Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «МЕХАНИКА И ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА»

Хохлова О.А., Пономарёва Е.В., Перекрестов А.П.,
Хохлов А.В., Чанчиков В.А.

ДИНАМИКА ТОЧКИ
И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(учебное пособие)

Астрахань – 2015

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.236.1 я 73

Д 46. Динамика точки и механической системы : учебное пособие / О. А. Хохлова, Е. В. Пономарёва, А. П. Перекрестов, А. В. Хохлов, В. А. Чанчиков; Астраханский государственный технический университет. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2015. 116 с.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой «Прикладная механика и графика» Астраханского инженерно-строительного института, кандидат технических наук, доцент **Синельщиков А.В.**

Заведующий кафедрой «Физика» Астраханского государственного технического университета, доктор технических наук, профессор **Селиванов Н.В.**

Заведующий кафедрой «Общая физика» Астраханского государственного университета, д.т.н., профессор **А.М. Лихтер**

Приведены основы теории по разделу «Динамика» в объеме требований программ по курсу «Теоретическая механика» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям бакалавриата 08.03.01 «Строительство», 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 35.03.09 «Промышленное рыболовство», 21.03.01 «Нефтегазовое дело». Представлены примеры решения задач по рассматриваемым темам раздела, варианты и подробные примеры решения расчетно-графической работы по теме «Кинетическая энергия системы», а также контрольные вопросы и тестовые задания для самостоятельной работы студентов. Пособие может быть использовано как средство сопровождения курса теоретической механики при традиционной форме обучения студентов, а также для организации самостоятельной работы при заочной и дистанционной формах обучения.

Оглавление

Предисловие

Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной, закладывающей основы для изучения общетехнических наук (сопротивления материалов, основ конструирования машин, теории механизмов и машин, гидро- и аэродинамики и т.п.), а также многих специальных курсов.

Изучение теоретической механики формирует у будущих специалистов склонности и способности к творческому мышлению, умение самостоятельно строить и использовать математические и физические модели объектов и явлений реального мира. В рамках данной дисциплины студенты получают возможность практического применения общих понятий математики и физики к исследованию реальных систем, впервые учатся самостоятельно работать с моделями таких систем, квалифицированно применяя для исследования основные алгоритмы высшей математики.

Законы и выводы теоретической механики широко применяются при решении самых разнообразных и сложных технических задач – при проведении технических расчетов при постройке сооружений, проектировании зданий, мостов, механизмов и машин.

Одним из самых важных и сложных разделов теоретической механики является раздел «Динамика». В предлагаемом учебном пособии, рассчитанном на студентов очной и заочной форм обучения, изложен теоретический материал, рассмотрены примеры решения типовых задач, сопровождаемые соответствующими методическими рекомендациями; имеются контрольные вопросы для самопроверки и тестовые задания для самостоятельной работы студентов.

Введение

Предлагаемое пособие является логическим продолжением разработанных авторами в 2010 и в 2013 гг. учебных пособий по теоретической механике, в которых рассматривались разделы «Статика» и «Кинематика».

Особенность данной работы заключается в выявлении межпредметных связей механики, как раздела физики, и математики. Она несомненно позволит расширить кругозор студентов, актуализирует их знания по смежным дисциплинам.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

В статике, как известно, также изучается действие сил на материальные тела, однако действие сил ограничивается частным случаем – равновесием тел.

Движение тел изучается в кинематике с чисто геометрической точки зрения, без анализа причин, вызывающих то или иное движение.

Таким образом, в динамике нас будут одинаково интересовать и силы, действующие на материальные тела, и движение этих тел под действием сил.

Простейшим объектом исследования в динамике является материальная точка – материальное тело, размерами которого при изучении данного движения можно пренебречь. Размеры тела не учитываются в двух случаях: когда тело совершает поступательное движение и когда путь, пройденный телом значительно больше самого тела. Так, например, при изучении движения планет Солнечной системы размерами планет пренебрегают, считая их материальными точками.

Под действием приложенных сил скорость тел изменяется постепенно и тем медленнее, чем больше инертность тел. Инертностью тел называются способность материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость движения под действием приложенных к ним сил. Количественной мерой инертности является физическая величина, называемая массой. В теоретической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для тела. Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм [кг].

Законы динамики были впервые сформулированы И. Ньютоном.

1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Законы динамики

В основе динамики лежат законы, полученные экспериментально на основе опытов и наблюдений.

Первый закон (закон инерции) – изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*.

Система отсчёта, в которой справедлив закон инерции - *инерциальная система*. При решении рассматриваемых в курсе теоретической механики задач инерциальной можно считать систему отсчёта, связанную с Землёй.

Второй закон (основной закон динамики) – произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление совпадает с направлением силы. Закон выполняется только в *инерциальных системах отсчёта*.

Математически этот закон выражается векторным равенством:

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

где m – масса точки; $\bar{a}$ – ускорение, получаемое точкой от действия на нее силы $\bar{F}$.

Из этого закона наглядно видно, что мерой инертности является масса: точка, обладающая большей массой, то есть имеющая большую *инертность*, получит меньшее ускорение.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположными по направлению (рис. 1), то есть $|\bar{F}_{12}| = |\bar{F}_{21}|$.

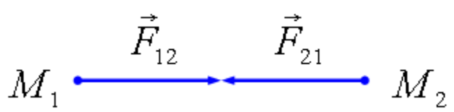


Рис. 1. Иллюстрация закона о равенстве действия и противодействия

Так как силы действия и противодействия приложены к разным материальным объектам, они не образуют уравновешенной системы сил.

Четвёртый закон (принцип независимости действия сил) – ускорение, полученное материальной точкой под действием приложенной к ней системы сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2 ... \bar{F}_n\}$, равно геометрической сумме ускорений, получаемых точкой от действия на нее каждой силы в отдельности

$$\Sigma\bar{a}_k = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n = \frac{\bar{F}_1}{m} + \frac{\bar{F}_2}{m} + ... + \frac{\bar{F}_n}{m} = \frac{\sum\bar{F}_k}{m}, \text{ или}$$

$$\Sigma\bar{a}_k = \frac{\sum\bar{F}_k}{m}.$$

Это значит, что основное уравнение динамики справедливо при действии на точку нескольких сил: $m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n$, или $m\bar{a} = \sum\bar{F}_n$, где n – число действующих на точку сил.

1.2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в векторной форме

Все задачи динамики точки решаются с помощью дифференциальных уравнений, связывающих координаты точки с действующими на нее силами и получаемых из основного закона динамики

$$m\bar{a} = \bar{F} \text{ или } m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F},$$

где: $\bar{r}$ – радиус-вектор точки по отношению к инерциальной системе отсчета *Oxyz* (рис. 2), $\bar{F} = \sum\bar{F}_k$ – равнодействующая сил, действующих на точку.

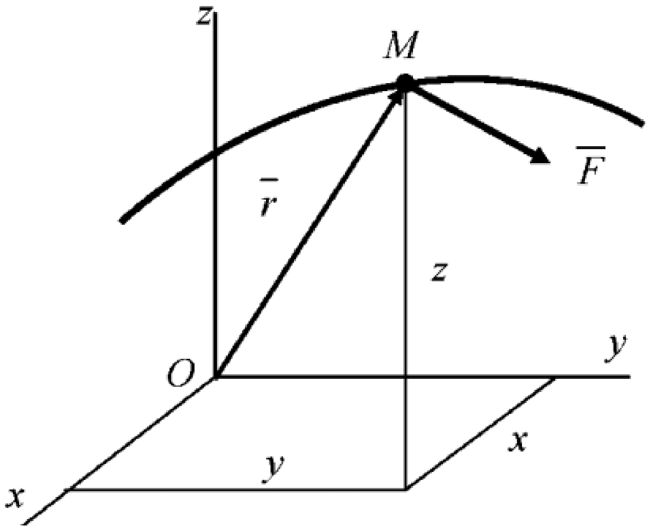


Рис. 2. Векторный способ задания движения точки

Равенство $m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$, представляющее основной закон динамики, можно рассматривать одновременно как *дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в векторной форме*.

1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах

Рассмотрим материальную точку массой m, движущейся под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_n$ (рис. 3).

Запишем основное уравнение динамики в векторной форме:

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n$$

В проекциях на оси декартовых координат эти уравнения имеют вид:

$$ma_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum F_{kx}\ ,$$
$$ma_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum F_{ky}\ ,$$
$$ma_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum F_{kz}\ .$$

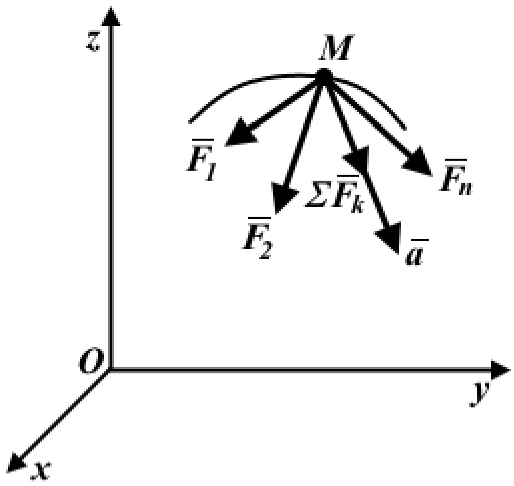


Рис. 3. Координатный способ задания движенияточки

Так как проекции ускорения точки на координатные оси определяются формулами

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

то тогда получим

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx},$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{ky},\ -$$
$$m\ddot{z} = \sum F_{kz}$$

искомые *дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах*.

1.4. Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

Если известна траектория точки, то уравнение движения можно записать в проекциях на оси естественного трехгранника (естественные оси).

Тогда, проецируя основное уравнение динамики на естественные оси, получим:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau},$$
$$ma_n = \sum F_{kn},$$
$$ma_b = 0.$$

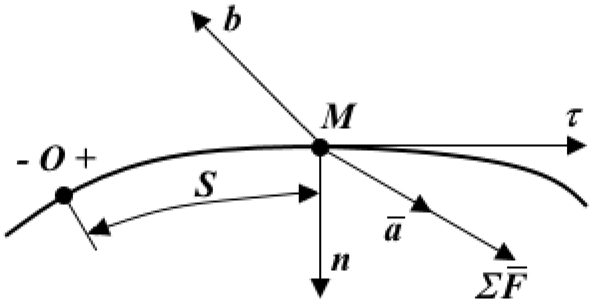


Рис. 4. Естественный способ задания движения точки

Так как $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}, a_n = \dfrac{V^2}{\rho}, a_b = 0$, получим:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = \sum F_{k\tau},$$
$$m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn},$$
$$0 = \sum F_{kb},$$

где: V – скорость точки, ρ – радиус кривизны траектории, $\sum F_{k\tau}, \sum F_{kn}, \sum F_{kb}$ – суммы проекций действующих на точку сил на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории.

Полученные уравнения представляют собой *дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в естественных координатах*.

1.5. Две задачи динамики точки

Первая задача динамики точки

Зная массу точки и закон ее движения, определить модуль и направление равнодействующей сил, действующих на точку.

Пусть задан закон движения точки в декартовых координатах: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Проекции ускорения точки на оси декартовых координат:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Проекции равнодействующей сил на оси координат:

$$F_x = ma_x,\ F_y = ma_y,\ F_z = ma_z.$$

Модуль равнодействующей сил:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направляющие косинусы равнодействующей сил:

$$cos(\bar{F},\bar{\imath}) = \frac{F_x}{F}, cos(\bar{F},\bar{\jmath}) = \frac{F_y}{F}, cos(\bar{F},\bar{k}) = \frac{F_z}{F},$$

где: $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ – орты (единичные векторы) координатных осей x, y, z.

Первая задача динамики материальной точки решается посредством *дифференцирования* заданных уравнений движения точки.

Первую задачу динамики рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней силы;
2) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;
3) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;
4) составить основные уравнения динамики материальной точки в проекциях на оси координат;
5) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Пример. Точка, имеющая массу m, движется в плоскости *оху*, согласно закону: $x=acoskt$, $y=b\ sinkt$. Найти силу, под действием которой точка совершает движение по заданному закону.

Решение. Траекторией точки является эллипс с полуосями a и b (рис. 5).

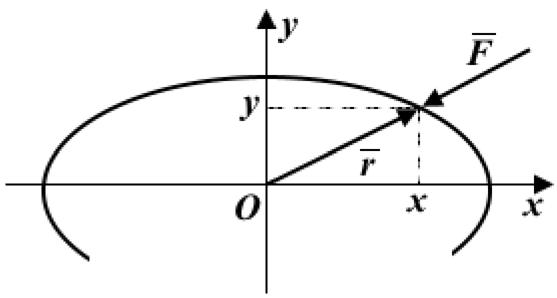


Рис. 5. Иллюстрация к примеру

Изобразим на рисунке четвертую часть эллипса и покажем точку M в произвольном положении. Определим проекции векторов скорости и ускорения точки M на оси координат:

$$\dot{x} = -ak\sin kt, \dot{y} = bk\cos kt$$

$$\ddot{x} = -ak^2\cos kt = -xk^2$$

$$\ddot{y} = -bk^2\sin kt = -yk^2$$

Вычислим проекции силы и ее полный модуль:

$$F_x = m\ddot{x} = -mk^2x; F_y = m\ddot{y} = -mk^2y$$

$$F = \sqrt{F_x + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r$$

Направляющие косинусы силы F с осями координат:

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(F, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

Направляющие косинусы радиуса-вектора точки:

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}; \cos(r, y) = \frac{y}{r}.$$

Поскольку направляющие косинусы силы и радиуса-вектора одинаковы по величине, но противоположны по знаку приходим к выводу, что сила $\vec{F}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{r}$.

Вторая (основная) задача динамики

Зная силы, действующие на материальную точку, её массу m, а также начальное положение точки и её начальную скорость, получить уравнение движения точки.

Математически эта задача решается *интегрированием* дифференциальных уравнений движения. Возникающие при этом постоянные интегрирования находятся из начальных условий.

В общем случае вторая задача динамики точки является более сложной из-за математических трудностей при интегрировании дифференциальных уравнений.

Поскольку в общем случае сила может быть функцией времени, координат и скорости движущейся точки, то дифференциальные уравнения точки принимают вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Для нахождения уравнений движения точки необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Общее решение системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид:

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

Если продифференцировать координаты точки по времени, получим проекции скорости точки на оси координат:

$$V_x = \dot{x} = f_1'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$V_y = \dot{y} = f_2'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$V_z = \dot{z} = f_3'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

Для того, чтобы выделить из целого класса движений конкретное движение, необходимо задать дополнительные условия, позволяющие определить произвольные постоянные. В качестве таких условий обычно задают *начальные условия*: при $t_0 = 0$ задают координаты и проекции скорости точки

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$$
$$\dot{x} = V_{0x}, \dot{y} = V_{0y}, \dot{z} = V_{0z}$$

В результате получаем систему шести уравнений с шестью произвольными постоянными:

$$x_0 = f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$y_0 = f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$z_0 = f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$V_{0x} = f_1'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$V_{0y} = f_2'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$V_{0z} = f_3'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, когда $\overline{F} = f(t, \overline{r}, \overline{v})$ является трудной задачей. Даже в простейшем случае прямолинейного движения, когда имеется только одно дифференциальное уравнение, его решение можно найти лишь при определенной зависимости силы от времени t, координаты x и скорости V.

Приложенная к точке сила $\overline{F}$ может быть постоянной по величине (сила тяжести вблизи поверхности Земли), зависеть только от времени t (внешнее силовое воздействие при колебаниях точки), только от скорости $\vec{v}$ точки (сила сопротивления), только от положения s точки (сила упругости), может зависеть от нескольких аргументов одновременно.

Способы интегрирования дифференциальных уравнений движения при этом разные (табл. **1**).

Таким образом, аналитически в конечном виде обратная задача динамики может быть решена лишь для сравнительно небольшого числа простейших случаев, если функции $\boldsymbol{\overline{F}(t)}$, $\boldsymbol{\overline{F}(v)}, \boldsymbol{\overline{F}(s)}$ являются интегрируемыми.

Таблица 1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки в простейших случаях

Дифференциальное уравнение движения	***Скорость точки***	***Кинематическое уравнение (закон) движения***
$m\dfrac{d^2s}{dt^2}=0$, сила не действует.	$v = const$	$s(t)=s_o + v\,t$
$m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F$, сила постоянна.	$v(t)=v_o+\dfrac{F}{m}t$	$s(t)=s_o+v_ot+\dfrac{Ft^2}{2m}$
$m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F(t)$, сила зависит от времени.	$v(t)=v_o+\int\limits_0^t\dfrac{F(t)}{m}dt$	$s(t)=s_o+\int\limits_o^t v(t)dt$
$m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F(v)$, сила зависит от скорости.	$\int\limits_{v_o}^{v}\dfrac{dv}{F(v)}=\dfrac{t}{m}$	$s(t)=s_o+\int\limits_o^t v(t)dt$
$m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F(s)$, сила зависит от положения.	$v(s)=\sqrt{v_o^{\,2}+\int\limits_{s_o}^{s}\dfrac{2F(s)}{m}ds}$	Находится из уравнения $\int\limits_{s_o}^{s}\dfrac{ds}{v(s)}=t$

***Примечание*:** во всех случаях приняты начальные условия $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$.

***Обозначения*:** s – координата; $v=\dfrac{ds}{dt}$ - скорость точки.

Алгоритмы решения задач динамики точки при прямолинейном и криволинейном движении приведены на рис. 6 и рис. 7.

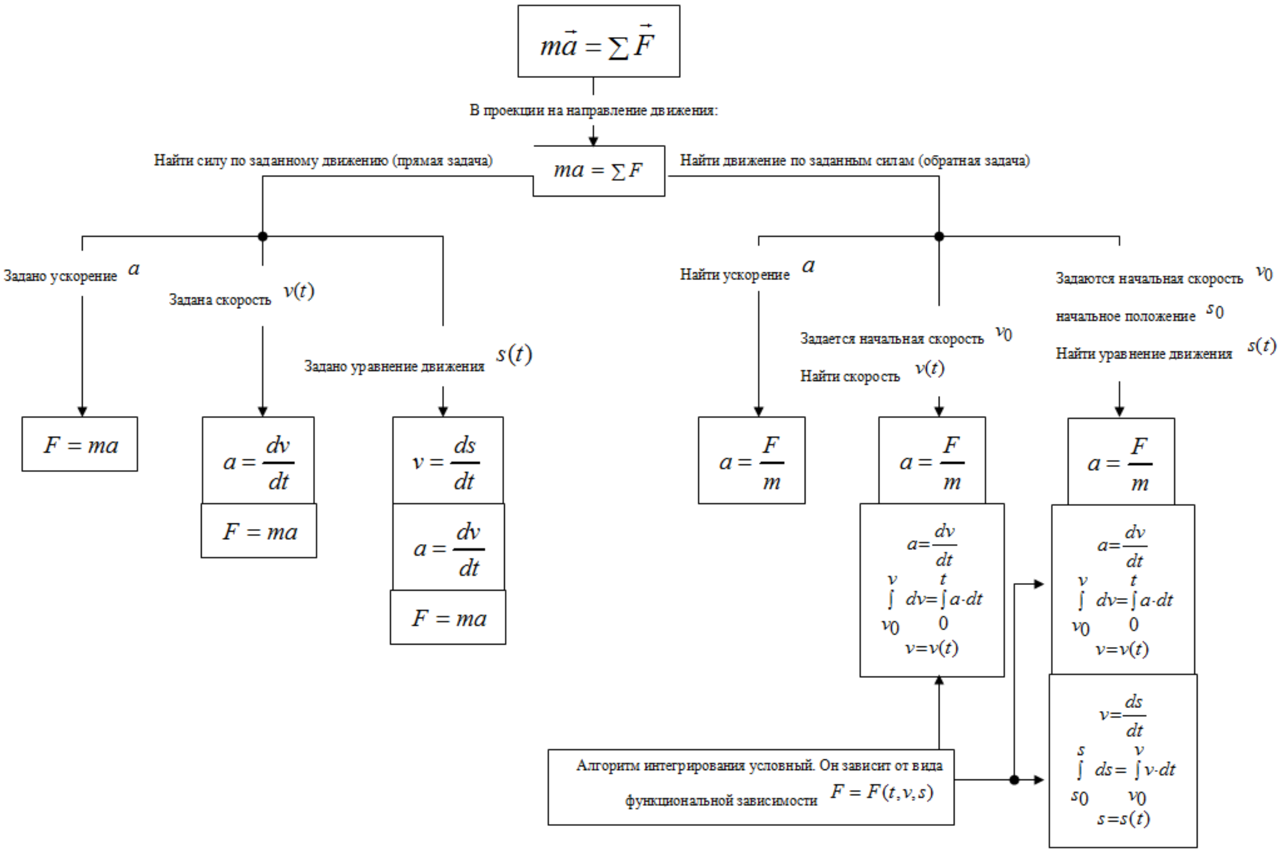


Рис. 6. Алгоритм решения задач динамики точки при прямолинейном движении

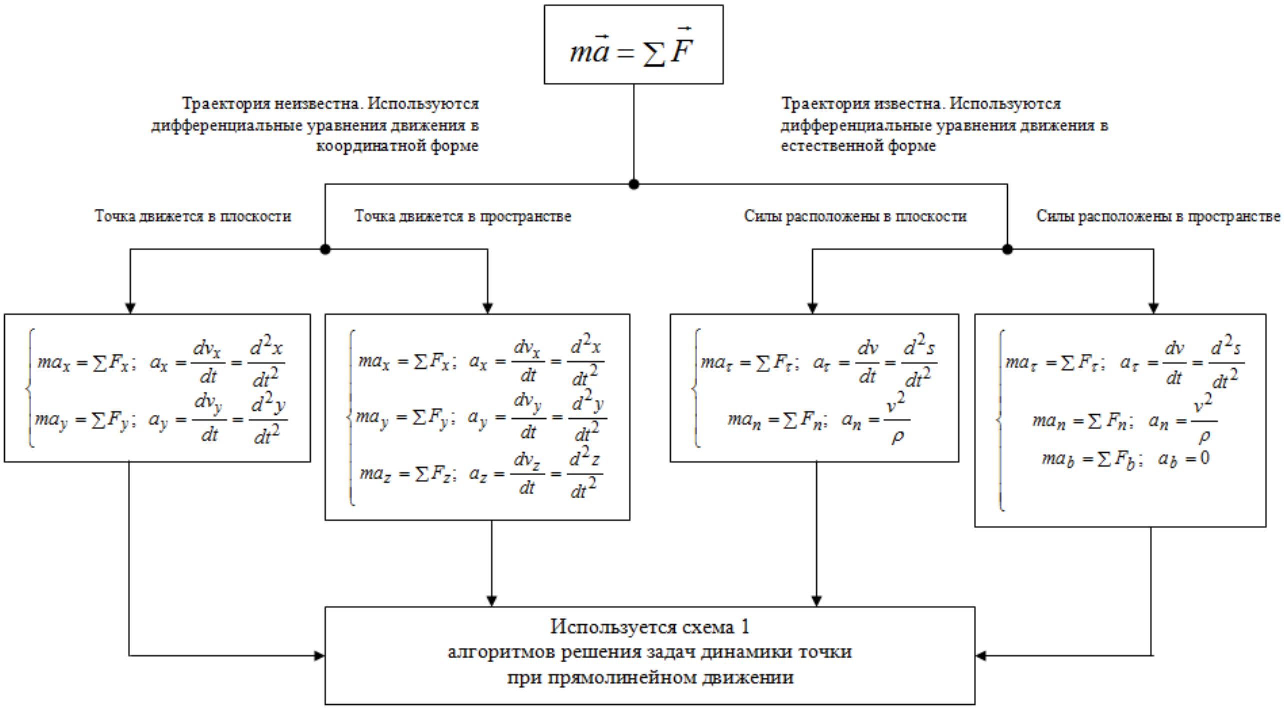


Рис. 7. Алгоритм решения задач динамики точки при криволинейном движении

1.6. Решение дифференциальных уравнений движения материальной точки

Прямолинейное движение точки

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, v)$$

Наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки имеют место, когда сила F_x постоянна или является функцией какой-либо одной переменной.

Пример 1. Сила является функцией времени.

Ракета (рис. 8) начинает движение из состояния покоя под действием реактивной силы, зависящей от времени $F=F_o e^{-bt}$, где F_o – максимальное значение реактивной тяги, b – постоянная величина. Масса ракеты m; начальные условия: при $t=0$, $x=0$, $V=0$.

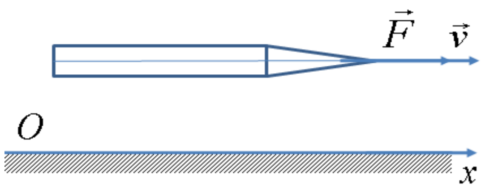


Рис. 8. Иллюстрация к примеру 1

Решение. Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось x, направленную в сторону движения ракеты:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_o e^{-bt}.$$

Произведем понижение порядка дифференциального уравнения.

Так как $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$, получим $m\frac{dV}{dt} = F_0 e^{-bt}$, то есть вместо дифференциального уравнения второго порядка получим два дифференциальных уравнения первого порядка, поскольку $V = \frac{dx}{dt}$.

Разделяем переменные и выполним интегрирование полученного уравнения:

$$dV = \frac{F_0}{m} e^{-bt} dt$$

$$V = -\frac{F_0}{bm} e^{-bt} + C_1$$

При $t_0 = 0, V_0 = 0$: $0 = -\frac{F_0}{bm} + C_1$, $C_1 = \frac{F_0}{bm}$.

$V = \dfrac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})$ - зависимость скорости ракеты от времени.

Т.к. $V = \dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})$, $dx = \dfrac{F_0}{bm}(1-e^{-bt})dt$.

Проинтегрировав, получим: $x = \dfrac{F_0}{bm}(t + \dfrac{1}{b}e^{-bt}) + C_2$.

При $t_0 = 0, x_0 = 0$: $0 = \dfrac{F_0}{mb^2} + C_2$, $C_2 = -\dfrac{F_0}{mb^2}$.

Окончательно, закон движения ракеты: $x = \dfrac{F_0}{bm}(t - \dfrac{1}{b}(1-e^{-bt}))$.

Исследуем результаты решения задачи. При $t >> 0$, $e^{-bt} \approx 0$, скорость ракеты будет равна $V = \dfrac{F_0}{bm}$. Следовательно, по истечении некоторого промежутка времени ракета будет двигаться с постоянной скоростью. Тогда $x = \dfrac{F_0}{bm}(t - \dfrac{1}{b})$ - закон равномерного движения.

Пример 2. Сила является функцией скорости.

Сила, действующая на автомобиль массой m во время движения, выражается формулой $F=a-bV$, где a и b – постоянные величины, V – скорость автомобиля. Определить закон движения автомобиля (рис. 9).

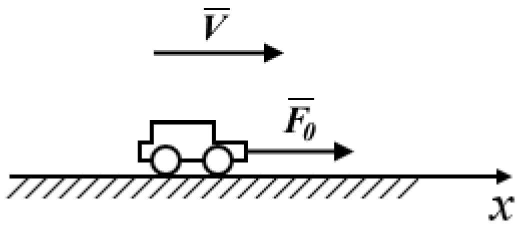


Рис. 9. Иллюстрация к примеру 2

Решение. Рассмотрим автомобиль как материальную точку массой m. Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось x:

$$m\frac{dV}{dt} = a - bV .$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dV}{a-bV} = \frac{dt}{m},$$

$$-\frac{1}{b}\ln(a-bV) = \frac{t}{m} + C_1.$$

При $t_0 = 0, V_0 = 0: C_1 = -\dfrac{1}{b}\ln(a)$.

$$-\frac{1}{b}\ln(a-bV) = \frac{t}{m} - \frac{1}{b}\ln a .$$

Скорость автомобиля равна: $V = \dfrac{a}{b}(1-e^{-\frac{bt}{m}})$.

Так как $V = \dfrac{dx}{dt}$, то $dx = \dfrac{a}{b}(1 - e^{-\frac{bt}{m}})dt$.

Проинтегрируем уравнение и получим:

$$x = \frac{a}{b}(t + \frac{m}{b}e^{-\frac{bt}{m}}) + C_2,$$

где C_2- постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

При $t_0 = 0, x_0 = 0: 0 = \dfrac{a}{b^2}m + C_2$, $C_2 = -\dfrac{a}{b^2}m$.

Окончательно, закон движения автомобиля: $x = \dfrac{a}{b}(t - \dfrac{m}{b}(1 - e^{-\frac{bt}{m}}))$.

Пример 3. Сила является функцией координат.

Точка массой m движется под действием силы отталкивания от неподвижной точки O, изменяющейся по закону $F=mk^2x$ (рис. 9). В начальный момент точка находилась в покое на расстоянии a от неподвижного центра. Определить закон движения точки.

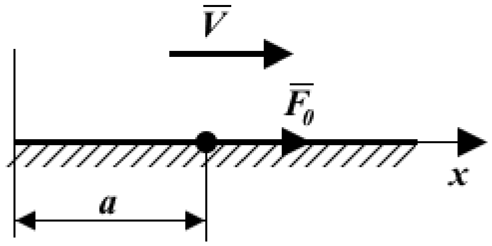


Рис. 10. Иллюстрация к примеру 3

Решение. Запишем основное уравнение динамики в проекции на горизонтальную ось x:

$$m\frac{dV}{dt} = mk^2x$$

Данное уравнение содержит три переменных t, x и V. Для решения уравнения необходимо произвести замену переменной:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}.$$

Тогда уравнение примет вид: $mV\dfrac{dV}{dx} = mk^2x$.

Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение:

$$VdV = k^2xdx \text{ и } \frac{V^2}{2} = \frac{k^2x^2}{2} + C_1.$$

При $x_0 = a, V_0 = 0$: $\dfrac{k^2a^2}{2} + C_1 = 0$, $C_1 = -\dfrac{k^2a^2}{2}$.

Подставив значение C_1, получим: $V^2 = k^2(x^2 - a^2)$, $V = k\sqrt{x^2 - a^2}$

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x^2 - a^2}\ ,\ \ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = kdt$$

$$\arccos\left(\frac{x}{a}\right) = kt + C_2$$

При $t_0 = 0,\ x_0 = a,\ \arccos 1 = 0, C_2 = 0$.

$$\frac{x}{a} = \cos(kt),\ x = a \cdot \cos(kt).$$

Данное уравнение можно решить непосредственным интегрированием, используя характеристическое уравнение:

$$m\ddot{x} = mk^2 x.$$

Положим, что $x = e^{\lambda t}$, тогда производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ будут равны:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t};\ \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставим полученные выражения в характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = k^2 e^{\lambda t}$$

Отсюда находим, что:

$$\lambda^2 = k^2$$

$$\lambda = \pm k.$$

Если корни характеристического уравнения вещественные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$$

$$\dot{x} = kC_1 e^{kt} - kC_2 e^{kt}$$

$$\text{При } t_0 = 0, x_0 = a,\ a = C_1 + C_2$$

$$\text{При } t_0 = 0, V_0 = 0,\ 0 = kC_1 - kC_2$$

$$C_2 = C_1, a = 2C_1 = 2C_2$$

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = a\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = achkt$$

Криволинейное движение точки

Пример. Задача Галилея (движение тела, брошенного под углом к горизонту)

Определить закон движения, траекторию движения, дальность полета, высоту подъема, время полета материальной точки M массой m, брошенной с начальной скоростью $\bar{v}_0$ под углом α к горизонту.

Решение. Движение точки будем рассматривать в однородном поле тяжести. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Изобразим движущуюся точку M в произвольном положении (рис. 11).

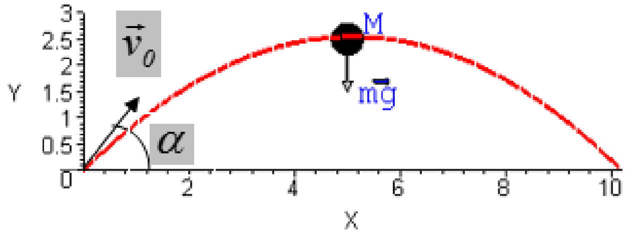


Рис. 11. Расчетная схема

На нее действует только сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$, проекции которой на координатные оси равны:

$$P_x = 0,\ P_y = -P,\ P_z = 0.$$

Подставив эти выражения в дифференциальные уравнения движения точки, получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0,\ \frac{dv_y}{dt} = -g,\ \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим:

$$v_x = C_1, v_y = -gt + C_2, v_z = C_3.$$

Начальные условия: при $t_0 = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0;$
$v_{x0} = v_o cos,\ v_{y0} = v_o sin,\ v_{z0} = 0$.

Удовлетворяя начальным условиям, получим:

$$C_1 = v_o cos\alpha, C_2 = v_o sin\alpha, C_3 = 0.$$

Заменим $v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$ и получим:

$$\frac{dx}{dt} = v_o cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = v_o sin\alpha - gt,\ \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируем эти выражения:

$$x = v_o t\ cos\alpha + C_4,\ y = v_o t\ sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5,\ z = C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, тогда

$$x = v_o t cos\alpha, y = v_o t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, z = 0 - \textit{уравнения движения точки.}$$

Исключив из уравнений движения точки время t, получим *уравнение траектории точки*:

$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2.$$

Брошенная под углом к горизонтальной плоскости тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве *по параболе* (рис. 12).

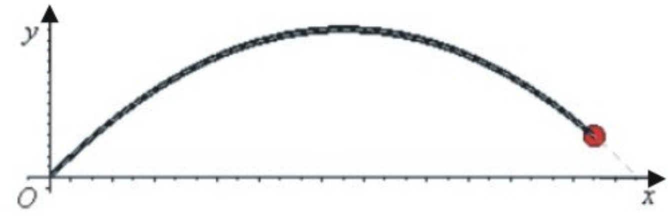


Рис. 12. Траектория движения точки

Дальность полета. Если принять в уравнении траектории $y=0$, то получается два решения: $x_1=0, x_2=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Окончательно, дальность полета равна: $L=x_2=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Отсюда следует, что наибольшая горизонтальная дальность полета подучается, когда $\sin 2\alpha=1$, то есть при угле $\alpha=45°$.

Если бросать точку с разными начальными скоростями $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$, причем такими, что $\bar{v}_1>\bar{v}_2>\bar{v}_3>\bar{v}_4$, то дальность полета будет наибольшей в том случае, когда скорость бросания наибольшая. На рис. 13 дана иллюстрация того, как будут выглядеть траектории точек при разных скоростях бросания.

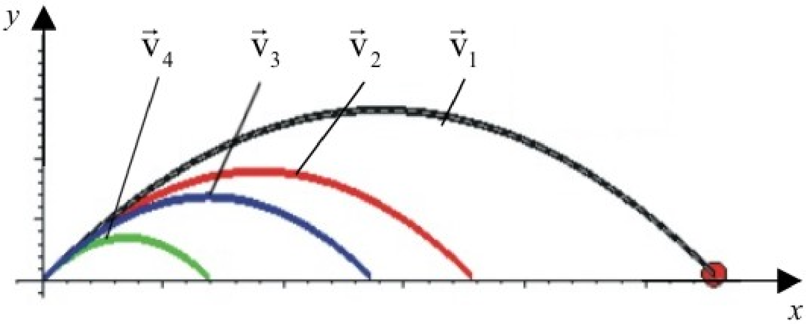


Рис. 13. Траектории точек при разных скоростях бросания

На рис. 14 показаны траектории движения точек, брошенных под разными углами к горизонту.

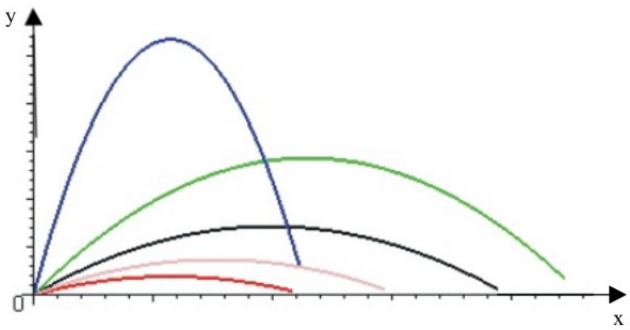


Рис. 14. Траектории движения точек, брошенных под разными углами к горизонту

При углах бросания α и $(90°-\alpha)$ дальность полета одинаковая; при угле бросания α траектория *навесная*, а при $(90°-\alpha)$ – *настильная*.

Настильная траектория - пологая кривая, которая образует малые (не более 15°) углы с горизонтом (рис. 15).

Рис. 15. Навесная и настильная траектории

Если принять в уравнении траектории координату x равной половине горизонтальной дальности, то получим уравнение высоты траектории:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Тогда по формуле

$$T = \frac{x}{v_o \cos\alpha} = \frac{2v_o \sin\alpha}{g}$$

определяется время полета материальной точки.

1.7. Контрольные задания по теме: «Динамика точки»

Характер движения точки в зависимости от сил

Пример. На свободную материальную точку M массой m = 1 кг (рис. 16) действует, кроме силы тяжести $\bar{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\bar{F} = 9{,}8\bar{k}$ (Н), где $\bar{k}$ - единичный орт оси z. Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

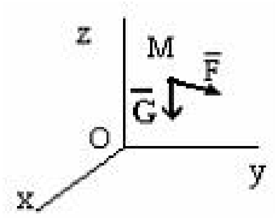


Рис. 16. Иллюстрация к примеру

Варианты ответов:
1. двигаться равноускоренно вверх
2. двигаться ускоренно вниз
3. двигаться равномерно вверх
4. двигаться равномерно вдоль оси OX
5. находиться в покое

Решение. Выражение силы $\bar{F}$ показывает, что по направлению она совпадает с направлением оси z и ее модуль равен модулю силы G: $G = mg = 9{,}8$ Н. Таким образом, сумма сил $\bar{F}$ и $\bar{G}$ равна нулю, следовательно, равно нулю и ускорение точки. Поскольку в начальный момент точка находилась в покое, то она и останется в покое.

Правильным является *ответ*: находиться в покое.

Задание 1. На свободную материальную точку M массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\bar{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\bar{F} = 9{,}8\bar{i} + 9{,}8\bar{k}$ (Н) (рис. 31). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться равноускоренно вдоль оси OX
2. двигаться равномерно вдоль оси OY
3. двигаться ускоренно вдоль оси OY
4. двигаться ускоренно вниз
5. находиться в покое

Задание 2. На свободную материальную точку M массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\bar{G}$ (ускорение свободного падения принять

g=9,8 м/с^2), сила $\overline{F}=9{,}8t\overline{i}+9{,}8\overline{k}$ (Н) (рис. 31). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться равномерно вверх
2. двигаться ускоренно вдоль оси *OX*
3. двигаться равноускоренно вдоль оси *OY*
4. находиться в покое
5. двигаться ускоренно вниз

Задание 3. На свободную материальную точку *M* массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\overline{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\overline{F}=9{,}8\overline{i}-9{,}8\overline{j}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться ускоренно параллельно плоскости *XOY*
2. находиться в покое
3. двигаться равномерно параллельно плоскости *XOZ*
4. двигаться ускоренно вниз
5. двигаться равноускоренно в пространстве

Задание 4. На свободную материальную точку *M* массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\overline{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\overline{F}=9{,}8\overline{j}+9{,}8\overline{k}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться равноускоренно параллельно оси *OY*
2. двигаться ускоренно вниз
3. двигаться ускоренно параллельно плоскости *XOY*
4. двигаться равноускоренно параллельно оси *OZ*
5. находиться в покое

Задание 5. На свободную материальную точку *M* массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\overline{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\overline{F}=9{,}8\overline{i}+9{,}8t\overline{k}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться ускоренно параллельно оси *OX*
2. двигаться ускоренно параллельно плоскости *XOY*
3. находиться в покое
4. двигаться ускоренно параллельно плоскости *XOZ*
5. двигаться равномерно параллельно плоскости *YOZ*

Задание 6. На свободную материальную точку *M* массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\overline{G}$ (ускорение свободного падения принять

g=9,8 м/с^2), сила $\bar{F} = 9{,}8\bar{\imath} - 9{,}8\bar{\jmath} + 9{,}8\bar{k}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться ускоренно параллельно оси OX
2. двигаться равноускоренно в пространстве
3. находиться в покое
4. двигаться равномерно параллельно плоскости XOZ
5. двигаться равноускоренно параллельно плоскости XOY

Задание 7. На свободную материальную точку M массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\bar{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\bar{F} = 9{,}8\bar{\imath}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться ускоренно в пространстве
2. двигаться равноускоренно параллельно плоскости XOZ
3. двигаться ускоренно параллельно оси OX
4. двигаться равномерно параллельно плоскости XOY
5. находиться в покое

Задание 8. На свободную материальную точку M массы m = 1кг действует, кроме силы тяжести $\bar{G}$ (ускорение свободного падения принять g=9,8 м/с^2), сила $\bar{F} = 9{,}8\bar{\jmath}$ (Н). Если в начальный момент точка находилась в покое, то в этом случае она будет…

1. двигаться равномерно параллельно плоскости XOZ
2. двигаться ускоренно параллельно оси OY
3. находиться в покое
4. двигаться равноускоренно в пространстве
5. двигаться равноускоренно параллельно плоскости YOZ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пример. Точка M массой m (рис. 17) скользит без трения по проволочной окружности радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести и горизонтальной силы $\bar{F}$.

В проекциях на главную нормаль к траектории дифференциальное уравнение движения имеет вид… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

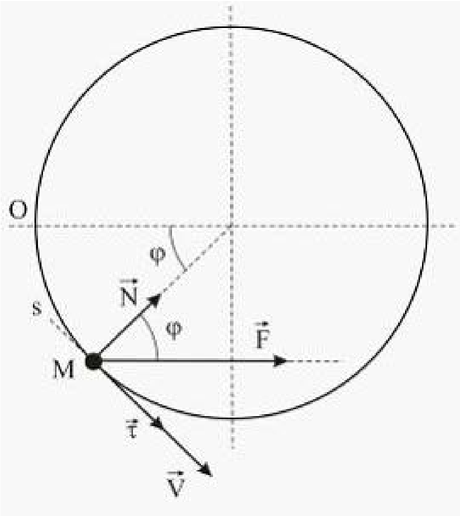


Рис. 17. Иллюстрация к примеру

Варианты ответа:

1) $m \cdot \ddot{s} = N - F \cdot \sin \frac{s}{R}$

2) $m \cdot \frac{\dot{s}^2}{R} = N + F \cdot \cos \frac{s}{R}$

3) $m \cdot \ddot{s} = N + F \cdot \cos \frac{s}{R}$

4) $m \cdot \frac{\dot{s}^2}{R} = N - F \cdot \cos \frac{s}{R}$

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения точки *M*:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{N} .$$

В проекции на главную нормаль оно имеет вид:

$$m \cdot a_n = F \cdot \cos\varphi + N ,$$

где $a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$ и $\varphi = \frac{s}{R}$.

Тогда искомое уравнение:

$$m \cdot \frac{\dot{s}^2}{R} = N + F \cdot \cos \frac{s}{R} .$$

Ответ: В проекциях на главную нормаль к траектории дифференциальное уравнение движения имеет вид $m \cdot \frac{\dot{s}^2}{R} = N + F \cdot \cos \frac{s}{R}$.

Задание 1. Точка *M* массой *m* скользит без трения по проволочной окружности радиуса *R*, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести и горизонтальной силы $\overline{F}$ (рис. 18).

В проекциях на касательную к траектории дифференциальное уравнение движения имеет вид… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

Варианты ответа:

1) $m\ddot{s} = F \sin \frac{s}{r}$

2) $m \frac{\dot{s}^2}{r} = N + F \cos \frac{s}{r}$

3) $m\ddot{s} = -F \sin \frac{s}{r}$

4) $m \frac{\dot{s}^2}{r} = N - F \cos \frac{s}{r}$

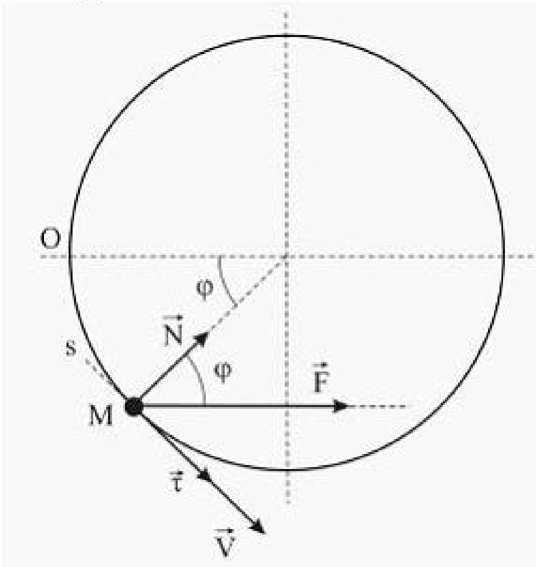


Рис. 18. Иллюстрация к заданию

Задание 2. Точка *M* массой *m* скользит по шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения *f* (рис. 19, рис. 20).

Дифференциальное уравнение движение точки имеет вид … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

А)

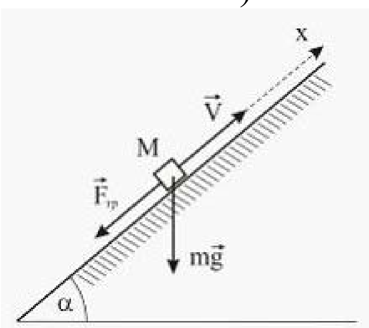


Рис. 19. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) $m\ddot{x} = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha$
2) $m\ddot{x} = mg\cos\alpha + fmg\sin\alpha$
3) $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$
4) $m\ddot{x} = -mg\cos\alpha + fmg\sin\alpha$

Б)

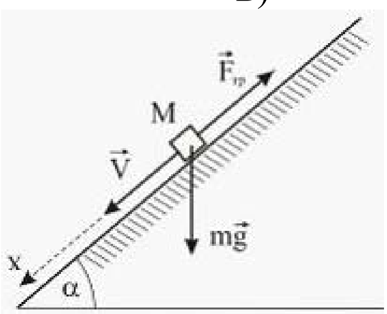


Рис. 20. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) $m\ddot{x} = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha$
2) $m\ddot{x} = mg\cos\alpha + fmg\sin\alpha$
3) $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$
4) $m\ddot{x} = mg\cos\alpha - fmg\sin\alpha$

Задание 3.

Материальная точка массой m падает вертикально (рис. 21), испытывая силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости $R = a \cdot V^2$ (Н), где $a = const$.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

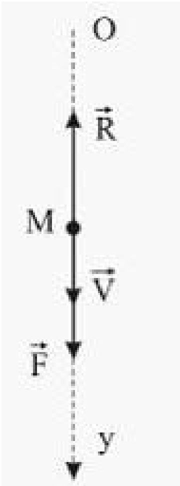


Рис. 21. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) $m\ddot{y} = mg + a\dot{y}^2$

2) $m\ddot{y} = mg - a\dot{y}^2$

3) $m\ddot{y} = -mg - a\dot{y}^2$

4) $m\ddot{y} = -mg + a\dot{y}^2$

Задание 4. Материальная точка M массой m движется по горизонтальной прямой под действием силы $\overline{F}$ и силы тяжести (рис. 22).

Дифференциальное уравнение движения имеет вид … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

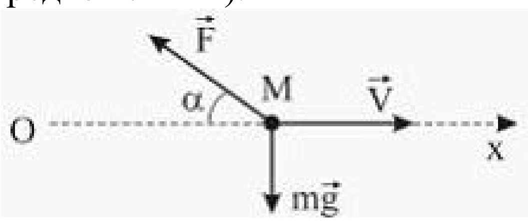


Рис. 22. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) $m\dfrac{dV_x}{dt} = mg + F\cos\alpha$

2) $m\dfrac{dV_x}{dt} = F\cos\alpha$

3) $m\dfrac{dV_x}{dt} = -F\cos\alpha$

4) $m\dfrac{dV_x}{dt} = -F\sin\alpha$

Задание 5. Материальная точка M массой m движется вверх по вертикальной прямой под действием силы сопротивления $\overline{R} = -k\overline{V}$ и силы тяжести (рис. 23).

Дифференциальное уравнение движения имеет вид … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

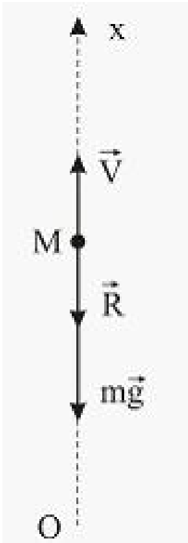


Рис. 23. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) $m\dfrac{dV_x}{dt} = mg + kV_x$

2) $m\dfrac{dV_x}{dt} = -mg - kV_x$

3) $m\dfrac{dV_x}{dt} = mg - kV_x$

4) $m\dfrac{dV_x}{dt} = -mg + kV_x$

Первая и вторая задачи динамики

Пример 1. Материальная точка массой m = 10 кг движется по кривой (рис. 24) под действием силы $\overline{F} = 3t\cdot\overline{\tau} + 4t\cdot\overline{n}$ (Н).

Ускорение точки в момент времени $t_1 = 1(c)$ равно… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

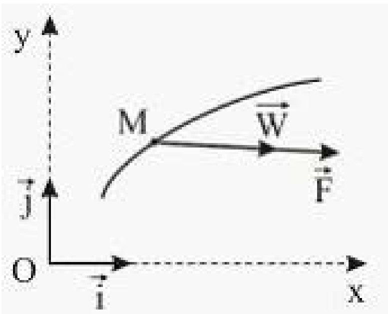


Рис. 24. Иллюстрация к примеру

Варианты ответа:

1) 0,5 м/сек^2

2) 0,3 м/сек^2

3) 0,2 м/сек^2

4) 0,4 м/сек^2

Решение.

Ускорение точки: $\overline{a} = \dfrac{\overline{F}}{m} = \dfrac{3t\cdot\overline{\tau} + 4t\cdot\overline{n}}{10} = 0{,}3t\cdot\overline{\tau} + 0{,}4t\cdot\overline{n}$ (м/с^2).

При t_1=1с имеем: $\overline{a} = 0{,}3\cdot\overline{\tau} + 0{,}4\cdot\overline{n}$.

Тогда модуль ускорения точки в данный момент времени будет равен:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}3^2} = 0{,}5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $a = 0{,}5$ (м/с^2).

Пример 2. Материальная точка массой m=10 кг движется по горизонтальной прямой под действием постоянной силы сопротивления $R = 5$ Н (рис. 25). Начальная скорость точки $V_0 = 4$ м/сек.

Точка остановится через… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

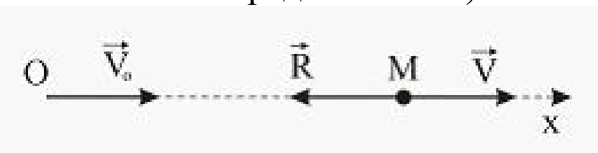


Рис. 25. Иллюстрация к примеру

Варианты ответа:
1) 10 сек
2) 8 сек
3) 6 сек
4) 4 сек

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки *M* в проекции на ось *Ox*: $m \cdot a = -R$, отсюда $a = -\frac{R}{m} = -\frac{5}{10} = -0{,}5$ (м/с^2).

Т.к. ускорение точки – постоянная величина, то закон изменения скорости имеет вид:

$$V = a \cdot t + V_0 \text{ (м/с)}.$$

Подставив численные значения начальной скорости и ускорения точки, и приравняв скорость точки нулю, найдем время остановки точки:

$0 = -0{,}5 \cdot t + 4$ => $t = 8$ (с).

Ответ: $t = 8$ (с).

Задание 1. Материальная точка массой m = 10 кг движется в плоскости *Oxy* (рис. 26) со скоростью $\overline{V} = 3t \cdot \overline{i} + 4t \cdot \overline{j}$ (м/сек).

Модуль равнодействующей приложенных к точке сил равен… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

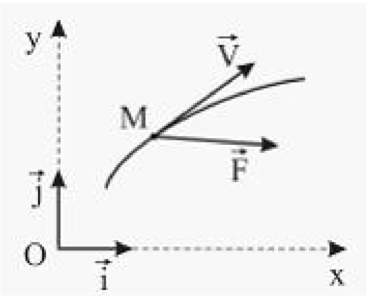


Рис. 26. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:
1) 20 Н
2) 30 Н
3) 40 Н
4) 50 Н

Задание 2. Материальная точка массой m = 10 кг движется по оси *Ox* под действием силы $\overline{F}$ (рис. 27). Проекция скорости точки на ось *Ox* равна $V_x = 5\sin \pi t$ (м/сек). Модуль силы $\overline{F}$ в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}$с равен… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

Рис. 27. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) 5π Н
2) 15π Н
3) 10π Н
4) 0 Н

Задание 3. Материальная точка массой m=10 кг движется по прямой. График зависимости скорости точки $V(t)$ показан на рис. 28, рис. 29.

Модуль равнодействующей сил, действующих на точку, равен … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

А)

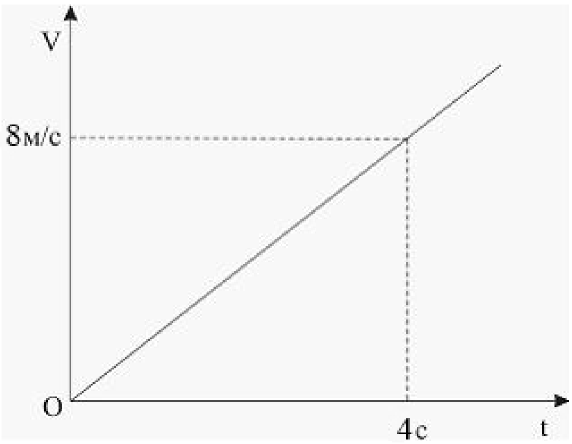


Рис. 28. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

1) 10Н
2) 20Н
3) 40Н
4) 30Н

Б)

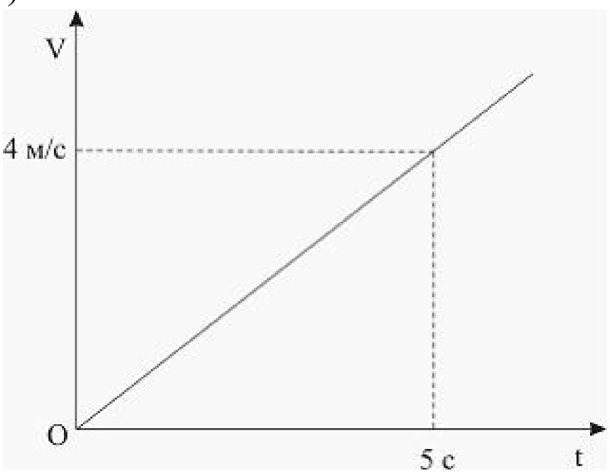


Рис. 29. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:

5) 4Н
6) 2Н
7) 6Н
8) 8Н

Задание 4. Материальная точка массой m=10 кг движется по окружности радиуса $R = 2$ м со скоростью $V = 6$ м/сек (рис. 30).

Проекция равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории равна (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

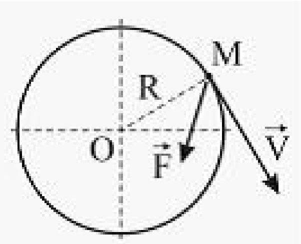


Рис. 30. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:
1) 80 Н
2) 180 Н
3) 60 Н
4) 90 Н

Задание 5. Материальная точка *M* массой *m*=80 кг падает вертикально, испытывая силу сопротивления (рис. 31), пропорциональную квадрату скорости $R = 5V^2$ (Н). Максимальная скорость точки равна … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

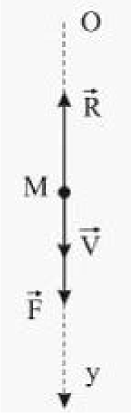


Рис. 31. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:
1) $4\sqrt{g}$ м/сек
2) $\sqrt{g}$ м/сек
3) $3\sqrt{g}$ м/сек
4) $2\sqrt{g}$ м/сек

Задание 6. Материальная точка массой *m*=10 кг движется из состояния покоя (рис. 32) под действием силы $F = 20t\ (\text{Н})$. Скорость точки в момент времени $t_1 = 2$ (сек) равна… (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

Рис. 32. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:
1) 10 сек; 2) 8 сек
3) 6 сек; 4) 4 сек

Задание 7. Материальная точка массой *m*=10 кг движется из состояния покоя (рис. 33) по прямой под действием силы *F* = *60t* (Н). Путь, пройденный точкой за первые 2 секунды равен … … (необходимо выбрать один правильный ответ из списка предложенных).

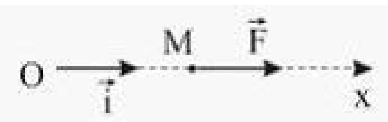


Рис. 33. Иллюстрация к заданию

Варианты ответа:
1) 2 м
2) 6 м
3) 4 м
4) 8 м

2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Решение второй (основной) задачи динамики сводится к составлению и решению (интегрированию) дифференциальных уравнений 2-го порядка. Применение общих теорем динамики избавляет от необходимости при решении задач каждый раз производить интегрирование, что существенно упрощает процесс решения. Кроме того, общие теоремы динамики устанавливают наглядные зависимости между динамическими характеристиками движения материальных тел, такими, как количество движения и импульс, кинетическая энергия и работа и т.д., что дает в дальнейшем возможность исследовать движение механической системы.

2.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Для характеристики действия силы за некоторый промежуток времени используется векторная величина, называемая *импульсом силы* $\overline{S}$.

Элементарным импульсом силы $d\overline{S}$ называется векторная величина, равная произведению силы на элементарный промежуток времени

$$d\overline{S} = \overline{F}dt .$$

Полный импульс силы или импульс силы за конечный промежуток времени t_1 равен интегральной сумме соответствующих элементарных импульсов:

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} d\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F}dt .$$

Проекция импульсов силы на оси декартовых координат определяются по формулам:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt , \; S_y = \int_0^{t_1} F_y dt , \; S_z = \int_0^{t_1} F_z dt .$$

Количество движения является мерой механического движения. *Количеством движения материальной точки* $\overline{q}$ называется вектор, равный произведению массы точки на вектор её скорости:

$$\overline{q} = m\overline{V} \; \overline{q} = m\overline{V}.$$

Согласно основному закону динамики $\overline{F} = m\overline{a}$.

Поскольку масса величина постоянная, то предыдущее выражение можно представить в виде:

$$\overline{F} = \frac{d(m\overline{V})}{dt}, \text{ или } \frac{d(m\overline{V})}{dt} = \overline{F} .$$

Это равенство выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме:

Производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на точку силе.

Разделив переменные и проинтегрировав обе части равенства, получим теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме:

$$d(m\overline{V}) = \overline{F}dt\,,\quad m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \int_0^{t_1} \overline{F}dt = \overline{S}\,.$$

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу действующей на точку силы за тот же промежуток времени.

Пример. Тело массой m поднимается вверх по шероховатой наклонной плоскости под углом α=30° к горизонту с начальной скоростью V_0=10 м/с. Определить время, через которое тело остановится, если коэффициент трения скольжения тела о шероховатую плоскость равен f = 0,4.

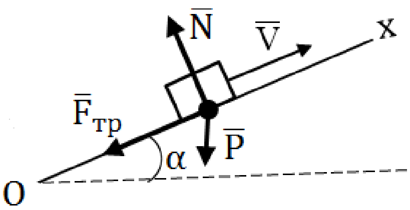


Рис. 34. Иллюстрация к примеру

Решение. Изобразим силы, действующие на тело (рис. 34).

Сила трения скольжения равна:

$$F_{тр} = fN = fP\cos\alpha\text{, а сила тяжести } P = mg\,.$$

Согласно теореме об изменении количества движения точки:

$$m\cdot V_1 - m\cdot V_0 = S\text{, где } S = \left(-F_{тр} - P\cos\alpha\right)\cdot t\,.$$

Т.к. $V_1 = 0$, а $m = \dfrac{P}{g}$, получим:

$$\frac{P}{g}\cdot V_0 = \left(fP\cos\alpha + P\sin\alpha\right)\cdot t_1\,,$$

Отсюда найдем время до остановки тела:

$$t_1 = \frac{V_0}{g\cdot\left(f\cos\alpha + \sin\alpha\right)} = \frac{10}{9{,}8\cdot\left(0{,}4\cdot 0{,}866 + 0{,}5\right)} = 1{,}21 \text{ с.}$$

Ответ: $t_1 = 1{,}21$ с.

2.2. Теорема об изменении момента количества движения точки

При решении некоторых задач динамики вместо вектора количества движения удобно пользоваться его моментом относительно некоторого центра или оси.

Моментом количества движения точки относительно данного центра О называется вектор $\bar{l}_O$, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор количества движения и центр *О*, в ту сторону, откуда вектор $m\overline{V}$ виден направленным против хода часовой стрелки (рис. 35), т.е.

$$\bar{l}_O = \overline{m}_O\left(m\overline{V}\right), \text{ или } \overline{m}_O\left(m\overline{V}\right) = \bar{r} \times m\overline{V} .$$

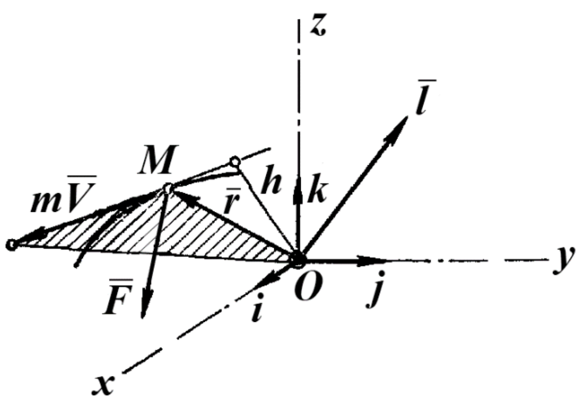


Рис. 35. Момент количества движения точки относительно центра О

Модуль вектора момента количества движения l_O равен:

$$l_O = m \cdot V \cdot h ,$$

где *h* – плечо вектора $\overline{V}$ относительно центра *О*.

Момент количества движения точки относительно оси z, проходящей через центр О, равен проекции вектора момента количества движения точки на эту ось:

$$l_z = m_z\left(m\overline{V}\right).$$

Пусть точка *М* массой *m* движется под действием силы $\overline{F}$. Момент силы $\overline{F}$ относительно центра *О* равен $\overline{m}_O\left(\overline{F}\right) = \bar{r} \times \overline{F}$. Момент количества движения относительно того же центра: $\bar{l}_O = \bar{r} \times m\overline{V}$.

Возьмем производную по времени от момента количества движения точки:

$$\frac{d\bar{l}_O}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\overline{V} + \bar{r} \times \frac{d\left(m\overline{V}\right)}{dt} = \overline{V} \times m\overline{V} + \bar{r} \times m\bar{a} .$$

Первое слагаемое $\overline{V} \times m\overline{V} = 0$, так как векторы параллельны ($\overline{V} \parallel m\overline{V}$); второе слагаемое $\bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \overline{F} = m_O\left(\overline{F}\right)$.

Следовательно

$\frac{d\bar{l}_O}{dt} = \overline{m}_O(\overline{F})$ – полученная формула выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки в векторной форме.

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно некоторого неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

2.3. Работа силы

Под работой в физике понимается процесс перехода одного вида движения или энергии в другой. Например, при сжатии пружины совершается работа, так как при этом энергия точки, движущейся под действием силы, переходит в потенциальную энергию сил упругости сжатой пружины.

Мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму движения является *работа силы*. При этом работа характеризует только то действие силы, которое приводит к изменению модуля скорости движущегося тела. Так как механическое движение переходит в немеханическое под действием силы и на некотором пути, то в механике работа связана с силой и перемещением.

Рассмотрим различные способы определения работы.

1. В скалярной форме

Элементарная (бесконечно малая по величине) работа силы равна:

$$dA = F_\tau \cdot ds,$$

где F_τ – проекция силы $\overline{F}$ на касательную M_τ (рис. 36) к траектории точки M, направленную в сторону перемещения этой точки; ds – модуль элементарного перемещения этой точки.

Так как $F_\tau = F \cdot cos\alpha,$ где α – угол между $\overline{F}$ и $M\tau,$ то элементарную работу силы в скалярной форме также можно выразить, как

$$dA = F \cdot cos\alpha \cdot dS.$$

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при α = 0 элементарная работа $dA = F \cdot dS$. Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при α=180° элементарная работа $dA = -F \cdot dS$. Если угол α=90°, т.е. сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

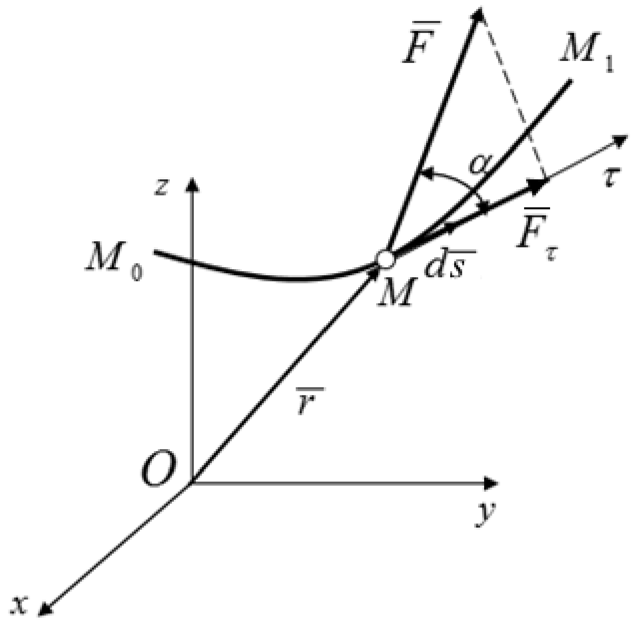


Рис. 36. К определению элементарной работы силы

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая $\overline{F_\tau}$ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая $\overline{F_\tau}$ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

2. В векторной форме

Из кинематики точки известно, что $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$; $v = |\overline{v}| = \frac{dS}{dt}$. Следовательно, $dS = |d\overline{r}| = vdt$. Тогда элементарная работа равна

$$dA = F \cdot |d\overline{r}| cos\alpha = \overline{F} \cdot d\overline{r}.$$

<u>*Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.*</u>

Возможно также другое вычисление элементарной работы в векторной форме.

Так как $d\overline{r} = \overline{v} \cdot dt,$ то $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt = \overline{F} \cdot dt \cdot \overline{v},$ где первые два сомножителя есть элементарный импульс силы, приложенный в точке, а $\overline{v}$ - ее скорость.

<u>*Элементарная работа равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.*</u>

Предлагаемая формула особенно удобна для вычисления работы силы, когда сила известна как функция времени.

3. В аналитической форме

Если силу $\overline{F}$ и радиус-вектор $\overline{r}$ разложить по осям координат, то получим

$$\overline{F} = F_x \cdot \overline{i} + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k};$$
$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Из последней формулы имеем $d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$. Подставляя в формулу $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}$ значения $\overline{F}$ и $d\overline{r}$, получим выражение элементарной работы силы в аналитической форме:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы на конечном перемещении (конечная работа силы).

Работа силы на конечном перемещении равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы силы.

В случае криволинейного перемещения точки M (рис. 36) на участке M_0M_1 конечная работа силы в скалярной форме будет равна

$$A_{M_1M_0} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds\,.$$

Другие способы определения конечной работы представлены в табл. 2.

Если величина $\overline{F_\tau}$ постоянна, то конечная работа будет равна

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot S_1,$$

где S_1 – перемещение точки приложения силы от точки M_0 до точки M_1.

Единица работы в системе СИ – 1 джоуль (1 Дж = 1Н·м).

Таблица 2

Способы определения элементарной и конечной работы силы

Способ	Элементарная работа	Конечная работа
Скалярный	$F_\tau ds$, или $F\cos(\alpha)ds$	$\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds$, или $\int_{(M_0)}^{(M_1)} F\cos(\alpha)ds$
Векторный	$\vec{F} \cdot d\vec{r}$, или $\overline{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{dt} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$	$\int_{(M_0)}^{(M_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, или $\int_{(t_0)}^{(t_1)} \vec{F} \cdot dt \cdot \vec{v}$
Аналитический	$F_X dx + F_Y dy + F_Z dz$	$\int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$

Принятые обозначения:

$\overline{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы;

$d\overline{r}$ - его бесконечно малое приращение;

dx, dy, dz - проекции вектора $d\overline{r}$;

F_X, F_Y, F_Z - проекции силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ на оси координат x, y, z;

ds – модуль элементарного перемещения точки приложения силы.

Свойства работы сил

1. *Работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении.*

Рассмотрим доказательство этого свойства на примере элементарной работы равнодействующей силы.

Если сила $\overline{R}$ является равнодействующей силой системы сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots \overline{F}_n)$, приложенных к рассматриваемой точке, то она выражается геометрической суммой этих сил. Тогда по определению элементарной работы силы получим $\overline{R} \cdot d\overline{r} = (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots \overline{F}_n) \cdot d\overline{r} = \overline{F}_1 \cdot d\overline{r} + \overline{F}_2 \cdot d\overline{r} + \cdots + \overline{F}_n \cdot d\overline{r}$.

Первое свойство доказано.

2. *Работа силы на конечном перемещении равна сумме работ этой силы на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.*

Доказательство этого свойства следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим. Единицей полной работы, так же как и элементарной, в СИ является джоуль.

Мощность

Мощность силы или работоспособность какого-либо источника силы оценивается той работой, которую он может совершить в единицу времени, т.е. мощность равна

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau \cdot v.$$

Таким образом, *мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки.*

Из формулы $W = F_\tau \cdot v$, очевидно, что, чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то ее можно получить только при малой скорости. Например, когда железнодорожному локомотиву надо увеличить силу тяги, то для этого надо уменьшить скорость поезда. Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт: 1Вт = 1Дж/с.

2.4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Наряду с количеством движения существует другая мера механического движения – кинетическая энергия.

<u>*Кинетическая энергия материальной точки*</u> T определяется как половина произведения массы m материальной точки на квадрат v^2 её скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Рассмотрим материальную точку, которая движется под действием приложенных к ней сил. Согласно основному уравнению динамики:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F_k}.$$

Спроецируем обе части равенства на касательную (рис. 37):

$$m \cdot a_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

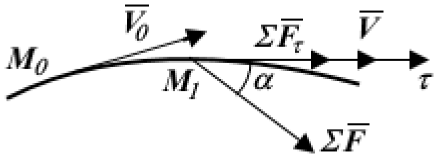


Рис. 37. К выводу теоремы об изменении кинетической энергии точки

Произведем замену переменной $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dt}\dfrac{ds}{ds} = V\dfrac{dV}{ds}$, тогда уравнение примет вид $mV\dfrac{dV}{ds} = \sum F_{k\tau}$.

Систему сил, действующих на точку М, заменим равнодействующей:

$$\overline{R} = \sum \overline{F_k}, \text{ или } R_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

Разделим переменные полученного дифференциального уравнения

$$mVdV = R_\tau ds.$$

Внесем m под знак дифференциала:

$$mVdV = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Учтем, что $R_\tau ds$ - элементарная работа, тогда

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Полученная формула выражает *теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме*: <u>*дифференциал*</u>

кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

Если обе части равенства $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$ разделить на dt и учесть, что $\frac{dA}{dt} = W$ – мощность, то теорему можно также выразить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = W.$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке. Интегрируя обе части уравнения $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$ в пределах, соответствующих начальному и конечному положению точки (см. рис. 37), получаем *теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме*:

$$m\frac{V_1^2}{2} - m\frac{V_0^2}{2} = A,$$

где A – работа силы на конечном перемещении точки ее приложения.

Полученная формула выражает теорему об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме: *изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно работе силы, действующей на точку сил на этом же перемещении.*

Пример. На наклонной шероховатой плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тело. Определить, какую скорость приобретет тело, пройдя 2 м от начала движения, если коэффициент трения скольжения равен f = 0,1 (рис. 38).

Рис. 38. Иллюстрация к примеру

Решение. Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии, рассматривая тело как материальную точку:

$$m\frac{V_1^2}{2} - m\frac{V_0^2}{2} = \sum A,$$

где $m = P/g$, $V_0 = 0$.

Выразим работы всех сил, действующих на тело, обозначив перемещение тела как l:

$$\Sigma A = A_P + A_{TP},$$

где $A_P = P \cdot \sin 30^\circ \cdot l$ – работа силы тяжести;

$A_{TP} = -F_{TP} \cdot l = -f \cdot P \cdot \cos 30^\circ \cdot l$ – работа силы трения.

После подстановки полученных выражений исходная формула примет вид: $\frac{P}{g}\frac{V^2}{2} = P\left(\sin 30^0 - f\cos 30^0\right)\cdot l$,

откуда

$$V_1^2 = 2g\left(\sin 30^0 - f\cos 30^0\right)\cdot l .$$

Подставим численные значения и получим:

$$V_1^2 = 2\cdot 9{,}8\left(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}866\right)\cdot 2 = 19{,}6\cdot 0{,}41434\cdot 2 = 16{,}2 .$$

Окончательно скорость тела равна

$$V_1 = \sqrt{16{,}2} = 4.02 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $V_1 = 4{,}02$ (м/с).

3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Введение в динамику механической системы

3.1.1. Механическая система материальных точек. Свойства внутренних сил системы

Механической системой материальных точек (тел) называется такая её совокупность, при которой положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения или движения все остальных точек (тел).

Существование механической системы обусловлено наличием сил взаимодействия между точками (телами) системы. Силы взаимодействия между точками (телами) данной системы называются внутренними силами и обозначаются $\overline{F}^i$. А силы взаимодействия между точками данной системы и точками или телами, не входящими в рассматриваемую систему, называются внешними силами и обозначаются $\overline{F}^e$.

Свойства внутренних сил системы:

1. *Главный вектор внутренних сил системы равен нулю*.

По третьему закону динамики две любые материальные точки действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$, сумма которых равна нулю. Аналогичный результат будет получен для любой пары точек, то есть

$$\sum \overline{F}_k^i = \overline{R}^i = 0 .$$

2. *Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю*.

Рассмотрим две произвольные точки A_1 и A_2, действующие друг на друга с силами $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$. Проведем через эти точки и центр O плоскость $П$ (рис. 39).

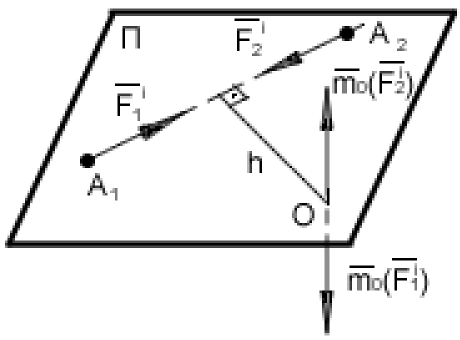


Рис. 39. Иллюстрация свойств внутренних сил системы

Определим модули векторных моментов сил относительно центра O. Так как $\left|\overline{F}_1^i\right| = \left|\overline{F}_2^i\right|$, то, очевидно, что $\left|\overline{F}_1^i\right| \cdot h = \left|\overline{F}_2^i\right| \cdot h$, поэтому $\left|\overline{m}_0\left(\overline{F}_1^i\right)\right| = \left|\overline{m}_0\left(\overline{F}_2^i\right)\right|$.

Векторы моментов сил $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$ перпендикулярны плоскости *П*, приложены к центру *O* и направлены в противоположные стороны. Следовательно, $\overline{m}_0\left(\overline{F}_1^i\right)+\overline{m}_0\left(\overline{F}_2^i\right)=0$. Аналогичный результат будет получен при рассмотрении любых двух точек системы. Таким образом, $\sum\overline{m}_0\left(\overline{F}_K^i\right)=\overline{M}_0^i=0$.

3.1.2. Масса системы. Центр масс системы

Для системы, состоящей из материальных точек (тел), масса системы равна арифметической сумме масс всех точек системы $M = \Sigma m_k$. В однородном поле сил тяжести, для которого ускорения свободного падения тел одинаковы g = 9,81 м/с^2, вес тела пропорционален его массе $P = Mg$. О распределении массы системы можно судить по положению его центра масс, координаты которого определяются по формулам:

$$x_C=\frac{\sum m_k x_k}{M},\ y_C=\frac{\sum m_k y_k}{M},\ z_C=\frac{\sum m_k z_k}{M};$$

в векторной форме положение центра масс определяется его радиусом-вектором $\overline{r}_C=\dfrac{\sum m_k\overline{r}_k}{M}$.

3.1.3. Инерционные характеристики механической системы (тела). Момент инерции твердого тела относительно оси вращения

Ранее рассматривалось такое понятие, как инертность. Количественной мерой инертности механической системы (тела), движущейся поступательно, является масса.

При вращательном движении тела (системы) инертность определяется физической величиной, называемой *моментом инерции*.

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или *осевым моментом инерции)* называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадрат их расстояний до этой оси:

$$J_z=\sum m_k h_k^2.$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной скалярной, положительной и не равной нулю.

Единица измерения момента инерции в системе СИ: $1\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Если расстояния точек до осей координат выразить через координаты $x_k,\ y_k,\ z_k$ этих точек, то для вычисления моментов инерции относительно осей координат можно пользоваться следующими формулами:

$$J_x = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right),$$
$$J_y = \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2 \right),$$
$$J_z = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right).$$

На предлагаемой схеме (рис. 40) квадрат расстояния точки до оси *Ox* можно представить в виде: $h_{kx}^2 = y_k^2 + z_k^2$.

В технических расчетах для определения моментов инерции тел, имеющих сложную конфигурацию, используют *радиусы инерции* этих тел. Радиусом инерции тела ρ_z называется линейная величина, равная расстоянию от точки, масса которой равна массе тела и момент инерции которой относительно данной оси равен моменту инерции всего тела относительно этой же оси:

$$J_z = m\rho_z^2,$$

где m – масса тела.

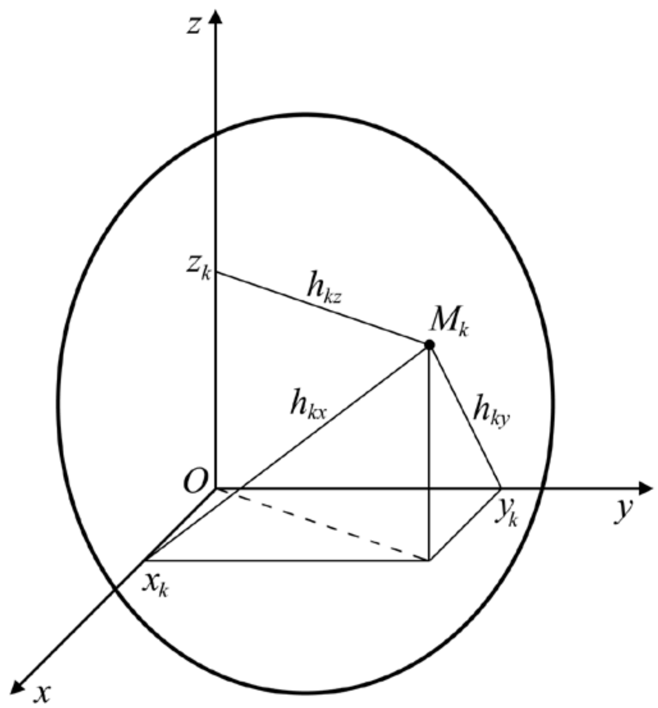


Рис. 40. Моменты инерции тела относительно координатных осей

Найдем моменты инерции некоторых однородных тел.

1. *Тонкий однородный стержень длиной l и массой M.*

Направим вдоль оси стержня ось *Ax* (рис. 41). Для любого элементарного отрезка стержни длиной *dx* расстояние до точки *A* равно *x*, а масса $dm=\rho \cdot dx$, где $\rho = \dfrac{M}{l}$ - масса единицы длины стержня. Следовательно

$$J_y = \int_0^l \rho x^2 dx = \rho \frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{M}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}.$$

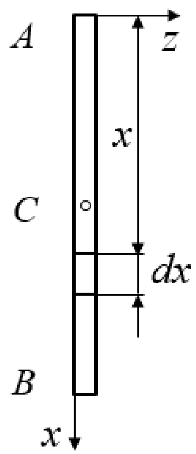


Рис. 41. Тонкий однородный стержень

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой M.

Момент инерции кольца относительно оси *Oz*, перпендикулярной плоскости кольца (рис. 42).

$$J_{cz} = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum \Delta m_k R^2 = R^2 \sum \Delta m_k = MR^2 .$$

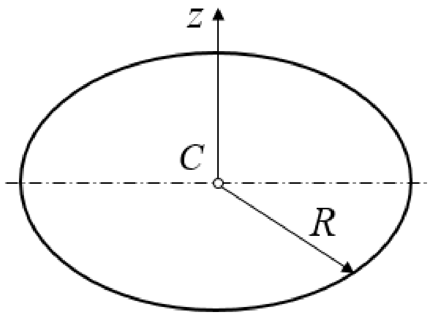


Рис. 42. Тонкое однородное кольцо

3. *Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой M.*

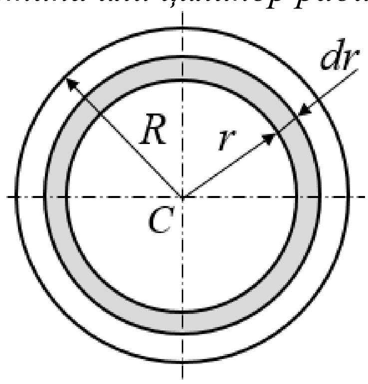


Рис. 43. Круглая однородная пластина или цилиндр

Выделим в пластине (рис. 43) элементарное кольцо радиусом r и толщиной dr. Площадь этого кольца $dS=2\pi rdr$, масса кольца $dm=\rho dS=\rho 2\pi rdr$, где ρ – масса единицы площади кольца ($\rho = \dfrac{M}{\pi r^2}$). Согласно полученной ранее формуле момент инерции у выделенного кольца равен $dJ_{cz} = r^2 dm = 2\pi\rho r^3 dr$ (ось *z* перпендикулярна плоскости кольца).

Для всей пластины:

$$J_{cz} = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = 2\pi\rho\frac{R^4}{4}, \text{ так как } \rho = \frac{M}{\pi r^2},$$

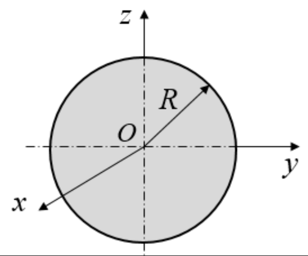
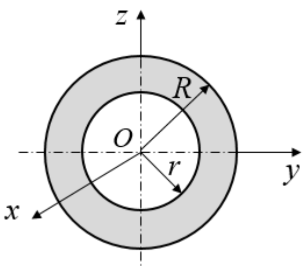
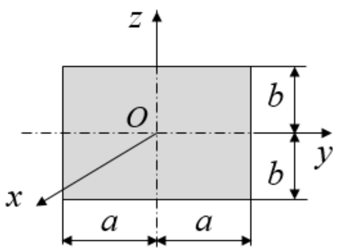
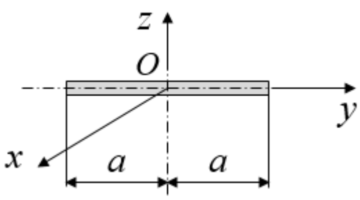
$$J_{cz} = 2\pi\frac{MR^4}{4\pi R^2} = \frac{MR^2}{2}.$$

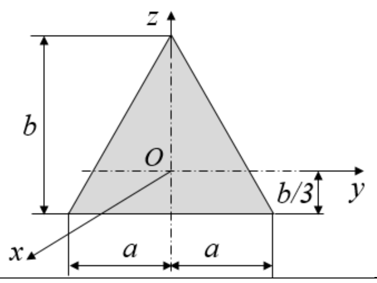
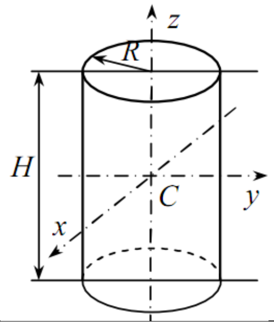
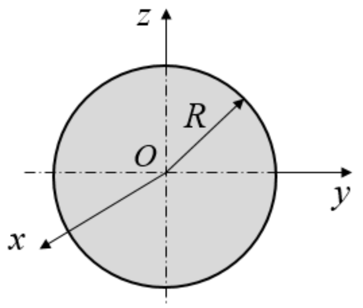
Такая же формула получится при определении момента инерции однородного круглого цилиндра массой *M* и радиусом *R*.

Формулы для расчета осевых моментов инерции некоторых однородных тел приведены в табл. **3**.

Таблица 3

Осевые моменты инерции однородных пластинок

№	**Наименование**	**Схема**	J_x	J_y	J_z
1	Круглая однородная пластина (или цилиндр)		$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
2	Круглое однородное кольцо		$\frac{m\left(R+r\right)^2}{2}$	$\frac{m\left(R+r\right)^2}{4}$	$\frac{m\left(R+r\right)^2}{4}$
3	Прямоуголная однородная пластина		$\frac{m\left(a^2+b^2\right)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$
4	Однородный стержень		$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$

5	Треугольная пластина		$\dfrac{m\left(3a^2+b^2\right)}{18}$	$\dfrac{mb^2}{18}$	$\dfrac{ma^2}{6}$
6	Однородный цилиндр		$m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right)$	$m\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right)$	$\dfrac{mR^2}{2}$
7	Однородный шар		$\dfrac{2}{5}mR^2$	$\dfrac{2}{5}mR^2$	$\dfrac{2}{5}mR^2$

Примечание: R – радиус; m - масса тела;

3.1.4. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

В инженерных расчетах в некоторых случаях требуется определить моменты инерции твердых тел относительно осей, не проходящих через их центры масс и не являющихся осями симметрии. В этих случаях можно воспользоваться теоремой о моменте инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера).

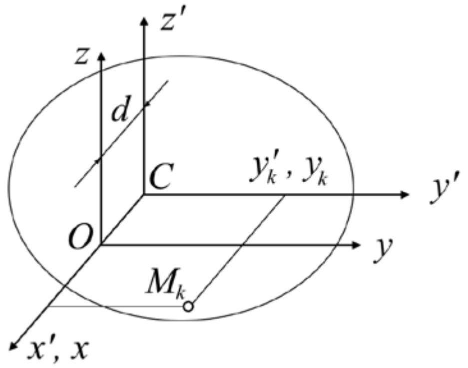


Рис. 44. К доказательству теоремы Гюйгенса-Штейнера

Свяжем некоторое тело с системой координат $Cx'y'z'$, проходящей через его центр масс (рис. 44).

Момент инерции тела относительно оси Cz' равен:

$$J_{Cz'} = \sum m_k \left((x'_k)^2 + \left(y'_k\right)^2\right),$$

где: x'_k, y'_k – координата точки тела относительно выбранной системы координат.

На оси x' выберем произвольную точку O на расстоянии d от точки C. Построим оси Oz и Oy, параллельные осям Cz' и Cy'. Координаты точки M_k в новой системе координат:

$$x_k = x'_k - d,\; y_k = y'_k.$$

Определим момент инерции тела относительно оси Oz:

$$J_{Oz} = \sum m_k((x_k)^2 + (y_k)^2) = \sum m_k \left[(x'_k - d)^2 + \left(y'_k\right)^2\right] =$$
$$= \sum m_k (x'_k)^2 - 2\sum m_k x'_k \cdot d + \sum m_k d^2 + \sum m_k \left(y'_k\right)^2.$$

В данной формуле выражение $2\sum m_k x'_k \cdot d$ будет равно нулю, так как $\frac{\sum m_k x'_k}{M} = x_C = 0$ (координата центра масс тела относительно его центра).

Преобразуем выражение $\sum m_k d^2$. По свойству аддитивности:

$$\sum m_k d^2 = \left(\sum m_k\right) d^2 = Md^2.$$

Тогда

$$J_{Oz} = \sum m_k (x'_k)^2 + \sum m_k \left(y'_k\right)^2 + Md^2.$$

Так как сумма первого и второго слагаемых есть $J_{Cz'}$, то окончательно получим:

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2.$$

Данная формула есть математическое выражение теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера): *момент инерции твердого тела относительно данной оси равен моменту инерции этого тела относительно оси ей параллельной, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями*.

Рассмотрим примеры определения моментов инерции тела относительно осей.

Пример 1. Определить момент инерции тонкого стержня относительно оси Cz, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс (рис. 41).

Решение. Проведем через конец A стержня ось Ax. Тогда по теореме Гюйгенса получим, что

$$J_{Az} = J_{Cz'} + md^2, \text{ или } J_{Cz'} = J_{Az} - md^2.$$

В данном случае $d = l/2$, где l – длина стержня, а величина $J_{Az} = \dfrac{ml^2}{3}$.

Следовательно, $J_{Cz'} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}$.

Ответ: $J_{Cz'} = \frac{ml^2}{12}$.

Пример 2. Определить момент инерции цилиндра относительно оси Az_1, проходящей через его образующую (рис. 45).

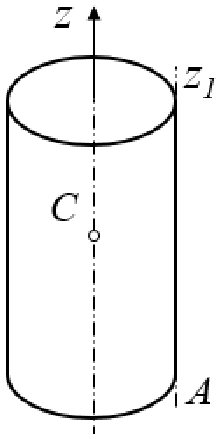


Рис. 45. К определению момента инерции цилиндра

Решение. По теореме Гюйгенса получим, что $J_{Az_1} = J_{Cz} + md^2$. В данном случае расстояние между осями равно $d = R$, а величина $J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}$. Подставим эти значения в выражение J_{Az1} и получим, что $J_{Az_1} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$.

Ответ: $J_{Az_1} = \frac{3mR^2}{2}$.

3.2. Общие теоремы динамики механической системы

При исследовании движения механической системы, состоящей из множества точек, нет необходимости исследовать движение каждой точки в отдельности. Во многих случаях достаточно определить некоторые суммарные характеристики движения системы. Эти суммарные характеристики движения можно определить с помощью общих теорем динамики системы.

3.2.1. Теорема о движении центра масс системы

Пусть система состоит из n материальных точек и к каждой точке системы приложены внешние и внутренние силы. Составим для какой-либо точки системы уравнение, выражающие второй закон динамики:

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i .$$

Запишем подобные уравнения для всех точек системы и сложим их почленно, получим:

$\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i$ – дифференциальное уравнение движения механической системы.

Так как $\sum \overline{F}_k^i = 0$, то $\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e$.

Преобразуем левую часть уравнения.

Так как $\overline{a}_k = \dfrac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2}$, $\sum m_k \dfrac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \dfrac{d^2}{dt^2} \sum m_k \overline{r}_k$, $\sum m_k \overline{r}_k = M \overline{r}_c$,

тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M \overline{r}_c\right) = M \frac{d^2 \overline{r}_c}{dt^2} = M \overline{a}_c , \; M \overline{a}_c = \sum \overline{F}_k^e .$$

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс получим следующие следствия:

1. *Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то центр масс находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.*

Уравнение $M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$ можно представить как $M\bar{a}_C = \bar{R}_e$. Если $\bar{R}_e = 0$, то $\bar{a}_C = 0$, то есть $\bar{V}_C = const$. Заметим, что если начальная скорость центра масс была равна нулю, то центр масс находится в покое, в противном случае центр масс будет двигаться прямолинейно и равномерно с начальной скоростью.

2. *Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось есть величина постоянная.*

Если $R_x^e = 0$, то $M\frac{dV_{cx}}{dt} = \bar{R}_e$, то есть $V_{cx} = const$.

Если при этом $V_{cx0} = 0$, то $\dot{x}_c = 0$, $x_c = const$, то есть координата x центра масс остается постоянной.

Примерами, демонстрирующими закон сохранения движения центра масс системы, являются движение центра масс Солнечной системы, движение автомобиля по горизонтальной плоскости, движение эллиптического маятника, которое мы рассмотрим подробнее.

Пример. Дана механическая система, состоящая из ползуна *1* весом $\bar{G}$ и точечного груза 2 весом $\bar{P}$, соединенные невесомым стержнем (рис. 46). Сравните горизонтальные координаты центров масс механической системы, перемещающейся без начальной скорости, в положениях *а*) и *б*).

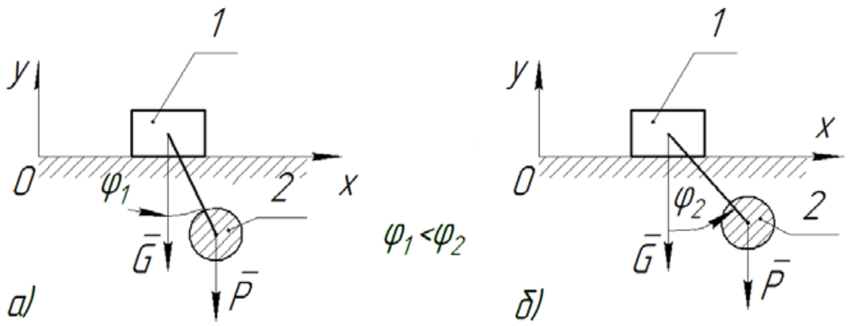


Рис. 46. Иллюстрация к примеру

Решение. Так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, то скорость центра масс – величина постоянная. По условию задачи $V_{c0} = 0$, следовательно, $x_c = const$ (центр масс системы в этом случае вдоль оси x перемещаться не будет).

3.2.2. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы $\overline{Q}$ называют векторную сумму количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \sum m_k \overline{V}_k .$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\sum m_k \overline{V}_k = \sum m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum\left(m_k \overline{r}_k\right) = \frac{d}{dt}\left(M\overline{r}_c\right) = M\overline{V}_c .$$

Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\overline{Q} = M\overline{V}_c .$$

Количество движения характеризует поступательную часть движения системы.

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид:

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \text{, так как } \sum \bar{F}_k^i = 0 \text{, то}$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e .$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_k \bar{V}_k \text{, так как } \sum m_k \bar{V}_k = \bar{Q},$$

получаем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e .$$

Полученная формула является выражением теоремы об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.*

Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e dt, \; \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k .$$

Полученная формула является выражением теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: *изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

Пример. Подкрановая тележка массой M = 1т (рис. 47) движется по рельсам со скоростью 1 м/с. Определить время торможения тележки, если коэффициент трения колес о рельсы равен f = 0,2. Массой колес пренебречь.

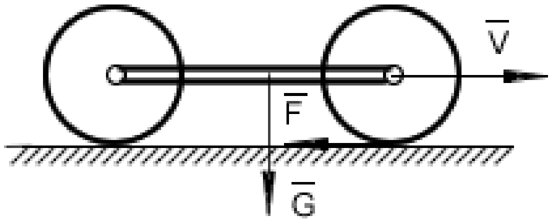


Рис. 47. Иллюстрация к примеру

Решение. Согласно теореме об изменении количества движения системы $\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e$. Количество движения тележки в начале торможения $\bar{Q}_0 = M\bar{V}_0$. Количество движения тележки в конце торможения $\bar{Q}_1 = 0$, так как V_1=0. Поскольку сила трения скольжения является величиной постоянной $F = fN = fMg$, то импульс силы трения скольжения равен $S = -Ft = -fMgt$. Спроецировав исходное уравнение на горизонтальную ось, получим:

$$0 - MV_0 = -fMgt\,,\ t = \frac{V_0}{gf} = \frac{1.0}{9.8 \cdot 0.2} = 0.51\text{с}.$$

Ответ: время торможения тележки t=0.5 (с).

Закон сохранения количества движения

Из теоремы об изменении количества движения получим следующие следствия:

1. *Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы постоянно по величине и направлению.*

Уравнение $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$ можно представить как $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}_e$, если $\bar{R}_e = 0$, то $\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0$, то есть $\bar{Q} = M\bar{V}_C = const.$

2. *Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо оси равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Если $R_x^e = 0$, то $\frac{dQ_x}{dt} = 0$, то есть $Q_x = M \cdot V_{Cx} = const.$

Примерами закона сохранения количества движения являются отдача ружья при выстреле (откат орудия), реактивное движение.

3.2.3. Теорема об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) системы

Главным моментом количества движения системы относительно данного центра называется вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\bar{L}_O = \sum \bar{l}_{ok} = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k\ .$$

Главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом системы) относительно оси вращения называется алгебраическая величина, равная сумме моментов количеств движения точек системы относительно этой оси:

$$L_z = \sum m_z\left(m_k \bar{V}_k\right) K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k).$$

Данное выражение можно преобразовать. Для каждой k-ой точки системы ее линейная скорость равна $V_k = \omega \cdot h_k$, где h_k – расстояние от точки до оси вращения. Тогда кинетический момент вращающегося тела будет равен:

$$L_z = \sum m_k \cdot \omega \cdot h_k^2 = \left(\sum m_k h_k^2\right) \cdot \omega = J_z \cdot \omega\,.$$

Таким образом, $L_z = J_z \cdot \omega$ – кинетический момент тела, вращающегося относительно оси вращения, равен произведению момента инерции относительно оси вращения на угловую скорость тела.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, которые движутся под действием системы внутренних $\overline{F}_k^i$ и внешних $\overline{F}_k^e$ сил. Выберем произвольный центр O и запишем уравнение, выражающее теорему об изменении момента количества движения для какой-либо точки системы:

$$\frac{d\bar{l}_{Ok}}{dt} = \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^e\right) + \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^i\right).$$

Запишем подобные уравнения для всех точек системы и сложим их почленно, получим:

$$\sum\frac{d\bar{l}_{Ok}}{dt} = \sum\overline{m}_O\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum\overline{m}_O\left(\overline{F}_k^i\right).$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sum\frac{d\bar{l}_{Ok}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum\bar{l}_{Ok} = \frac{d\overline{L}_O}{dt}.$$

Так как $\sum\overline{m}_O\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$ (по свойству внутренних сил системы), то получим:

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum\overline{m}_O\left(\overline{F}_k^e\right), \text{ или } \frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^e.$$

Полученное уравнение математически описывает теорему об изменении кинетического момента системы относительно некоторого центра: *производная по времени от кинетического момента системы, взятого относительно некоторого неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил системы относительно того же центра*.

Спроецировав последнее векторное равенство на некоторую неподвижную ось, получим выражение теоремы об изменении кинетического момента системы относительно этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e.$$

Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторой неподвижной оси равна главному моменту всех действующих на систему внешних сил относительно этой же оси.

Пример. Часовой балансир может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести O, имея относительно этой оси момент инерции J (рис. 48). Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов. При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен c. Определить угол поворота балансира, при котором произойдет его остановка. В начальный момент при отсутствии сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость ω_0.

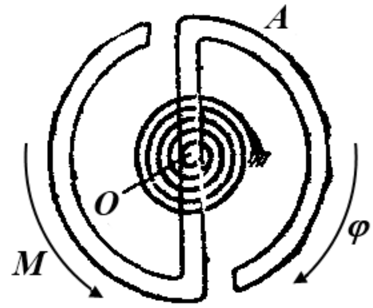


Рис. 48. Расчетная схема к примеру

Решение. Согласно тероеме об изменении кинетического момента системы

$$J\frac{d\omega}{dt} = M,$$

где M – момент сил упругости пружины, равный $M = -c\cdot\varphi$ $M = c\varphi$.

Произведем замену переменной:

$$J\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = -c\cdot\varphi,\; J\frac{d\varphi}{dt}\cdot d\omega = -c\cdot\varphi\cdot d\varphi,\; J\cdot\omega\cdot d\omega = -c\cdot\varphi\cdot d\varphi.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$J\cdot\frac{\omega^2}{2} = -c\cdot\frac{\varphi^2}{2} + C_1.$$

Из начальных условий находим постоянную интегрирования:

при $\varphi_0 = 0$, $\omega = \omega_0$, отсюда $C_1 = J\cdot\frac{\omega_0^2}{2}$.

Подставим значение C_1 в предыдущее уравнение:

$$J\cdot\omega^2 = -c\cdot\varphi^2 + J\cdot\omega_0^2.$$

При остановке балансира $\omega = 0$

$$J\cdot\omega_0^2 = c\cdot\varphi^2 \text{, отсюда}$$

$$\varphi = \omega_0\cdot\sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Ответ: балансир остановится при повороте на угол $\varphi = k\omega_0$.

Закон сохранения кинетического момента системы

Из теоремы об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) системы получим следующие следствия:

1. *Если сумма моментов относительно данного центра O всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно данного центра O будет численно и по направлению постоянен.*

Если $\bar{M}_O^e = 0$, то $\frac{d\bar{L}_O}{dt} = 0$, то есть $\bar{L}_O = const$.

2. *Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Если $M_z^e = 0$, то $\frac{dL_z}{dt} = 0$, то есть $L_z = const$.

Примерами закона сохранения кинетического момента системы являются реактивный момент винта, раскачивание качелей.

3.2.4. Кинетическая энергия механической системы

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:

$$T = \sum T_k = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является величиной скалярной, положительной, и потому не зависящей от направлений движения частей системы. Она характеризует и поступательное, и вращательное движение системы.

Для вычисления кинетической энергии механической системы применяется *теорема Кёнига*.

Дана механическая система, состоящая из n материальных точек (рис. 49). Выберем неподвижную систему отсчета $Ox_1y_1z_1$, в качестве подвижной системы отсчета возьмем систему осей $Cxyz$, проведенных через центр масс системы параллельно неподвижным осям и движущихся с центром масс поступательно.

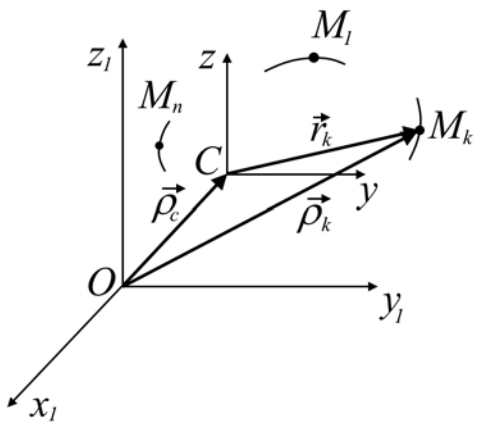


Рис. 49. К доказательству теоремы Кёнига

Тогда абсолютное движение исследуемой механической системы точек можно рассматривать как совокупность поступательного движения системы вместе с центром масс (переносное движение) и относительное движение системы по отношению к центру масс.

Из рис. 49 следует, что для любого момента времени положение любой точки M_k относительно неподвижной системы координат можно определить по формуле:

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_c + \bar{r}_k,$$

где $\bar{\rho}_c$ – радиус-вектор начала отсчета подвижной системы координат относительно неподвижной, $\bar{r}_k$ – радиус-вектор, определяющий положение точки M_k в подвижной системе координат.

Продифференцировав данное уравнение по времени, получим:

$$\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_c}{dt} + \frac{\bar{r}_k}{dt}, \text{ или } \bar{V}_k = \bar{V}_c + \bar{V}_{kr}.$$

Абсолютная скорость любой точки M_k механической системы равна геометрической сумме скорости центра масс и относительной скорости этой точки в ее движении относительно центра масс.

Кинетическая энергия механической системы равна:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2.$$

Преобразуем данное выражение, используя выражение абсолютной скорости k-ой точки системы, а также свойство векторной алгебры:

$$\bar{V}_k \cdot \bar{V}_k = V_k \cdot V_k \cdot \cos\left(\widehat{\bar{V}_k, \bar{V}_k}\right) = V_k^2:$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k \cdot (\bar{V}_c + \bar{V}_{kr})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_k \overline{V_c^2} + \sum m_k \bar{V}_c \cdot \bar{V}_{kr} + \frac{1}{2}\sum m_k \overline{V_{kr}^2} =$$

$$\frac{V_C^2}{2}\sum m_k + \bar{V}_c \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} + \frac{1}{2}\sum m_k \overline{V_{kr}^2}$$

Первое слагаемое в формуле по свойству аддитивности будет равно:

$$\frac{V_C^2}{2}\sum m_k = \frac{1}{2} M V_C^2,$$

где M – масса системы, V_c - скорость центра масс.

Выражение $\bar{V}_c \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}$ равно нулю, так как

$$\bar{V}_c \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{V}_c \cdot \frac{d}{dt}\sum m_k \cdot \bar{r}_k = \bar{V}_c \cdot \frac{d}{dt}\sum M \cdot \bar{r}_k = \bar{V}_c \cdot 0 = 0$$

(координата центра масс системы относительно точки C равна нулю).

Наконец, третье слагаемое $\frac{1}{2}\sum m_k \overline{V_{kr}^2}$ – кинетическая энергия рассматриваемой механической системы в ее относительном движении относительно центра масс ($T_k^{(r)}$).

Окончательно, получим:

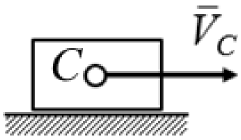
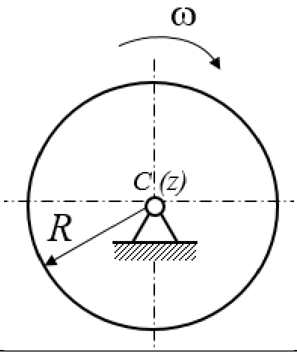
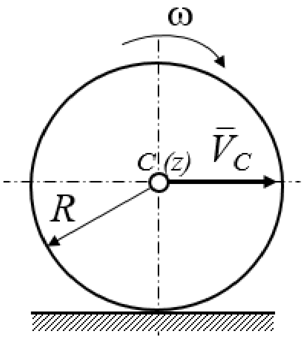
$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + T_k^{(r)}$ – данное равенство выражает <u>*теорему Кенига*</u>: *кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы,* *и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении относительно центра масс.*

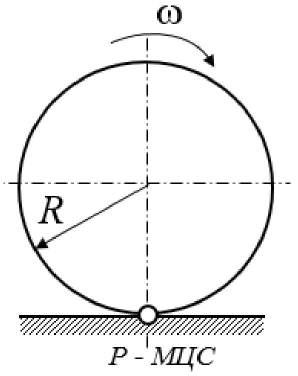
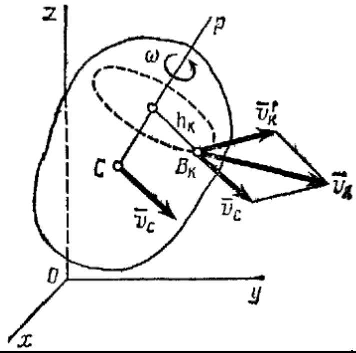
В тех случаях, когда механическая система состоит из нескольких твердых тел, то ее кинетическая энергия определяется как сумма кинетических энергий этих тел.

Частные случаи определения кинетической энергии твердого тела массой m в разных случаях его движения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Определение кинетической энергии твердого тела

№	**Схема**	**Формула**	**Определение**
1	**Поступательное движение**		
		$T_{пост} = \dfrac{mv^2}{2}$, где m – масса тела, v - скорость любой точки тела.	*Кинетическая энергия тела равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.*
2	**Вращательное движение**		
		$T_{вращ} = \dfrac{J_z\omega^2}{2}$, где J_z - момент инерции тела относительно оси вращения z, ω - угловая скорость вращения тела.	*Кинетическая энергия тела равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.*
3	**Плоскопараллельное (плоское) движение**		
	а) 	$T_{плоск} = \dfrac{mv_c^2}{2} + \dfrac{J_{zc}\omega^2}{2}$, где V_C - скорость центра масс, J_{zc} - момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс C.	*Кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.*

	б) 	$T_{\text{плоск}} = \dfrac{J_P\omega^2}{2}$, где J_P - момент инерции тела относительно оси P, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к неподвижной плоскости.	*Кинетическая энергия тела равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенного центра скоростей на квадрат его угловой скорости.*
	Общий случай движения		
		$T_{\text{общ}} = \dfrac{mv_{\text{c}}^2}{2} + \dfrac{J_{CP}\omega^2}{2}$, где v_{C} - скорость центра масс, J_{CP} - момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс C.	*Кинетическая энергия тела равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.*

Пример. Определение кинетической энергии катящегося колеса

Вычислите кинетическую энергию колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если m – масса колеса и v_c - скорость его центра масс. Колесо считать сплошным однородным диском.

Решение. Так как колесо совершает плоскопараллельное движение, то его кинетическую энергию можно вычислить двумя способами (см. табл. 4) по формулам:

$$\text{а) } T_{\text{плоск}} = \frac{mv_{\text{c}}^2}{2} + \frac{J_{zc}\omega^2}{2}, \text{ б) } T_{\text{плоск}} = \frac{J_P\omega^2}{2},$$

где J_{zc} - момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс C ; J_P - момент инерции тела относительно оси P, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости.

Вариант а): $T_{\text{плоск}} = \dfrac{mv_{\text{c}}^2}{2} + \dfrac{J_{zc}\omega^2}{2}$.

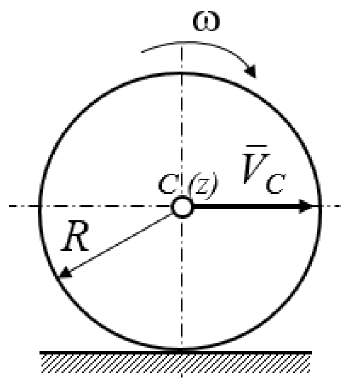


Рис. 50. К определению кинетической энергии колеса (вращение вокруг центра масс)

Момент инерции диска относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости симметрии колеса (рис. 50), равен:

$$J_{Cz} = \frac{mR^2}{2},$$

где R – радиус колеса.

Следовательно,

$$T_{\text{плоск}} = \frac{mv_{\text{c}}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2.$$

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке касания P колеса и неподвижного рельса, поэтому скорость центра масс равна

$$v_{\text{c}} = \omega R,$$

где ω – угловая скорость колеса, которую можно выразить $\omega = \frac{v_C}{R}$.

Тогда формула кинетической энергии колеса примет вид:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{3mv_{\text{c}}^2}{4}.$$

Вариант б):

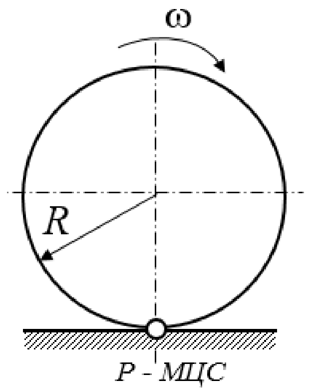


Рис. 51. К определению кинетической энергии колеса (вращение вокруг МЦС)

Плоское движение колеса рассматривается как мгновенное вращательное движение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. 51), поэтому кинетическая энергия колеса будет рассчитываться по формуле:

$$T_{\text{плоск}} = \frac{J_P \omega^2}{2},$$

где J_P - момент инерции тела относительно оси P, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости. Так как оси Cz и P параллельны, то, применив теорему Гюйгенса, получим:

$$J_P = J_{Cz} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}.$$

Учитывая, что скорость центра масс колеса равна $v_{\text{c}} = \omega R$, найдем кинетическую энергию колеса

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3mR^2}{2} \cdot \left(\frac{v_{\text{c}}}{R}\right)^2 = \frac{3mv_{\text{c}}^2}{4}.$$

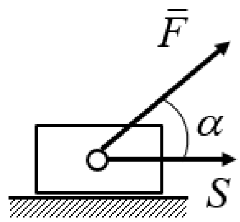
Ответ: $T_{\text{плоск}} = \dfrac{3mv_{\text{c}}^2}{4}$.

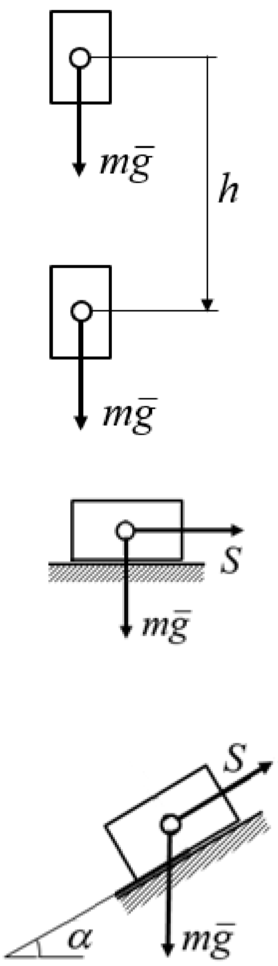
3.2.5. Работа силы, приложенной к твердому телу

Ранее рассматривалось такое понятие как работа силы, рассмотрим различные случаи определения работы сил, приложенных к твердому телу (табл. 5).

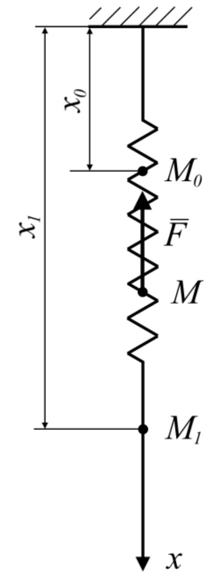
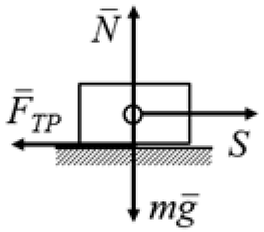
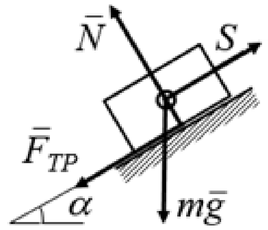
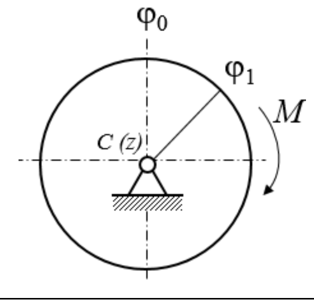
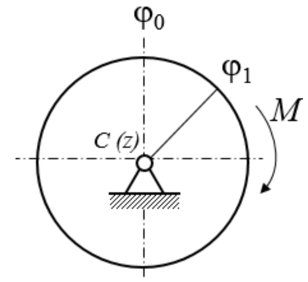
Таблица 5

Определение работы силы в частных случаях

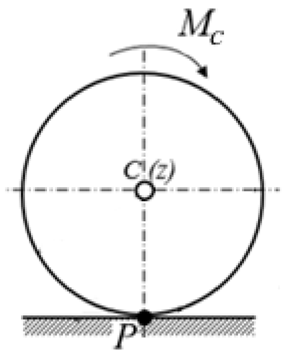
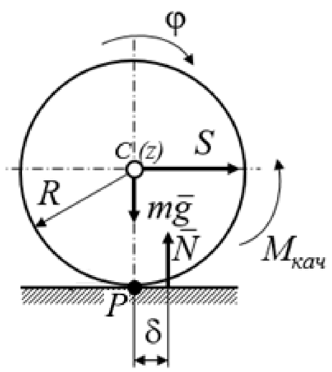
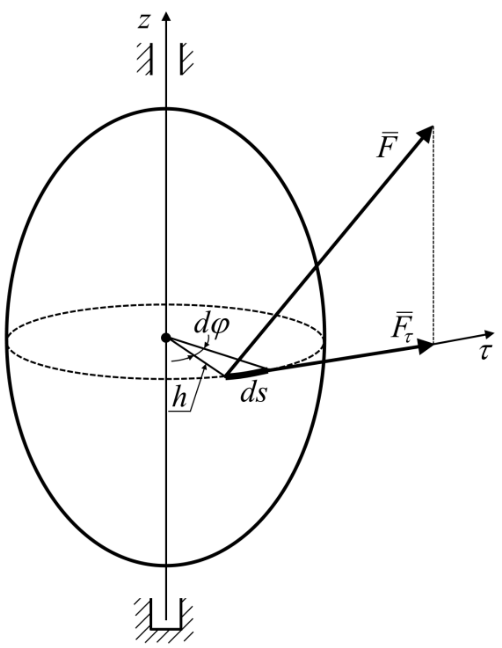
№	Наименование	Схема	Формула для расчета
1	**2**	**3**	**4**
1	***<u>Работа постоянной силы, приложенной к твердому телу при его поступательном движении</u>***		$A = FS\cos(\alpha)$, где α - угол между силой $\vec{F}$ и направлением перемещения точки приложения силы. S – перемещение тела

2	***<u>Работа силы тяжести</u>*** а) тело движется в вертикальной плоскости б) тело движется по горизонтальной плоскости в) тело движется по наклонной плоскости		$A = \pm mgh$, где h – высота вертикального перемещения точки приложения силы тяжести. Знак «+» соответствует перемещению точки приложения силы вниз, знак «-» - вверх. Если тело находится на горизонтальной плоскости, то $A = mg \cdot S \cdot \cos 90^{\circ} = 0$. Если тело находится на наклонной плоскости, то $A = \pm mg \cdot S \cdot \sin \alpha$. Знак «+» соответствует перемещению точки приложения силы вниз, знак «-» - вверх.

Продолжение табл. 5

1	2	3	4
3	***<u>Работа силы упругости</u>***		$A=\frac{c}{2}\left[x_0^2-x_1^2\right]$, где c - коэффициент упругости (жесткости); x_0, x_1 - деформации упругой связи (пружины) в начальном и конечном положениях.
4	***<u>Работа постоянной силы трения скольжения</u>*** $\vec{F}_{тр}$ а) тело движется по горизонтальной плоскости б) тело движется по наклонной плоскости		$A=-fNS$, где N – модуль нормальной реакции, f – коэффициент трения скольжения ($F_{тр}=fN$), S – путь, пройденный точкой приложения силы $\bar{F}_{тр}$. Если тело находится на наклонной плоскости, то $A=-fNS\cos\alpha$, где α – угол наклона плоскости к горизонту.
5	***<u>Работа пары сил с моментом М</u>*** а) M – величина переменная		$A=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(\varphi)d\varphi$, где $\varphi=\varphi_1-\varphi_0$ - угол поворота тела от действия пары сил, φ_0,φ_1 - начальный и конечный угол поворота тела.
	б) M – величина постоянная	 M=const	$A=\pm M\varphi$, где φ - угол поворота тела от действия пары сил. Знак «+» соответствует повороту тела в направлении действия момента M пары сил, знак «-» - в противоположном направлении.

Продолжение табл. 5

1	2	3	4
6	***Работа силы трения скольжения при качении тела без скольжения***		Работа силы трения скольжения при качении тела без скольжения равна нулю.
7	***Работа пары трения качения с постоянным моментом*** $M_{\text{кач}}$		$A = -\delta N\varphi$, где N – модуль нормальной реакции, δ - коэффициент трения качения ($\delta N = M_{\text{кач}}$), φ - угол поворота тела, к которому приложен момент $M_{\text{кач}}$ трения качения.
8	***Сумма работ внутренних сил твердого тела***	-	Сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении равна нулю: $\sum A_k^i = 0$
9	***Работа постоянной силы, приложенной к твердому телу при его вращательном движении***		$А = \pm FR\varphi$, где F – постоянная сила, R – радиус тела, φ - угол его поворота

1. *Работа силы, приложенной к твердому телу при его поступательном движении*

При поступательном движении твердого тела под действием переменной силы $\overline{F}$ работа силы равна:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau dS.$$

Если сила $\overline{F}$ постоянна, то ее работа равна:

$A = F_\tau \cdot S_1 = FScos\alpha$ (табл. 5, случай 1).

2. *Работа силы тяжести*

Пусть точка M перемещается из положения M_0 в положение M_1, а ее сила тяжести равна $\overline{P} = m\overline{g}$ (рис. 52). Проекции $\overline{P}$ на оси координат:

$$P_x = P_y = 0; \;\; P_z = -P.$$

Конечная работа силы $\overline{P}$ на заданном перемещении равна

$$A = \int_{M_0}^{M_1} P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int_{M_0}^{M_1} (-P) dz = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1)$$

или

$$A = mgh,$$

где $h = z_0 - z_1$ – вертикальное перемещение точки приложения силы (табл. 5, случай 2а).

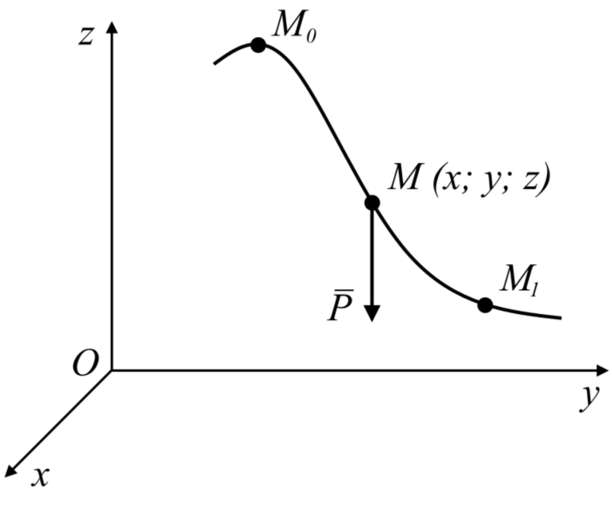


Рис. 52. К определению работы силы тяжести материальной точки

При подъеме точки вертикальное перемещение $z_0 - z_1$ является отрицательным, следовательно, в общем случае работа силы тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ равна $A = \pm Ph$. Из данной формулы следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории между точками M_0 и M_1, и если эти точки совпадают, то работа силы тяжести равна нулю (случай замкнутого пути).

Она равна нулю, если точки M_0 и M_1 лежат в одной и той же горизонтальной плоскости (табл. 5, случай 2б).

3. *Работа силы упругости пружины*

Рассмотрим пружину, конец которой A закреплен неподвижно (табл. 5, случай 3). При растяжении пружины в ней возникает сила упругости, которая по закону Гука, будет равна $F = -cx$, где c – жесткость пружины, x – ее удлинение. Работа, совершаемая силой упругости пружины при ее перемещении из точки M_0 в точку M_1, будет равна $A = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz$, где $F_x = -cx;\ F_y = F_z = 0.$ Тогда

$$A = \int_{M_1}^{M_0} -cxdx = -c\int_{x_0}^{x_1} xdx = \frac{c(x_0^2 - x_1^2)}{2},$$

x_0 – начальное удлинение пружины;

x_1 – ее конечное удлинение.

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

При перемещении из положения, где $x_0 = 0$ (пружина не деформирована) в любое положение с деформацией x, работа силы упругости равна $A = -\frac{c}{2}x^2$.

Работа силы упругости на перемещение из состояния равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации. Из формул, определяющих работу силы упругости, следует, что работа силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю.

4. *Работа постоянной силы трения скольжения*

Пусть точка (или тело) движется по какой-либо шероховатой поверхности (или по кривой). Сила трения $F_{тр}$ будет равна $F_{тр} = fN$, где f – коэффициент трения, а N – нормальная реакция поверхности. Направление силы трения противоположно перемещению точки (тела), а ее работа равна:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_{тр} dS cos180° = -\int_{M_0}^{M_1} fNdS = -fNS.$$

Эта формула справедлива, если точка (тело) перемещается в горизонтальной плоскости (табл. 5, случай 4а).

Если же объект исследования перемещается по наклонной плоскости (табл. 5, случай 4б), то работа $F_{тр}$ определяется следующим образом.

Спроецируем основное уравнение динамики ($m\bar{a} = \sum \overline{F_k}$) на нормаль, проходящую через вектор $\overline{N}$, уравнение примет вид:

$$0 = N - mgcos\alpha,$$

отсюда найдем модуль нормальной реакции

$$N = mgcos\alpha.$$

Тогда модуль силы трения равен

$$F_{тр} = fN = fmgcos\alpha,$$

где α – угол наклона плоскости к горизонту.

Работа силы трения скольжения равна $A = -fNS = -fmgScos\alpha$.

5. *Работа силы, приложенной к твердому телу при его вращательном движении*

Элементарная работа силы $\overline{F}$ равна $dA = F_\tau dS = Fhd\varphi$, т.к. $dS = hd\varphi$, где h – расстояние от точки приложения силы до оси вращения, $d\varphi$ - элементарный угол поворота тела (табл. 5, случай 9). Произведение Fh есть момент силы $\overline{F}$ относительно оси z, т.е. $M_z = F_\tau \cdot h$.

Тогда $dA = M_z d\varphi$, а конечная работа равна $A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi$.

Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.

В частном случае, если момент силы относительно оси вращения является постоянным, т.е. $M_z(\overline{F}) = const$, то работу определяют по формуле:

$$A = M_z \cdot \varphi,$$

где φ - угол поворота тела, на котором вычисляют работу силы.

Мощность силы, приложенной к вращающемуся относительно неподвижной оси телу равна

$W = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega$ - произведению момента силы относительно оси вращения тела на угловую скорость тела.

6. *Работа пары сил с моментом М*

При вычислении работы в данном случае возможны следующие варианты:

а) Момент пары сил величина переменная (табл. 5, случай 5а).

Тогда

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(\varphi)d\varphi.$$

где $M(\varphi)$ – закон изменения момента пары в зависимости от угла поворота твердого тела.

φ - угол поворота тела.

φ_0, φ_1 –начальное и конечное значения угла поворота тела.

б) Момент пары сил величина постоянная (табл. 5, случай 5б).

В этом случае работа равна

$$A = \pm M\varphi.$$

Работа пары сил с постоянным моментом, приложенной к вращающемуся телу, равна взятому с соответствующим знаком произведению модуля момента пары сил на угол поворота тела.

Если направление момента пары сил совпадает с направлением вращения тела, то работа будет величиной положительной.

Если направление момента пары сил не совпадает с направлением вращения тела, то работа будет отрицательной.

7. *Работа силы трения скольжения при качении тела без скольжения равна 0*

Рассмотрим на примере табл. 5, случай 6. Колесо катится без скольжения. Работа силы трения $\overline{F_{тр}}$ равна нулю, т.к. эта сила приложена в точке P – мгновенном центре скоростей, элементарное перемещение которой равно нулю. $dr_P = v_P dt = 0$ (т.к. скорость v_P равна нулю).

8. *Работа момента сил сопротивления качению (работа пары трения качения)*

При качении колеса массой m без скольжения на прямолинейном неидеальном участке пути (табл. 5, случай 7) линия действия нормальной реакции $\overline{N}$ смещается, образуя с силой тяжести $\overline{mg}$ пару сил, момент которой называется моментом трения качения: $M_{кач} = \delta \cdot N$.

Коэффициент δ - это расстояние между линиями действия сил $\overline{N}$ и $\overline{mg}$. Дадим центру тяжести C элементарное перемещение δS_C, при этом колесо повернется на элементарный угол $d\varphi$. При качении без скольжения мгновенный центр скоростей находится в точке P касания колеса с поверхностью качения, поэтому $dS_C = Rd\varphi$, откуда $d\varphi = \frac{dS_C}{R}$.

Элементарная работа пары трения качения равна

$$A = -M_{кач} d\varphi = -\delta N d\varphi \quad \text{или} \quad dA = -\delta N \frac{dS_C}{R}.$$

Если $N = const$, то конечная работа пары трения качения равна

$$A = \frac{-\delta}{R} N S_C = -\delta N \varphi.$$

Работа пары трения качения с постоянным моментом $M_{кач}$ равна произведению коэффициента трения качения на нормальную реакцию поверхности качения и угол поворота тела.

9. *Работа внутренних сил твердого тела*

Рассмотрим две произвольно выбранные точки M_1 и M_2 твердого тела (рис. 53), к которым по третьему закону Ньютона приложены равные по величине и противоположно направленные силы $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$ ($\overline{F}_1^i = -\overline{F}_2^i$). Допустим, что точки M_1 и M_2 в данный момент времени имеют скорости $\overline{v_1}$ и $\overline{v_2}$ и за элементарный промежуток времени их элементарные перемещения, направленные вдоль векторов скоростей, соответственно равны:

$$dS_1 = v_1 dt, \qquad dS_2 = v_2 dt.$$

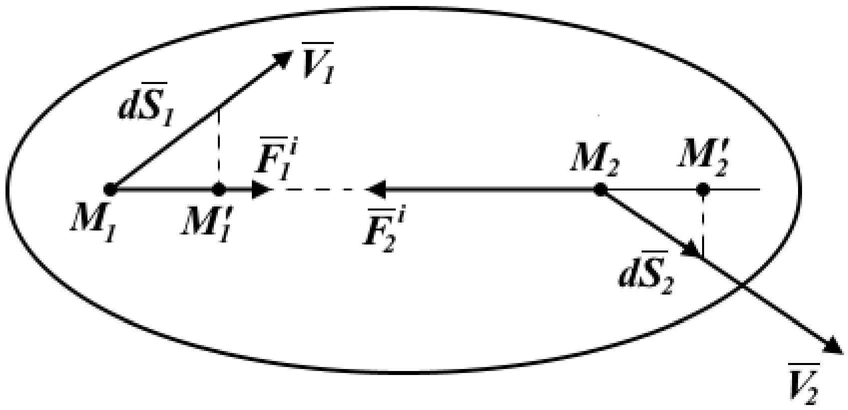


Рис. 53. К определению работы внутренних сил твердого тела

На основании теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющие эти точки, можно утверждать, что элементарные проекции элементарных перемещений этих точек на прямую равны, т.е.

$$M_1M_1' = M_2M_2'.$$

Вычислим сумму элементарных работ двух внутренних сил силы $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$, учитывая, что $\overline{F}_1^i = -\overline{F}_2^i$.

$$F_1^i dS_1 \cos\left(\overline{F_1^i}, \overline{v_1}\right) + F_2^i dS_2 \cos\left(\overline{F_2^i}, \overline{v_2}\right) = F_1^i M_1M_1' - F_2^i M_2M_2' = 0.$$

Т.к. каждой внутренней силе соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению сила, то сумма элементарных работ всех внутренних сил твердого тела равна нулю.

$$\sum dA_k^i = 0.$$

Поскольку конечное перемещение это интегральная сумма элементарных перемещений, то

$$\sum A_k^i = 0.$$

Сумма работ внутренних сил твердого тела на любом его перемещении равна нулю.

По свойству внутренних сил механической системы $\overline{R}^i = \sum \overline{F}_k^i = 0$ и $\overline{M}_0^i = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0$ (главный вектор и главный момент всех внутренних сил равны нулю). $\sum A_k^i = 0$ только для твердого тела, а для любой механической системы в общем случае она не равна 0.

В задачах в качестве механической системы часто рассматривают систему сочлененных твердых тел. При вычислении работы всех сил, приложенных к такой системе тел, очевидно, достаточно учесть работу внутренних сил в местах сочленения твердых тел. Если твердые тела сочленяются с помощью шарниров без трения, сумма работ таких двух внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы в точках сочленения, как действие и противодействие равны по модулю, но противоположны по направлению, а перемещение у точек приложения сил общее.

Таким образом, сочленение твердых тел с помощью шарниров без трения при вычислении работы внутренних сил не нарушает жесткости системы тел, так как сумма работ внутренних сил в этих шарнирах равна нулю при любых перемещениях системы, сочлененных твердых тел. Систему сочлененных с помощью таких шарниров твердых тел при вычислении работы всех внутренних сил можно считать одним твердым телом. Это характерно и для случая сочленения системы твердых тел с помощью нерастяжимых нитей, канатов и т.п. В этом случае работа внутренних сил натяжений также равна нулю.

3.2.6. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме

Дана механическая система, состоящая из n материальных точек M_1, M_2, …M_n. На каждую точку системы действуют внешние силы $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \dots \overline{F}_n^e$ и внутренние силы $\overline{F}_1^i, \overline{F}_2^i, \dots \overline{F}_n^i$.

Выразим для каждой точки системы теорему об изменении кинетической энергии в виде

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где $k = 1, 2 \dots n$; dA_k^e и dA_k^i - элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил.

Составляя подобные уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим, что

$$d\left(\frac{\sum m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \text{, или } dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i .$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему*.

Разделив обе части полученного уравнения на dt, имеем:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sum dA_k^e}{dt} + \frac{\sum dA_k^i}{dt} \text{, или } \frac{dT}{dt} = \sum W_k^e + \sum W_k^i ,$$

где $\sum W_k^e, \sum W_k^i$ – суммы мощностей всех внешних и внутренних сил системы.

Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

Пример. Вращающий момент $M_{вр}$ приводит в движение барабан *1* весом P_1 и радиуса r_1. На боковую поверхность барабана наматывается нить, которая приводит в движение каток *2* весом P_2. Каток катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту (рис. 54). Определить угловое ускорение барабана. Каток и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Трением качения пренебречь.

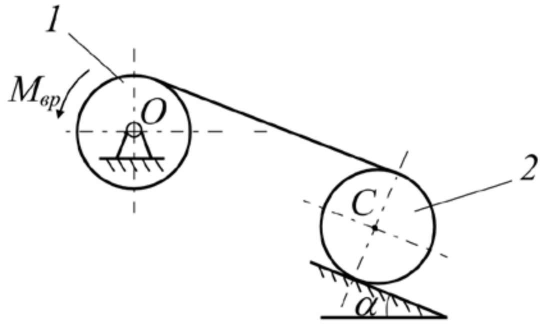


Рис. 54. Иллюстрация к примеру

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Продифференцировав по времени данное равенство, получим:

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k^e + \sum W_k^i,$$

где $\sum W_k^e = \frac{d\sum A_k^e}{dt}$ – сумма мощностей внешних сил системы;

$\sum W_k^i = \frac{d\sum A_k^i}{dt} = 0$ – сумма мощностей внутренних сил системы равна нулю, так как по условию задачи рассматриваемая механическая система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями.

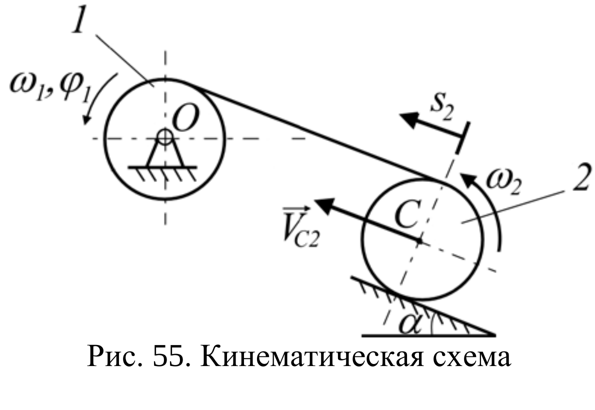


Рис. 55. Кинематическая схема

Вычислим кинетическую энергию системы в произвольный момент времени, выразив ее в зависимости от угловой скорости барабана *1*:

$$T = T_1 + T_2$$

Определим кинетические энергии каждого тела системы.

Барабан *1* совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси:

$$T_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2},$$

где $J_1 = \frac{P_1 r_1^2}{2g}$ – момент инерции тела *1*. Следовательно: $T_1 = \frac{P_1 r_1^2 \omega_1^2}{4g}$.

Барабан *2* совершает плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{P_2 V_{C2}^2}{2g} + \frac{J_2\omega_2^2}{2},$$

где $J_2 = \frac{P_2 r_2^2}{2g}$,

следовательно,

$$T_2 = \frac{P_2 V_{C2}^2}{2g} + \frac{P_2 r_2^2 \omega_2^2}{4g}.$$

Выразим все скорости, через угловую скорость диска *1*:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2};\ V_{C2} = \omega_2 r_2 = \omega_1 r_1.$$

Тогда

$$T = \frac{P_1 r_1^2 \omega_1^2}{4g} + \frac{P_2(\omega_1 r_1)^2}{2g} + \frac{P_2 r_2^2 \left(\frac{\omega_1 r_1}{r_2}\right)^2}{4g} = \frac{r_1^2\omega_1^2}{4g}[P_1 + 3P_2]$$

Производная по времени от кинетической энергии системы:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{r_1^2}{4g}[P_1 + 3P_2]\frac{d(\omega_1^2)}{dt} = \frac{r_1^2}{4g}[P_1 + 3P_2]\cdot 2\omega_1 \cdot \varepsilon_1$$

$$= \frac{r_1^2}{2g}[P_1 + 3P_2]\cdot \omega_1 \cdot \varepsilon_1$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении.

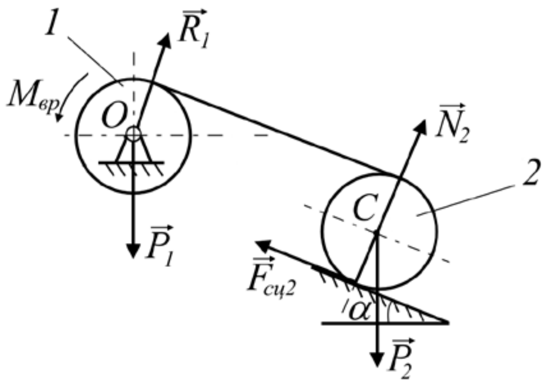


Рис. 56. К определению работ внешних нагрузок

На систему, показанную на рис. 56, действуют следующие внешние силы:

- активные силы: силы тяжести всех тел $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, а также вращающий момент $M_{вр}$;

- реакции внешних связей: $\bar{R}_1$ (реакция шарнирно-неподвижной опоры барабана *1*); $\bar{N}_2$ (реакция поверхности, на которую опирается барабан *2*); $\bar{F}_{\text{сц}2}$ (сила сцепления между наклонной поверхностью и барабаном *2*).

Таким образом, сумма работ внешних сил системы при равна:

$$\sum A_k^e = A\big(M_{\text{вр}}\big) + A(\bar{P}_1) + A(\bar{P}_2) + A(\bar{R}_1) + A(\bar{N}_2) + A\big(\bar{F}_{\text{сц}2}\big).$$

Заметим, что сила тяжести тела *1*, реакция шарнирно-неподвижной опоры этого барабана приложены в неподвижных точках, следовательно, работы этих сил равны нулю: $A(\bar{P}_1) = 0$; $A(\bar{R}_1) = 0$.

Сила сцепления барабана *2* с поверхностью качения, приложена в мгновенном центре скоростей этого тела, следовательно: $A\big(\bar{F}_{\text{сц}2}\big) = 0$.

Таким образом: $\sum A_k^e = A\big(M_{\text{вр}}\big) + A(\bar{P}_2)$, где

$A\big(M_{\text{вр}}\big) = M_{\text{вр}}\varphi_1$ – работа вращающего момента $M_{вр}$;

$A(\bar{P}_2) = -P_2 s_2 sin\alpha$ – работа силы тяжести $\bar{P}_2$.

Выразим перемещение тела *2* через угол поворота барабана *1*: $s_2 = \varphi_1 r_1$.

Тогда выражение суммы работ внешних сил системы окончательно примет вид:

$$\sum A_k^e = \big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)\varphi_1.$$

Следовательно, мощность внешних сил системы будет равна:

$$\sum W_k^e = \frac{d\sum A_k^e}{dt} = \big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)\frac{d\varphi_1}{dt} = \big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)\omega_1$$

Подставим полученные выражения в формулу, выражающую теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{r_1^2}{2g}[P_1 + 3P_2]\cdot\omega_1\cdot\varepsilon_1 = \big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)\omega_1$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{2g\big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)}{r_1^2(P_1 + 3P_2)}$$

Ответ: $\varepsilon_1 = \frac{2g\big(M_{\text{вр}} - P_2 r_1 sin\alpha\big)}{r_1^2(P_1 + 3P_2)}$.

3.2.7. Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной (конечной) форме

Проинтегрировав обе части равенства $dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$ в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T, получим

$$T - T_0 = \sum\int_{M_0}^{M_1} dA_k^e + \sum\int_{M_0}^{M_1} dA_k^i, \quad \text{или} \quad T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

где $A_k^e = \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e$ - работа внешней силы для точки системы M_k, при ее перемещении из начального положения M_0 в конечное положение M_1.

$A_k^i = \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i$ – соответственно работа внутренней силы, действующей на точку M_k.

Формула $T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ выражает теорему об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил*.

В отличие от других общих теорем динамики внутренние силы не исключаются при рассмотрении теоремы об изменении кинетической энергии. Например, для механической системы, состоящей из снаряда и орудия, при выстреле силы давления пороховых газов будут внутренними, совершающими работу и сообщающими скорости телам системы.

Частный случай теоремы

Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum A_k^i = 0.$$

Следовательно, теорему об изменении кинетической энергии, например в конечной форме можно представить в виде

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Для неизменяемой механической системы (состоящей из твердых тел), теорема об изменении кинетической энергии примет вид: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних сил системы на этом же перемещении*.

Пример 1. Груз весом Q поднимается по шероховатой наклонной поверхности, расположенной под углом α к горизонту, с помощью гибкой и нерастяжимой нити, навитой на однородный диск весом P и радиусом R, к которому приложен постоянный вращающий момент $m_{\text{вр}}$ (рис. 57). Коэффициент трения груза о плоскость равен f. Определить скорость груза после того, как он пройдет из состояния покоя путь S.

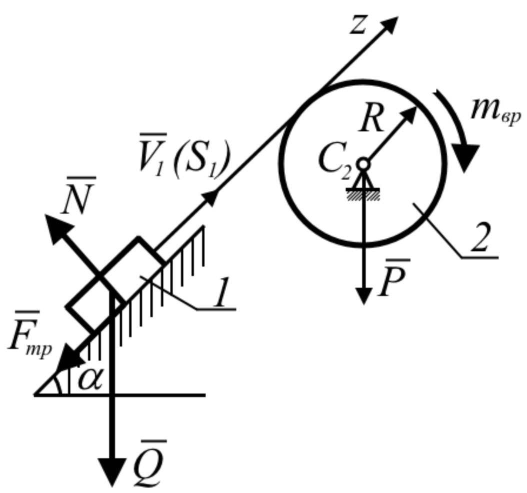


Рис. 57. Иллюстрация к примеру

Решение: По теореме об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

где $T_0 = 0$, т.к. в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = T_1 + T_2.$$

Кинетическая энергия груза, совершающего поступательное движение:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot V_1^2$$

Кинетическая энергия однородного диска, совершающего вращательное движение:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{C2} \cdot \omega_2^2$$

где $J_{C2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot R^2$ – осевой момент инерции однородного диска, $\omega_2 = \frac{V_1}{R}$ - угловая скорость диска.

Тогда кинетическая энергия однородного диска примет вид:

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot R^2 \cdot \left(\frac{V_1}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot V_1^2$$

Кинетическая энергия системы будет равна:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot V_1^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_1^2}{g} \cdot \left(Q + \frac{1}{2} \cdot P\right)$$

Сумма работ всех внешних сил, действующих на систему:

$$\sum A_k^e = A(\bar{F}_{тр}) + A(\bar{Q}) + A(m_{вр})$$

Работа силы трения скольжения равна:

$$A(\bar{F}_{тр}) = -F_{тр} \cdot S_1 = -f \cdot N \cdot S_1 = -f \cdot Q \cdot S_1 \cdot cos(\alpha)$$

Работа силы тяжести груза:

$$A(\bar{Q}) = -Q \cdot S_1 \cdot sin(\alpha)$$

Работа постоянного вращающего момента:

$$A(m_{\text{вр}}) = m_{\text{вр}} \cdot \varphi_2$$

где $\varphi_2 = \frac{S_1}{R}$, тогда

$$A(m_{\text{вр}}) = m_{\text{вр}} \cdot \frac{S_1}{R}$$

Сумма работ всех внешних сил будет равна:

$$\sum A_k^e = -f \cdot Q \cdot S_1 \cdot cos(\alpha) - Q \cdot S_1 \cdot sin(\alpha) + m_{\text{вр}} \cdot \frac{S_1}{R} =$$

$$= S_1 \cdot \left[\frac{m_{\text{вр}}}{R} - f \cdot Q \cdot cos(\alpha) - Q \cdot sin(\alpha)\right]$$

Приравняем полученные выражения для кинетической энергии системы и суммы работ внешних сил этой же системы:

$$T = \sum A_k^e$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{V_1^2}{g} \cdot \left(Q + \frac{1}{2} \cdot P\right) = S_1 \cdot \left[\frac{m_{\text{вр}}}{R} - f \cdot Q \cdot cos(\alpha) - Q \cdot sin(\alpha)\right]$$

Выразим скорость груза из полученного равенства

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot S_1 \cdot \left[\frac{m_{\text{вр}}}{R} - f \cdot Q \cdot cos(\alpha) - Q \cdot sin(\alpha)\right]}{Q + \frac{1}{2} \cdot P}}$$

Ответ:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot S_1 \cdot \left[\frac{m_{\text{вр}}}{R} - f \cdot Q \cdot cos(\alpha) - Q \cdot sin(\alpha)\right]}{Q + \frac{1}{2} \cdot P}}$$

Пример 2. Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву *B*. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент *M*.

Определить скорость ленты транспортера *V* в зависимости от ее перемещения *S*, если вес поднимаемого груза равен *P*, а шкивы *B* и *C* радиуса *r* и весом *Q* каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента образует с горизонтом угол α (рис. 58).

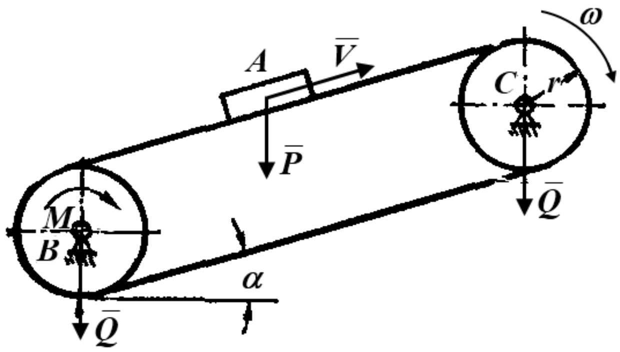


Рис. 58. Иллюстрация к примеру 2

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e ,$$

где $T_0 = 0$, т.к. в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = T_{\text{гр}} + 2 \cdot T_{\text{шк}} .$$

Кинетическая энергия груза, совершающего поступательное движение:

$$T_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot V^2 \; T_{\text{гр}} = \frac{1}{2}\frac{P}{q} v^2 .$$

Кинетическая энергия однородного цилиндрического шкива, совершающего вращательное движение:

$$T_{\text{шк}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{Q}{4g} \cdot V^2 \; T_{\text{шк}} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{q}\frac{r^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{Q}{4q} v^2 .$$

Тогда кинетическая энергия системы будет равна:

$$T = T_{\text{гр}} + 2 \cdot T_{\text{шк}} = \frac{P}{2g} \cdot V^2 + 2 \cdot \frac{Q}{4g} \cdot V^2 = \frac{P+Q}{2g} \cdot V^2 .$$

Выразим сумму работ силы тяжести груза и вращающего момента:

$$\sum A_k^e = -P \cdot S \cdot \sin\alpha + M \cdot \varphi = \left(\frac{M}{r} - P \cdot \sin\alpha\right) \cdot S .$$

Подставим значения T и $\sum A_k^e$ в исходную формулу:

$$\frac{P+Q}{2g} \cdot V^2 = \left(\frac{M}{r} - P \cdot \sin\alpha\right) \cdot S ,$$

Отсюда скорость ленты транспортера равна:

$$V = \sqrt{\frac{2g \cdot (M - P \cdot r \cdot \sin\alpha)}{r \cdot (P+Q)} \cdot S} .$$

Ответ: $V = \sqrt{\dfrac{2g \cdot (M - P \cdot r \cdot \sin\alpha)}{r \cdot (P+Q)} \cdot S}$.

3.2.8. Примеры выполнения расчетно-графической работы по теме: «Теорема об изменении кинетической энергии системы»

Пример 1.

Механическая система, представленная на рис. 59, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям. На тело 1 действует сила трения скольжения, а на тело 3, катящегося без проскальзывания – сопротивление качению. Остальными силами сопротивления и массами нитей пренебречь, нити считать нерастяжимыми, тела – абсолютно твердыми.

Определите скорость и ускорение тела *1* в тот момент, когда пройденный им путь станет равным *s* (рис. 59).

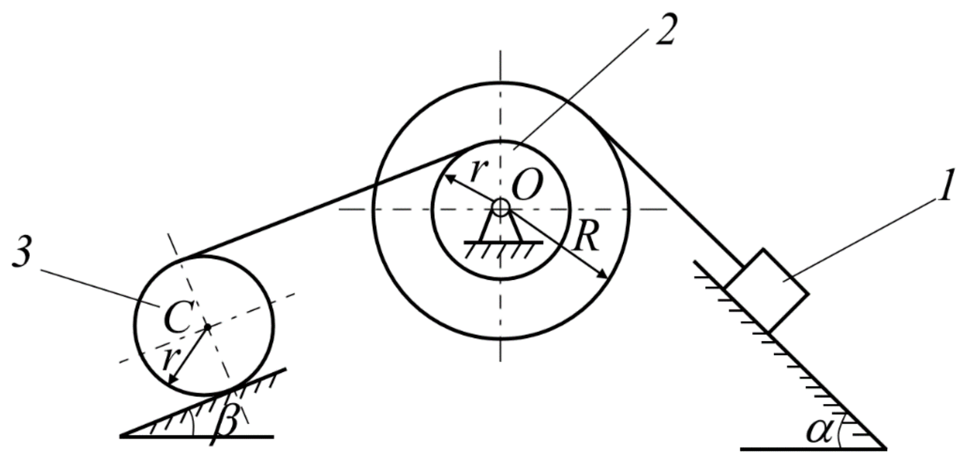


Рис. 59. Исходная схема к примеру 1

При решении задачи приняты следующие обозначения:

m_1, m_2, m_3 - массы тел *1, 2, 3*;

R_2, r_2, R_3 - радиусы больших и малых окружностей;

i_{2x} - радиус инерции тела *2* относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести;

α, β - углы наклона плоскостей к горизонту;

f - коэффициент трения скольжения;

δ - коэффициент трения качения.

Дано: $m_1 = m$ - масса груза 1; $m_2 = 0{,}5m$; $m_3 = 2m$; $f = 0{,}2$; $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$; $R_2 = 2r_2$; $i_2 = 0{,}3м$; $R_3 = r_2 = 0{,}2м$; $\delta = 0{,}5см$; $s = 2м$. Каток 3 считать однородным сплошным цилиндром. На рис. 59 показана механическая система в начальном положении.

Найти: v_1 - скорость груза *1* в конечном положении.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i . \qquad (1)$$

Считаем, что представленная на рис. 59 система состоит из абсолютно твердых тел, которые соединены между собой нерастяжимыми нитями. В таком случае работа внутренних сил системы равна нулю $\sum A_k^i = 0$.

По условию задачи данная система в начальном положении находится в состоянии покоя, следовательно, $T_0 = 0$.

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_k^e . \qquad (2)$$

1. Для определения конечного положения заданной системы при перемещении тела *1*, равном s, рассмотрим характер движения тел, входящих систему: тело *1* движется поступательно, тело *2* вращается вокруг неподвижной оси, тело *3* совершает плоскопараллельное движение.

Тело *1* переместиться вниз вдоль наклонной плоскости на s м. Тело *2* повернется на угол φ_2. Центр масс катка *3* совершит перемещение s_{C_3} вверх вдоль наклонной плоскости, при этом каток совершит поворот на угол φ_3.

На рис. 60 представлены перемещения тел, а также соответствующие этим перемещениям линейные и угловые скорости.

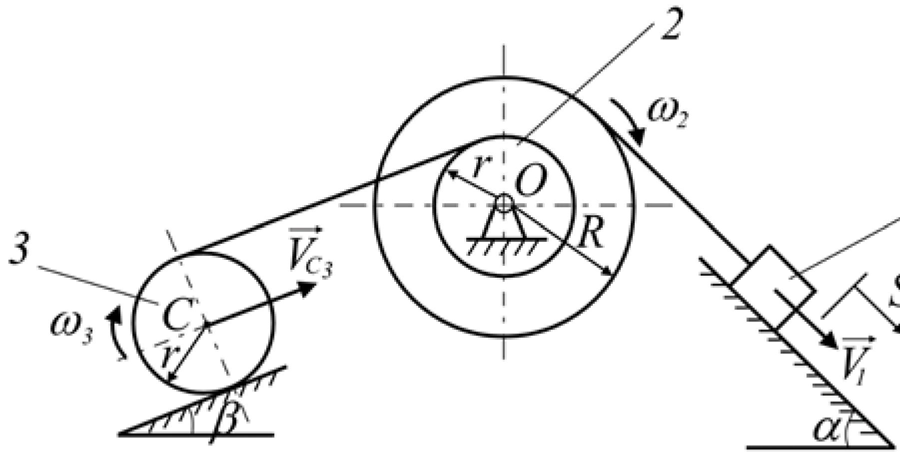


Рис. 60. Кинематическая схема

2. Определим кинетическую энергию каждого тела системы. Груз *1* движется поступательно. Кинетическая энергия груза определяется формулой:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Тело *2* вращается вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия в таком случае будет выражаться формулой:

$$T_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2}.$$

Поскольку масса тела *2* распределена неравномерно, для определения осевого момента инерции необходимо воспользоваться заданным в условии задачи радиусом инерции:

$$J_2 = m_2 i_2^2.$$

Кинетическая энергия катка *3*, совершающего плоскопараллельное движение, равна:

$$T_3 = \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2}.$$

Так как каток *3* – сплошной однородный цилиндр, его момент инерции относительно продольной центральной оси C_3 равен:

$$J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}.$$

3. Кинетическая энергия системы в конечном положении будет определяться суммой кинетических энергий тел *1, 2, 3*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Таким образом, уравнение кинетической энергии системы примет вид:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_2^2\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2\omega_3^2}{2\cdot 2}. \qquad (3)$$

4. Все скорости, входящие в выражение кинетической энергии системы выразим через искомую скорость v_1. Для этого запишем уравнения кинематических связей:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}; \qquad v_{C_3} = \frac{\omega_2 r_2}{2} = \frac{v_1 r_2}{2R_2}; \qquad \omega_3 = \frac{v_{C_3}}{R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2R_3}.$$

Тогда формула (3) примет вид:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_2^2 v_1^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 v_1^2 r_2^2}{2\cdot 4R_2^2} + \frac{m_3 R_3^2 v_1^2 r_2^2}{2\cdot 2\cdot 4R_2^2R_3^2} = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{4R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{2\cdot 4R_2^2}\right)\cdot v_1^2.$$

После подстановки исходных данных кинетическая энергия системы будет определяться следующим выражением:

$$T = \frac{1}{2}(m + 0{,}28m + 0{,}094m)\cdot v_1^2 = \frac{1}{2}(1{,}374m)v_1^2. \qquad (4)$$

Здесь выражение в скобках представляет собой массу системы, приведенную к звену *1*. Анализируя формулу (4), приходим к выводу, что это выражение соответствует кинетической энергии поступательного движения твердого тела. Таким образом, механическая система, состоящая из трех тел, совершающих разные движения, заменена эквивалентной системой, имеющей такую же кинетическую энергию, состоящей из одного твердого тела, совершающего поступательное движение.

5. Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. На систему, представленную на рис. 61, действуют следующие внешние силы:

- *активные силы*: силы тяжести всех тел $\overline{P}_1 ... \overline{P}_3$;
- *реакции внешних опор*: $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$ (нормальные реакции поверхностей) и $\overline{N}_2$ (реакция шарнирно-неподвижной опоры);
- *силы сопротивления*: сила трения скольжения тела *1* – $\overline{F}_{TP}$ и пара сил момента сопротивления качению тела *3* – M_C .

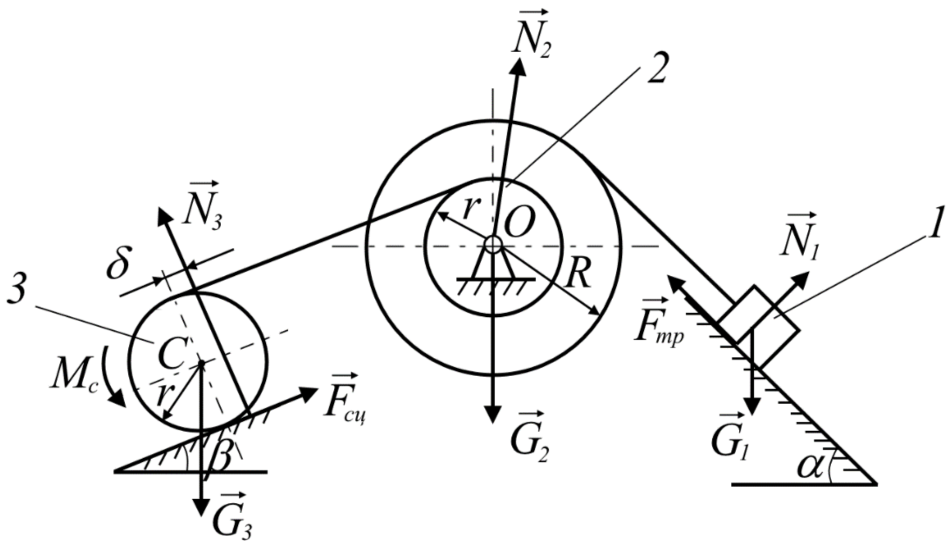


Рис. 61. К определению работ внешних нагрузок

Таким образом, сумма работ внешних сил системы при перемещении из начального положения в конечное должна быть равна:

$$\sum A_k^e = A(\overline{P}_1) + A(\overline{P}_2) + A(\overline{P}_3) + A(\overline{N}_1) + A(\overline{N}_3) + A(\overline{N}_2) + A(\overline{F}_{TP}) + A(M_C).$$

Заметим, что сила тяжести тела 2 и реакция шарнирно-неподвижной опоры приложены в неподвижной точке, следовательно, работы этих сил равны нулю:

$$A(\overline{P}_2) = 0; \; A(\overline{N}_2) = 0.$$

Нормальные реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_3$ перпендикулярны направлениям перемещений точек приложения этих сил, следовательно, работы этих сил также равны нулю:

$$A(\overline{N}_1) = 0; \; A(\overline{N}_3) = 0.$$

Таким образом, необходимо определить следующую сумму работ внешних сил:

$$\sum A_k^e = A(\overline{P}_1) + A(\overline{P}_3) + A(\overline{F}_{TP}) + A(M_C).$$

Для определения работы сил тяжести тел 1 и 3 разложим эти силы на составляющие, параллельные плоскостям перемещения тел и перпендикулярные им ($P_1 \sin\alpha, P_1 \cos\alpha$ и $P_3 \sin\beta, P_3 \cos\beta$ соответственно). Перемещения тел вдоль наклонных плоскостей происходят под действием составляющих, параллельных плоскостям перемещения тел.

Работа силы тяжести $\overline{P}_1$ равна:

$$A(\overline{P}_1) = P_1 \sin\alpha \cdot s_{C_1}. \qquad (5)$$

Работа силы тяжести $\overline{P}_3$ равна:

$$A(\overline{P}_3) = -P_3 \sin\beta \cdot s_{C_3}. \qquad (6)$$

Работа силы трения скольжения $\overline{F}_{TP}$ равна:

$$A(\overline{F}_{TP}) = -F_{TP} s_{C_1}.$$

Сила трения равна произведению коэффициента трения скольжения на величину нормальной реакции:

$$F_{TP} = fN_1.$$

Величина нормальной реакции равна составляющей силы тяжести тела *1*, перпендикулярной поверхности перемещения тела:

$$N_1 = P_1 \cos\alpha.$$

Так как $F_{TP} = fP_1 \cos\alpha$, то работа силы трения равна:

$$A(\overline{F}_{TP}) = -fP_1 \cos\alpha \cdot s_{C_1}. \qquad (7)$$

Работа пары сил момента сопротивления качению катка *3* определяется зависимостью:

$$A(M_C) = -M_C \varphi_3,$$

где M_C - момент пары сил сопротивления качению катка 3;

φ_3 - угол поворота катка 3.

Момент сопротивления качению равен произведению коэффициента трения качения на величину нормальной реакции:

$$M_C = \delta \cdot N_3.$$

Величина нормальной составляющей силы тяжести тела 3, перпендикулярной поверхности перемещения тела:

$$N_3 = P_3 \cos\beta.$$

Таким образом, работа пары сил сопротивления качению равна:

$$A(M_C) = -\delta \cdot P_3 \cos\beta \cdot \varphi_3. \qquad (8)$$

6. Учитывая, что $P = mg$, сумма работ внешних сил определится сложением работ, определенных формулами (5)…(8):

$$\sum A_k^e = m_1 g \sin\alpha \cdot s_{C_1} - m_3 g \sin\beta \cdot s_{C_3} - fm_1 g \cos\alpha \cdot s_{C_1} - \delta \cdot m_3 g \cos\beta \cdot \varphi_3$$

.

7. Выразим перемещения тел через заданное перемещение. Перемещение центра масс тела *1* вниз вдоль наклонной плоскости задано: $s_{C_1} = s$, м. Угол поворота тела *2* будет равен $\varphi_2 = \dfrac{s}{R_2}$. Точки внутреннего обода блока *2* совершат перемещение $s_2 = \varphi_2 r_2$. Тела *2* и *3* связаны нерастяжимой нитью, следовательно, точки обода катка *3* совершат такое же перемещение: $s_3 = s_2 = \varphi_2 r_2$. Перемещение центра масс катка *3* равно $s_{C_3} = \dfrac{s_3}{2} = \dfrac{\varphi_2 r_2}{2} = \dfrac{s r_2}{2R_2}$. Угол поворота катка *3* равен $\varphi_3 = \dfrac{s_{C_3}}{R_3} = \dfrac{s r_2}{2R_2 R_3}$.

Тогда сумма работ внешних сил будет определяться выражением:

$$\sum A_k^e = \left(m_1 g \sin\alpha - m_3 g \sin\beta \cdot \frac{r_2}{2R_2} - f m_1 g \cos\alpha - \delta \cdot m_3 g \cos\beta \cdot \frac{r_2}{2R_2 R_3} \right) s .$$

Подставляя заданные значения масс и радиусов тел, получаем:

$$\sum A_k^e = (0{,}6341 mg) s . \qquad (9)$$

Здесь выражение в скобках представляет собой внешние силы системы, приведенные к телу *1*.

8. Согласно формуле (2), приравняем значения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил $\sum A_k^e$, определяемые по формулам (4) и (9):

$$\frac{1}{2}(1{,}374m) v_1^2 = (0{,}6341 \cdot mg) s .$$

Откуда получаем:

$$0{,}687 m v_1^2 = 12{,}482 m ; \; v_1 = \sqrt{\frac{12{,}482}{0{,}687}} = \sqrt{18{,}2} = 4{,}26 м/с .$$

Ответ: $v_1 = 4{,}26 м/с$.

Пример 2.

Механическая система, представленная на рис. 62, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; наклонный участок нити параллелен соответствующей наклонной плоскости. На груз *1* действует сила трения скольжения. Остальными силами сопротивления и массами нитей пренебречь, нити считать нерастяжимыми, тела – абсолютно твердыми.

Определите скорость и ускорение тела *1* в тот момент, когда пройденный им путь станет равным *s*.

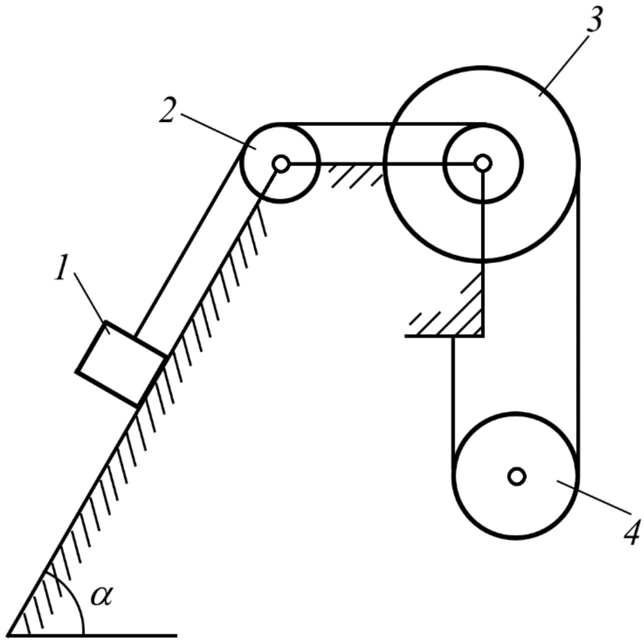


Рис. 62. Исходная схема к примеру 2

Дано: $m_1 = 4m$; $m_2 = 3m$; $m_3 = 2m$; $m_4 = m$; $f = 0{,}15$; $\alpha = 60°$; $R_3 = 0{,}5$м; $r_3 = 0{,}2$м; $\rho_3 = 0{,}3$м; $s = 1{,}5$м. Диски 2 и 4 считать однородными сплошными цилиндрами. На рис. 25 показана механическая система в начальном положении.

Найти: скорость V_1 и ускорение a_1 груза *1* в конечном положении.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Так как по условию задачи рассматриваемая механическая система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, то сумма работ внутренних сил системы равна нулю: $\sum A_k^i = 0$.

Так как в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя, то $T_0 = 0$.

Следовательно,

$$T = \sum A_k^e.$$

Кинетическая энергия системы в конечный момент времени равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

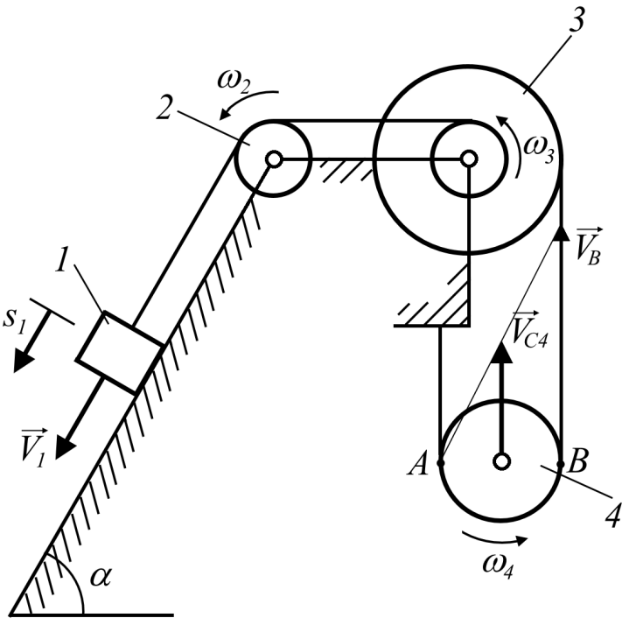


Рис. 63. Кинематическая схема

Определим кинетические энергии каждого тела системы:

Груз *1* движется поступательно: $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$.

Диск *2* совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2},$$

где $J_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}$ – момент инерции тела *2*.

Следовательно,

$$T_2 = \frac{m_2 R_2^2 \omega_2^2}{4}.$$

Ступенчатый барабан *3* также совершает вращательное движение:

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2},$$

где $J_3 = m_3 \rho_3^2$ – момент инерции тела *3*.

Следовательно,

$$T_3 = \frac{m_3 \rho_3^2 \omega_3^2}{2}.$$

Диск 4 совершает плоскопараллельное движение:

$$T_4 = \frac{m_4 V_{C4}^2}{2} + \frac{J_4 \omega_4^2}{2},$$

где $J_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2}$.

Следовательно,

$$T_4 = \frac{m_4 V_{C4}^2}{2} + \frac{m_4 R_4^2 \omega_4^2}{4}.$$

Таким образом, уравнение кинетической энергии системы примет вид:

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 \omega_2^2}{4} + \frac{m_3 \rho_3^2 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 V_{C4}^2}{2} + \frac{m_4 R_4^2 \omega_4^2}{4}$$

Выразим все скорости, входящие в полученное выражение, через искомую V_1:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2};\ \omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{r_3} = \frac{V_1}{r_3};\ \omega_4 = \frac{\omega_3 R_3}{AB} = \frac{\omega_3 R_3}{2R_4} = \frac{V_1 R_3}{2r_3 R_4};\ V_{C4} = \omega_4 R_4 = \frac{V_1 R_3}{2r_3};$$

где A – мгновенный центр скоростей диска *4*.

Тогда

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_1^2}{4} + \frac{m_3 \rho_3^2 V_1^2}{2r_3^2} + \frac{m_4}{2}\left(\frac{V_1 R_3}{2r_3}\right)^2 + \frac{m_4}{4}\left(\frac{V_1 R_3}{2r_3}\right)^2 =$$

$$= \frac{V_1^2}{2}\left[m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3 \rho_3^2}{r_3^2} + \frac{3m_4}{2}\left(\frac{R_3}{2r_3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{V_1^2}{2}\left[4m + \frac{3m}{2} + 2m\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)^2 + \frac{3m}{2}\left(\frac{0{,}5}{2\cdot 0{,}2}\right)^2\right] \approx 12{,}344m\frac{V_1^2}{2}$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении.

На систему, показанную на рис. 64, действуют следующие внешние силы:

- активные силы: силы тяжести всех тел $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_4$;

- реакции внешних опор: $\bar{N}_1$ (реакция поверхности, на которую опирается груз *1*); $\bar{T}_4$ (натяжение троса, намотанного на диск *4*); $\bar{R}_2$ и $\bar{R}_3$ (реакции шарнирно-неподвижных опор барабанов *2* и *3*);

- силы сопротивления: сила трения скольжения тела *1* – $\bar{F}_{\text{тр}1}$.

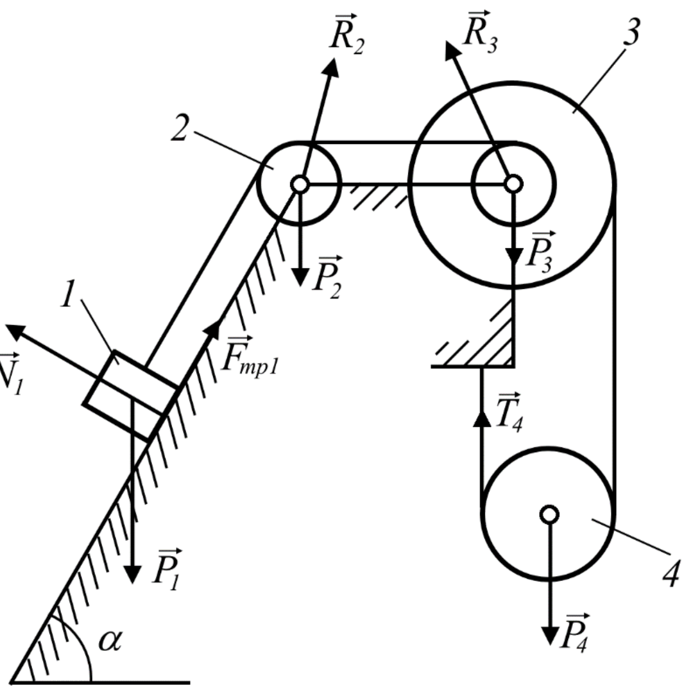


Рис. 64. Схема к определению работ внешних сил системы

Таким образом, сумма работ внешних сил системы при перемещении из начального положения в конечное равна:

$\sum A_k^e = A(\bar{P}_1) + A(\bar{P}_2) + A(\bar{P}_3) + A(\bar{P}_4) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{T}_4) + A(\bar{R}_2) + A(\bar{R}_3) + A(\bar{F}_{\text{тр}1})$.

Заметим, что силы тяжести тел *2* и *3*, а также реакции шарнирно-неподвижных опор этих барабанов приложены в неподвижных точках, следовательно, работы этих сил равны нулю: $A(\bar{P}_2) = 0$; $A(\bar{P}_3) = 0$; $A(\bar{R}_2) = 0$; $A(\bar{R}_3) = 0$.

Нормальная реакция опоры тела *1* перпендикулярна перемещению тела, поэтому работа данной силы также равна нулю: $A(\bar{N}_1) = 0$.

Натяжение троса, намотанного на диск *4*, приложено в мгновенном центре скоростей этого тела, следовательно: $A(\bar{T}_4) = 0$.

Таким образом: $\sum A_k^e = A(\bar{P}_1) + A(\bar{P}_4) + A(\bar{F}_{\text{тр}1})$, где

$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 sin\alpha = m_1 g \cdot s_1 sin\alpha$ – работа силы тяжести $\vec{P}_1$;

$A(\bar{P}_4) = -P_4 s_4 = -m_4 g \cdot s_4$ – работа силы тяжести $\vec{P}_4$;

$A(\bar{F}_{\text{тр}1}) = -F_{\text{тр}1} s_1 = -f \cdot N_1 \cdot s_1 = -f \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1 cos\alpha$ – работа силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}1}$.

Выразим перемещение тела *4* через заданное: $s_4 = \frac{s_1 R_3}{2r_3}$.

Тогда выражение суммы работ внешних сил системы окончательно примет вид:

$$\sum A_k^e = gs_1\left(m_1 sin\alpha - m_4\frac{R_3}{2r_3} - fm_1 cos\alpha\right) =$$

$$= gs_1\left(4m \cdot 0{,}866 - m\frac{0{,}5}{2\cdot 0{,}2} - 0{,}15 \cdot 4 \cdot m \cdot 0{,}5\right) = 1{,}914mgs_1.$$

Подставим полученные выражения кинетической энергии системы и суммы работ внешних сил в уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии:

$$12{,}344m\frac{V_1^2}{2} = 1{,}914mgs_1, \text{ или } 12{,}344\frac{V_1^2}{2} = 1{,}914gs_1.$$

Выразим отсюда искомую скорость:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}914gs_1}{12{,}344}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}914\cdot 10\cdot 1{,}5}{12{,}344}} \approx 2{,}157 \text{ (м/с)}.$$

Продифференцировав равенство $12{,}344\frac{V_1^2}{2} = 1{,}914gs_1$, получаем:

$$12{,}344 \cdot V_1 \cdot a_1 = 1{,}914gV_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1{,}914g}{12{,}344} = 0{,}155g = 1{,}55 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $V_1 = 3{,}05$ (м/с); $a_1 = 1{,}55$ (м/с^2).

3.2.9. Задания для выполнения расчетно-графической работы по теме: «Теорема об изменении кинетической энергии системы»

Механическая система, представленная на рис. 65 - рис. 67, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывается рение скольжения тела *1* и сопротивление качению тела *4*, катящегося без скольжения. Другими силами сопроивления и массами нерастяжимых нитей пренебрегаем. Требуется определить скорость и ускорение тела *1* в тот момент времени, когда оно пройдет путь $S_1 = S$.

Приняты обозначения:

m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел *1, 2, 3, 4*;

R_2, r_2, R_3, r_3, R_4, r_4 – радиусы ободов тел *2, 3, 4*;

ρ_2, ρ_3, ρ_4 – радиусы инерции тел *2, 3, 4* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

α – угол наклона плоскости к горизонту;

f – коэффициент трения скольжения тела *1*;

δ – коэффициент трения качения тела *4*.

Методические указания к решению

Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1) выберите направления $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ и определите скорости и перемещения всех тел системы в зависимости от S_1 и V_1;

2) вычислите кинетическую энергию системы в конечном и начальном положениях системы;

3) изобразите на рисунке все внешние и внутренние силы системы;

4) вычислите работу всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы – только сумму работ внешних сил). Если сумма работ отрицательна, смените направления $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ и вернитесь к п. 1. Если сумма работ опять получится отрицательной, то система под действием сил тяжести не приходит в движение из состояния покоя и $V_1 = 0$, $a_1 = 0$. При смене направлений $\bar{S}_1$ и $\bar{V}_1$ в силовой схеме необходимо изменить только направления сил сопротивления;

5) воспользовавшись результатами пунктов 2) и 4), запишите теорему об изменении кинетической энергии системы и определите скорость и ускорение тела *1*.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 6, схемы механических систем в начальном положении приведены на рис. 65 - рис. 67.

Указания: блоки и катки, для которых радиусы инерции в табл. 6 не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами; наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Считать величину m равной 10 кг, $g = 10$ м/с^2 .

Таблица 6

Исходные данные

№ вар-та	№ рис.	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	R_2, м	r_2, м	ρ_2, м	R_3, м	r_3, м	ρ_3, м	R_4, м	r_4, м	ρ_4, м	α, °	f	δ, см	S, м
1	1	5m	4m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,1	-	1
2	2	6m	5m	4m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	45	-	0,2	2
3	3	4m	m	2m	m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,6	0,2	0,3	15	-	0,1	1,5
4	4	8m	6m	3m	2m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	30	0,2	-	3
5	5	7m	5m	4m	m	-	-	-	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	50	-	0,3	4,5
6	6	9m	8m	3m	3m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,9	0,3	0,5	20	-	0,4	1,5
7	7	6m	2m	3m	2m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	2,5
8	8	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	-	0,4	-	15	-	0,1	4
9	9	7m	5m	3m	3m	0,6	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,5	0,7	20	-	0,4	2
10	10	5m	4m	2m	m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,7	0,3	0,4	50	0,25	-	1
11	11	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,5	0,1	0,2	0,8	0,4	0,5	30	-	0,3	3,5
12	12	9m	7m	5m	4m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	70	0,1	-	2
13	13	6m	3m	2m	m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	4,5
14	14	7m	5m	4m	2m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	-	0,6	-	20	-	0,1	3
15	15	4m	3m	2m	m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	60	0,2	-	1,5
16	16	5m	4m	2m	m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	0,7	0,4	0,5	30	-	0,3	1
17	17	6m	5m	4m	2m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,4	-	20	-	0,1	2
18	18	4m	m	2m	m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	65	0,15	-	1,5
19	19	8m	6m	3m	2m	-	-	-	0,9	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	3
20	20	7m	5m	4m	m	0,5	0,1	0,3	-	-	-	0,6	0,3	0,4	45	0,1	-	4,5
21	21	9m	8m	3m	3m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,7	0,3	0,4	30	-	0,3	1,4
22	22	6m	2m	3m	2m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,3	60	0,25	-	2,5
23	23	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	20	-	0,1	4
24	24	7m	5m	3m	3m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,9	0,3	0,5	15	-	0,3	2
25	25	5m	4m	2m	m	0,5	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	75	0,1	-	1
26	26	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	25	-	0,2	3,5
27	27	9m	7m	5m	4m	0,7	0,4	0,5	-	-	-	0,8	0,5	0,7	30	-	0,3	2
28	28	6m	3m	2m	m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	70	0,2	-	4,5
29	29	7m	5m	4m	2m	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	0,6	-	20	-	0,1	3
30	30	4m	3m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,3	-	60	0,15	-	1,5

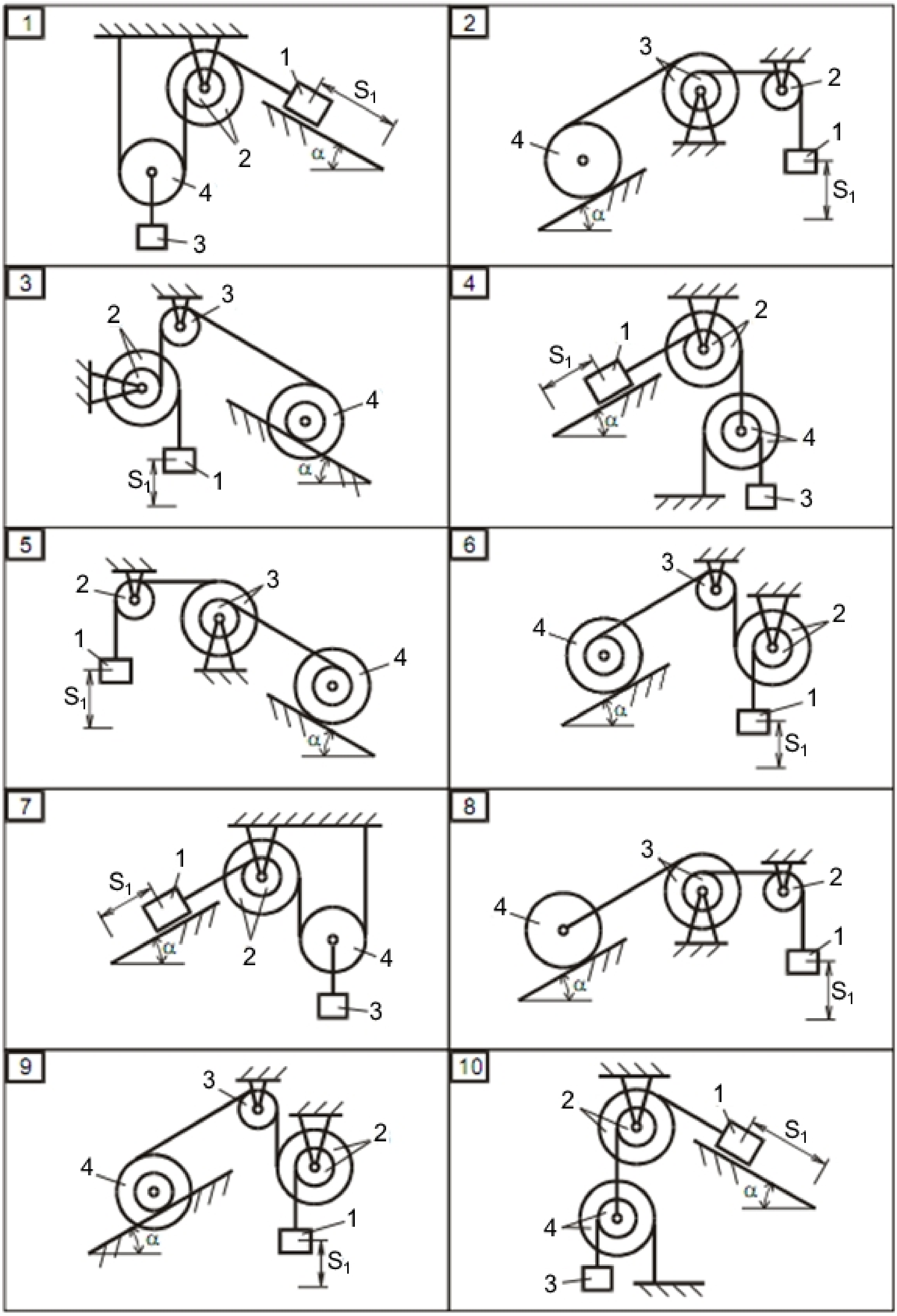


Рис. 65. Схемы к заданиям (1-10)

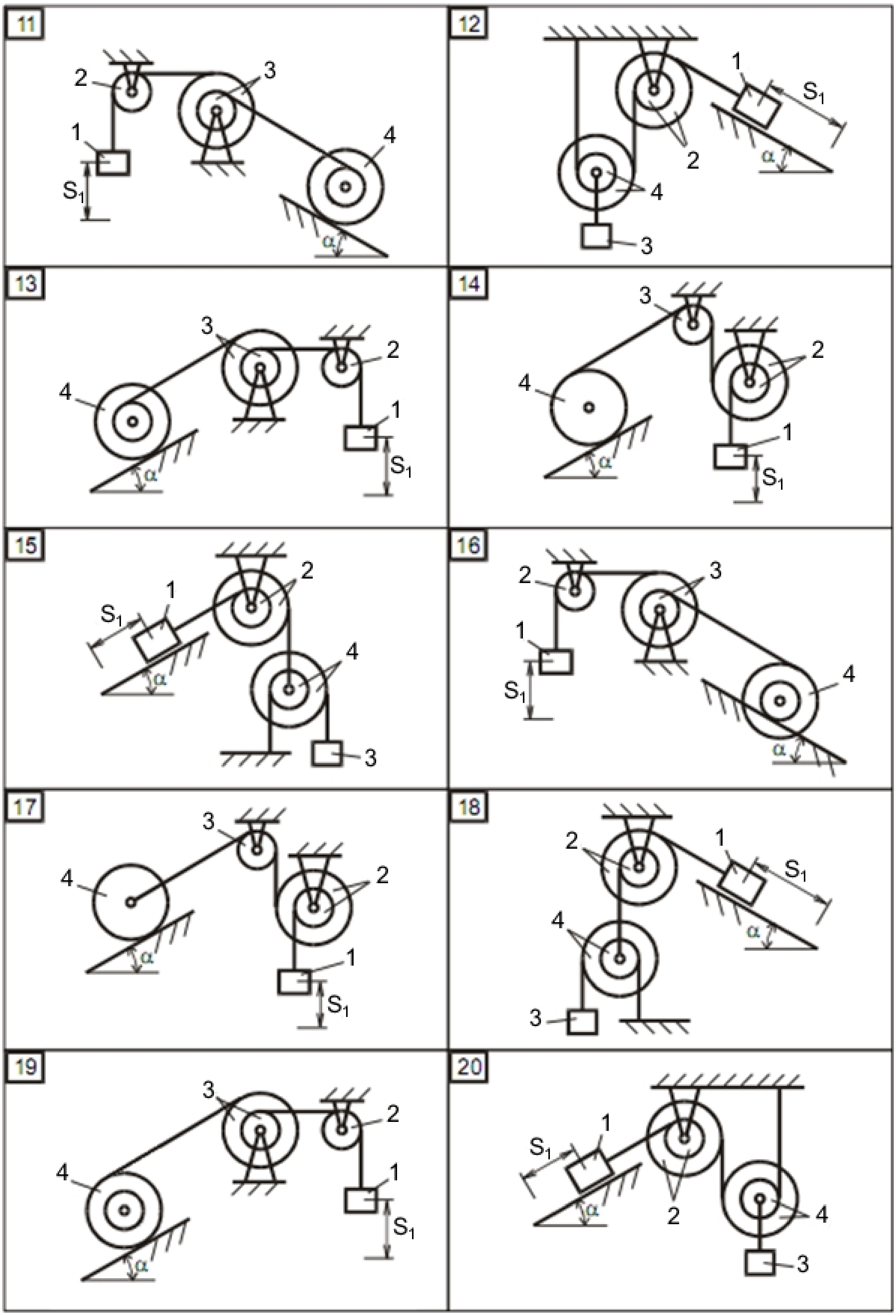


Рис. 66. Схемы к заданиям (11-20)

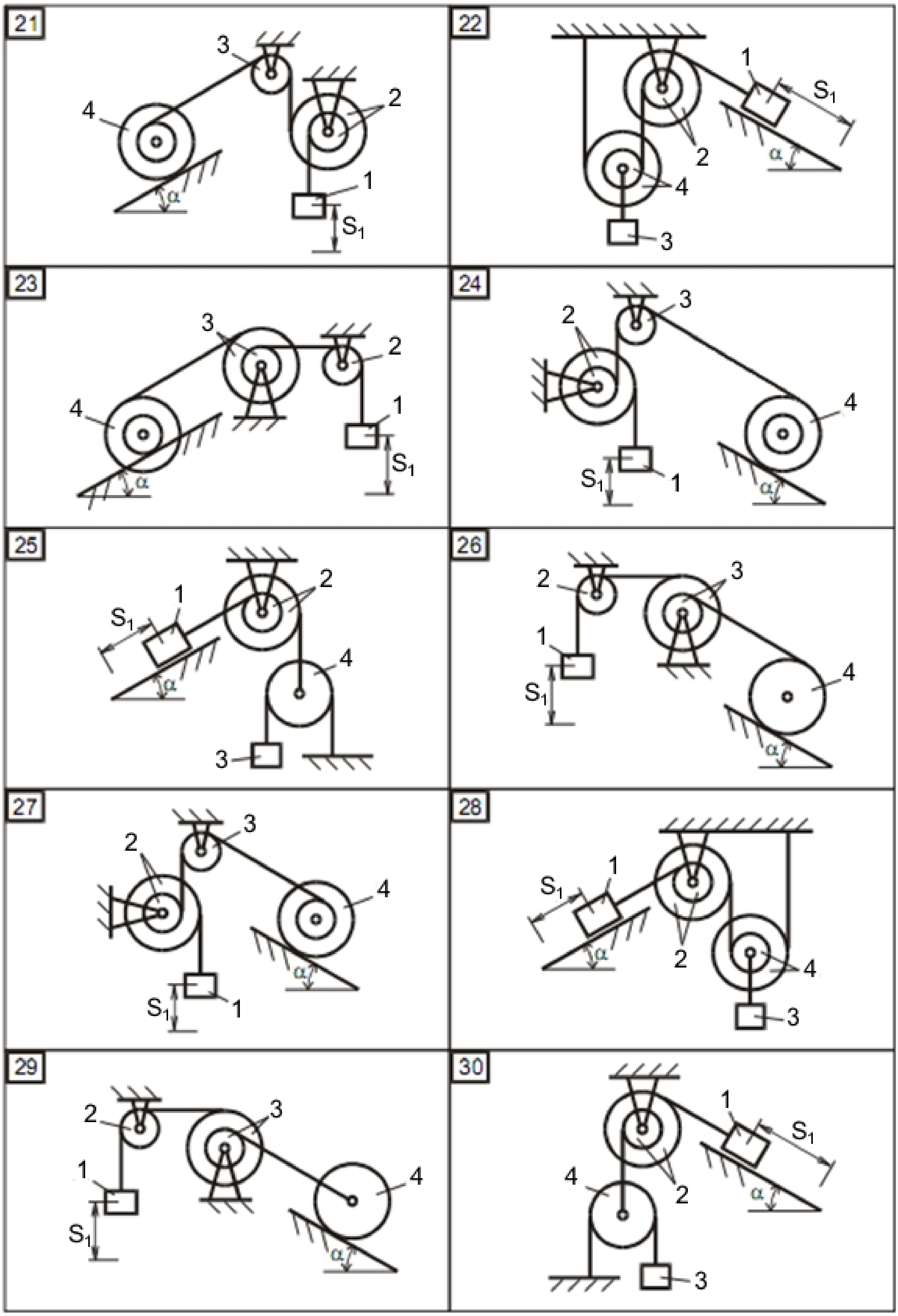


Рис. 67. Схемы к заданиям (21-30)

3.2.10. Контрольные задания по теме: «Теорема об изменении кинетической энергии системы»

3.2.10.1. Контрольные вопросы

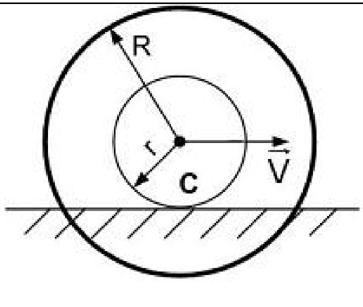
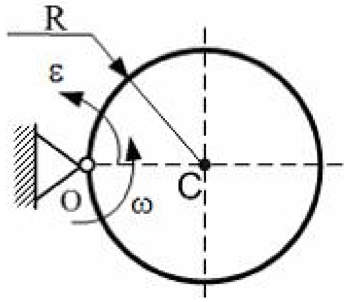
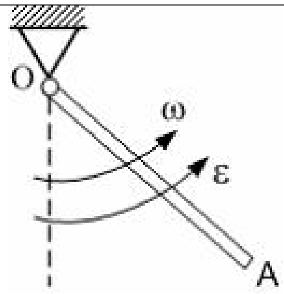
1. Дайте определение кинетической энергии.
2. Запишите формулу кинетической энергии материальной точки и механической системы.
3. Сформулируйте теорему Кёнига.
4. Запишите формулу кинетической энергии твердого тела при поступательном движении.
5. Запишите формулу кинетической энергии твердого тела при вращательном движении.
6. Запишите формулу кинетической энергии твердого тела при плоскопараллельном движении.
7. Что называют моментом инерции тела (системы) относительно данной оси?
8. Запишите формулу момента инерции для тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости тела.
9. Запишите формулу момента инерции для тонкого круглого однородного кольца относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости тела.
10. Запишите формулу момента инерции для круглой пластины относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости тела.
11. Запишите формулу момента инерции для однородного цилиндра относительно его оси.
12. Запишите формулу работы постоянной (по величине и направлению силы) $\bar{F}$ на прямолинейном перемещении S.
13. Запишите формулу работы силы тяжести $\bar{P}$.
14. Запишите формулу работы пары сил с постоянным по величине моментом M.
15. Запишите формулу работы постоянной силы трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$.
16. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме.
17. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме.
18. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме.
19. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

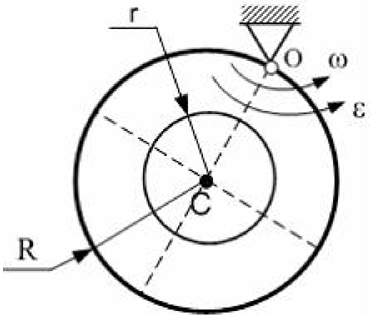
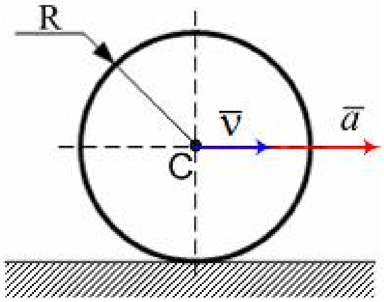
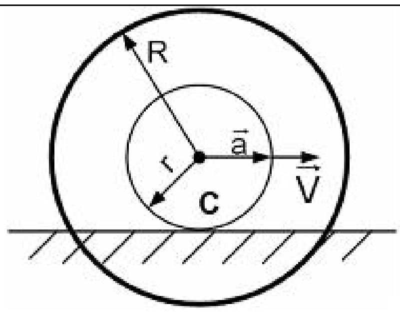
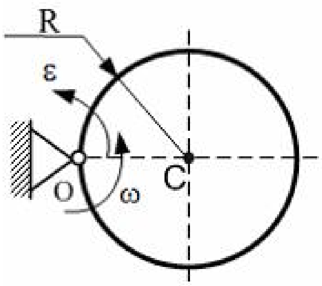
20. Понятие мощности.
21. Теорема Штейнера-Гюйгенса.
22. Элементарная работа силы в скалярной форме.
23. Элементарная работа силы в векторной форме.
24. Элементарная работа силы в аналитической форме.
25. Конечная работа силы в скалярной форме.
26. Конечная работа силы в векторной форме.
27. Конечная работа силы в аналитической форме.

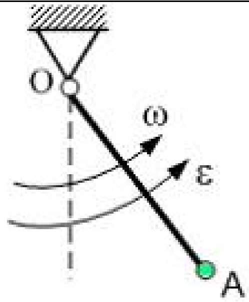
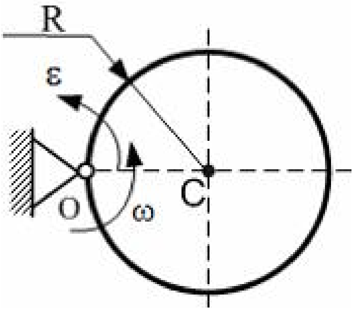
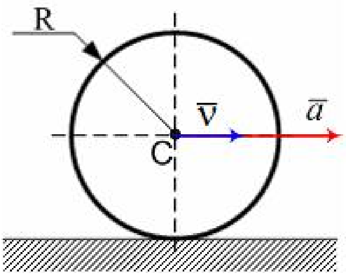
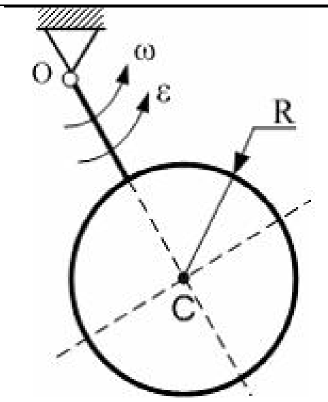
3.2.10.2.2. Задания для самостоятельной работы

Таблица 7

Варианты тестовых заданий

№	Условие	Схема	Варианты ответов (выберите один правильный ответ из списка предложенных)
1	Ступенчатое колесо радиусом R , масса которого m равномерно распределена по окружности радиусом R, катится по прямолинейному горизонтальному рельсу, касаясь рельса ободом радиусом r $(R=2\ r)$, имея в точке C скорость $\vec{V}$. Кинетическая энергия тела равна …	 Рис. 68. Иллюстрация к заданию 1	1) $\frac{3mV^2}{2}$; 2) $\frac{5mV^2}{2}$; 3) $\frac{3mV^2}{4}$; 4) $\frac{5mV^2}{4}$.
2	Колесо радиусом R, масса которого m равномерно распределена по окружности, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости колеса, с угловой скоростью ω . Кинетическая энергия колеса равна …	 Рис. 69. Иллюстрация к заданию 2	1) $\frac{3m\omega^2R^2}{4}$; 2) $m\omega^2R^2$; 3) $\frac{m\omega^2R^2}{2}$; 4) $\frac{m\omega^2R^2}{4}$.
3	Однородный стержень длиной l и массой m вращается относительно оси, проходящей через его конец O перпендикулярно ему, с угловой скоростью ω . Кинетическая энергия стержня равна …	 Рис. 70. Иллюстрация к заданию 3	1) $\frac{m\omega^2l^2}{6}$; 2) $m\omega^2l^2$; 3) $\frac{m\omega^2l^2}{2}$; 4) $\frac{m\omega^2l^2}{3}$.

4	Диск радиусом R и массой m, которая распределена по окружности радиусом r $(R=2r)$, вращается относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости диска, с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия диска равна …	 Рис. 71. Иллюстрация к заданию 4	1) $\frac{3m\omega^2R^2}{4}$; 2) $\frac{5m\omega^2R^2}{4}$; 3) $\frac{5m\omega^2R^2}{8}$; 4) $\frac{3m\omega^2R^2}{8}$.
5	Колесо радиусом R, масса которого m равномерно распределена по окружности, катится по горизонтальной плоскости, имея в точке C скорость $\vec{V}$. Кинетическая энергия колеса равна …	 Рис. 72. Иллюстрация к заданию 5	1) $\frac{mV^2}{2}$; 2) mV^2; 3) $\frac{3mV^2}{4}$; 4) $\frac{mV^2}{4}$.
6	Ступенчатое колесо радиусом R, масса которого m равномерно распределена по окружности радиусом R, катится по прямолинейному горизонтальному рельсу без проскальзывания, касаясь рельса ободом радиуса r $(R=3r)$, имея скорость в центре масс $\vec{V}$. Кинетическая энергия тела равна …	 Рис. 73. Иллюстрация к заданию 6	1) $\frac{3mV^2}{2}$; 2) $5mV^2$; 3) $\frac{5mV^2}{2}$; 4) $3mV^2$.
7	Колесо радиусом R, масса которого m равномерно распределена по окружности, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости колеса, с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия колеса равна …	 Рис. 74. Иллюстрация к заданию 7	1) $\frac{3m\omega^2R^2}{4}$; 2) $m\omega^2R^2$; 3) $\frac{m\omega^2R^2}{4}$; 4) $\frac{m\omega^2R^2}{2}$.

8	Груз *A* массой *m* прикреплен к невесомому стержню *OA* длиной *l* и вращается относительно оси, проходящей через конец *O* стержня перпендикулярно ему, с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия груза равна …	Рис. 75. Иллюстрация к заданию 8	1) $\frac{m\omega^2 l^2}{6}$; 2) $m\omega^2 l^2$; 3) $\frac{m\omega^2 l^2}{2}$; 4) $\frac{m\omega^2 l^2}{3}$.
9	Однородный диск радиусом *R* и массой *m* вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *O* и перпендикулярной плоскости колеса, с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия колеса равна …	Рис. 76. Иллюстрация к заданию 9	1) $\frac{3m\omega^2 R^2}{4}$; 2) $m\omega^2 R^2$; 3) $\frac{m\omega^2 R^2}{4}$; 4) $\frac{m\omega^2 R^2}{2}$.
10	Однородный диск радиусом *R* и массой *m* катится по горизонтальной плоскости, имея в точке *C* скорость $\vec{V}$. Кинетическая энергия колеса равна …	Рис. 77. Иллюстрация к заданию 10	1) $\frac{mV^2}{2}$; 2) mV^2; 3) $\frac{3mV^2}{4}$; 4) $\frac{mV^2}{4}$.
11	Диск радиусом *R* и массой *m*, которая равномерно распределена по его ободу, жестко соединен со стержнем длиной *l* = *R*, который вращается относительно оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости диска, с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия диска равна …	Рис. 78. Иллюстрация к заданию 11	1) $\frac{5m\omega^2 R^2}{4}$; 2) $\frac{3m\omega^2 R^2}{4}$; 3) $\frac{3m\omega^2 R^2}{2}$; 4) $\frac{5m\omega^2 R^2}{2}$.

3.2.10.2. Задания для контрольной работы

Задача 1

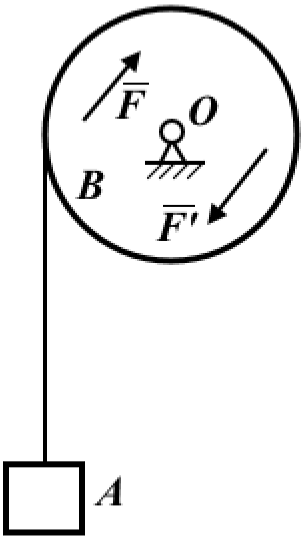


Рис. 79. Иллюстрация к задаче 1

Груз A весом P поднимается при помощи троса, навитого на цилиндрический барабан B радиусом R и весом Q с горизонтальной осью вращения O. На барабан действует пара сил (F, F') с постоянным моментом m, расположенная в плоскости, перпендикулярной к оси барабана. В начальный момент груз и барабан находились в покое. Пренебрегая весом троса и его деформацией, а также трением на оси барабана, считая массу барабана равномерно распределенной по ободу, определите ускорение и скорость груза после того, как он поднимется на высоту h.

Произведите вычисления, положив: P = 2 *кН*, Q = 0,5 *кН*, m = 3 *кНм*, R = 0,5 *м*, h = 10 *м*.

Задача 2

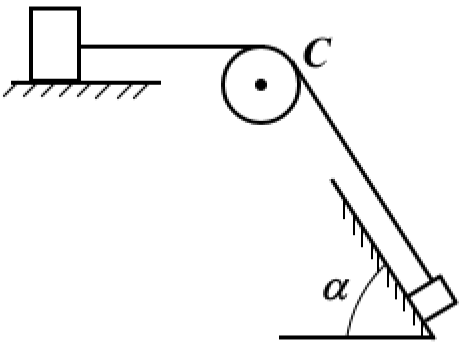


Рис. 80. Иллюстрация к задаче 2

Два груза весом P = 100 *Н* каждый соединены тросом, переброшенным через неподвижный блок C весом Q = 50 *Н*. Первый груз лежит на шероховатой горизонтальной плоскости, а второй на шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$. Коэффициенты трения грузов о плоскости одинаковы f = 0,2. В начальный момент грузы покоились.

Пренебрегая весом троса, его растяжением, а также трением на оси блока, определите ускорение и скорость грузов после того, как они пройдут расстояние s = 1 *м*. Блок считать однородным цилиндром.

Задача 3

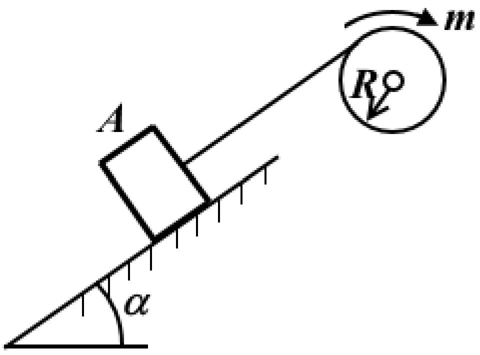


Рис. 81. Иллюстрация к задаче 3

Груз A весом P поднимается по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона при помощи троса, навитого на барабан радиусом R и весом Q, к которому приложен постоянный вращающий момент m. Коэффициент трения груза о плоскость равен f.

Пренебрегая весом троса, его растяжением, а также трением на оси барабана, определите ускорение груза и скорость его после того, как он пройдет из состояния покоя путь s по наклонной плоскости.

Барабан считать однородным цилиндром.

Произведите вычисления, положив: P = 1 *кН*, Q = 0,5 *кН*, m = *0,5 кНм*, f = 0,2, R = 20 *см*, s = 10 *м*, α = 45°.

Задача 4

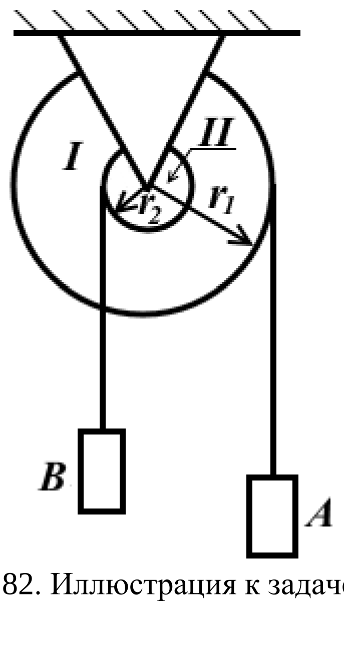


Рис. 82. Иллюстрация к задаче 4

Два груза A и B весом P каждый, подвешенные при помощи тросов к барабанам I и II радиусов r_1 и r_2, насаженных на общую ось, движутся под действием сил тяжести.

Считая барабаны сплошными цилиндрами весов P_1 и P_2, пренебрегая весами тросов, их деформацией, а также трением на оси барабанов, определите угловое ускорение барабанов и угловую скорость их после того, как груз B поднимается из состояния покоя на высоту h.

Произведите вычисления, положив: P = 100 *Н*, P_1 = 60 *Н*, P_2 = 50 *Н*, r_1 = 10 *см*, r_2 = 8 *см*, h =50*см*.

Задача 5

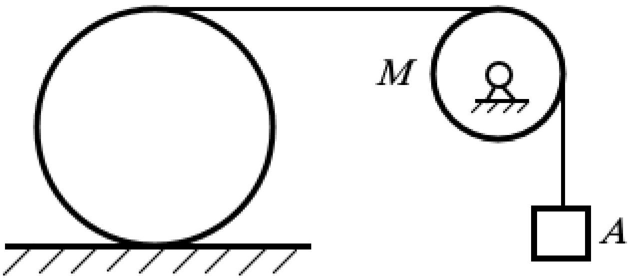


Рис. 83. Иллюстрация к задаче 5

Однородный круглый цилиндр весом P обмотан тросом, к свободному концу которого, перекинутому через блок M, привязан груз A весом Q. В начальный момент система находилась в покое.

Пренебрегая массами троса и блока, считая, что цилиндр катится по горизонтальной плоскости без скольжения, определите ускорение груза и скорость его после того, как он опустится на высоту h. Произведите вычисления, положив: P = 800 *Н*, Q = 200 *Н*, h = 2 *м*.

Задача 6

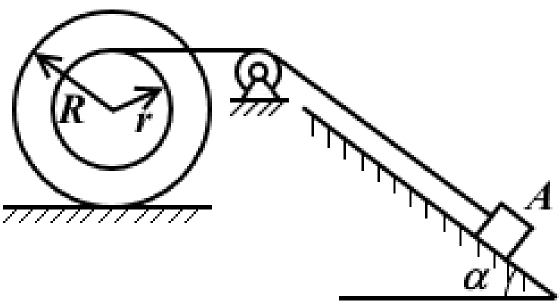


Рис. 84. Иллюстрация к задаче 6

Круглый цилиндр радиусом R и весом P, имеющий радиус инерции $r_и$ относительно геометрической оси, снабжен зубцами и может катиться без скольжения по горизонтальной зубчатой рейке.

На шейку, радиус которой r, намотан трос, перекинутый через блок; к концу троса привязан груз A весом Q, опускающийся по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α. В начальный момент система неподвижна. Пренебрегая массой троса, массой блока и трением на оси его, определите ускорение груза и скорость его после того, как он опустится на высоту h. Произведите вычисления, положив: P = 1 *кН*, Q = 0,2 *кН*, R = 0,6 *м*, r = 0,3 *м*, $r_и$ = 0,4 *м*, α = 60°, h = 10 *м*.

Задача 7

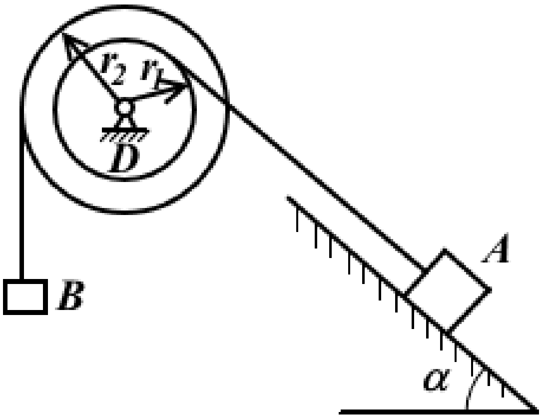


Рис. 85. Иллюстрация к задаче 7

Груз A весом P_1 поднимается по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α при помощи противовеса B весом P_2. Жестко соединенные барабаны C и D имеют радиусы r_1 и r_2. Общий вес барабанов Q, радиус инерции их относительно оси вращения $r_и$. Коэффициент трения между грузом A и наклонной плоскостью f.

Пренебрегая весами и деформациями тросов, а также трением на оси барабанов, определите скорость и ускорение противовеса B после того, как он опустится из состояния покоя на высоту h.

Произведите вычисления, положив: $P_1 = 600$ *Н*, $P_2 = 200$ *Н*, Q = 200 *Н*, $f = 0{,}1$, $r_1 = 0{,}5$ *м*, $r_2 = 1$ *м*, $r_и = 0{,}7$ *м*, $h = 5$ *м*, $\alpha = 30^o$.

Задача 8

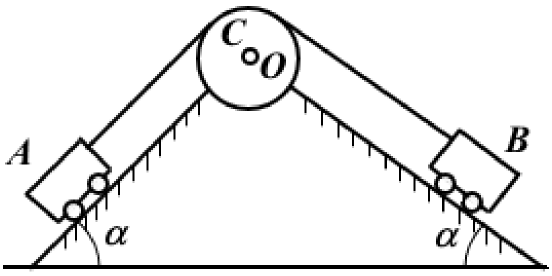


Рис. 86. Иллюстрация к задаче 8

Груженная углем вагонетка A скатывается по наклонной плоскости с углом наклона α, поднимая при помощи троса порожнюю такую же вагонетку B, движущуюся по наклонной плоскости с углом наклона α.

Трос переброшен через блок C, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Вес кузова каждой вагонетки P, вес каждого из колес Q, вес угля в вагонетке P_1. В начальный момент вагонетки были неподвижны. Пренебрегая деформацией троса, весами его и блока C, определите скорости и ускорения кузовов после того, как они пройдут путь S. Колеса считать однородными цилиндрами, катящимися без скольжения. Произведите вычисления, положив: $P = 5$ *кН*, Q = 0,4 *кН*, $P_1 = 10$ *кН*, $S = 50$ *м*, $\alpha = 45^o$.

Задача 9

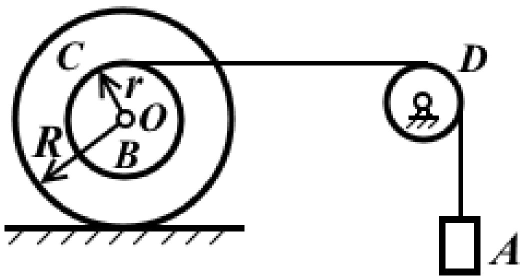


Рис. 87. Иллюстрация к задаче 9

Груз A весом P посредством троса, переброшенного через неподвижный блок D и навитого на барабан B, заставляет колесо C катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Барабан B радиусом r жестко связан с колесом C, радиус которого R; их общий вес Q, а радиус инерции относительно горизонтальной оси O равен $r_и$.

Пренебрегая весом троса, его деформацией, а также весом блока и трением на оси блока, определите ускорение груза и скорость его после того, как он из состояния покоя опустится на высоту h. Произведите вычисления, положив: $P = 20$ *Н*, $Q=100$ *Н*, $R = 0,5$ *м*, $r = 0,25$ *м*, $r_и = 0,4$ *м*, $h = 2$ *м*.

Задача 10

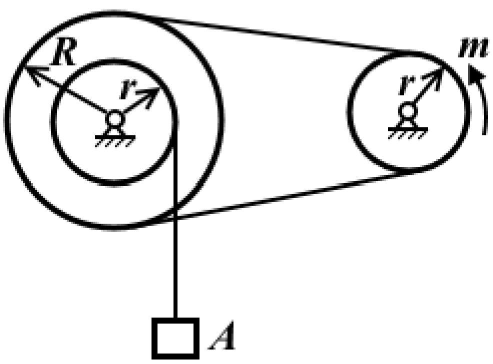


Рис. 88. Иллюстрация к задаче 10

Груз A весом P поднимается при помощи троса, навитого на вал радиуса r. С валом жестко соединен шкив радиусом R. Подъем груза осуществляется с помощью цепной передачи к малому шкиву радиусом r, к которому приложен постоянный вращающий момент m. Вес большого шкива вместе с валом P_1, радиус инерции его относительно оси вращения $r_и$, вес малого шкива P_2, масса его распределена равномерно по ободу.

Пренебрегая весом цепи и троса, а также трением в подшипниках, определите ускорение груза и скорость его после того, как он из состояния покоя поднимется на высоту h. Произведите вычисления, положив: $P = 10$ *кН*, $P_1 = 2$ *кН*, $P_2 = 1$ *кН*, $m = 1$ *кНм*, $R = 1$ *м*, $r = 0,25$ *м*, $r_и = 0,6$ *м*, $h = 2$ *м*.

Задача 11

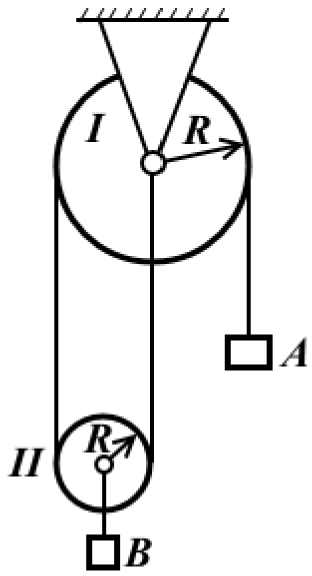


Рис. 89. Иллюстрация к задаче 11

Груз *А* весом *Р* с помощью блоков I и II поднимает груз *В* весом *Q*. Блок I радиусом *R* весит P_1, блок II радиусом *R*/2 весит P_2; оба блока считать однородными дисками.

Пренебрегая деформацией и весом троса, а также сопротивлениями, определите скорость и ускорение груза *А* после того, как он из состояния покоя опустится на высоту *h*. Произведите вычисления, положив: $P = 200$ *Н*, Q = 300 *Н*, $P_1 = 20$ *Н*, $P_2 = 10$ *Н*, $R = 0{,}5$ *м*, $h = 2$ *м*.

Задача 12

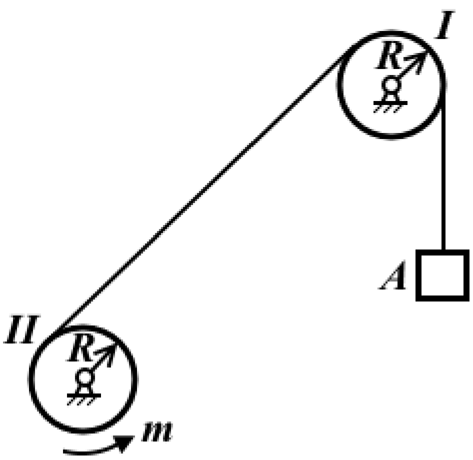


Рис. 90. Иллюстрация к задаче 12

Груз *А* весом *Р* поднимается с помощью троса, перекинутого через барабан I и навивающегося на барабан II. Радиусы барабанов одинаковы и равны *R*; веса их P_1 и P_2, массы равномерно распределены по ободу. К барабану II приложен постоянный момент *m*.

Пренебрегая деформацией и весом троса, а также сопротивлениями, определите скорость и ускорение груза *А* после того, как он из состояния покоя поднимется на высоту *h*.

Произведите вычисления, положив: $P = 500$ *Н*, $P_1 = 100$ *Н*, $P_2 = 300$ *Н*, $m = 300$ *Нм*, $R = 0{,}5$ *м*, $h = 2$ *м*.

Задача 13

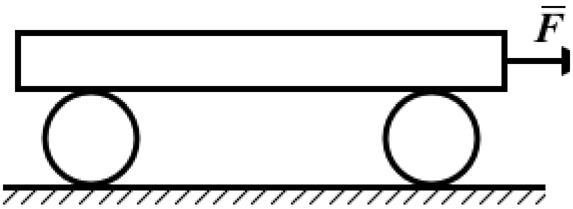


Рис. 91. Иллюстрация к задаче 13

Стержень весом P лежит на двух однородных цилиндрических катках весом Q каждый. На стержень действует горизонтальная сила F. Пренебрегая скольжением между стержнем и катками, а также между катками и горизонтальной плоскостью, определите ускорение стержня и его скорость после того, как он из состояния покоя пройдет путь S. Произведите вычисления, положив: P = 600 *Н*, Q = 100 *Н*, F =225 *Н*, S =2 *м*.

Задача 14

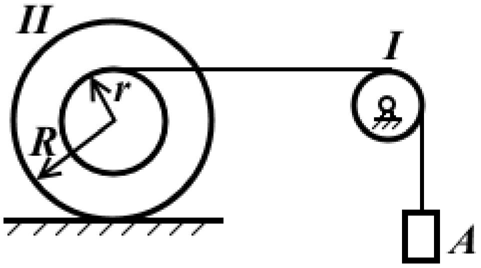


Рис. 92. Иллюстрация к задаче 14

Груз A весом P посредством троса, перекинутого через неподвижный блок I и навитого на шейку барабана II, заставляет барабан без скольжения катиться по горизонтальной плоскости.

Вес барабана Q, радиус инерции его относительно геометрической оси $r_и$; радиус барабана R, радиус шейки r.

Пренебрегая деформацией троса, весом его и блока, а также трением в подшипнике, определите скорось и ускорение груза после того, как он из состояния покоя опустится на высоту h. Произведите вычисления, положив: P = 100 *Н*, Q = 50 *Н*, R = 1 *м*, r = 0,5 *м*, $r_и$ = 0,6 *м*, h = 1 *м*.

Задача 15

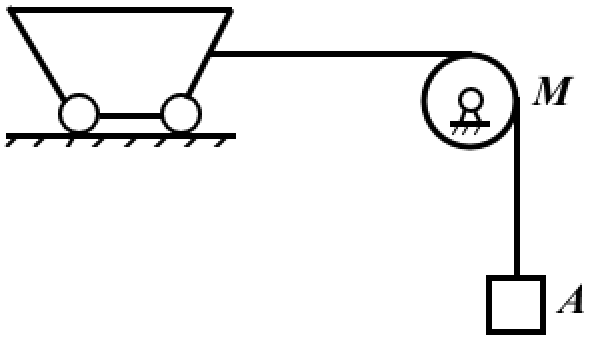


Рис. 93. Иллюстрация к задаче 15

Вагонетка, кузов которой весит P, а каждое из четырех колес – Q, приводится в движение при помощи перекинутого через блок M троса, к концу которого прикреплен груз A весом P_1.

Пренебрегая весом блока и троса, а также трением в подшипниках, определите скорость и ускорение кузова после того, как он пройдет путь S.

Колеса считать однородными дисками, катящимися без скольжения по рельсам. Произведите вычисления, положив: P = 2 *кН*, Q = 0,3 *кН*, P_1 = 0,5 *кн*, S = 10 *м*.

Задача 16

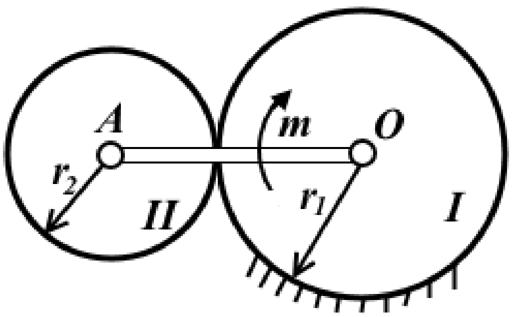


Рис. 94. Иллюстрация к задаче 16

Эпициклический зубчатый механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента m, приложенного к кривошипу OA. Вес кривошипа Q, вес колеса I равен P. В начальный момент система покоилась.

Считая колесо II однородным диском радиуса r_2, а кривошип однородным стержнем, определите угловую скорость и угловое ускорение кривошипа после того, как он сделает N оборотов. Произведите вычисления, положив: P = 10 *Н*, Q = 5 *Н*, m = 3 *кг*, r_2 = 10 *см*, r_1 = 20 *см*, N = 10 *обор*.

Задача 17

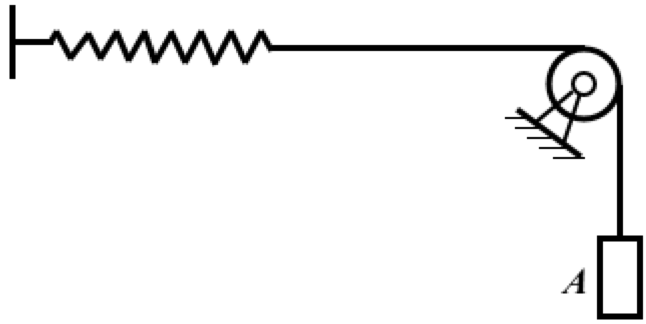


Рис. 95. Иллюстрация к задаче 17

Груз A весом P привязан к концу троса, перекинутого через неподвижный блок весом Q. Другой конец троса прикреплен к пружине жесткости c. В начальный момент система находится в покое, пружина имеет натуральную длину.

Пренебрегая деформацией и весом троса, а также сопротивлениями, определите скорость и ускорение груза после того, как он опустится на высоту h. Блок считать однородным цилиндром. Произведите вычисления, положив: P = 50 *Н*, Q = 20 *Н*, c = 2 *н/см*, h = 10 *см*.

Задача 18

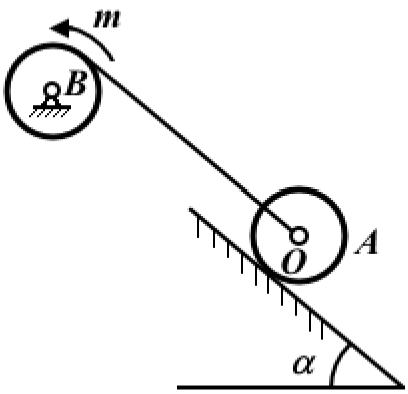


Рис. 96. Иллюстрация к задаче 18

Однородный диск A радиусом R и весом P с помощью троса, привязанного к центру O диска и намотанного на вал B весом Q, катится без скольжения по наклонной плоскости с углом наклона α. К валу приложен постоянный вращающий момент m.

Пренебрегая трением в подшипниках, деформацией и весом троса, определите скорость и ускорение центра диска после того, как из состояния покоя пройдет по наклонной плоскости путь S.

Вал считать однородным цилиндром радиусом R.

Произведите вычисления, положив: P = 300 *Н*, Q = 100 *Н*, m = 200 *Нм*, S = 10 *м*, R =0,5 *м*, α = 30°.

Задача 19

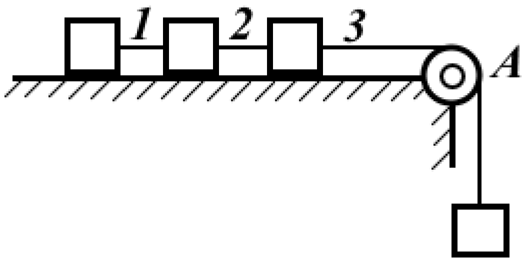


Рис. 97. Иллюстрация к задаче 19

Четыре груза весом P = 50 H каждый соединены гибкой нерастяжимой и невесомой нитью, перекинутый через блок A. Три груза скользят по шероховатой горизонтальной плоскости, четвертый опускается по вертикали.

Принимая коэффициент трения между грузами и плоскостью равным f = 0,2, пренебрегая массой блока и трением на оси его, определите скорости и ускорения грузов в тот момент времени, когда они из состояния покоя пройдут путь S = 10 м.

Задача 20

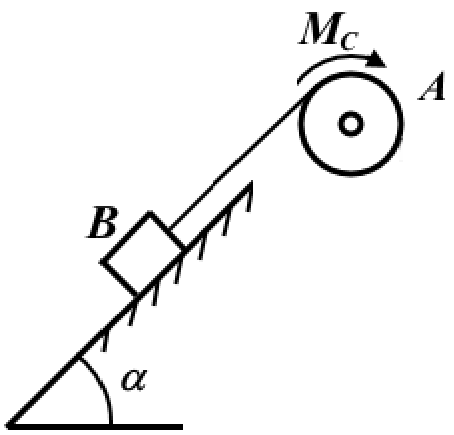


Рис. 98. Иллюстрация к задаче 20

На однородный цилиндрический вал A радиусом R и весом P навит гибкий нерастяжимый и невесомый трос, к концу которого привязан груз B весом Q. Груз скользит по гладкой наклонной плоскости с углом α и приводит во вращение вал. Момент сил сопротивления постоянен и равен $M_с$.

Определите скорость и ускорение груза в тот момент времени, когда он из состояния покоя пройдет путь S, равный 5 м.

Произведите вычисления, положив: P = 5 $кН$, Q = 0,5 $кН$, $M_с$ = 20 $Нм$, R = 40 $см$, α = 30°.

Задача 21

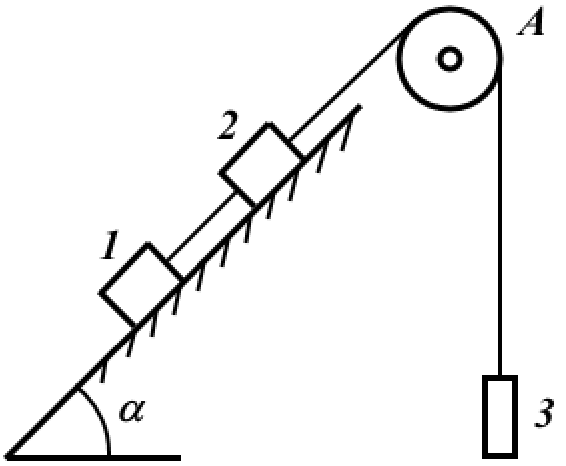


Рис. 99. Иллюстрация к задаче 21

Два груза весом P каждый поднимаются по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, третьим грузом весом $2P$ с помощью гибкой нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через блок A. Коэффициент трения между грузами и плоскостью f.

Пренебрегая весом блока и трением на оси его, определите скорости и ускорения грузов в тот момент времени, когда они из состояния покоя пройдут путь S = 2 м.

Произведите вычисления, положив: P = 20 H, f = 0,1, α = 30°.

Задача 22

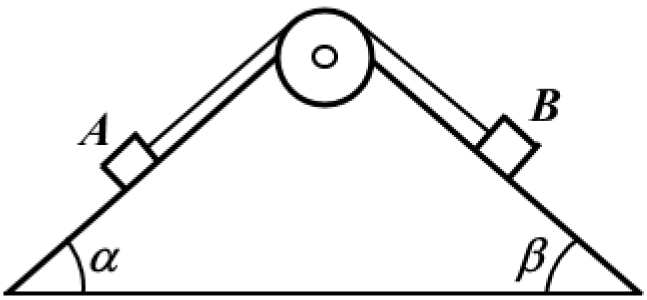


Рис. 100. Иллюстрация к задаче 22

Два тела A и B весом P_1 и P_2, привязанные к концам гибкой нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через блок, могут скользить по граням неподвижной призмы с углами α и β ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$). Коэффициент трения между телами и призмой f.

Пренебрегая весом блока и трением на оси его, определите скорость и ускорение груза A в тот момент времени, когда он из состояния покоя пройдет путь, равный S = 5 м.

Произведите вычисления, положив: $P_1 = P_2$ = 100 H, f = 0,2, α = 30°.

Задача 23

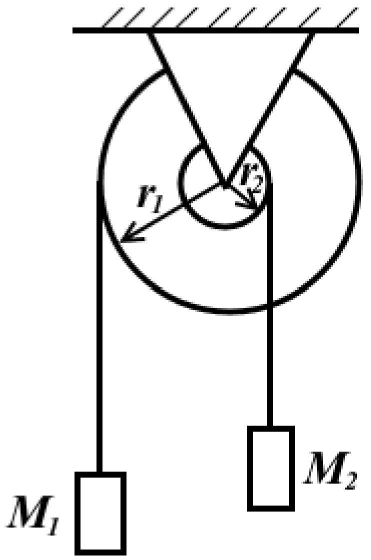


Рис. 101. Иллюстрация к задаче 23

Два груза M_1 и M_2 весом P_1 и P_2 подвешены при помощи гибких нерастяжимых и невесомых нитей, навитых на барабаны радиусов r_1 и r_2 ступенчатого блока.

Пренебрегая весом барабанов и трением на оси, определите скорость и ускорение груза M_1 в тот момент времени, когда он опустится на расстояние h из состояния покоя.

Произведите вычисления, положив: $P_1 = 50$ Н; $P_2 = 10$ Н; $r_1 = 2r_2 = 10$ см.

Задача 24

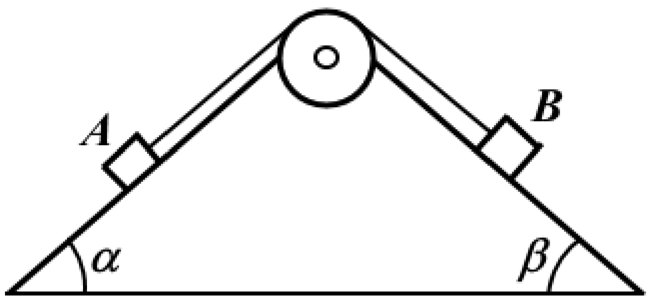


Рис. 102. Иллюстрация к задаче 24

Два тела A и B весом P_1 и P_2 (P_1=2P_2), привязанные к концам гибкой нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через блок, могут скользить по граням неподвижной призмы с углами α и β ($\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$). Коэффициент трения между телами и призмой f.

Пренебрегая весом блока и трением на оси его, определите скорость и ускорение груза A в тот момент времени, когда он из состояния покоя пройдет путь, равный S.

Задача 25

Груз 1 массой m_1 прикреплен к нити, переброшенной через неподвижный блок 2 массой m_2, перемещается вниз по гладкой наклонной плоскости под действием силы тяжести и силы F=0,2m_1g.

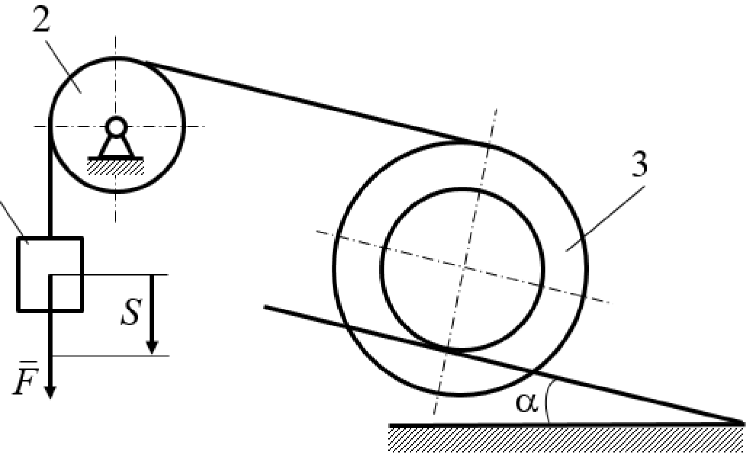


Рис. 103. Иллюстрация к задаче 25

Каток 3 массой m_3 приводится в движение нитью, навитой на блок. Пренебрегая трением на оси блока, скольжением катка при качении и нити по ободу блока и катка, определите скорость и ускорение груза в тот момент, когда он из состояния покоя пройдет путь S=2 м. Произведите вычисления, приняв массы тел m_1=50 кг, m_2=25 кг, m_3=40 кг, радиусы R_3=40 см, r_3=25 см, радиус инерции ρ_3=25 см, α=30^0. Одноступенчатый блок и каток считать сплошными однородными цилиндрами.

Задача 26

Груз 1 массой m_1 прикреплен к нити, переброшенной через неподвижный блок 2 массой m_2, перемещается вниз по гладкой наклонной плоскости под действием силы тяжести и силы F=0,5m_1g. Каток 3 массой m_3 приводится в движение нитью, навитой на блок. Пренебрегая трением на оси блока, скольжением катка при качении и нити по ободу блока и катка, определите скорость и ускорение груза в тот момент, когда он из состояния покоя пройдет путь S=2 м. Произведите вычисления, приняв массы тел m_1=50 кг, m_2=25 кг, m_3=40 кг, радиусы R_3=40 см, r_3=25 см, радиус инерции ρ_3=25 см. Одноступенчатый блок и каток считать сплошными однородными цилиндрами.

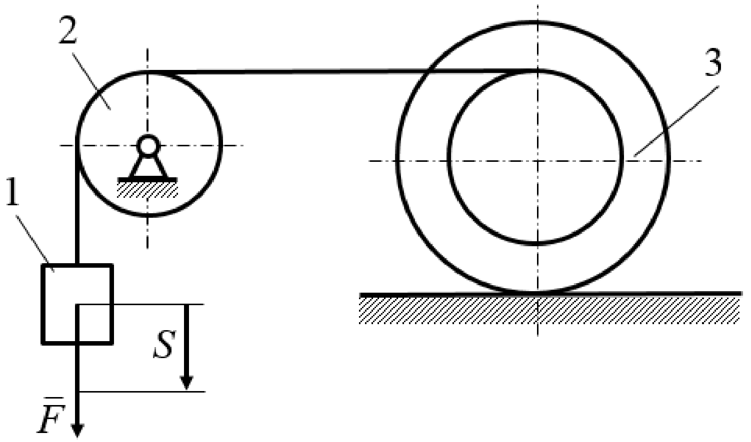


Рис. 104. Иллюстрация к задаче 26

Задача 27

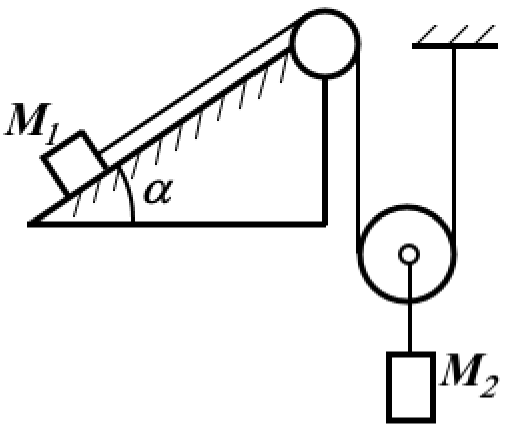


Рис. 105. Иллюстрация к задаче 27

Груз M_1 весом P_1 опускается по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α и поднимает при помощи подвижного блока груз M_2 весом P_2.

Пренебрегая деформацией нити, весом её блоков, определите скорость и ускорение груза M_1 в тот момент времени, когда он из состояния покоя пройдет путь, равный 10 м.

Произведите вычисления, положив:

P_1=500 *Н*, P_2 = 400 *Н*, α = 30°.

Задача 28

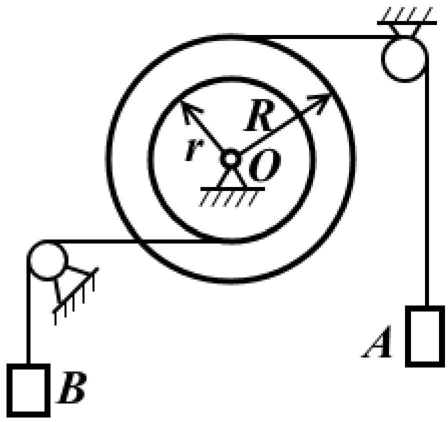


Рис. 106. Иллюстрация к задаче 28

На ступенчатый шкив, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O, навернуты два каната, перекинутые через неподвижные блоки и несущие на концах грузы A и B весом P_1 и P_2 соответственно. Радиусы R и r и момент инерции I_c шкива относительно оси вращения известны.

Пренебрегая массой канатов и блоков, определите угловую скорость и угловое ускорение шкива в тот момент времени, когда груз A опустится вниз из состояния покоя на величину h.

Задача 29

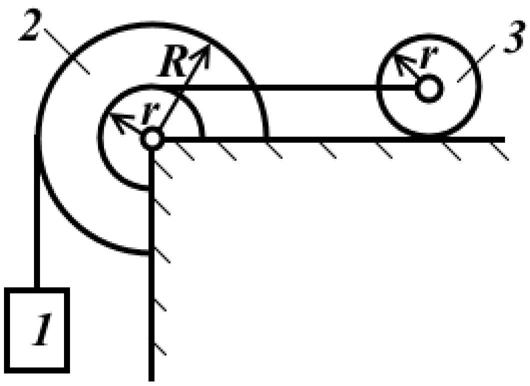


Рис. 107. Иллюстрация к задаче 29

В механической системе, представленной на схеме, груз 1, ступенчатый барабан 2 и каток 3 имеют соответственно массы m_1, m_2 и m_3. Радиусы ступеней барабана r и $R = 2r$. Радиус инерции ступенчатого барабана $\rho_и = r\sqrt{2}$. Каток 3 считать однородным цилиндром. Определите скорость и ускорение груза в тот момент времени, когда он из состояния покоя пройдет путь, равный S.

Задача30

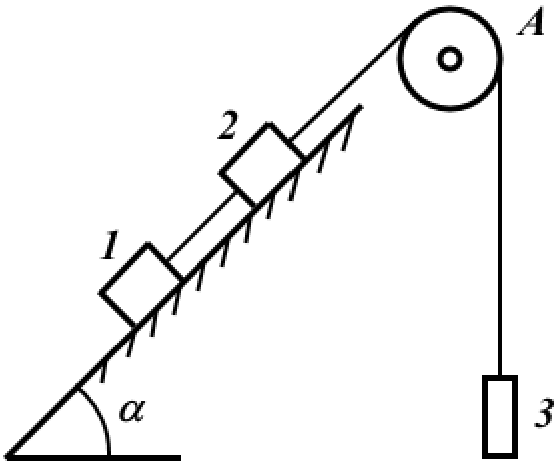


Рис. 108. Иллюстрация к задаче 30

Два груза весом P каждый поднимаются по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, третьим грузом весом $2P$ с помощью гибкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок A. Пренебрегая весом блока и трением на оси его, определите скорость и ускорение груза 3 в тот момент времени, когда он опустится вниз из состояния покоя на величину S.

Заключение

Роль и место теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Усвоение теоретической механики усложняется тем, что в этой науке существенную роль играет моделирование и математическое представление исследуемых явлений природы. Поэтому при решении инженерных задач студенты зачастую испытывают значительные трудности. Проблему формирования у студентов исследовательского подхода к поставленным задачам по темам раздела «Динамика» курса теоретической механики позволяет решить предлагаемое учебное пособие, содержащее методические рекомендации и примеры решения типовых задач. Освоению и закреплению изложенного материала помогут контрольные вопросы и тестовые задания для самостоятельной работы.

Приложения

Приложение 1. Требования к оформлению расчетно-графических работ

Расчетно-графическая работа оформляется в виде пояснительной записки, выполненной на стандартных листах формата А4 (297x210), пронумерованных и сшитых в тетрадь с плотной обложкой. Записи производятся на одной стороне листа. Все расчеты должны сопровождаться выполненными карандашом схемами с указанием размеров.

Пояснительная записка содержит:

1. Титульный лист (форму и текст – см. Приложение 2). На титульном листе учащийся возле своей фамилии ставит подпись и дату выполнения работы.

2. Исходные данные расчетно-графической работы, взятые строго по варианту, с вычерченной расчетной схемой.

3. Расчет рекомендуется оформлять следующим образом: сначала должна быть написана формула в буквах, затем ту же формулу без всяких алгебраических преобразований записывают в цифрах, после этого пишется результат вычисления.

4. Несоблюдение указанного правила затрудняет чтение и проверку расчета и, кроме того, может привести к ошибке.

Приложение 2. Пример оформления титульного листа

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика и инженерная графика»

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №___

по теоретической механике на тему:

«Теорема об изменении кинетической энергии»

Вариант № ___

Выполнил: студент гр. _______

Фамилия И.О.

Проверил:

Фамилия И.О.

Астрахань, 201_ г.

Библиографический список

1. **Айзенберг, Т. Б.** Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: «Высшая школа», 1965. 420 с.

2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 2. Динамика : учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. СПб. : Лань, 2010. 640 с.

3. **Блохина, А. И.** Расчетно-графические работы по динамике. Методические указания по курсу «Теоретическая механика» для студентов всех специальностей очной и очно-заочной форм обучения / А. И. Блохина, Г. И. Норицына, В. К. Петров. Под ред. Д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С. Моск. Гос. Техн. Ун-т «МАМИ», 2003. 66 с.

4. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики. 2001. 300 с.

5. **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики. Т.1.-1999. 350 с.

6. **Локтев, В. И.** Теоретическая механика: конспект-справочник : учеб. пособие для вузов / В. И. Локтев. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2010. 132с.

7. **Манжосов, В. К.** Задания для самочстоятельной работы по теоертической механике. Динамика / В. К. Манжосов, О. Д. Новикова. Ульяновск : УлГТУ, 2010. 80 с.

8. **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике : учебное пособие для вузов / под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. СПб. : Лань, 2008. 448 с.

9. **Никитин, Е. М.** Краткий курс теоретической механики / Е. М. Никитин. СПб. : Лань, 2010. 720 с.

10. **Сборник** заданий для курсовых работ по теоретической механике / под общ. ред. А. А. Яблонского. М.: Интеграл-Пресс, 2006. 384 с.

11. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С. М. Тарг. М. : Высш. шк., 2004. 416 с.

12. **Теоретическая механика** для студентов ФИТО : Методические указания к решению задач и варианты для самостоятельной работы. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. 115 с.

13. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : Статика. Кинематика. Динамика : учебник для вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. М.: Лань, 2004. – 764 с.

14. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://fepo.ru/

Д 46. Динамика точки и механической системы : учебное пособие / О. А. Хохлова, Е. В. Пономарёва, А. П. Перекрестов, А. В. Хохлов, В. А. Чанчиков; Астраханский государственный технический университет. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2015. 116 с.

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.236.1 я 73