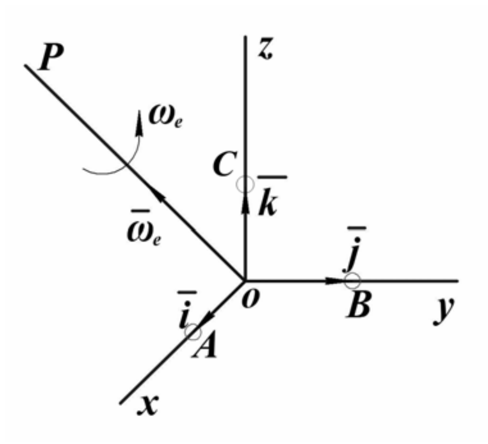


Рис. 70. Вращение подвижной системы отсчёта вокруг мгновенной оси

Радиус-вектор точки *A* равен $\bar{r}_A = \bar{i}$. Производная по времени от орта $\bar{i}$ представляет собой линейную скорость точки *A*, т. е. $\bar{v}_A = \dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \dfrac{d\bar{i}}{dt}$.

Но орт $\bar{i}$ вращается вокруг мгновенной оси *OP*, следовательно, вращательная скорость его конца определяется как

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_e \times \bar{r}_A = \bar{\omega}_e \times \bar{i}\ .$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}\ .$$

Выберем точку *B* на конце единичного вектора оси *Oy*, радиус-вектор которой равен $\bar{r}_B = \bar{j}$.

Аналогично рассмотренному ранее

$$\bar{v}_B = \frac{d\bar{j}}{dt};\quad \bar{v}_B = \bar{\omega}_e \times \bar{j}\,;\quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}\ .$$

Точно также определяем производную от единичного вектора оси *Oz*, равного $\bar{r}_C = \bar{k}$. Тогда

$$\bar{v}_C = \frac{d\bar{k}}{dt};\quad \bar{v}_C = \bar{\omega}_e \times \bar{k}\,;\quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}\ .$$

Таким образом, получим выражение для производных от каждого орта по времени:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}\,;\quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}\,;\quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}\ .$$

Производные по времени от единичных векторов осей подвижной системы координат равны векторным произведениям угловой скорости данной системы координат при её вращении вокруг мгновенной оси OP на соответствующие орты (формулы Пуассона).

5.3. Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки

Пусть точка М движется одновременно относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и подвижной системы координат *Oxyz.* Положение исследуемой точки относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором $\bar{\rho}$ (рис. 71), который находится по формуле

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}\ ,$$

где $\bar{\rho}_0$ – радиус-вектор начала отсчёта подвижной системы координат относительно неподвижной; $\bar{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки *M* в подвижной системе координат.

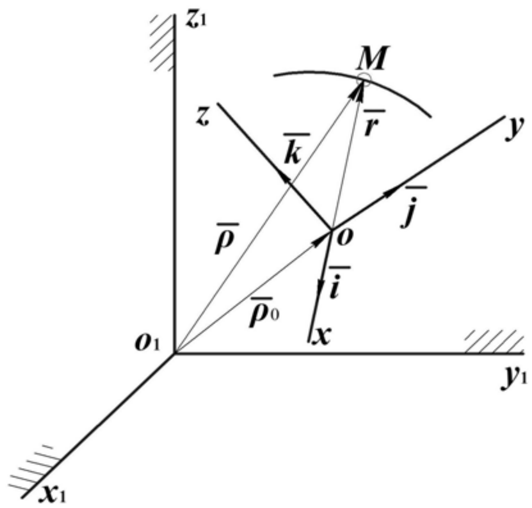


Рис. 71. К доказательству теоремы о сложении скоростей

Радиус-вектор $\bar{r}$ можно разложить на составляющие:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Продифференцировав формулу, определяющую абсолютное положение точки M по времени, получим:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt},$$

или

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k}\right) + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}\right).$$

Очевидно, что данное выражение определяет абсолютную скорость точки M. Подставив в него формулы Пуассона, получим:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \left(v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k}\right) + \left(x \cdot \left(\bar{\omega}_e \times \bar{i}\right) + y \cdot \left(\bar{\omega}_e \times \bar{j}\right) + z \cdot \left(\bar{\omega}_e \times \bar{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \left(x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}\right) = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{r},$$

где $\bar{v}_r = v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k}$ – скорость точки в относительном движении.

Переносная скорость $\bar{v}_e$ состоит из скорости полюса O подвижной системы отсчёта и вращательной скорости вокруг мгновенной оси OP, проходящей через этот полюс:

$$\bar{v}_e = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки *M* будет равна

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e .$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей (рис. 72).

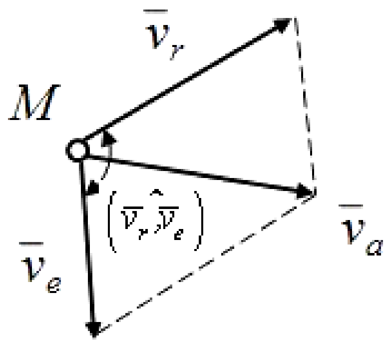


Рис. 72. Определение абсолютной скорости точки

В общем случае модуль абсолютной скорости вычисляется по следующей формуле

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\bar{v}_r, \bar{v}_e)},$$

т. к. абсолютная скорость $\bar{v}_a$ определяется диагональю параллелограмма, построенного из переносной скорости $\bar{v}_e$ и относительной скорости $\bar{v}_r$.

5.4. Теорема о сложении ускорений при поступательном переносном движении

Рассмотрим сложное движение точки *M*, когда подвижная система отсчёта *Oxyz* движется поступательно. При этом орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются постоянными величинами по модулю и по направлению.
Определим абсолютное ускорение точки *M*:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{v}_r + \bar{v}_e) = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt} .$$

Так как относительная скорость равна

$$\bar{v}_r = v_{rx} \cdot \bar{i} + v_{ry} \cdot \bar{j} + v_{rz} \cdot \bar{k} ,$$

а производные по времени от единичных векторов подвижной системы координат равны

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\bar{j}}{dt} = \frac{d\bar{k}}{dt} = 0 \text{ (по условию),}$$

то относительное ускорение точки *M* будет равно

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d\bar{v}_{rx}}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{d\bar{v}_{ry}}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{d\bar{v}_{rz}}{dt} \cdot \bar{k} = a_{rx} \cdot \bar{i} + a_{ry} \cdot \bar{j} + a_{rz} \cdot \bar{k} = \bar{a}_r .$$

Определим переносное ускорение точки *M*:

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} = \bar{a}_0 = \bar{a}_e ;$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 ,$$

т. к. подвижная система отсчёта движется поступательно.

Отсюда, абсолютное ускорение точки *M* равно $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e$.

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

5.5. Теорема о сложении ускорений при непоступательном переносном движении (теорема Кориолиса)

Рассмотрим движение точки *M*, когда подвижная система отсчёта *Oxyz* движется непоступательно (орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ не являются постоянными величинами по модулю и по направлению). Определим абсолютное ускорение этой точки.

Абсолютная скорость точки *M* будет равна $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$.

Продифференцируем данное выражение по времени и получим

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt} .$$

Так как относительная скорость точки *M* равна

$$\bar{v}_r = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k} ,$$

то:

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \bar{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \bar{k} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k} + \dot{x} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y} \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} ,$$

где $\bar{a}_r = \ddot{x}\cdot\bar{i} + \ddot{y}\cdot\bar{j} + \ddot{z}\cdot\bar{k} = a_{rx}\cdot\bar{i} + a_{ry}\cdot\bar{j} + a_{rz}\cdot\bar{k}$ – относительное ускорение точки *M*.

Также принимая во внимание, что

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k},$$

получим

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{a}_r + \dot{x}\cdot(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + \dot{y}\cdot(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + \dot{z}\cdot(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) =$$
$$= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times (\dot{x}\cdot\bar{i} + \dot{y}\cdot\bar{j} + \dot{z}\cdot\bar{k}),$$

а т. к. $\bar{v}_r = \dot{x}\cdot\bar{i} + \dot{y}\cdot\bar{j} + \dot{z}\cdot\bar{k}$, то $\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$.

Продифференцировав по времени $\bar{v}_e$, получим

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{r}\right) =$$
$$= \frac{d^2\bar{\rho}_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}\cdot x + \frac{d^2\bar{j}}{dt^2}\cdot y + \frac{d^2\bar{k}}{dt^2}\cdot z\right) + \left(\frac{d\bar{i}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\bar{j}}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\bar{k}}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\right).$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности: $\frac{d^2\bar{\rho}_0}{dt^2} = \bar{a}_0$ – ускорение полюса *O*.

Принимая во внимание, что

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}_e \times \bar{i}\right) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{i}\right),$$

а также $\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{j}\right)$ и $\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{k}\right)$ (значения данных производных получены аналогично), получим

$$\left(\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}\cdot x + \frac{d^2\bar{j}}{dt^2}\cdot y + \frac{d^2\bar{k}}{dt^2}\cdot z\right) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{r}\right).$$

Преобразовываем третье слагаемое из выражения для производной от переносной скорости (учитывая, что $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}$, $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}$, $\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}$):

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\bar{j}}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d\bar{k}}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\right)=\bar{\omega}_e\times\bar{i}\cdot\frac{dx}{dt}+\bar{\omega}_e\times\bar{j}\cdot\frac{dy}{dt}+\bar{\omega}_e\times\bar{k}\cdot\frac{dz}{dt},$$

а т. к. $\bar{i}\cdot\frac{dx}{dt}=\bar{v}_{rx}$, $\bar{j}\cdot\frac{dy}{dt}=\bar{v}_{ry}$ и $\bar{k}\cdot\frac{dz}{dt}=\bar{v}_{rz}$, тогда

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\bar{j}}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d\bar{k}}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\right)=\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r.$$

Подставляя преобразованные выражения для слагаемых производной от переносной скорости в исходное уравнение, получаем

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt}=\bar{a}_0+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times\left(\bar{\omega}_e\times\bar{r}\right)+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r.$$

В данном уравнении первые три слагаемых – есть переносное ускорение точки M, состоящее из:

– $\bar{a}_0$ – ускорение полюса O;

– $\bar{a}_e^{\tau}=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}$ – касательная составляющая переносного ускорения;

– $\bar{a}_e^{n}=\bar{\omega}_e\times\left(\bar{\omega}_e\times\bar{r}\right)$ – нормальная составляющая переносного ускорения.

Таким образом, $\bar{a}_e=\bar{a}_0+\bar{a}_e^{\tau}+\bar{a}_e^{n}$; следовательно, $\frac{d\bar{v}_e}{dt}=\bar{a}_e+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r$.

Подставим полученные выражения для производных от относительной и переносной скоростей в исходное выражение для абсолютного ускорения точки M:

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r+\bar{a}_e+\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r,$$

или

$$\bar{a}_a=\bar{a}_e+\bar{a}_r+2\cdot\left(\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r\right).$$

Третье слагаемое в правой части уравнения – есть *поворотное ускорение (ускорение Кориолиса)*, т. е. $\bar{a}_c=2\cdot(\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r)$.

Окончательно получим выражение абсолютного ускорения при непоступательном переносном движении:

$$\bar{a}_a=\bar{a}_e+\bar{a}_r+\bar{a}_c.$$

При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса.

Такие векторные равенства обычно решают графически или аналитически способом проекций, тогда модуль абсолютного ускорения равен

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2},$$

где a_{ax}, a_{ay}, a_{az} – проекции абсолютного ускорения на оси координат.

5.6. Определение модуля и направления ускорения Кориолиса

При определении абсолютного ускорения в случае непоступательного переносного движения одной из его составляющих является вектор ускорения Кориолиса. Данным ускорением обладают точки (тела), движущиеся по поверхности Земли, например, частицы воды в реках, поезда, автомобили и т. д. Появление данного ускорения обусловлено двумя причинами: 1) вследствие относительного движения точки, перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчёта, изменяется переносная скорость точки; 2) вследствие вращательного переносного движения дополнительно изменяется направление относительной скорости по отношению к неподвижной системе отсчёта. Например, когда человек идёт вдоль радиуса равномерно вращающейся платформы, то, связав платформу с подвижной системой отсчёта, мы можем видеть, что вектор $\bar{v}_r$ и вектор $\bar{v}_e$ будут всё время меняться. Как было ранее показано, вектор ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$\bar{a}_c = 2 \cdot (\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r),$$

а модуль ускорения Кориолиса рассчитывается как модуль данного векторного произведения:

$$|\bar{a}_c| = 2 \cdot |\bar{\omega}_e| \cdot |\bar{v}_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r).$$

Направлен вектор $\bar{a}_c$ так же, как и вектор $\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$, т. е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$ видно происходящим против хода часовой стрелки.

Направление вектора $\bar{a}_c$ (рис. 73) *можно определить, спроецировав вектор* $\bar{v}_r$ *на плоскость, перпендикулярную вектору* $\bar{\omega}_e$ *и повернув эту проекцию* $\bar{v}_r'$ *на угол* 90^o *в сторону переносного вращения* (правило Жуковского).

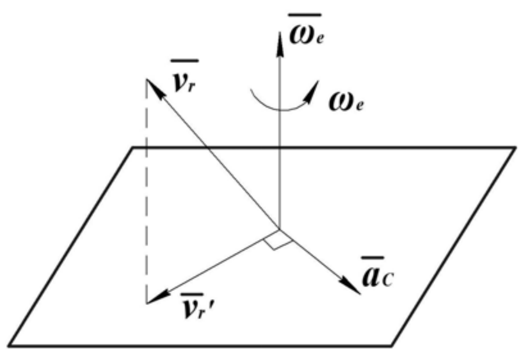


Рис. 73. Построение вектора ускорения Кориолиса

Из выражения модуля ускорения Кориолиса видно, что оно может обратиться в ноль в следующих случаях:

1) $\omega_e = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным, или переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в ноль;

2) $v_r = 0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в ноль;

3) когда $\overline{v}_r \| \overline{\omega}_e$, т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $\overline{v}_r$ параллелен данной оси.

Пример. Определим направление вектора ускорения Кориолиса точки *M*, движущейся с относительной скоростью $\overline{v}_r$ по образующей кругового конуса под углом α от его вершины к основанию (рис. 74). Конус вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$ в направлении, указанном на рисунке.

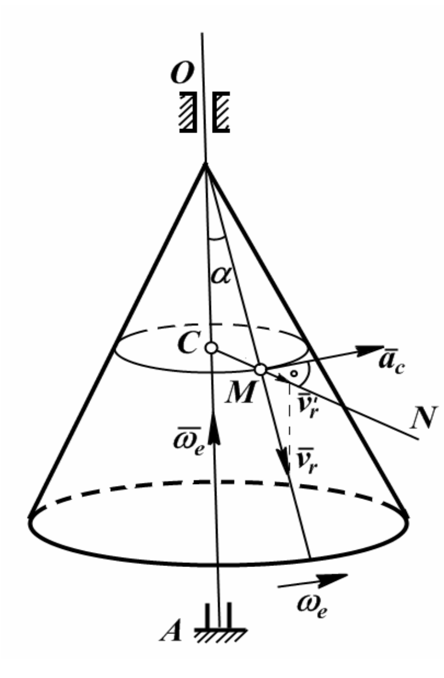


Рис. 74. Пример определения направления $\overline{a}_c$

Решение. При решении используем правило Жуковского. Спроецируем вектор $\bar{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения конуса. Проекция вектора относительной скорости $\bar{v}_r'$ совпадёт по направлению с нормалью *CN*, проходящей через точку *M* и центр *C* описываемой окружности той точки конуса, с которой совпадает точка *M*. А затем повернём проекцию $\bar{v}_r'$ на угол 90° в сторону вращения ω_e – вектор ускорения Кориолиса построен.

5.7. Методические указания и пример выполнения расчётно-графической работы по теме «Сложное движение точки»

Перед выполнением задания необходимо изучить тему «Сложное движение точки».

При решении задачи рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1) разложите абсолютное движение точки на составляющие, определив относительное и переносное движения;

2) выберите две системы координат: абсолютную, условно принимаемую неподвижной, и относительную;

3) для исследования относительного движения точки мысленно остановите переносное движение. Определите положение точки относительно подвижной системы отсчёта в заданный момент времени. В том случае, если траекторией относительного движения является окружность, положение точки определяется центральным углом на дуге окружности. Пользуясь уравнением относительного движения, определите по правилам кинематики точки относительную скорость и относительное ускорение;

4) для исследования переносного движения мысленно остановите относительное движение, найдите угловую скорость и угловое ускорение переносного движения. Вычислите переносную скорость и переносное ускорение по правилам кинематики точки;

5) по угловой скорости переносного движения и относительной скорости точки найдите ускорение Кориолиса;

6) изобразите на чертеже векторы кинематических величин, определённых в предыдущих пунктах, с учётом полученных знаков этих величин;

7) применяя теорему сложения скоростей, определите абсолютную скорость точки, используя метод проекций или теорему косинусов;

8) применяя теорему сложения ускорений, определите абсолютное ускорение точки, используя метод проекций.

П р и м е ч а н и е. В уравнения проекций абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки подставьте абсолютные величины скоростей и ускорений относительного и переносного движения точки.

Пример 1

Условие. Квадратная пластина вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = 2t^2$ (рад) (положительное направление отсчёта угла φ показано на рис. 75 дуговой стрелкой). По диагонали пластины движется точка M по закону $s = AM = 40\left(t^2 - 3t\right) + 32$ (см), положительное направление отсчёта s – от A к D. Расстояние от вершины квадрата B до оси вращения O равно $b = 12$ (см). Сторона квадрата равна $5b\sqrt{2}$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M для момента времени t_1=1(с).

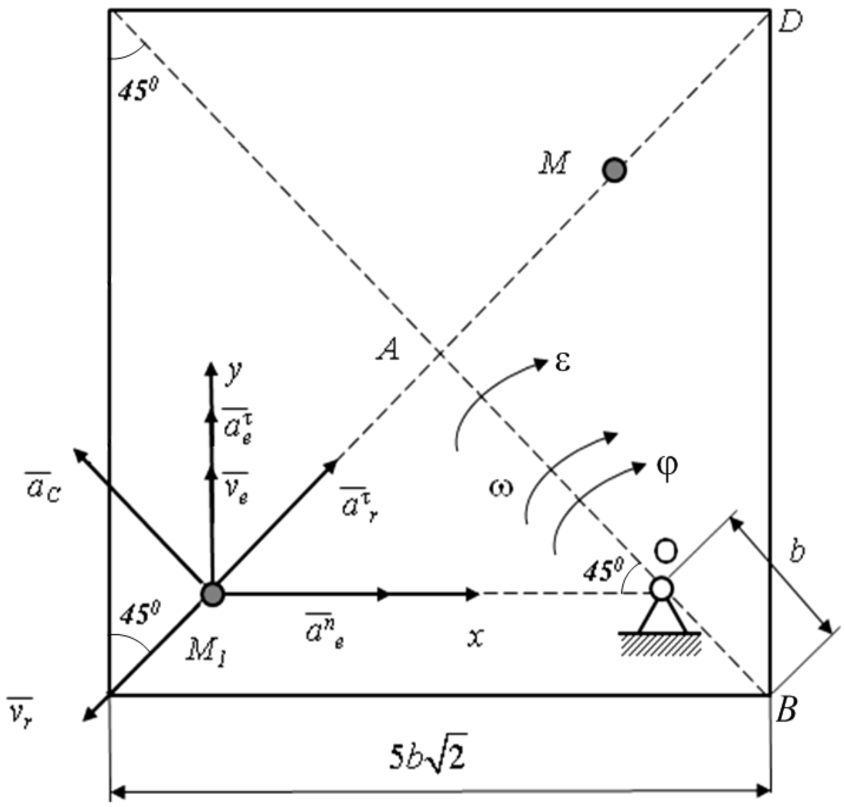


Рис. 75. Расчётная схема к примеру 1

Дано: $s = AM = 40\left(t^2 - 3t\right) + 32$ (см), $\varphi = 2t^2$ (рад), $b = 12$ (см).

Найти: v_a, a_a при t_1 = 1(с).

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая её движение по диагонали квадрата относительным, а вращение пластины вместе с исследуемой точкой – переносным.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = AM = 40\left(t^2 - 3t\right) + 32 .$$

Определим положение точки M в момент времени $t_1 = 1(\text{с})$:

$$s = AM_1 = 40\left(t^2 - 3 \cdot 1\right) + 32 = -48\,(\text{см}).$$

Знак «минус» говорит о том, что точка M в момент $t_1 = 1(\text{с})$ находится по другую сторону от точки A на диагонали прямоугольной пластины.

Определим v_r и a_r^τ точки M по формулам:

$$v_r = s' = \left(40\left(t^2 - 3t\right) + 32\right)' = 40(2t - 3);$$

$$v_r(1) = 40(2 \cdot 1 - 3) = -40\,(\text{см/с});$$

$$a_r^\tau = (v_r)' = (40 \cdot (2t - 3))' = 40 \cdot 2 = 80\,(\text{см/с}^2).$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}_r^\tau$ направлен в сторону положительного отсчёта расстояния s, а вектор $\bar{v}_r$ – в противоположную сторону. Изобразим эти векторы на рис. 75.

2. Переносное движение. Это движение происходит по закону

$$\varphi = 2t^2 \text{ (рад)}.$$

Найдём угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \varphi' = 4t;$$

при $t_1 = 1(\text{с})$

$$\omega(1) = 4\,(\text{рад/с}); \quad \varepsilon = \omega' = 4\,(\text{рад/с}^2).$$

Знаки указывают, что при $t_1 = 1(\text{с})$ направления ω и ε совпадают с направлением положительного отсчёта угла φ; покажем это на рис. 75.

Для определения v_e и a_e определим расстояние M_1O от точки M_1 до оси вращения. Из рис. 75 видно, что

$$M_1O = \sqrt{(AM_1)^2 + (AO)^2},$$

где

$$AM_1 = s_1 = 48\text{ (см)},$$

$$AO = AB - OB = 5b\sqrt{2} \cdot \cos 45° - b = 4b = 48\,(\text{см}).$$

Тогда

$$M_1O = \sqrt{48^2 + 48^2} = 48\sqrt{2} = 67{,}88\,(\text{см}).$$

В момент времени $t_1 = 1(\text{с})$ получим:

$$v_e = \omega \cdot M_1O = 4 \cdot 67{,}88 = 271{,}53\,(\text{см/с});$$

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot M_1O = 4 \cdot 67{,}88 = 271{,}53\,(\text{см/с}^2);$$
$$a_e^n = \omega^2 \cdot M_1O = 4^2 \cdot 67{,}88 = 1\,086{,}08\,(\text{см/с}^2).$$

Изобразим на рис. 75 векторы $\bar{v}_e$, $\bar{a}_e^\tau$ с учётом направления ω и ε; вектор $\bar{a}_e^n$ направляем к оси вращения вдоль отрезка M_1O.

3. Ускорение Кориолиса. Модуль этого ускорения определяется по формуле

$$a_c = 2 \cdot |\omega| \cdot |v_r| \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_r$. В данном случае этот угол равен 90º, т. к. ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{v}_r$. Численно в момент времени $t_1 = 1$(с), когда $|v_r| = 40\,(\text{см/с})$ и $\omega = 4\,(\text{рад/с})$, получим:

$$a_c = 2 \cdot 4 \cdot 40 \cdot 1 = 320\,(\text{см/с}^2).$$

Направление $\bar{a}_c$ найдём по правилу Жуковского: т. к. вектор $\bar{v}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернём его на 90º в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Изобразим вектор $\bar{a}_c$ на рис. 75. Иначе направление $\bar{a}_c$ можно найти, учитывая, что

$$\bar{a}_c = 2 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{v}_r).$$

4. Определение абсолютной скорости v_a**.** Проведём координатные оси M_1xy (рис. 75) и спроецируем обе части векторного равенства $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 1\,(\text{с})$:

$$v_{ax} = -|v_r| \cdot \cos 45° = -40 \cdot 0{,}707 = -28{,}28\,(\text{см/с});$$
$$v_{ay} = v_e - |v_r| \cdot \sin 45° = 271{,}53 - 40 \cdot 0{,}707 = 243{,}25\,(\text{см/с}).$$

Тогда

$$v_a = \sqrt{(v_{ax})^2 + (v_{ay})^2} = \sqrt{28{,}28^2 + 243{,}25^2} = 244{,}88\,(\text{см/с}).$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ равен 135º, значение v_a можно также определить по теореме косинусов:

$$v_a = \sqrt{v_e^{\,2} + v_r^{\,2} + 2 \cdot |v_e| \cdot |v_r| \cdot \cos 135°} =$$
$$= \sqrt{271{,}53^2 + 40^2 + 2 \cdot 271{,}53 \cdot 40 \cdot (-0{,}707)} = 244{,}88\ (\text{см/с}).$$

5. Определим абсолютное ускорение a_e^n по теореме о сложении ускорений:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c .$$

Для определения a_a спроецируем обе части данного векторного равенства на проведённые оси M_1xy, получим:

$$a_{ax} = a_e^n + a_r^\tau \cdot \cos 45° - a_c \cdot \cos 45° = 1\,086{,}08 + 80 \cdot 0{,}707 - 320 \cdot 0{,}707 = 916{,}4 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{ay} = \left(a_r^\tau + a_c\right) \cdot \sin 45° + a_e^\tau = (80 + 320) \cdot 0{,}707 + 271{,}53 = 554{,}37 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Находим значение абсолютного ускорения:

$$a_a = \sqrt{\left(a_{ax}\right)^2 + \left(a_{ay}\right)^2} = \sqrt{916{,}4^2 + 554{,}37^2} = 1\,071{,}03 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $v_a = 244{,}88$ (см/с), $a_a = 1\ 071{,}03$ (см/с^2).

Пример 2

Условие. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчёта угла φ показано на рис. 76 дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчёта s – от A к D.

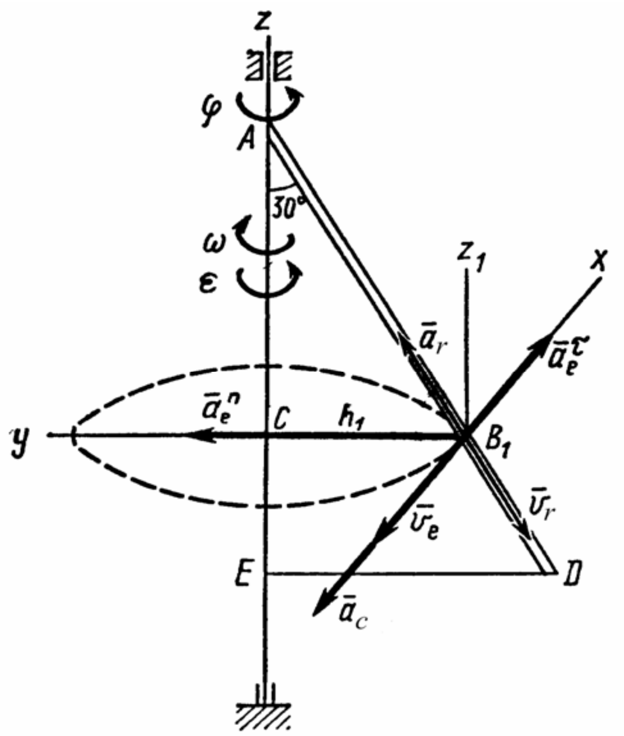


Рис. 76. Расчётная схема к примеру 2

Дано: $\varphi = 0{,}1\cdot t^3 - 2{,}2\cdot t$, $s = AB = 2 + 15\cdot t - 3\cdot t^2$ (φ – в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах).

Найти: абсолютную скорость v_a и абсолютное ускорение a_a в момент времени $t_1 = 2$ (с).

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая её движение по прямой AD относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_a$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_a$ найдутся по формулам:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e; \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c,$$

где $\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n}$.

Определим все входящие в данные равенства величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15\cdot t - 3\cdot t^2.$$

Поэтому

$$v_r = \dot{s} = 15 - 6\cdot t; \quad a_r = \dot{v}_r = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2$ (с) имеем:

$$s_1 = AB_1 = 20\,(\text{см}), \quad v_r = 3\,(\text{см/с}), \quad a_r = -6\,(\text{см/с}^2).$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_r$ направлен в сторону положительного отсчёта расстояния s, а вектор $\bar{a}_r$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 76.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону

$$\varphi = 0{,}1\cdot t^3 - 2{,}2\cdot t.$$

Найдём угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3\cdot t^2 - 2{,}2; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}6\cdot t,$$

и при $t_1 = 2$(с)

$$\omega = -1\,(\text{с}^{-1}); \quad \varepsilon = 1{,}2\,(\text{с}^{-2}).$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$(с) направление ε совпадает с направлением положительного отсчёта угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. 76 соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z:

$$h_1 = AB_1 \sin 30^\circ = 10\,(\text{см}).$$

Тогда в момент $t_1 = 2$(с) получим:

$$v_e = |\omega| \cdot h_1 = 10\,(\text{см/с}); \quad a_e^\tau = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12\,(\text{см/с}^2); \quad a_e^n = \omega^2 \cdot h_1 = 10\,(\text{см/с}^2).$$

Изобразим на рис. 76 векторы $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e^\tau$ (с учётом знаков ω и ε) и $\bar{a}_e^n$. Векторы $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e^\tau$ направлены перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\bar{a}_e^n$ – по линии B_1C к оси вращения.

3. Ускорение Кориолиса. Так как угол между вектором $\bar{v}_r$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени $t_1 = 2$(с):

$$a_c = 2 \cdot |v_r| \cdot |\omega| \cdot \sin 30° = 3\,(\text{см/с}^2).$$

Направление $\bar{a}_c$ найдём по правилу Жуковского. Для этого вектор $\bar{v}_r$ спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}_e^n$), и затем эту проекцию повернём на 90° в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\bar{a}_c$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{v}_e$ (см. рис. 76).

4. Определение абсолютной скорости $\boldsymbol{v_a}$. Так как $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, а векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ взаимно перпендикулярны, то

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2};$$

в момент времени $t_1 = 2$(с) $v_a = 10{,}44\,(\text{м/с})$.

5. Определение абсолютного ускорения $\boldsymbol{a_a}$ по теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c.$$

Для определения a_a проведём координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\bar{a}_a$ на эти оси. Учтём при этом, что векторы $\bar{a}_e^\tau$ и $\bar{a}_c$ лежат на оси x, а векторы $\bar{a}_e^n$ и $\bar{a}_r$ расположены в плоскости B_1yz_1, т. е. в плоскости пластины. Тогда, проецируя обе части векторного равенства на оси B_1xyz_1, получим для момента времени $t_1 = 2$(с):

$$a_{ax} = |a_e^\tau| - a_c = 9\,(\text{см/с}^2);$$

$$a_{ay} = a_e^n + |a_r| \cdot \sin 30° = 13\,(\text{см/с}^2);$$

$$a_{az} = |a_r| \cdot \cos 30° = 5{,}20\,(\text{см/с}^2).$$

Отсюда находим значение a_a:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}{}^2 + a_{ay}{}^2 + a_{az}{}^2} = 16{,}64\,(\text{см/с}^2).$$

Ответ: $v_a = 10{,}44\,(\text{м/с})$, $a_a = 16{,}64\,(\text{см/с}^2)$.

5.8. Задания для выполнения расчётно-графической работы по теме «Сложное движение точки»

Условие. Прямоугольная или круглая пластина радиуса R = 60(см) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. 16. Положительное направление отсчёта угла φ показано дуговой стрелкой. На схемах *0, 1, 3, 5, 6* ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на схемах *2, 4, 7, 8, 9* (рис. 77) ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (схемы *0–4*) или по окружности радиуса R (схемы *5–9*) движется точка M. Закон её относительного движения (зависимость $S = AM = f_2(t)$, где S выражено в сантиметрах, t – в секундах) задан в таблице отдельно для схем *0–4* и для схем *5–9*; там же даны размеры b и l. Точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1(с).

Указания. Для решения задачи удобно воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений точки при её сложном (составном) движении.

Таблица 16

Варианты заданий по теме «Сложное движение точки»

Номер		$\varphi = f_1(t)$	Для схем *0–4*		Для схем *5–9*	
строки	**рисунка**		**b, см**	**$s = AM = f_2(t)$**	**l, см**	**$s = AM = f_2(t)$**
0	0	$4\cdot\left(t^2 - t\right)$	12	$50\cdot\left(3t - t^2\right) - 64$	R	$\pi R\cdot\left(4t^2 - 2t^3\right)/3$
1	1	$3t^2 - 8t$	16	$40\cdot\left(3t^2 - t^4\right) - 32$	$4R/3$	$\pi R\cdot\left(2t^2 - t^3\right)/2$
2	2	$6t^3 - 12t^2$	10	$8\cdot\left(3t^2 - t\right) + 40$	R	$\pi R\cdot\left(2t^2 - 1\right)/3$
3	3	$t^2 - 2t^3$	16	$60\cdot\left(3t^4 - 3t^2\right) + 56$	R	$\pi R\cdot\left(3t - t^2\right)/6$
4	4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80\cdot\left(2t^2 - t^3\right) - 48$	R	$\pi R\cdot\left(t^3 - 2t\right)/3$
5	5	$2\cdot\left(t^2 - t\right)$	20	$60\cdot\left(t^3 - 2t^2\right)$	R	$\pi R\cdot\left(t^3 - 2t\right)/3$
6	6	$5t - 4t^2$	12	$40\cdot\left(t^2 - 3t\right) + 32$	$3R/4$	$\pi R\cdot\left(t^3 - 2t^2\right)/2$
7	7	$15t - 3t^3$	8	$60\cdot\left(t - t^3\right) + 24$	R	$\pi R\cdot\left(t - 5t^2\right)/6$
8	8	$2t^3 - 11t$	10	$50\cdot\left(5t^3 - t\right) - 30$	R	$\pi R\cdot\left(3t^2 - t\right)/3$
9	9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40\cdot\left(t - 2t^3\right) - 40$	$4R/3$	$\pi R\cdot\left(t - 2t^2\right)/2$

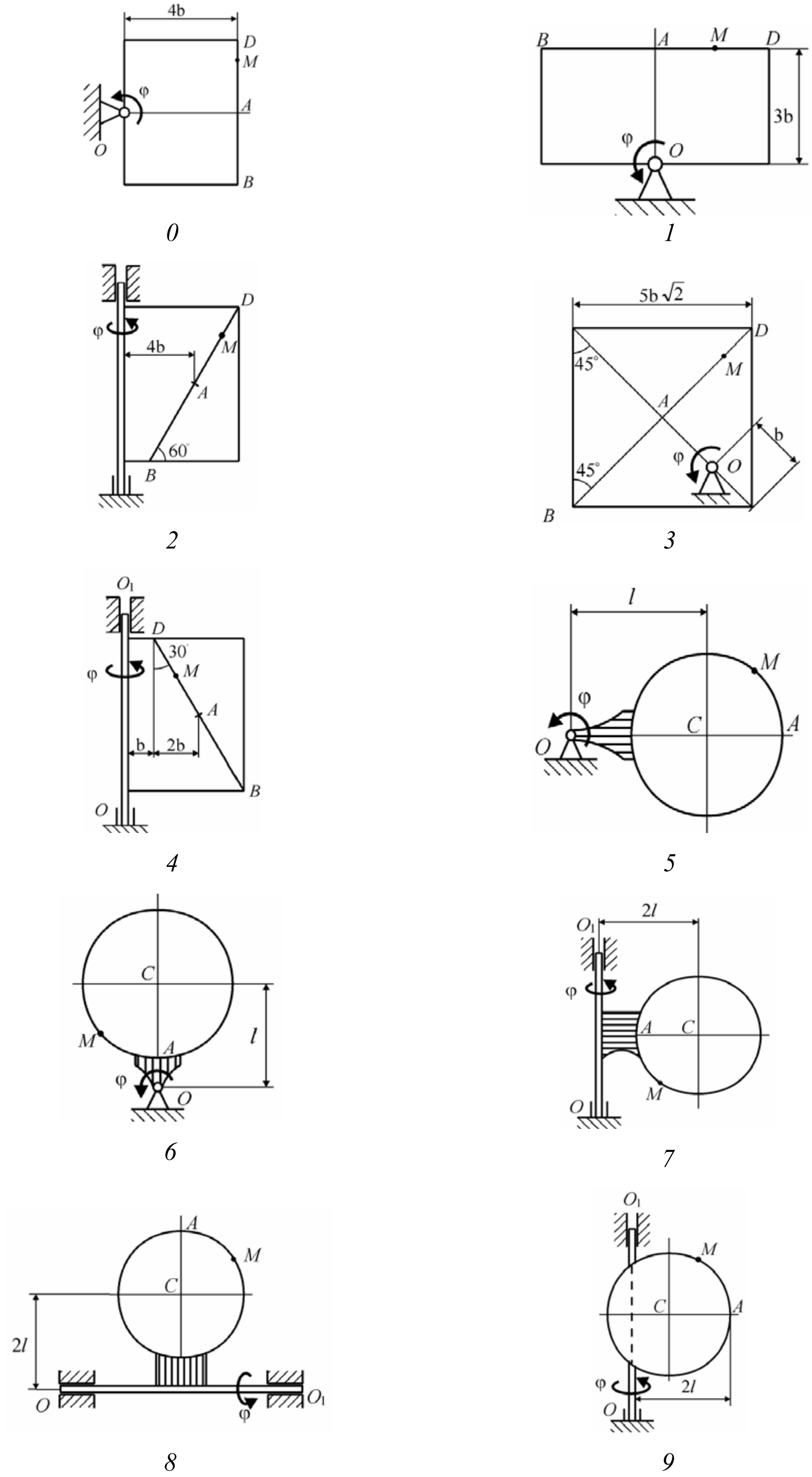


Рис. 77. Схемы пластин

5.9. Задания для самостоятельной работы

5.9.1. Скорости точки при сложном движении

Пример. В кривошипно-кулисном механизме кривошип *OA* длиной 10 (см) вращается с угловой скоростью $\omega = 6$(рад/с). Определите относительную скорость ползуна *A* в тот момент, когда угол $\varphi = 120°$.

Решение. Для решения данной задачи необходимо сначала изобразить исследуемый механизм в заданном положении (рис. 78). На схеме точка *A* ползуна совершает сложное движение. Свяжем кулису *KLM* с подвижной системой отсчёта. Тогда в относительном движении точка *A* перемещается вдоль кулисы по участку *KL* (вектор $\bar{v}_r$ должен быть направлен вдоль этой траектории).

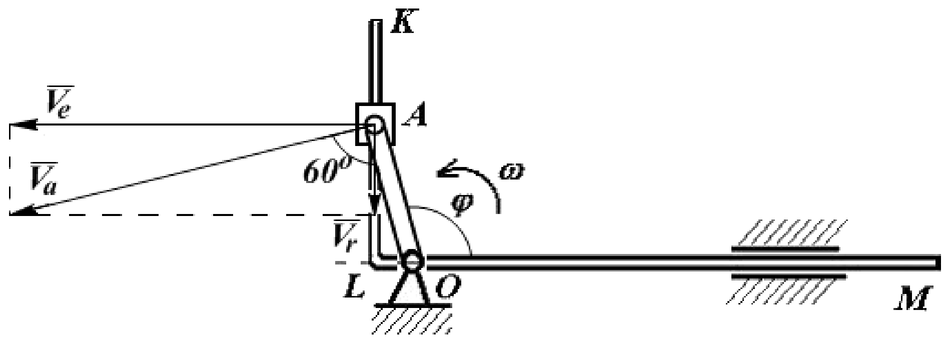


Рис. 78. Определение относительной скорости ползуна

В переносном движении перемещение той точки кулисы, с которой совпадает исследуемая точка *A*, будет ограничено горизонтальными направляющими (вектор $\bar{v}_e$ должен быть параллелен этим направляющим). Очевидно, что в абсолютном движении точка *A* будет вращаться вместе с кривошипом *OA* (вектор $\bar{v}_a$ должен быть перпендикулярен звену *OA* и сонаправлен с угловой скоростью кривошипа ω). Зная траектории точки *A* в относительном, переносном и абсолютном движении и определённо зная направление вектора $\bar{v}_a$, согласно теореме о сложении скоростей, построим параллелограмм скоростей. Спроецировав векторное равенство $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ на вертикальную ось, получим:

$$v_a \cdot \cos 60° = v_r,$$

т. к.

$$v_a = \omega \cdot OA,$$

$$v_r = \omega \cdot OA \cdot \cos 60° = 6 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 30\,(\text{см/с}).$$

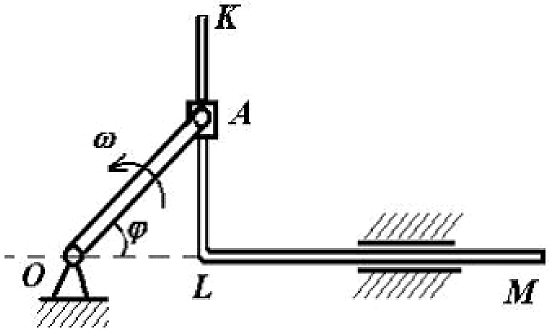
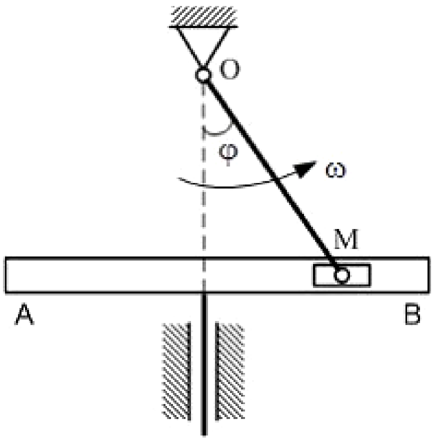
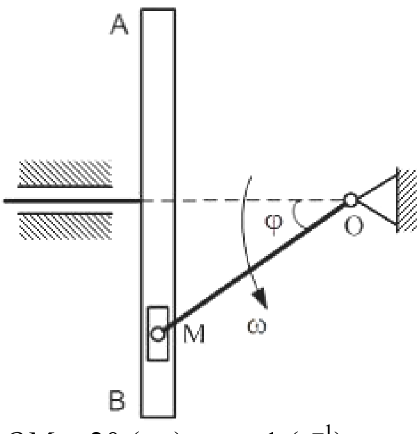
Ответ: $v_r = 30\,(\text{см/с})$.

Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

Условие. В кривошипно-кулисном механизме кривошип *OA* (*OM*) вращается с угловой скоростью ω. Для заданного положения механизма (табл. 17) определите относительную скорость *ползуна A* (обозначена V_r) или *кулисы AB* (обозначена V_{AB}). Выберите один правильный ответ из списка предложенных.

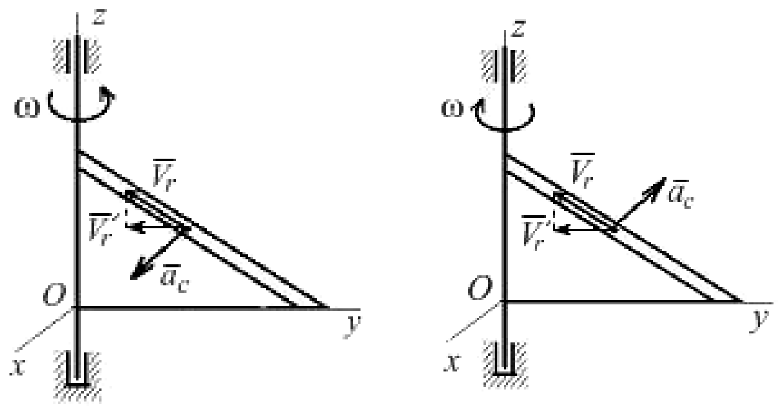
Таблица 17

Варианты заданий по теме «Скорости точки при сложном движении»

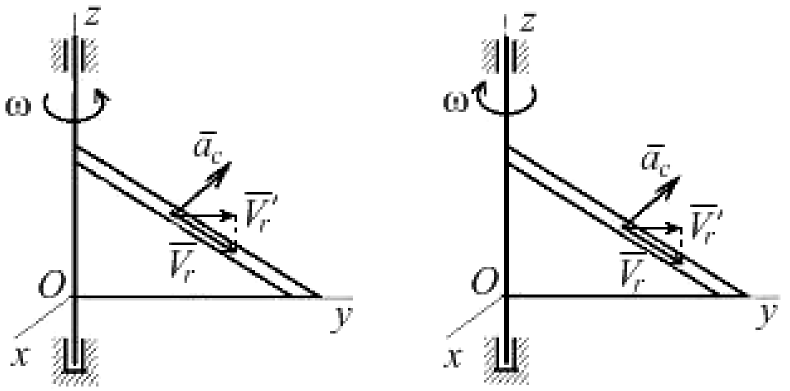
№	Схема	Варианты ответов
1	 *OA* = 10 (см), ω = 6 (с$^{-1}$), φ = 30°.	а) $V_r = 60\sqrt{3}$ (см/с); б) $V_r = 30$ (см/с); в) $V_r = 60$ (см/с); г) $V_r = 30\sqrt{3}$ (см/с).
2	 *OM* = 10 (см), ω = 2 (с$^{-1}$), φ = 30°.	а) $V_{AB} = 10\sqrt{3}$ (см/с); б) $V_{AB} = 20\sqrt{3}$ (см/с); в) $V_{AB} = 10$ (см/с); г) $V_{AB} = 20$ (см/с).
3	 *OM* = 20 (см), ω = 1 (с$^{-1}$), φ = 45°.	а) $V_{AB} = 10\sqrt{2}$ (см/с); б) $V_{AB} = 20\sqrt{2}$ (см/с); в) $V_{AB} = 10$ (см/с); г) $V_{AB} = 20$ (см/с).

5.9.2. Направление ускорения Кориолиса

Пример. Пластина вращается вокруг оси Oz, проходящей через вертикальный катет треугольной пластины с угловой скоростью ω (рис. 79). По прямолинейному каналу на пластине движется точка с относительной скоростью V_r. Определить, где ускорение Кориолиса направлено **НЕВЕРНО.**



а *б*



в *г*

Рис. 79. Определение направления ускорения Кориолиса

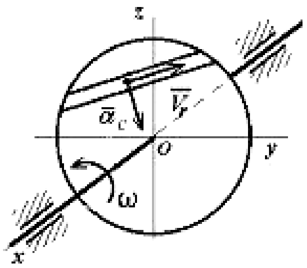
Решение. Во всех представленных случаях вектор $\overline{\omega}$ будет лежать на оси Oz. Соответственно, плоскость, перпендикулярная этому вектору, – плоскость Oxy. Окружность, описываемая той точкой пластины, с которой совпадает исследуемая точка, будет находиться в этой плоскости. Для определения направления ускорения Кориолиса $\overline{a}_c$ используем правило Жуковского. Проекция вектора относительной скорости $\overline{V}_r'$ на плоскость, перпендикулярную $\overline{\omega}$, совпадёт с нормалью, проходящей через исследуемую точку и центр описываемой окружности (в данном случае $\overline{V}_r' \| Oy$). Направление вектора $\overline{a}_c$ получим, повернув $\overline{V}_r'$ на угол 90° в сторону вращения ω ($\overline{a}_c \| Ox$ и совпадает с касательной к окружности). Таким образом, ускорение Кориолиса направлено неверно на рис. 79*г*.

Самостоятельно решите следующие тестовые задания.

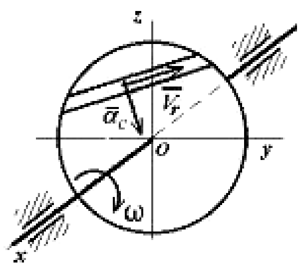
Условие. Пластина вращается с угловой скоростью ω вокруг оси. В вариантах *1–3* ось вращения проходит через центр пластины, в варианте *4* – вдоль горизонтального катета треугольной пластины. По прямолинейному каналу на пластине движется точка с относительной скоростью V_r. Ускорение Кориолиса направлено **НЕВЕРНО** … (выберите один вариант ответа из списка предложенных):

а) *1*;
б) *2*;
в) *3*;
г) *4*.

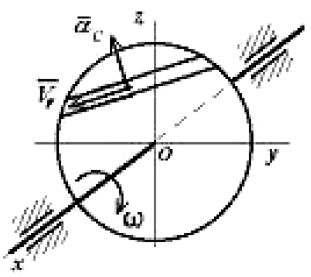
Вариант 1



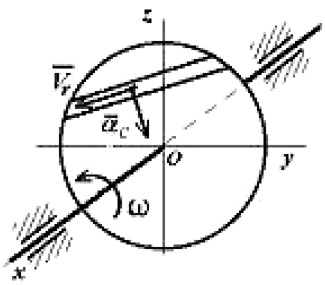
1



2

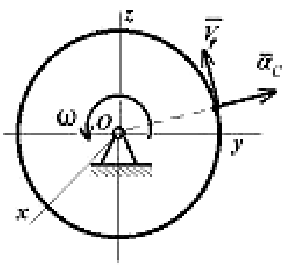


3

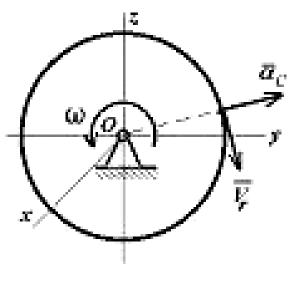


4

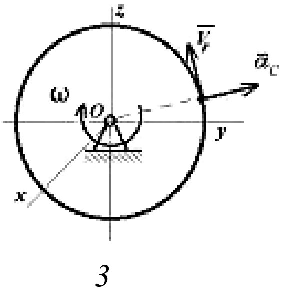
Вариант 2



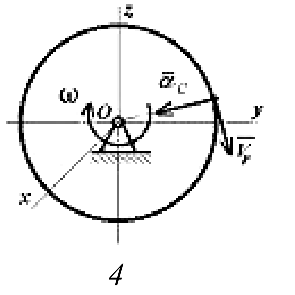
1



2

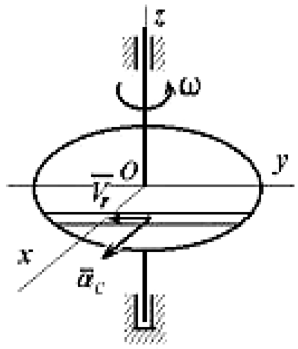


3

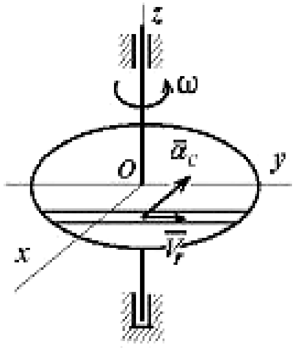


4

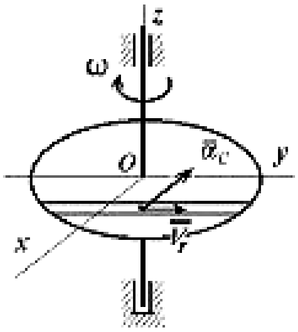
Вариант 3



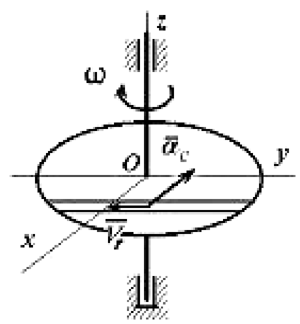
1



2

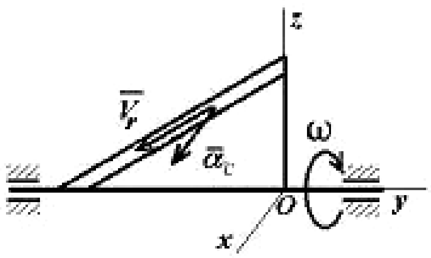


3

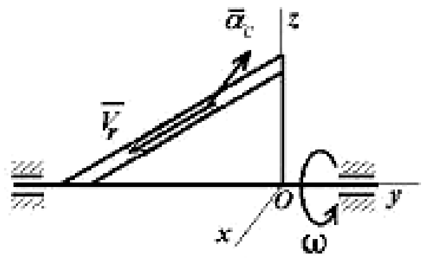


4

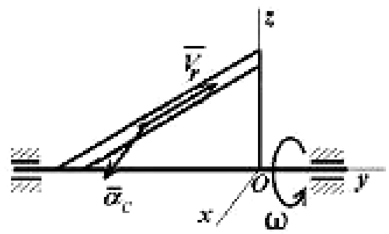
Вариант 4



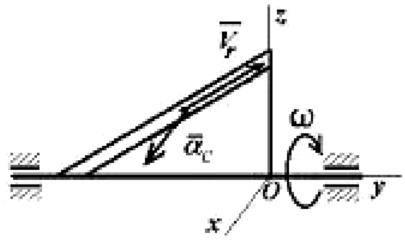
1



2



3



4

5.9.3. Сложение ускорений при сложном поступательном движении

Условие. Подвижный подъёмный кран (рис. 80) перемещается по горизонтальным рельсам O_1D согласно уравнению $s(t)$ (см). Стрела крана OK параллельна рельсам, по стреле движется тележка A согласно уравнению $x(t)$ (см). Груз B движется вертикально с помощью лебёдки, установленной на тележке, по закону $y(t)$ (см).

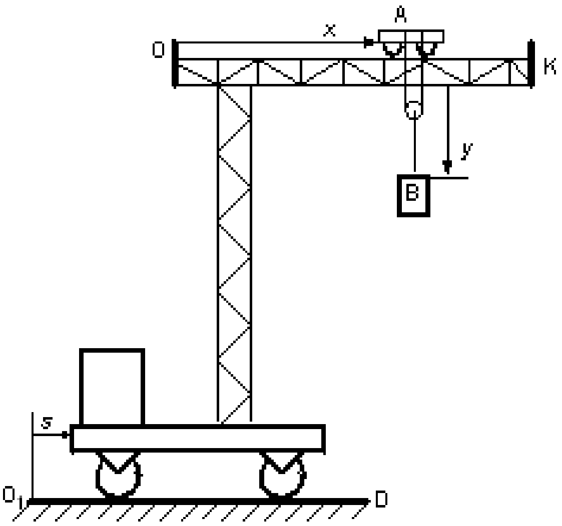


Рис. 80. Подвижный подъёмный кран (стрела крана параллельна рельсам)

Абсолютное ускорение груза *B* (табл. 18) равно … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 18

Варианты заданий по теме «Сложение ускорений при сложном поступательном движении»

№	Исходные данные	Варианты ответов
1	$s = 3t - 11t^2$ (см) $x = 5t^2 + 4$ (см) $y = 2t^2 + 7t$ (см)	а) $\sqrt{150}$; б) $\sqrt{52}$; в) $\sqrt{160}$; г) $\sqrt{40}$.
2	$s = 8t^2 + 10$ (см) $x = 17 - 4t^2$ (см) $y = 3t^2 - 9t$ (см)	а) $\sqrt{89}$; б) 10; в) $\sqrt{153}$; г) 5.
3	$s = 24t - 5t^2$ (см) $x = 2t^2 + 3t$ (см) $y = 4(2t + t^2)$(см)	а) 10; б) $\sqrt{43}$; в) 5; г) $\sqrt{180}$.
4	$s = t^2 - 2t$ (см) $x = 2t - 1$ (см) $y = 2 + 3t^2$ (см)	а) $\sqrt{40}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{44}$; г) $\sqrt{69}$.
5	$s = 10t^2 + 18t$ (см) $x = 13t - 9t^2$ (см) $y = 4t - 1{,}5t^2$ (см)	а) $\sqrt{190}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{370}$; г) $\sqrt{13}$.

Условие. Подвижный подъёмный кран (рис. 81) перемещается по горизонтальным рельсам O_1D согласно уравнению $s(t)$ (см). Стрела крана OK перпендикулярна рельсам, по стреле движется тележка A согласно уравнению $x(t)$ (см). Груз B движется вертикально с помощью лебёдки, установленной на тележке, по закону $y(t)$ (см).

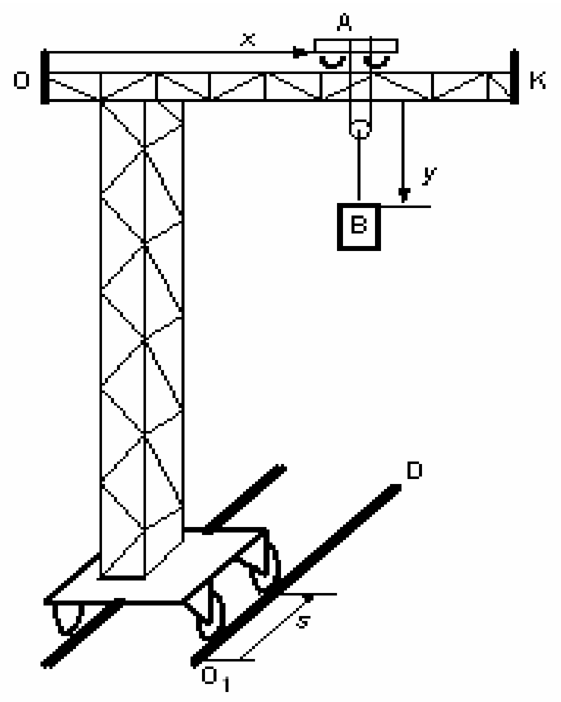


Рис. 81. Подвижный подъёмный кран (стрела крана перпендикулярна рельсам)

Абсолютное ускорение груза B (табл. 19) равно … (выберите один правильный ответ из списка предложенных).

Таблица 19

Варианты заданий по теме «Сложение ускорений при сложном поступательном движении»

№	Исходные данные	Варианты ответов
1	$s = t^2 - 2t$ (см) $x = 2t - 1$ (см) $y = 2 + 3t^2$ (см)	а) $\sqrt{40}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{44}$; г) $\sqrt{69}$.
2	$s = t^2 - 4t$ (см) $x = 5t + 2$ (см) $y = 2 + 3t^2$ (см)	а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{69}$.

№	Исходные данные	Варианты ответов
3	$s = t^2 - t$ (см) $x = 2t + 4$ (см) $y = 2 + 4t^2$ (см)	а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{68}$.
4	$s = 3t^2 - 2t$ (см) $x = 2t + 1$ (см) $y = 2 + 4t^2$ (см)	а) $\sqrt{100}$; б) $\sqrt{36}$; в) $\sqrt{164}$; г) $\sqrt{64}$.
5	$s = t^2 + 3t$ (см) $x = 2t + 2$ (см) $y = -2 + 4t^2$ (см)	а) $\sqrt{100}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{68}$.

6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

6.1. Сложение поступательных движений

Если тело движется относительно подвижных осей $Oxyz$, а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называют *сложным*.

Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимостей между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела, как известно, являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. Ограничимся в дальнейшем определением зависимостей только между поступательными и угловыми скоростями тела.

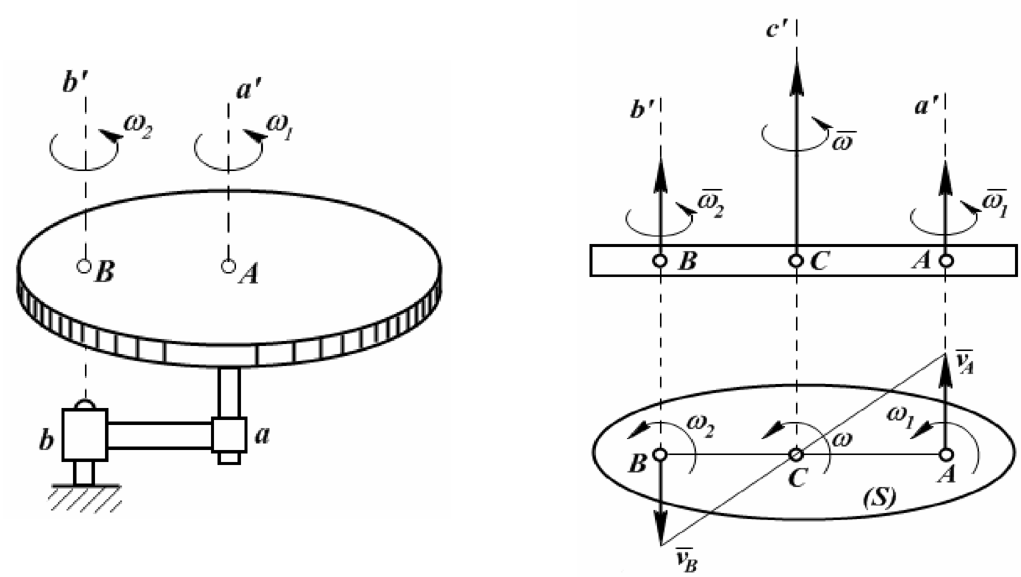
Рассмотрим сначала случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью $\bar{v}_1$, а переносное движение – тоже поступательное, со скоростью $\bar{v}_2$. Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость $\bar{v}_1$, а в переносном – скорость $\bar{v}_2$. Следовательно, по теореме сложения скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, т. е. абсолютное движение тела будет тоже поступательным.

Итак, *при сложении двух поступательных движений со скоростями* $\bar{v}_1$ *и* $\bar{v}_2$ *результирующее движение тела также будет поступательным со скоростью* $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Задача сложения скоростей в этом случае сводится к задаче кинематики точки, совершающей сложное движение.

6.2. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг оси aa', укреплённой на кривошипе ba (рис. 82*а*), а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси bb', параллельной aa', с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям. Здесь возможны три частных случая.

1. Вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис. 82*б*). Следы осей в сечении S обозначим буквами A и B. Точка A, как лежащая на оси Aa', получает скорость только от вращения вокруг оси *Bb'*, следовательно, $v_A = \omega_2 \cdot AB$. Точно так же $v_B = \omega_1 \cdot AB$. При этом векторы $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ параллельны друг другу (оба перпендикулярны *AB*) и направлены в разные стороны. Тогда точка *C* является мгновенным центром скоростей ($v_C = 0$), а следовательно, ось *Cc'*, параллельная осям *Aa'* и *Bb'*, является *мгновенной осью вращения тела*.



а *б*

Рис. 82. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей
(вращения направлены в одну сторону)

Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси *Cc'* и положения самой оси, т. е. точки *C*, воспользуемся равенством

$$\omega = v_B / BC = v_A / AC,$$

откуда

$$\omega = (v_B + v_A)/ AB.$$

Последний результат получается из свойств пропорции. Подставляя в эти равенства $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$, найдём окончательно:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \quad \omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB.$$

Итак, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным; положение этой оси определяется пропорциями $\omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB$.

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет своё положение, описывая цилиндрическую поверхность.

2. Вращения направлены в разные стороны. Изобразим опять сечение S тела (рис. 83) и допустим для определённости, что $\omega_1 > \omega_2$. Тогда, рассуждая как в предыдущем случае, найдём, что скорости точек A и B будут численно равны

$$v_A = \omega_2 \cdot AB; \quad v_B = \omega_1 \cdot AB;$$

при этом $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось вращения проходит через точку C, причём

$$\omega = v_B / BC = v_A / AC,$$

откуда

$$\omega = (v_B - v_A)/ AB.$$

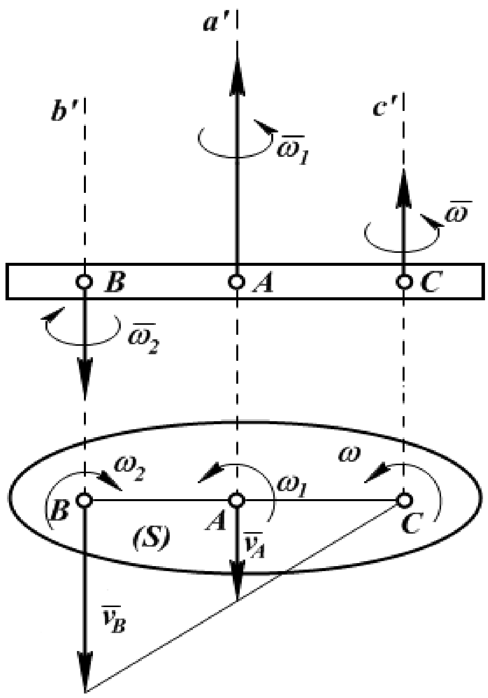


Рис. 83. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей
(вращения направлены в разные стороны)

Последний результат тоже получается из свойств пропорции. Подставляя в эти равенства значения v_A и v_B, найдём окончательно:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB.$$

Итак, в этом случае результирующее движение также является мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг оси Cc', положение которой определяется пропорциями

$$\omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB .$$

3. Пара вращений. Рассмотрим частный случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны (рис. 84), но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений,* а векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ образуют *пару угловых скоростей.*

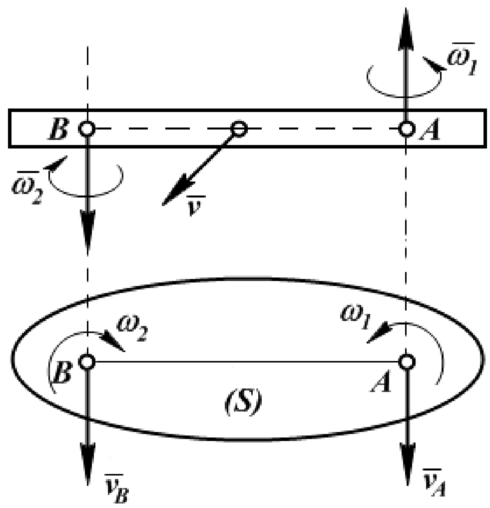


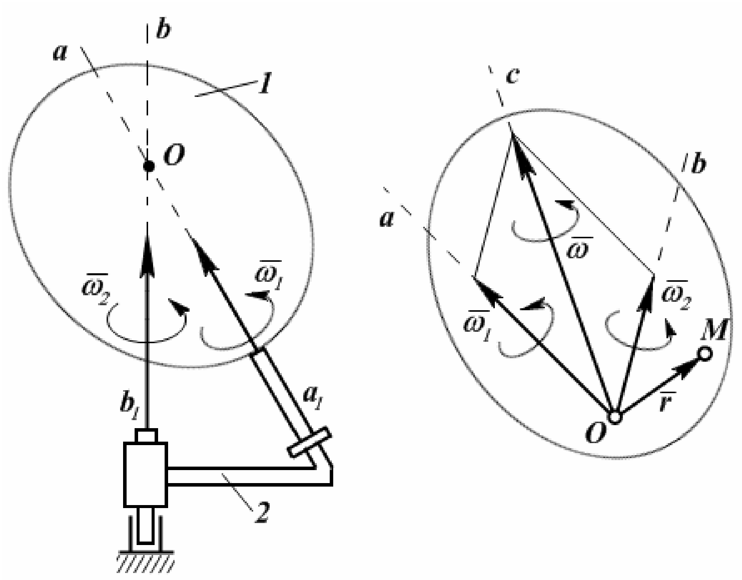
Рис. 84. Пара вращений

В этом случае получаем, что $v_A = \omega_2 \cdot AB$, и $v_B = \omega_1 \cdot AB$; т. е. $v_A = v_B$. Тогда мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости $v = \omega_1 \cdot AB$.

Следовательно, результирующее движение тела будет *поступательным* (или *мгновенно поступательным*) движением со скоростью, численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$; направление вектора $\overline{v}$ определяется так же, как в статике определялось направление момента $\overline{m}$ пары сил. Иначе говоря, *пара вращений эквивалентна поступательному (или мгновенно поступательному) движению со скоростью* $\overline{v}$*, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.*

6.3. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Сложение угловых скоростей. Пусть относительное движение тела *1* представляет собой вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси a_1a, укреплённой на кривошипе *2* (рис. 85*а*), а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ вокруг оси b_1b, которая пересекается с осью a_1a в точке *О*. Схематически такой случай сложения вращений вокруг пересекающихся осей показан на рис. 85*б*.



а *б*

Рис. 85. Сложение угловых скоростей

Очевидно, что в этом случае скорость точки *О*, как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю, и результирующее движение тела будет являться движением вокруг неподвижной точки *О*. Тогда тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\overline{\omega}$, направленную по мгновенной оси вращения, проходящей через точку *О*.

Чтобы определить значение $\overline{\omega}$, найдём скорость какой-нибудь точки *М* тела, радиус-вектор которой $\overline{r} = \overline{OM}$. В относительном движении (вращение вокруг оси *Оа*) точка *М*, согласно формуле $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, получит скорость $\overline{v}_r = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}$; в переносном же движении (вращение вокруг оси *Ob)* точка получит скорость $\overline{v}_e = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}$. Тогда абсолютная скорость точки *М* будет равна

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e = (\omega_1 + \omega_2) \times \overline{r}.$$

Но т. к. результирующее движение тела является мгновенным вращением с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}$, то $\overline{v}_a = \overline{\omega} \times \overline{r}$.

Поскольку точка *М* – любая точка тела, полученные векторные равенства должны выполняться при любом $\overline{r}$, что возможно лишь тогда, когда $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Следовательно, при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке *О*, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси *Ос*, проходящей через точку *О*, и угловая скорость этого вращения будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей. Мгновенная ось *Oc* направлена вдоль вектора $\overline{\omega}$, т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

С течением времени ось *Oc* меняет своё положение, описывая коническую поверхность, вершина которой находится в точке *O*.

Если тело участвует в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке *O*, то, последовательно применяя формулу $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, найдём, что результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку *O*, с угловой скоростью $\overline{\omega} = \sum \overline{\omega}_k$.

6.4. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение

Рассмотрим сложное движение твёрдого тела, слагающееся из поступательного и вращательного движений. Соответствующий пример показан на рис. 86. Здесь относительным движением тела *1* является вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси *Aa*, укреплённой на платформе *2,* а переносным – поступательное движение платформы со скоростью $\overline{v}$. Одновременно в двух таких движениях участвует и колесо *3,* для которого относительным движением является вращение вокруг его оси, а переносным – движение той же платформы.

В зависимости от значения угла α между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{v}$ (для колеса этот угол равен 90°) здесь возможны три случая сложения *поступательного и вращательного движений твёрдого тела.*

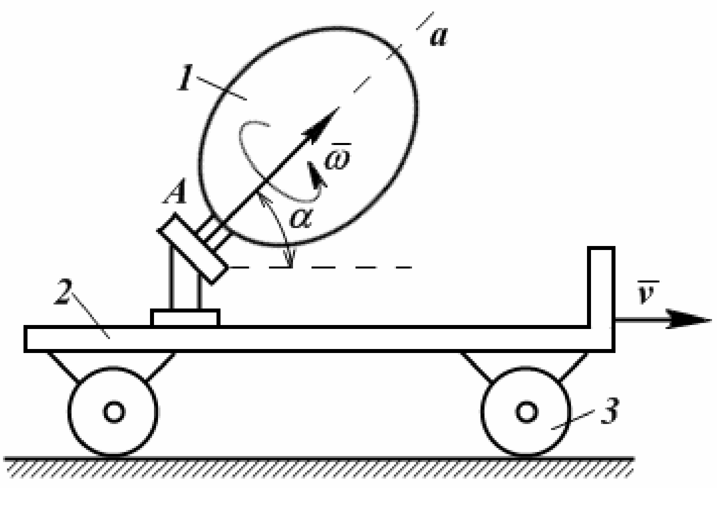


Рис. 86. Сложное движение твёрдого тела

1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения ($\bar{v} \perp \bar{\omega}$).

Пусть сложное движение тела слагается из вращательного движения вокруг оси *Aa* с угловой скоростью ω и поступательного движения со скоростью $\bar{v}$, перпендикулярной $\bar{\omega}$ (рис. 87). Очевидно, что это движение представляет собой (по отношению к плоскости *П*, перпендикулярной оси *Aa*) плоскопараллельное движение.

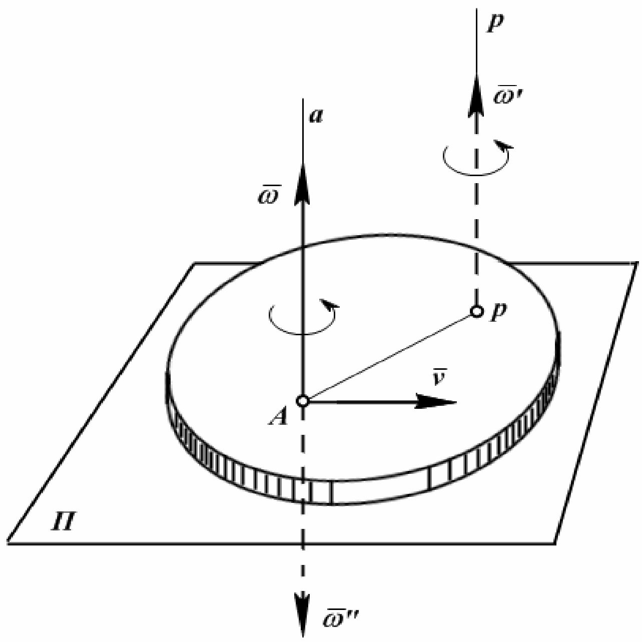


Рис. 87. Первый случай сложного движения тела
(скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения)

Если считать точку *A* полюсом, то рассматриваемое движение, как и всякое плоскопараллельное, будет действительно слагаться из поступательного со скоростью $\bar{v}_A = \bar{v}$, т. е. со скоростью полюса, и вращательного вокруг оси *Aa*, проходящей через полюс.

Вектор $\bar{v}$, согласно разделу 6.2, можно заменить парой угловых скоростей $\bar{\omega}'$ и $\bar{\omega}''$, принимая $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, а $\bar{\omega}'' = -\bar{\omega}$. При этом расстояние *AP* определится из равенства $v = \omega' \cdot AP$, откуда $AP = v / \omega$.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}''$ дают при сложении ноль и, следовательно, движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси *Pp* с угловой скоростью $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$. Таким образом, поворот тела вокруг осей *Aa* и *Pp* происходит с одной и той же угловой скоростью $\bar{\omega}$, т. е. вращательная часть движения не зависит от выбора полюса.

2. Винтовое движение ($\bar{v} \parallel \bar{\omega}$).

Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси *Aa* с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и поступательного со скоростью $\bar{v}$, направленной параллельно оси *Aa* (рис. 88), то такое движение тела называется *винтовым.* Ось *Aa* называют *осью винта.* Когда векторы $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\bar{\omega}$ винт будет *правым*; если в разные стороны – *левым.* Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется *шагом* h винта. Если величины $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T, получаем в этом случае $v \cdot T = h$ и $\omega \cdot T = 2\pi$, откуда $h = 2\pi \cdot v / \omega$.

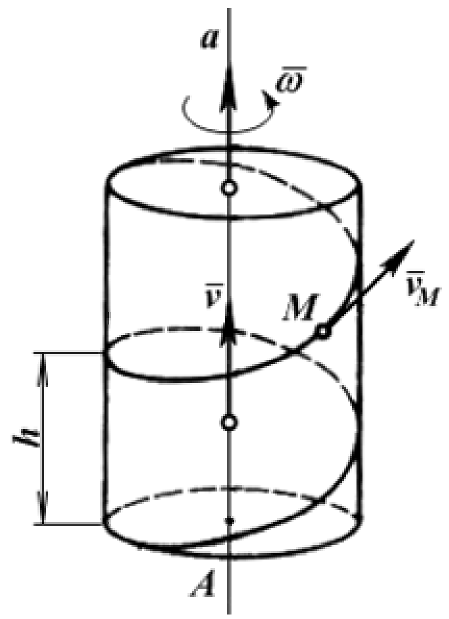


Рис. 88. Второй случай сложного движения тела
(скорость поступательного движения параллельна оси вращения)

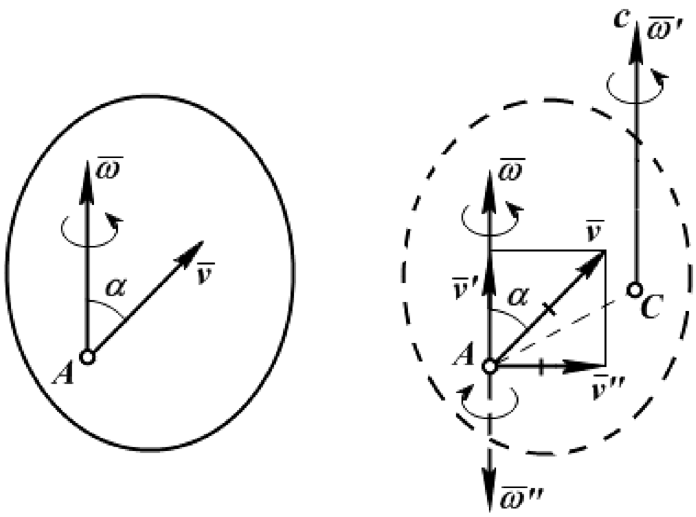
При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает *винтовую линию.* Скорость точки M, находящейся от оси винта на расстоянии r, слагается из поступательной скорости $\bar{v}$ и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr. Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 \cdot r^2}\ .$$

Скорость $\bar{v}_M$ направлена по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M, разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии обратятся в прямые, наклонённые к основанию цилиндра под углом α, где $\mathrm{tg}\alpha = h/(2\pi \cdot r)$.

3. Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения.

Сложное движение, совершаемое телом в этом случае (рис. 89*a*), можно рассматривать как общий случай движения свободного твёрдого тела.



а *б*

Рис. 89. Третий случай сложного движения тела
(скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения):
а – схематичное изображение рассматриваемого движения; *б* – преобразование движения

Разложим вектор $\overline{v}$ (рис. 89*б*) на составляющие: $\overline{v}'$, направленную вдоль $\overline{\omega}$ ($v' = v \cdot \cos\alpha$), и $\overline{v}''$, перпендикулярную $\overline{\omega}$ ($v'' = v \cdot \sin\alpha$). Скорость $\overline{v}''$ можно заменить парой угловых скоростей $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'' = -\overline{\omega}$, после чего векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние AC найдём по формуле

$$AC = v''/\omega = (v \cdot \sin\alpha)/\omega.$$

Тогда у тела остаётся вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}'$, и поступательное движение со скоростью $\overline{v}'$. Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси *Cc* с угловой скоростью $\omega' = \omega$ и поступательной скоростью $v' = v \cdot \cos\alpha$.

Выполнив преобразования (рис. 89*б*), мы перешли от полюса *A* к полюсу *C*. Результат подтверждает, что в общем случае движения твёрдого тела угловая скорость при перемене полюса не изменяется ($\overline{\omega}' = \overline{\omega}$), а меняется только поступательная скорость ($\overline{v}' \neq \overline{v}$).

Так как при движении свободного твёрдого тела величины $\overline{v}$, $\overline{\omega}$, α будут всё время изменяться, то будет непрерывно меняться и положение оси *Cc*, которую поэтому называют *мгновенной винтовой осью.* Таким образом, *движение свободного твёрдого тела можно ещё рассматривать как слагающееся из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Роль и место теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Усвоение теоретической механики усложняется тем, что в этой науке существенную роль играет моделирование и математическое представление исследуемых явлений природы. Поэтому при решении инженерных задач студенты зачастую испытывают значительные трудности.

Проблему формирования у студентов исследовательского подхода к поставленным задачам (из раздела «Кинематика», курса теоретической механики) позволяет решить предлагаемое учебное пособие, в котором доступно освещены основные темы раздела «Кинематика» с приведением всех необходимых доказательств, даны методические рекомендации к решению задач и приведены примеры их решения. Освоению и закреплению изложенного материала помогут задания для самостоятельной работы, приведённые в конце глав пособия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1 / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. СПб. : Лань, 2010. 672 с.

Борисов, Ю. А. Теоретическая механика. Ч. I. Кинематика : сборник заданий для самостоятельной работы студентов / Ю. А. Борисов, А. Г. Кривошеев, Г. И. Мельников. СПб : СПбГИТМО(ТУ), 2002. 66 с.

Васько, Н. Г. [и др.]. Статика и кинематика : учеб. пособие / Н. Г. Васько, А. Н. Кабельков, О. А. Кузина, Д. Г. Черненко // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск : ЮРГТУ, 2005. 136 с.

Васько, Н. Г. Статика и кинематика : методические указания к решению задач по теоретической механике / Н. Г. Васько, В. А. Кабельков, Н. И. Ковалёва // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск : ЮРГТУ, 2002. 60 с.

Кирсанов, М. Н. Решебник. Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 384 с.

Корецкий, А. В. Решение задач кинематики на персональном компьютере : методическое пособие / А. В. Корецкий, Н. В. Осадченко. М. : Изд-во МЭИ, 2004. 48 с.

Ломакина, О. В. [и др.] Теоретическая механика. Курсовые задания : учебно-метод. пособие / О. В. Ломакина, В. И. Галаев, Ю. В. Кулешов, В. Н. Толмачёв. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. 68 с.

Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов / под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. СПб. : Лань, 2008. 448 с.

Никитин, Е. М. Краткий курс теоретической механики / Е. М. Никитин. СПб. : Лань, 2010. 720 с.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под общ. ред. А. А. Яблонского. М. : Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

Сборник задач по теоретической механике / отв. ред. К. С. Колесников. СПб. : Лань, 2008. 448 с.

Сборник задач по теоретической механике / отв. ред. Н. А. Бражниченко. М. : Наука, 1989. 231 с.

Сборник коротких задач по теоретической механике / отв. ред. О. Э. Кепе. СПб. : Лань, 2009. 368 с.

Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов / С. М. Тарг. М. : Высш. шк., 2004. 416 с.

Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : Статика. Кинематика. Динамика : учебник для вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. М. : Лань, 2004. 764 с.

Прикладная механика. Ч. I. Механика недеформируемого твёрдого тела // Для слушателей заочного факультета АГПС МЧС России. М., 2006. 78 с.

Учебное издание

Елена Владимировна Пономарёва
Ольга Александровна Хохлова
Александр Васильевич Хохлов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА

Учебное пособие

Издано в соответствии с системой менеджмента качества
ФГБОУ ВПО «АГТУ»,
сертифицированной DQS и ГОСТ Р по ISO 9001:2008
в сфере высшего и дополнительного профессионального образования

Директор издательства А. В. Калмыкова
Редактор Е. В. Корнева
Компьютерная вёрстка Д. А. Давлетовой
Дизайн обложки А. В. Смышляевой

Подписано в печать 04.02.2013. Формат 60×84/8.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 7,96.
Тираж 100 экз. Заказ № 57.
Издательство АГТУ.
414025, Астрахань, Татищева, 16